Elméleti összefoglaló:

Dinamika → $\boxed{\text{Kinematika}}$: a testek mozgásának leírásával foglalkozik
→ Kinetika: testek mozgásának okaival foglalkozik

Mivel a bennünket körülvevő világ rendkívül összetett, közelítésekkel kell élnünk és a jelenség szempontjából fontosabb körülményeket kiemelnünk/figyelembe vennünk. Ezt hívjuk modellalkotásnak.

Első modell: anyagi pont: méretei lényegtelenek a vizsgált probléma szempontjából, tömegét viszont figyelembe vesszük a későbbiekben.

Megjegyzés: Ugyanazt a testet különböző feladatokban más-más mechanikai modellekkel vehetjük figyelembe.

Pl.: az úton közlekedő járműveket anyagi pontként modellezzük, hogyha a járműforgalomra vagyunk kíváncsiak, de hogyha a jármű manővereit is figyelembe akarjuk venni, akkor fontossá válik az autó alakja, tömegeloszlása stb., így merev testként modellezzük

Alapvető fogalmak:

Bármely anyagi test helyzete és mozgása más testekhez képest értelmezhető, tehát ki kell választanunk ezt a testet/testeket. Ezt vonatkoztatási rendszernek hívjuk. (Ezt mindig meg kell adnunk, mert a mozgás különböző lehet más vonatkoztatási rendszerből nézve.

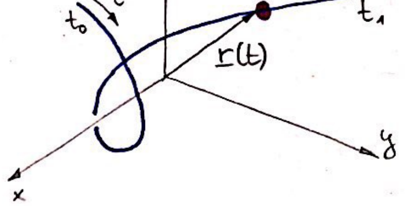
Pl.:
- gépkocsi gördülő kerekének egy pontja a karosszériához képest körpályán mozog az úthoz képest cikloisgörbén
- mozgó járműben az utastér pontjait állónak látjuk és úgy tűnik, mintha a környezet mozogna

A mozgások leírásához koordináta-rendszert kell felvennünk, ezt úgy célszerű felvenni, hogy a lehető legegyszerűbb legyen ebben a feladat megoldása.

Def: Mozgástörvény: az a függvény, mely egyértelműen megadja, hogy a vizsgált test pontjainak helye hogyan változik az időben. Anyagi pont esetében a mozgástörvény a helyvektor időbeli változását megadó vektorértékű $\underline{r}(t)$ függvény.

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$ skalárfüggvények

ha ezeket együtt ábrázoljuk az idő koordinátáját elhagyva, akkor az anyagi pont pályáját kapjuk:



Def: Pálya: az anyagi pont helyvektorának grafikonja térben (időfüggés nélkül).

Def: Anyagi pont pillanatnyi sebessége: az $\underline{r}(t)$ helyvektor idő szerinti deriváltja

$$\underline{v}(t) = \underbrace{\frac{d\underline{r}(t)}{dt}}_{=\text{Leibniz}} = \underbrace{\dot{\underline{r}}(t)}_{\text{Newton}}$$

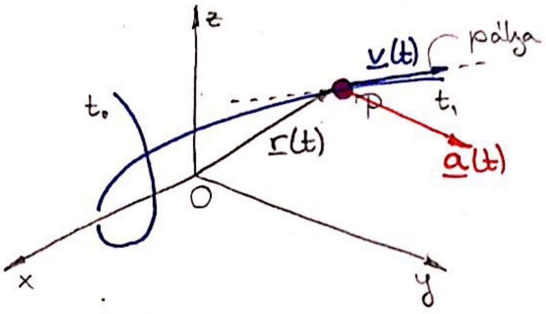
= Leibniz , Newton - féle jelölés

Fontos!! Csak akkor nulla egy vektor idő szerinti deriváltja, ha sem a nagysága sem az iránya nem változik!

Def: Anyagi pont pillanatnyi gyorsulása: az $\dot{\underline{r}}(t)$ sebességvektor idő szerinti deriváltja

$$\underline{a}(t) = \frac{d^2\underline{r}(t)}{dt^2} = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$$

Csak az egyenes vonalú, egyenletes mozgás esetén nulla a gyorsulás!



A sebességvektor párhuzamos a pálya érintőjével!

A gyorsulásvektor is megadható két természetes komponens segítségével, melyek közül az egyik a a sebesség nagyságának változásával kapcsolatos és érintő irányú, a másik a sebesség irányának változását jellemzi és az előzőre merőleges.

