Elméleti összefoglaló:

Teljesítménytétel és munkatétel merev testre:

Tétel: Teljesítménytétel merev testre: $\dot{T} = P$

A tétel alkalmazásához célszerű megkeresni a teljesítménynek és a kinetikus energia deriváltjának a feladatokban jól alkalmazható alakját.

Tétel: Egy merev testre ható erőrendszer teljesítménye

$$P = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \underline{v}_i + \underline{M}\,\underline{\omega}$$

itt $\underline{F}_i$, $i = 1 \dots n$ a merev testre ható n darab külső erőt jelöli, $\underline{v}_i$ az $\underline{F}_i$ erő támadáspontjának sebessége, $\underline{M}$ a testre ható erőpárok eredője, $\underline{\omega}$ pedig a merev test szögsebessége.

Tétel: Merev test kinetikus energiájának idő szerinti deriváltja

$$\dot{T} = \underline{I}\,\underline{a}_s + \underline{\underline{\Pi}}_s \underline{\varepsilon}$$

Merev testekre ugyanúgy érvényes a munkatétel, mint anyagi pontok vagy pontrendszerek esetében, tehát:

$$T(t_2) - T(t_1) = W_{12}$$

Merev testekre is igaz, hogy konzervatív erőtérben a munka kiszámítása lényegesen leegyszerűsödik az általános esethez képest.

Tétel: Egy merev testre ható nehézségi erő potenciális energiája

$$U = mgz_s$$

Síkmozgás dinamikai értelemben:

A dinamika alaptételének alkalmazását jelentősen megkönnyíti, ha a külső erők és nyomatékok iránya is megfelelő, azaz az erőknek csak x és y irányú, a nyomatékoknak pedig csak z irányú komponense van. Az ilyen erőrendszer hatása alatt történő síkmozgást dinamikai értelemben vett síkmozgásnak nevezzük. Ilyenkor a kinetika egyenletei is egyszerűbb alakot öltenek.

A perdülettétel és a kinetikus energia síkmozgásokra érvényes alakja:

A kinematikai értelemben vett síkmozgás során a test pontjai párhuzamos síkokban mozognak, ezekre a síkokra merőleges a szögsebesség vektora is, melynek iránya nem változik a mozgás során. Tegyük fel például, hogy a szögsebesség párhuzamos a z tengely bázisvektorával, azaz $\underline{\omega} \parallel \underline{k}$. Ekkor a perdületvektor általában nem lesz párhuzamos a z tengellyel.

Perdülettétel súlypontra számított mennyiségekkel:

Kinematikai értelemben vett síkmozgás során a súlypontra számított perdület

$$\underline{\Pi}_s = \underline{\underline{\Theta}}_s \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{xz}\omega_z \\ -D_{yz}\omega_z \\ \Theta_z \omega_z \end{bmatrix}$$

Ebben az esetben a perdület deriváltja:

$$\dot{\underline{\Pi}}_s = \underline{\underline{\Theta}}_s \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_s = \begin{bmatrix} -D_{xz}\varepsilon_z \\ -D_{yz}\varepsilon_z \\ \Theta_z \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -D_{xz}\omega_z \\ -D_{yz}\omega_z \\ \Theta_z \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{xz}\varepsilon_z + D_{yz}\omega_z^2 \\ -D_{yz}\varepsilon_z - D_{xz}\omega_z^2 \\ \Theta_z \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Tehát a $\dot{\underline{\Pi}}_s = \underline{M}_s$ egyenletnek továbbra is három nem triviális komponensegyenlete van. Dinamikai értelemben vett síkmozgás esetében azonban a súlypontra számított nyomaték a z tengellyel párhuzamos, tehát

$$\begin{bmatrix} -D_{xz}\varepsilon_z + D_{yz}\omega_z^2 \\ -D_{yz}\varepsilon_z - D_{xz}\omega_z^2 \\ \Theta_z \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Sz} \end{bmatrix}$$

Ez az egyenlet csak akkor teljesülhet a test tartós mozgása során, ha a tehetetlenségi nyomatéki mátrix harmadik oszlopában és sorában szereplő deviációs nyomatékok eltűnnek: $D_{xz} = D_{yz} = 0$.