Vagyis a tangenciális gyorsulás: $\underline{a}_t = a_t \underline{e}_t$, ahol $\underline{e}_t \parallel \underline{v}$ és $\underline{e}_t$ egy bázisvektor

normális gyorsulás: $\underline{a}_n = a_n \underline{e}_n$, ahol $\underline{e}_t \perp \underline{e}_n$ és $\underline{a}_n = \underline{a} - \underline{a}_t$

$$\underline{e}_n = \frac{\underline{a}_n}{a_n} \equiv \frac{\underline{a}_n}{|\underline{a}_n|}$$

Ezzel:

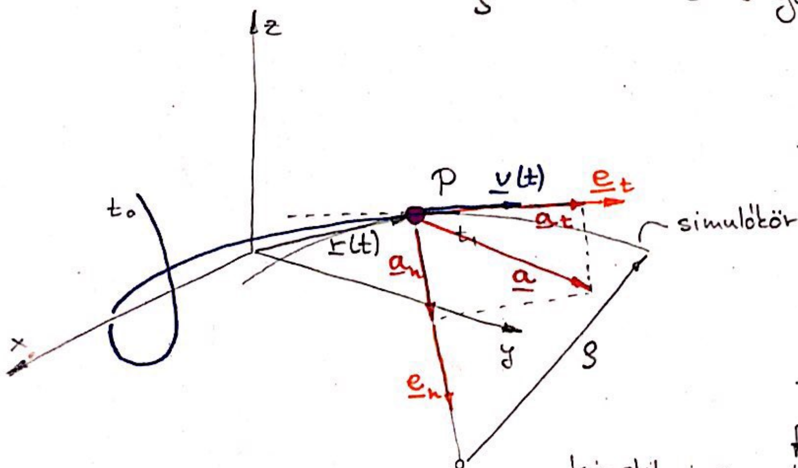
$$\boxed{\underline{a} = a_t \underline{e}_t + a_n \underline{e}_n}$$

Megkülönböztetünk még egy irányt, a binormális irányt, mely az előző kettőre merőleges

$$\underline{e}_b = \underline{e}_t \times \underline{e}_n$$ (ezeket együttesen kísérő triédernek hívjuk)

A tangenciális gyorsulás: $a_t = |\dot{\underline{v}}|$

normális gyorsulás: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, ahol ρ a görbületi sugár



A pálya, akkor lehet igazi térbeli görbe, ha a mozgás során folyamatosan változó irányú $\underline{e}_t$ és $\underline{e}_n$ vektorok által kifeszített sík (simulósík) helyzete változik.

(A simulósík pálya menti elfordulását a torzió ~ $\dddot{\underline{r}}(t)$ (jerk) jellemzi)

kinetikai egyenleteknél nem használatos, de pl: tömegközlekedésnél a tartásunk megváltozásával könnyen alkalmazkodunk a gyorsuláshoz, de ennek megváltozásához viszont nem.

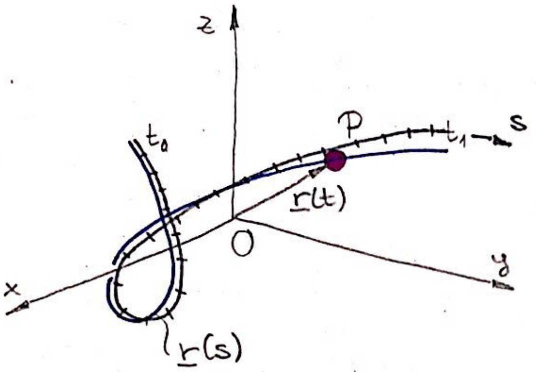
Pályához illeszkedő koordináták:

Def: • A sebesség előjeles nagysága a pályasebesség.

• A pályasebesség további deriválásával a gyorsulás érintő irányú komponensének az előjeles nagyságát kapjuk, ez a pályagyorsulás.

• Értelmezünk még keringési szögsebességet és szöggyorsulást, de fontos megjegyezni, hogy anyagi pontnak nincs szögsebessége vagy szöggyorsulása !!
(a szögsebesség az elfordulás ütemét jellemzi!)

Def: Az adott pályán mozgó anyagi pont pozícióját egyértelműen megadhatjuk egy válasz-tott kezdőponttól mért s ívhosszparaméterrel, azaz a pálya mentén mért koordinátával. Az ívhosszparaméter időbeli változása $s(t)$ a befutási törvény.



pályasebesség: $v = \dot{s}(t)$

pályagyorsulás : $a = \ddot{s}(t)$

Ezeket együttesen forandmiai görbéknek hívjuk! (Számítógéppel könnyen rajzolhatóak)
F1-ben ezeket is nézik, mint telemetriai adatok!

Kényszerek:

Def: Szabadsági fok (DoF) azon független skalárfüggvények száma, melyek egyértelműen megadják a rendszer mozgástörvényét!

Def: Kényszerek előírt geometriai vagy kinematikai feltételek, melyek korlátozásokat jelentenek a mozgásokra nézve.

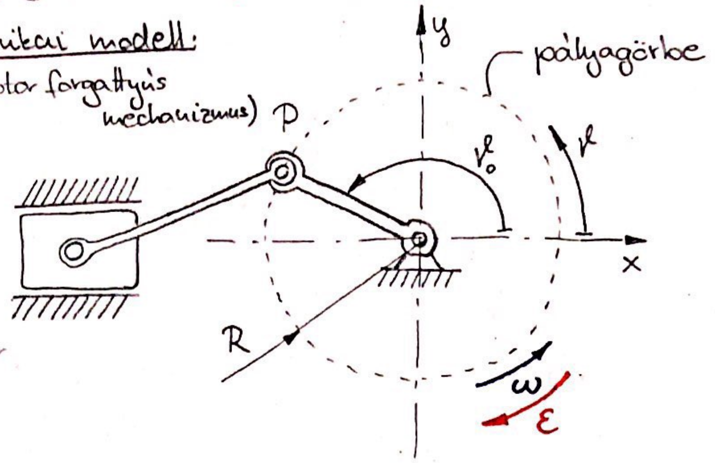
Osztályozásuk: • holonóm (geometriai)
• anholonóm (kinematikai)

– szkleronóm (időtől független)
– reonóm (időtől függő)

Példák: Anyagi pont mozgása körpályán:

Mechanikai modell:

(Dízelmotor forgattyús mechanizmus)



Cél a P pont mozgásának vizsgálata!

Adatok:

$t_0 = 0\,s$

$t_1 = 7\,s$

$\varphi(t_0) = \varphi_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ rad

$\dot{\varphi}(t_0) = \omega(t_0) = \omega_0 = 10$ rad/s

$R = 0{,}5$ m

$\ddot{\varphi}(t) = \varepsilon(t) = -2$ rad/s^2

Feladatok:

- A t_1 időpontban milyen szöghelyzetben lesz a P pont?
- A t_1 időpontban milyen irányú a P pont mozgása?
- Rajzolja meg az $a_t(t)$, $v(t)$, $s(t)$ foronómiai görbéket és az $a_n(t)$ függvényt!

A kijelölt P pont mozgásának vizsgálata:

Mivel a feladatban az ε szöggyorsulás állandó, így

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \varepsilon\, dt$$

, ahol ω_0 integrálási konstans.

Ezzel

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0)}$$

Hasonlóan:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \omega_0 + \varepsilon(t-t_0)\, dt$$

, ahol φ_0 integrálási konstans, így

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\varepsilon}{2}(t - t_0)^2.}$$

Az első feladatra válaszolva:

$$\varphi(t_1) = \frac{\pi}{6} + 10 \cdot 7 - 1 \cdot 49 = \underline{\underline{21{,}524\ \text{rad}}}.$$

A második feladatra válaszolva: a mozgás irányát a szögsebesség előjele adja meg, így

$$\omega(t_1) = 10 - 2 \cdot 7 = \underline{-4\ \text{rad/s}}$$

Megjegyzés:

- Hogyha $\varepsilon \neq$ áll., akkor az $\varepsilon = \varepsilon(t)$, illetve $\omega = \omega(t)$ mennyiségekkel kell számolnunk
- Mikor és hol vált irányt a mozgás?
  - → Irányváltás ideje: $\omega(t^*) = 10 - 2t^* \equiv 0 \quad \rightarrow \quad t^* = \underline{5\,s}$
  - → Irányváltás helye: $\varphi(t^*) = \frac{\pi}{6} + 10 \cdot 5 - 1 \cdot 5^2 = \underline{25{,}524\ \text{rad}}$