Ez azzal egyenértékű, hogy a z tengely egy tehetetlenségi főiránnyal párhuzamos. Ebben az esetben a perdületvektor párhuzamos a szögsebességgel, ezért vektoriális szorzatuk nulla. Tehát ekkor a perdület deriváltja is a szögsebességgel és a szöggyorsulással egyező irányú azaz nincs pörgettyűhatás.

<u>Def.</u>: Síkmozgás kinetikai értelemben. Egy test kinetikai értelemben síkmozgást végez, ha pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak és a test egyik súlyponti főtehetetlenségi iránya merőleges erre a síkra. Máshogy: a test kinematikai értelemben síkmozgást végez és a súlypontra számított perdületvektora párhuzamos a szögsebességgel.

A dinamika alaptételének merev testre vonatkozó egyenletei (síkmozgás):

$$m a_{sx} = F_x$$
$$m a_{sy} = F_y$$
$$\Theta_z \varepsilon_z = M_{Sz}$$

Nem szabad elfelejteni, hogy dinamikailag térbeli, de kinematikailag síkbeli mozgásnál során olyan kényszererőknek kell fellépniük, melyeknek csak az eredője jelenik meg az egyenletekben és így a különböző térbeli pontokban ható kényszererők nagyságáról a síkmozgás egyenletei nem adnak információt.

<u>Perdülettétel a merev test tetszőleges pontjára felírva (síkmozgás):</u>

$$\underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{Az}\varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{Az}\omega_z \end{bmatrix}$$

Ezzel:

$$m a_{sx} = F_x$$
$$m a_{sy} = F_y$$
$$\Theta_{Az}\varepsilon_z + m(x_{AS}a_{Ay} - y_{AS}a_{Ax}) = M_{Az}$$

A kinetikus energia kifejezése síkmozgás során:

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \Theta_z \omega_z^2$$

Álló pontra:

$$T = \frac{1}{2} \Theta_{Az} \omega^2$$

Gördülés:

A gördülés kinematikai feltétele:

Def.: Kinematikai értelemben, akkor beszélünk gördülésről, ha az érintkező pontok sebessége megegyezik - tehát álló talajon gördülő test talajjal érintkező pontja nulla sebességű. Ez a gördülés ún. kinematikai feltétele.

A gördülés dinamikai feltétele:

A gördülés kinematikai feltétele csak akkor teljesülhet tartósan, ha a gördülő test és a talaj között ki tud alakulni akkora tapadási súrlódási erő, ami megakadályozza az érintkező pontok relatív elmozdulását. Az $\underline{F}_s$ tapadási súrlódási erő nagyságát a μ_0 tapadási súrlódási tényező korlátozza, az

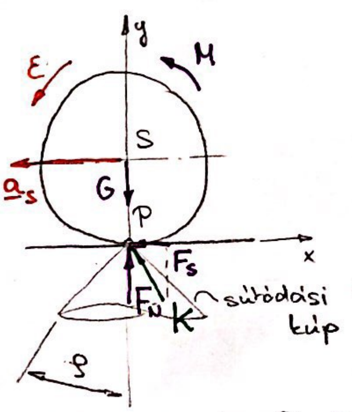
$$|\underline{F}_s| \leq \mu_0 |\underline{F}_N|$$

egyenlőtlenség szerint, ahol $\underline{F}_N$ a két test között ható normálerő.

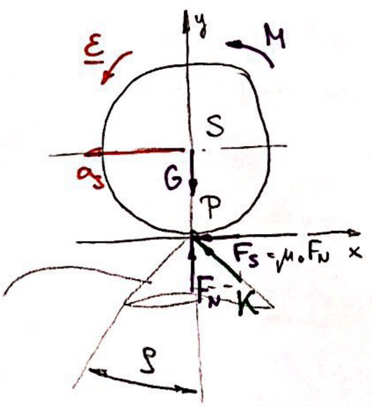
Def.: A gördülés dinamikai feltétele:

$$\frac{|\underline{F}_s|}{|\underline{F}_N|} \leq \mu_0$$

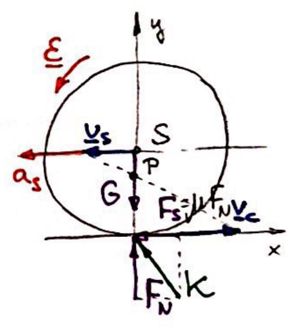
$\rho = \arctan(\mu_0)$



A kúpon belülre esik $\underline{K} = \underline{F}_s + \underline{F}_N$ azaz $F_s \leq \mu_0 F_N$.