<u>Foronómiai görbék:</u> Egy ívkoordinátát kell definiálnunk (mely legyen $s = s(t)$) majd ezt integrálás segítségével meghatároznunk. Ehhez a tangenciális gyorsulás (pályagyorsulás):

$$a_t(t) = a_{t0} = \text{áll.} \quad \text{és} \quad \boxed{a_t(t) = R\varepsilon}$$

síkban $\omega = \dot{\varphi}$, $\varepsilon = \ddot{\varphi}$

pályasebesség:

$$\boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_{t0}\,dt = v_0 + a_{t0}(t - t_0)}\,, \text{ ahol } \boxed{v_0 = R\omega_0}$$

befutási törvény:

$$\boxed{s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 + a_{0t}(t - t_0)\,dt = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a_{0t}}{2}(t - t_0)^2}\,, \text{ ahol } \boxed{s_0 = R\varphi_0}$$

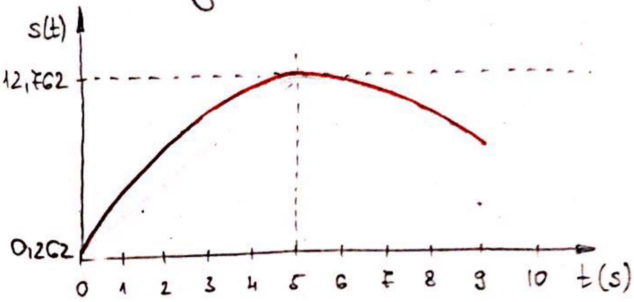
<u>Fontosabb mennyiségek:</u>

$s_0 = \frac{\pi}{12}\,m \equiv s(t_0)$

$s(t^*) = 12{,}762\ m$

$s(t_1) = 10{,}762\,m$

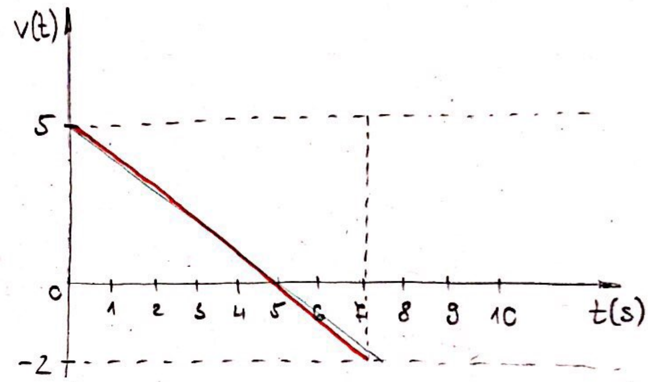
<u>Foronómiai görbék:</u>



$v_0 = 5\ \frac{m}{s}$

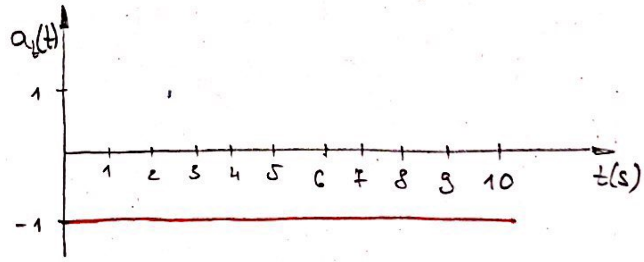
$v(t^*) = 0\ \frac{m}{s}$

$v(t_1) = -2\ \frac{m}{s}$



$a_t(t) = a_{t0} = \text{áll.}$

$R\varepsilon = -1\ \frac{m}{s^2}$

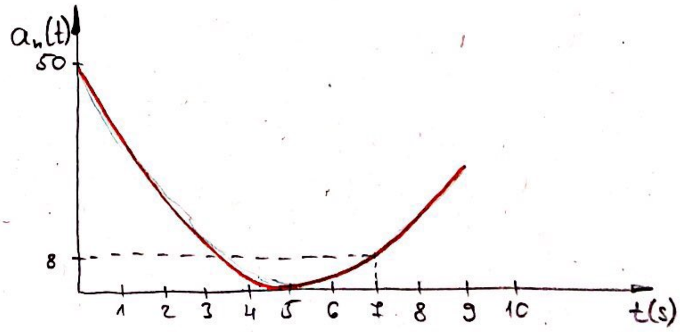


$a_n(t) = \frac{v^2}{R}$

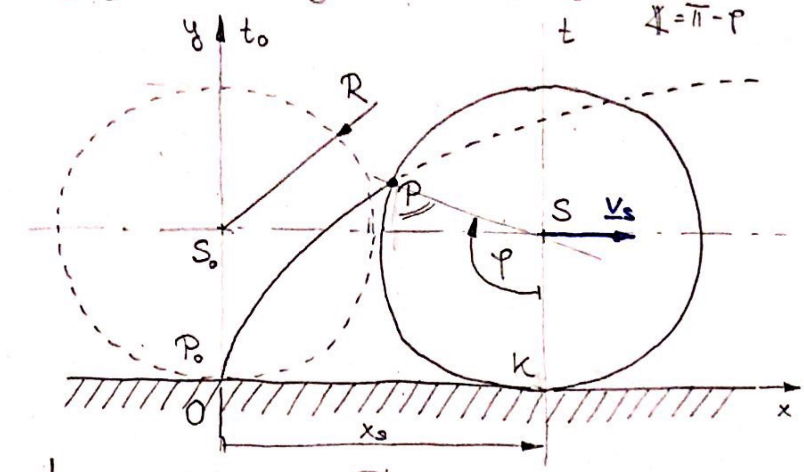
$a_n(t_0) = 50\ \frac{m}{s^2}$

$a_n(t^*) = 0\ \frac{m}{s^2}$

$a_n(t_1) = 8\ \frac{m}{s^2}$



Anyagi pont mozgása ciklois pályán:



Adatok:

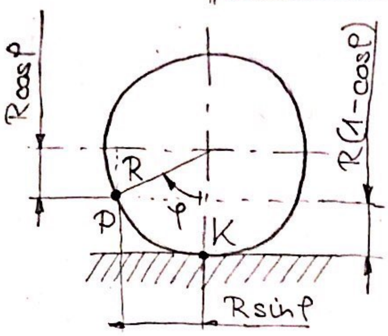
$R = 0{,}3\ m$

$\underline{v}_s = $ áll.

$v_s = 5\ \frac{m}{s}$

Feladatok:

- Határozza meg a P pont sebességét a φ paraméter függvényében!
- Határozza meg a P pont gyorsulását hasonlóképpen!
- Számítsa ki a $\varphi_1 = 75°$-hoz tartozó $\underline{a}_1$ és $\underline{v}_1$ gyorsulást, illetve sebességet!