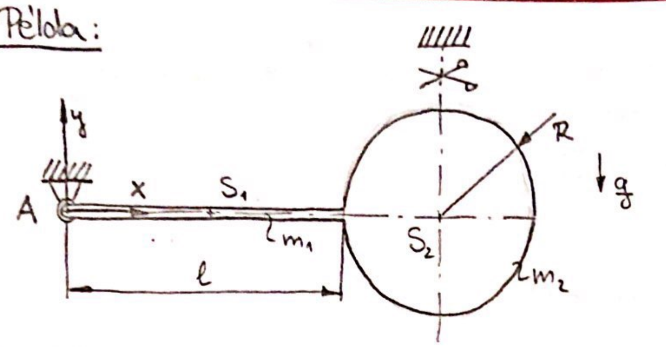
Megcsúszás határhelyzete, $\underline{K}$ a súrlódási kúp palástjára esik $F_s = \mu_0 F_N$.



Csúszás során a súrlódási erő nagysága $F_s = \mu F_N$, iránya pedig ellentétes az érintkezési pont sebességének irányával.

Ezt a feltételt csak az erők nagyságának ismeretében, azaz a dinamika alaptétele alapján felírható egyenletrendszer megoldása után ellenőrizhetjük.

1. Példa:



Adatok:

$m_1 = 4\ kg$

$m_2 = 3\ kg$

$\ell = 0{,}8\ m$

$R = 0{,}3\ m$

Feladatok:

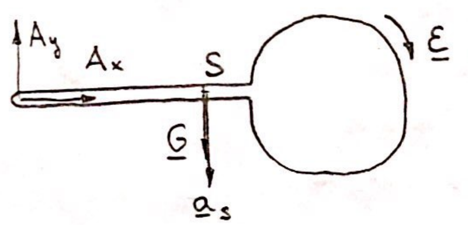
1, A reakcióerő az elvágás pillanatában?

2, Milyen sebességállapotban halad át a függőleges helyzetben?

(1) Közös súlypont meghatározása:

$$\underline{r}_S = \frac{\underline{r}_{S1} m_1 + \underline{r}_{S2} m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1+m_2}\left(\begin{bmatrix} m_1 \ell/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2(\ell+R) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}\ m$$

Szabadtest ábra:



$$\underline{a}_S = \underbrace{\underline{a}_A}_{=\underline{0}} + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AS} - \underbrace{\omega^2 \underline{r}_{AS}}_{=\underline{0}\ \text{(elvágás pillanatában)}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{AS} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r_{AS}\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dinamika alaptétele:

$[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{D}}_A]_A = [\underline{F}, \underline{M}_A]_A$ A álló pontra

$[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{D}}_S]_S = [\underline{F}, \underline{M}_S]_S$ S súlypontra

$m\underline{a}_S = \underline{F}$

$x:\ 0 = A_x$

$y:\ -(m_1+m_2)a_{Sy} = A_y - \underbrace{(m_1+m_2)g}_{=G}$

$\dot{\underline{D}}_A = \underline{M}_A$

előjele számít

$z:\ \Theta_A \varepsilon = r_S(m_1+m_2)g$

és $a_{Sy} = -r_{AS}\varepsilon$ (S körpályán mozog)

Az álló pontra számított tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_A = \Theta_{S1}^{rúd} + m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \Theta_{S2}^{korong} + m_2(\ell+R)^2 = \frac{1}{12}m_1\ell^2 + m_1\frac{\ell^2}{4} + \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2(\ell+R)^2 = \underline{\underline{4{,}618}}\ kgm^2$$

$$\varepsilon = \frac{r_S(m_1+m_2)g}{\Theta_A} = \underline{\underline{10{,}41}}\ \frac{rad}{s^2}\ (↻) \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-)10{,}41 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2}$$