- Számítsa ki és ábrázolja az $\underline{a}_1$ gyorsulás normális és tangenciális komponense
- A $\varphi_1 = 75°$ szöghelyzetben számítsa ki a pálya ϱ_1 görbületi sugarát!



Vonatkoztatási rendszer: talaj

Koordináta-rendszer: talajhoz kötött (x, y, z, O)

Kezdeti helyzet: $t_0 = 0\,s$, $\underline{r}_P(t_0) = \underline{0}$

$x_s = \overline{P_0K} = R\varphi$ (ív megegyezik ezzel)

$x = x_s - R\sin\varphi = R\varphi - R\sin\varphi$

$= R\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$

$y = R(1 - \cos\varphi)$ $\Rightarrow$ Ciklois egyenletrendszere: ciklois pálya

$$\underline{r}_P(\varphi) = \begin{bmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{bmatrix}$$

1) A sebesség az $\underline{r}_P$ helyvektor idő szerinti első deriváltja:

Megjegyzés: $\varphi = \frac{v_s}{R} t$ $(\varphi R = v_s t)$ $\Rightarrow$ $\dot{\varphi} = \frac{v_s}{R}$

$$\underline{v}_P = \dot{\underline{r}}_P = R \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{bmatrix} = R\dot{\varphi} \begin{bmatrix} 1 - \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

2, A gyorsulás az $\underline{r}_P$ helyvektor idő szerinti második deriváltja

$$\underline{a}_P = \dot{\underline{v}}_P = \ddot{\underline{r}}_P = \underbrace{R\dot{\varphi}}_{= v_s} \begin{bmatrix} \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{bmatrix} = v_s \dot{\varphi} \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} = \frac{v_s^2}{R} \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Megjegyzés:

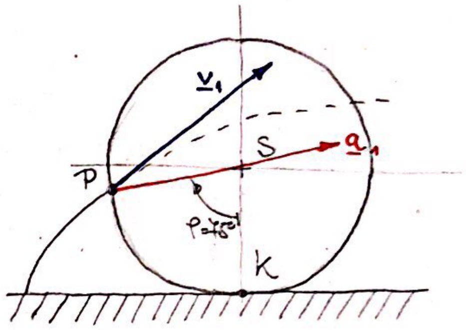
- $|\underline{a}| = \frac{v_s^2}{R}\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = \frac{v_s^2}{R} = \text{áll.}$ (mivel $v_s = \text{áll.}$)

A gyorsulás nagysága állandó, de iránya változik!