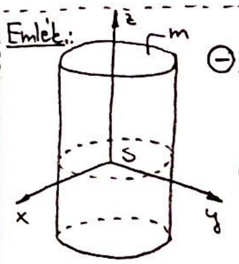
negatív irány

$$a_{Sy} = -r_{AS}\varepsilon = \underline{\underline{-7{,}286}}\ \frac{m}{s^2}\ (\downarrow)$$

$$\underline{a}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -7{,}286 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$A_y = (m_1+m_2)g - (m_1+m_2)a_{Sy} = \underline{\underline{17{,}67\ N}}\ (\uparrow) \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 17{,}67 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

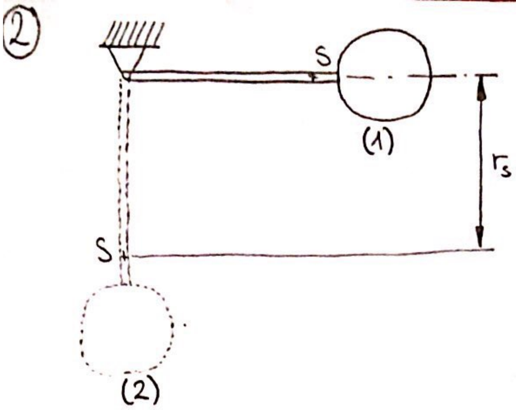
Emlék:



$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2$

$\Theta_z = \frac{1}{2}mR^2$

(2)



A függőleges helyzet sebességállapotát munkatétel segítségével határozzuk meg:

$T_2 - T_1 = W_{12}$, ahol $T_2 = \frac{1}{2}\Theta_A \omega^2$ (A álló pontra)

$T_1 = 0$ ($\omega = 0$ kezdetben)

Potenciálos erőtér esetén:

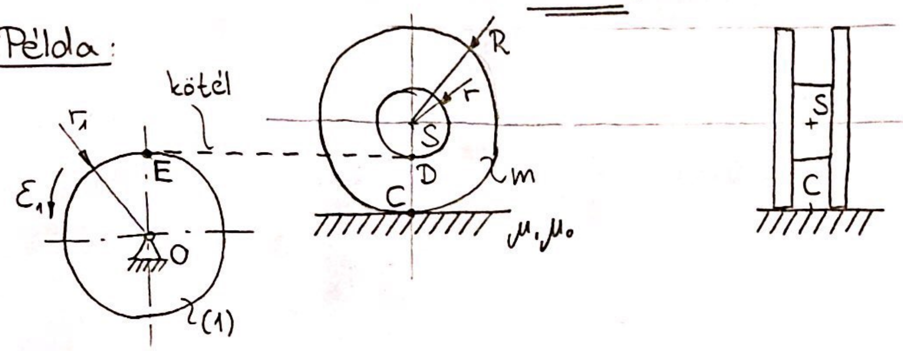
$$W_{12} = -(U_2 - U_1) = (m_2 + m_1) g r_s$$

Ezzel: $\frac{1}{2}\Theta_A \omega^2 = (m_1 + m_2) g r_s$

$$\omega = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2) g r_s}{\Theta_A}} = \underline{\underline{4{,}563}}\ \frac{rad}{s} \ (\circlearrowright) \Rightarrow \underline{\omega} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4{,}563 \end{bmatrix}}}\ \frac{rad}{s}$$

$$\underline{v}_S = \underbrace{\underline{v}_A}_{=\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AS} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_s\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3{,}193 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}\ \frac{m}{s}$$

2. Példa:



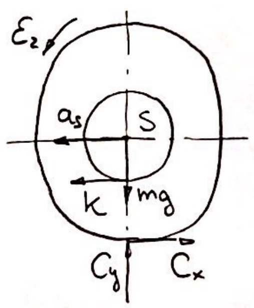
Nyugalomból indul

Adatok:
$R = 450\ mm$
$r = 150\ mm$
$r_1 = 250\ mm$
$\varepsilon_1 = 3\ \frac{rad}{s} = áll.$
$m = 70\ kg$
$\Theta_S = 4{,}375\ kgm^2$
$\mu_0 = 0{,}25$
$\mu = 0{,}2$

Feladatok:

1) $\underline{K}$ kötélerő ?
2) $\underline{C}$ kényszererő
3) Legyen $\varepsilon_1 = 10\ \frac{rad}{s^2}$!