- A $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi \ldots$ helyzetekben $\underline{v}_P = \underline{0}$, vagyis, amikor P pont érintkezik a talajjal, akkor a sebessége zérus. Ez jelenti a csúszásmentes gördülést. A talaj nyugalomban van tehát nincs sebességkülönbség a talaj K kontakt pontja és a kerék P pontja között.

3, A $\varphi_1 = 75°$-hoz tartozó sebesség és gyorsulás

Behelyettesítés



$$\underline{v}_1 = \underline{v}_P(\varphi = 75°) = 5\begin{bmatrix}1-\cos(75°)\\ \sin(75°)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3,706\\ 4,83\end{bmatrix}\frac{m}{s}$$

$$v_1 = |\underline{v}_1| = \sqrt{3,706^2 + 4,83^2} = 6,088\ \frac{m}{s}$$

$$\underline{a}_1 = \underline{a}_P(\varphi = 75°) = \frac{5^2}{0,3}\begin{bmatrix}\sin(75°)\\ \cos(75°)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80,49\\ 21,87\end{bmatrix}\frac{m}{s^2}$$

$$a_1 = |\underline{a}_1| = \sqrt{80,49^2 + 21,87^2} = 83,41\ \frac{m}{s^2}$$

Megjegyzés: A gyorsulás sugárirányú, az S ponton átmenő egyenesen fekszik

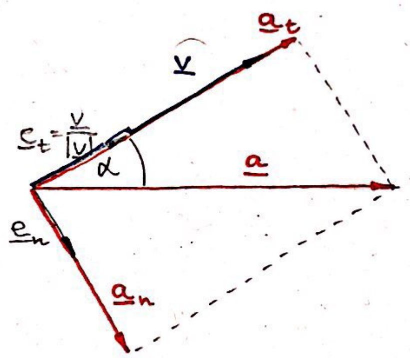
$$\underline{a}_P = \frac{v_s^2}{R}\begin{bmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}$$

4, Gyorsulásösszetevők

$$\underline{a}_t = a_t\underline{e}_t = \left(\underline{a}\cdot\underbrace{\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}}_{=\underline{e}_t}\right)\underline{e}_t$$

$$\underline{a}_n = a_n\underline{e}_n = \underbrace{\left|\left(\underline{a}\times\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right)\right|}_{=|\underline{a}|\cdot\sin\alpha}\underline{e}_n$$

$$\underline{a}_n = \underline{a} - \underline{a}_t$$



Tangenciális gyorsulás:

$$\underline{a}_{1t} = \left(\underline{a}_1\cdot\frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|}\right)\frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|} = (\underline{a}_1\underline{v}_1)\frac{\underline{v}_1}{v_1^2} \Rightarrow \underline{a}_1\cdot\underline{v}_1 = \begin{bmatrix}80,49\\ 21,87\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3,706\\ 4,83\end{bmatrix} = 402,8\ \frac{m^2}{s^3}$$

$$\underline{a}_{1t} = 402,8\frac{1}{6,088^2}\begin{bmatrix}3,706\\ 4,83\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40,29\\ 52,45\end{bmatrix}\frac{m}{s^2}$$

$$a_{1t} = |\underline{a}_{1t}| = \sqrt{40,29^2 + 52,45^2} = 66,2\ \frac{m}{s^2}$$

Normális gyorsulás:

$$|\underline{a}_{1n}| = \left|\underline{a}_1\times\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right| \Rightarrow a_{1n} = |\underline{a}_{1n}| = \left|\begin{bmatrix}80,49\\ 21,87\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0,6087\\ 0,7934\\ 0\end{bmatrix}\right| = 50,55\ \frac{m}{s^2}$$

egyszerűbben

$$\underline{a}_1 = \underline{a}_{1t} + \underline{a}_{1n} \Rightarrow \underline{a}_{1n} = \underline{a}_1 - \underline{a}_{1t} = \begin{bmatrix} 80,49 \\ 21,87 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 40,29 \\ 52,45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,20 \\ -30,9 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$a_{1n} = |\underline{a}_{1n}| = \sqrt{40,2^2 + (-30,9)^2} \cong 50,55 \ \frac{m}{s^2}$$

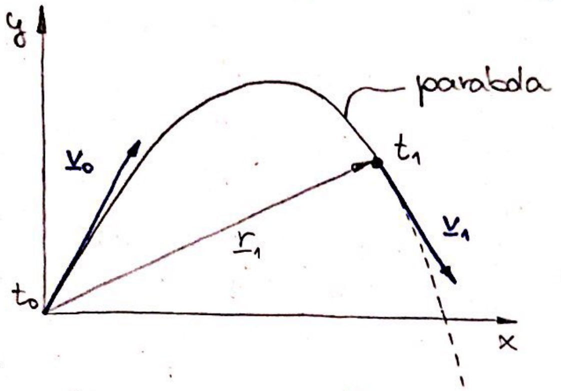
(50,69)

5) Görbületi sugár számítása:

A P pont pályájának görbületi sugara $\varphi_1 = 75°$-os szögnél

$$a_{1n} = \frac{v_1^2}{\rho_1} \Rightarrow \rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{1n}} = \frac{6,088^2}{50,69} \approx 0,73 \ m$$

Anyagi pont mozgása ferde hajításkor:



Adatok: $\underline{r}(t_0) = \underline{r}_0 = \underline{0}$

$$\underline{r}(t_1) = \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 4,6 \\ 1 \end{bmatrix} m$$

$t \in [t_0, t_1] = [0, 1]$ s.

Feladatok:

1) a, $\underline{v}(t_0) \equiv \underline{v}_0 = ?$

b, $\underline{v}(t_1) \equiv \underline{v}_1 = ?$

2, a pályagörbe $y(x) = f(x) = ?$

3, a hodográf a $t \in [t_0, t_1] = [0, 1]$ s intervallumon!

4) a, $\underline{a}_t(t_1) \equiv \underline{a}_{t1} = ?$

b, $\underline{a}_n(t_1) \equiv \underline{a}_{1n} = ?$ figyelembe véve, hogy $\underline{a}(t_1) \equiv \underline{a}_1 = \underline{a}_{t1} + \underline{a}_{n1}$

5) $\rho(t_1) \equiv \rho_1 = ?$ (görbületi sugár)

1 A kezdeti sebesség meghatározása ($\underline{v}_0$):

a, Állandó gyorsulással mozgó anyagi pont mozgástörvénye:

$$\underline{r}(t) = \frac{\underline{a}}{2}(t - t_0)^2 + \underline{v}_0(t - t_0) + \underline{r}_0$$

a feladatban adott:

$\underline{r}(t_1) = \underline{r}_1 \quad t \in [t_0, t_1] \ , \ \underline{a} = \underline{g} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -9,81 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$

Így a mozgástörvény:

$$\underline{r}(t) = \frac{\underline{g}}{2} t^2 + \underline{v}_0 t + \underline{r}_0 \longrightarrow \underline{r}(t_1) = \underline{r}_1 = \frac{\underline{g}}{2} t_1^2 + \underline{v}_0 t_1 + \underline{r}_0$$

ezzel:

$$x: \quad 4{,}6 = v_{0x} \cdot 1 + 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0x} = 4{,}6 \ \frac{m}{s}$$

$$y: \quad 1 = -\frac{1}{2} g + v_{0y} \cdot 1 + 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 = 5{,}9 \ \frac{m}{s}$$

Így a keresett sebesség:

$$\underline{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}6 \\ 5{,}9 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \quad \text{és} \quad v_0 = |\underline{v}_0| = 7{,}48 \ \frac{m}{s}$$

b) <u>A t_1 időpontbeli sebesség meghatározása ($\underline{v}_1$)</u>

A mozgástörvény idő szerinti deriváltja:

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v}(t) = \underline{g}\, t + \underline{v}_0$$

ezzel

$$\dot{\underline{r}}(t_1) = \underline{v}(t_1) = \underline{v}_1 = \underline{g}\, t_1 + \underline{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x: & v_{1x} = v_{0x} = 4{,}6 \ \frac{m}{s} = \text{áll.} \\ y: & v_{1y} = -g t_1 + v_{0y} \quad \Rightarrow \quad v_{1y} = -9{,}81 \cdot 1 + 5{,}9 = -3{,}9 \ \frac{m}{s} \end{cases}$$

innen:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}6 \\ -3{,}9 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \quad \text{és} \quad v_1 = |\underline{v}_1| = 6 \ \frac{m}{s}$$