(1) Szabadtest ábra:



Dinamika alaptétele:

$$[\underline{\dot{I}}, \underline{\dot{D}}_s]_s = [\underline{F}, \underline{M}_s]_s$$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ x:\ -m a_s = -K + C_x \\ &(2)\ y:\ 0 = -mg + C_y \\ &(3)\ z:\ \Theta_S \varepsilon_2 = -Kr + C_x \cdot R \end{aligned}\right\}$$

Tegyük fel, hogy gördül: $a_s = R\varepsilon_2$ (kinematika)

Kinematikai feltétel: $a_{Dx} = a_{Ex}$

$$\left.\begin{aligned} &a_{Ex} = -r_1 \varepsilon_1 \\ &\underbrace{a_{Dx} = -(R-r)\varepsilon_2}_{\text{redukciós képlet}} \end{aligned}\right\} \quad -r_1\varepsilon_1 = -(R-r)\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{r_1 \varepsilon_1}{R-r} = \underline{\underline{2{,}5}}\ \frac{rad}{s^2}$$

$$a_s = R\varepsilon_2 = R\frac{r_1\varepsilon_1}{R-r} = \underline{\underline{1{,}125}}\ \frac{m}{s^2}$$

(2): $C_y = mg = \underline{\underline{686,7}}$ N

(1): $C_x = k - ma_s$

(3): $\Theta_s \varepsilon_2 = -k \cdot r + (k - ma_s)R$

$$\Downarrow$$

$$\Theta_s \varepsilon_2 + ma_s R = (R-r)k \quad \Rightarrow k = \frac{\Theta_s \varepsilon_2 + ma_s R}{R-r} = \underline{\underline{154,583}}\text{ N}$$

$$C_x = \underline{\underline{75,83}}\text{ N}$$

$$\frac{C_x}{C_y} = 0,11 < \mu_0 \Rightarrow \text{tényleg gördül!}$$

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} -154,583 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\text{N} \quad \text{és} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 75,83 \\ 686,7 \\ 0 \end{bmatrix}\text{N}$$

(3) Legyen $\varepsilon_1 = 10\ \frac{rad}{s^2}$ és tegyük fel, hogy gördül!

$\varepsilon_2 = 8,33\ \frac{rad}{s^2}$

$a_s = 3,75\ \frac{m}{s^2}$

$k = 515,3$ N

$C_x = 252,8$ N

$C_y = 686,7$ N

Ezzel $\frac{C_x}{C_y} = 0,366 > \mu_0$ tehát csúszik!

Ha csúszik: $a_s \neq R\varepsilon_2$, de $C_x = \mu C_y$

$$\left.\begin{aligned} -ma_s &= k + C_x \\ 0 &= -mg + C_y \\ \Theta_s \varepsilon_2 &= -k \cdot r + C_x R \\ C_x &= \mu C_y \\ a_s &= a_{Dx} + r\varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow C_y = mg = \underline{\underline{686,7}}\text{ N} \\ &\Rightarrow C_x = \underline{\underline{137,34}}\text{ N} \end{aligned}$$

$$-m(a_{Dx} + r\varepsilon_2) = -k + C_x \quad \Rightarrow k = C_x + m(\overset{r_1\varepsilon_1}{\overset{\downarrow}{a_{Dx}}} + r\varepsilon_2)$$

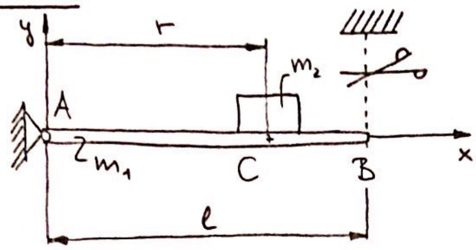
$$\Theta_s \varepsilon_2 = -k \cdot r + C_x R$$

$$\Theta_s \varepsilon_2 = -(C_x + m(r_1\varepsilon_1 + r\varepsilon_2))r + C_x R$$

$$(\Theta_s + mr^2)\varepsilon_2 = -C_x r - mr_1 r\varepsilon_1 + C_x R \quad \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{C_x(R-r) - mrr_1\varepsilon_1}{\Theta_s + mr^2} = \underline{\underline{2,51}}\ \frac{rad}{s^2}$$

$$k = \underline{\underline{338,7}}\text{ N}$$

3. Példa:



Adatok: m_1, m_2, ℓ, g

Feladatok:

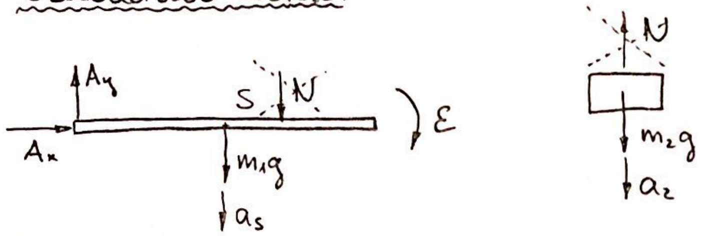
1, $r = ?$, hogy m_2 rögtön elváljon!

2, $A(\varphi) = ?$

① Az elválás dinamikai feltétele: $N = 0$

kinematikai feltétele: $a_2 = g$, $a_c > a_2$

Szabadtest ábrák:



Dinamika alaptétele: S pontra $[\dot{\underline{I}}, \underline{D}_S]_S = [\underline{F}, \underline{M}_S]_S$

A álló pontra $[\dot{\underline{I}}, \underline{D}_A]_A = [\underline{F}, \underline{M}_A]_A$

$\underline{D}_A = \underline{M}_A$

$$-\Theta_A \varepsilon = -m_1 g \frac{\ell}{2} \quad , \text{ahol} \quad \Theta_A = \frac{1}{12} m_1 \ell^2 + m_1 \left(\frac{\ell_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_1 \ell^2$$

Vagyis:

$$-\frac{1}{3} \cancel{m_1} \ell^{\cancel{2}} \varepsilon = -\cancel{m_1} g \frac{\cancel{\ell}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}}$$

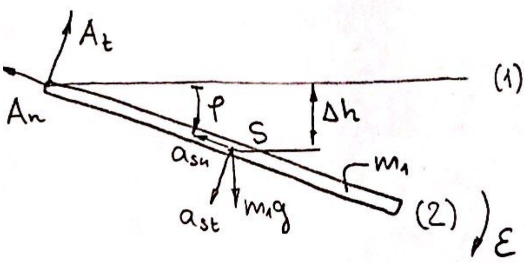
Kinematikai feltétel: $a_c \geq g$

$\Downarrow$

$$a_c = r\varepsilon \geq g$$

$$r \geq \frac{g}{\varepsilon} = \frac{2}{3}\ell \quad \Rightarrow \quad \boxed{r \geq \frac{2}{3}\ell}$$

② Szabadtest ábra:



Dinamika alaptétele: $m_1 \underline{a}_s = \underline{F}$

t: $-m_1 a_{st} = A_t - m_1 g \cos\varphi$

n: $-m_1 a_{sn} = -A_n + m_1 g \sin\varphi$

$\underline{D}_A = \underline{M}_A$

$$\underbrace{\Theta_A}_{=\frac{1}{3}m_1\ell^2} \varepsilon = m_1 g \frac{\ell}{2} \cos\varphi \Rightarrow \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\varphi \Rightarrow \quad a_{st} = +\frac{\ell}{2}\cdot\varepsilon \qquad a_{sn} = +\frac{\ell}{2}\omega^2$$

ábrának megfelelően

$\omega = ?$ (Munkatétel) $T_2 - T_1 = W_{12}$

$$\frac{1}{2}\Theta_A \omega^2 = m_1 g \frac{\ell}{2}\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}\sin\varphi}$$

$$A_t = -m_1\left(\frac{\ell}{2}\varepsilon - g\cos\varphi\right) = -m_1 g\left(\frac{3}{4}\cos\varphi - \cos\varphi\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4} m_1 g \cos\varphi}}$$

$$A_n = m_1 g \sin\varphi + m_1 \frac{\ell}{2}\omega^2 = m_1 g\left(\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\right) = \underline{\underline{\frac{5}{2} m_1 g \sin\varphi}}$$