(2) <u>Pályagörbe:</u> Az $\underline{r}(t) = \frac{\underline{g}}{2} t^2 + \underline{v}_0 t + \underline{r}_0$ mozgástörvényből kiindulva

$$x(t) = v_{0x} t + x_0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = -\frac{1}{2} g \frac{(x-x_0)^2}{v_{0x}^2} + v_{0y} \frac{(x-x_0)}{v_{0x}} + y_0}$$

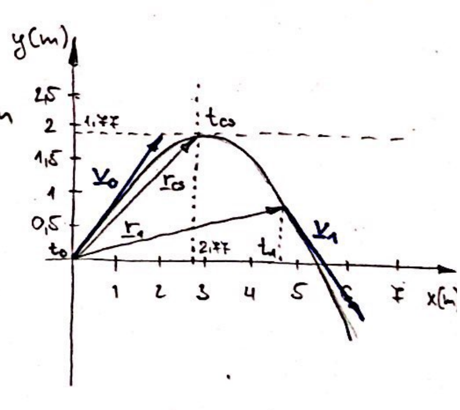
másodfokú parabola

A parabola csúcspontja:

$$y'(x) = 0$$

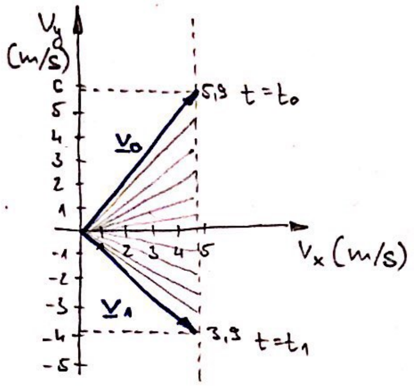
$$y'(x) = -g \frac{(x-x_0)}{v_{0x}^2} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \quad \Rightarrow \quad x_{cs} = x_0 + \frac{v_{0x} \cdot v_{0y}}{g} = 2{,}77 \ m$$

$$y_{cs} = y(x_{cs}) = 1{,}77 \ m$$



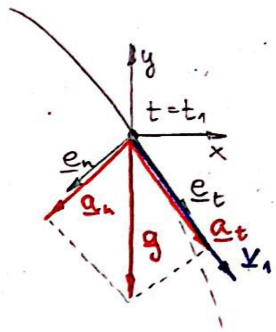
③ Hodográf: sebességvektor változásának grafikonja

$t \in [t_0, t_1] = [0, 1]$ s intervallumban



④ A tangenciális gyorsulás:

a) A gyorsulásösszetevők a t_1 időpillanatban



Tangenciális gyorsulás:

$$\underline{a}_t(t) = a_t \underline{e}_t = a_t \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

a gyorsulásnak a sebesség irányába eső összetevője

$$\underline{a}_t(t) = a_t \underline{e}_t = (\underline{g}\, \underline{e}_t)\underline{e}_t = \left(\underline{g} \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right) \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

$$\underline{a}_t(t_1) = \underline{a}_{t1} = a_{t1} \underline{e}_t = \underline{g}\, \underline{v}_1 \cdot \frac{\underline{v}_1}{v_1^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{a}_{t1} = \frac{1}{6^2} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -9{,}81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4{,}6 \\ -3{,}9 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 4{,}6 \\ -3{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}83 \\ -4{,}1 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$|\underline{a}_{t1}| = \sqrt{a_{t1x}^2 + a_{t1y}^2} = 6{,}34 \frac{m}{s^2}$$

b) Normális gyorsulás:

$\underline{a}_n(t) = a_n \underline{e}_n$ (a gyorsulásnak a sebességre merőleges összetevője)

$$\underline{a}_n(t_1) = \underline{a}_{n1} = a_{n1} \underline{e}_{n1} = \underline{g} - \underline{a}_{t1} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -9{,}81 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4{,}83 \\ -4{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}83 \\ -5{,}71 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$|\underline{a}_{n1}| = |\underline{g} \times \underline{e}_{t1}| = \sqrt{a_{n1x}^2 + a_{n1y}^2} = 7{,}48 \frac{m}{s^2}$$

⑤ Görbületi sugár a t_1 időpillanatban:

$$\rho(t) = \frac{v^2(t)}{a_n(t)} \quad \Rightarrow \quad \rho(t_1) \equiv \rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{n1}} = 4{,}86 \text{ m}$$