

Dinamika

(Lektorálatlan verzió)

Dr. Csernák Gábor
egyetemi docens

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Műszaki Mechanikai Tanszék

2018. május 9.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Kinematika	5
1.1. Az anyagi pontok kinematikája	6
1.1.1. A kinematika alapvető fogalmai	6
1.1.2. Sebesség és gyorsulás természetes koordináta-rendszerben	10
1.1.3. Pályához illeszkedő koordináták	18
1.1.4. Kényszerek: a mozgást korlátozó feltételek	21
1.1.5. Az anyagi pont kinematika alkalmazásai	27
1.2. A merev testek kinematikája	36
1.2.1. A merev test helyzetének megadása	36
1.2.2. A merev test sebességállapota	37
1.2.3. Vektorkettősök redukciója	44
1.2.4. Elemi mozgások	48
1.2.5. Véges mozgások	56
1.2.6. Elemi eltolások és elforgatások	59
1.2.7. A merev test gyorsulásállapota	63
1.2.8. A merev test síkmozgásának kinematikája	65
1.2.9. A gördülés kinematikája	76
1.2.10. Kitekintés térbeli gördülési problémákra	84
1.2.11. Relatív kinematika	89
2. Az anyagi pontok kinetikája	109
2.1. Alapvető fogalmak, Newton-törvények	109
2.2. Aktív erők és kényszererők	117
2.3. A dinamika alaptétele és annak alkalmazása	121
2.3.1. A dinamika alaptétele	121
2.3.2. Szabadtest ábrák	122
2.3.3. A dinamika alaptétele gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben	128
2.3.4. Folyamatok időbeli leírása a dinamika alaptétele alapján	132
2.4. A mozgásegyenlet integrálása, megmaradási tételek	136
2.4.1. Impulzustétel	136
2.4.2. Teljesítménytétel	142
2.4.3. Munkatétel	149
2.4.4. Teljesítménytétel és munkatétel gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben	165
2.4.5. Perdület-tétel álló referenciapontra	170
2.4.6. Perdület-tétel tetszőleges referenciapontra	175

2.4.7.	Perdülettel anyagi pontrendszerre	176
3.	A merev testek kinetikája	181
3.1.	A merev test diszkrét modellje	181
3.2.	A dinamika alaptétele merev testre	186
3.2.1.	Az impulzustétel merev testre	187
3.2.2.	Merev test perdülete és tehetetlenségi nyomatéka	188
3.2.3.	A tehetetlenségi nyomaték tulajdonságai	194
3.2.4.	Az impulzus és a perdület vektorkettőse	209
3.2.5.	A perdület derivált és a kinetikai nyomaték	211
3.3.	Kinetikus energia, teljesítmény, munka	222
3.3.1.	Merev test kinetikus energiája	222
3.3.2.	Teljesítménytétel és munkatétel merev testre	225
3.4.	Síkmozgás dinamikai értelemben	228
3.4.1.	A perdülettel és a kinetikus energia síkmozgásra érvényes alakja	229
3.4.2.	Gördülés	236
3.5.	Forgórészek kiegyensúlyozása	240
3.5.1.	Az ideális forgórész	240
3.5.2.	Statikus kiegyensúlyozatlanság	241
3.5.3.	Dinamikus kiegyensúlyozatlanság	242
3.5.4.	Kiegyensúlyozatlan forgórész csapnyomása	249
3.6.	Pörgettyűmozgás	251
3.6.1.	A pörgettyű helyzetének és szögsebességének megadása	252
3.6.2.	A pörgettyű mozgását leíró Euler-egyenletek	258
3.6.3.	Erőmentes pörgettyű	259
3.6.4.	Súlyos pörgettyű	273
3.6.5.	Szimmetrikus súlyos pörgettyű reguláris precessziója	276
4.	Összefoglalás	283
4.1.	Az anyagi pontok kinematikája	283
4.2.	A merev testek kinematikája	284
4.3.	Az anyagi pontok kinetikája	285
4.4.	A merev testek kinetikája	287
5.	Függelék	291
5.1.	Matematikai alapok – vektoralgebra	291
5.2.	A sebességredukciós képlet levezetése transzformációs mátrixokkal	297
	Tárgymutató	298

Bevezetés

A dinamika a testek mozgásának vizsgálatával foglalkozó tudomány. Bár a folyadékok és gázok mozgását is a dinamika törvényei határozzák meg, ebben a jegyzetben a szilárd testek – elsősorban a merev testek – mozgása áll a tárgyalás középpontjában. A dinamika két nagy témakörre osztható. A *kinematika* a testek mozgásának leírásával foglalkozik, nem vizsgálja azt, hogy a kialakuló mozgás miért jött létre vagy mitől változik meg a testek mozgásállapota. Ezzel szemben a *kinetika* a mozgás okait kutatja – célja olyan szabályok meghatározása, melyek alapján meg lehet állapítani a testek tulajdonságaiból, helyzetükből, sebességükből, stb., hogy milyen mozgást fognak végezni.

Mind a kinematika, mind a kinetika kifejezés a görög *κίνημα* (kinema) – mozgás, mozgás szóból származtatható. Már az ókori görögök – itt elsősorban Arisztotelészt (i.e. 384 - i.e. 322) fontos kiemelni – is kísérletet tettek a mozgás törvényszerűségeinek megfogalmazására, de tisztán logikai módszereik tévútra vezették őket. A dinamikai jelenségek megalapozott vizsgálatának úttörője *Galileo Galilei* (1564-1642) volt, aki felismerte, hogy az elméletek felállítása során nagyon fontos szerepe van azok kísérletekkel való ellenőrzésének. Egyik legnagyobb eredménye a tehetetlenség törvényének megfogalmazása volt, ami szerint nem a mozgás fenntartásához (ahogy Arisztotelész állította), hanem a mozgásállapot *megváltoztatásához* van szükség más testek hatására, azaz erőre. A dinamika tudományos alapjait *Isaac Newton* (1642-1727) fektette le a róla elnevezett Newton-törvények megfogalmazásával. Míg Newton elsősorban az anyagi pontok mozgásával foglalkozott, *Leonhard Euler* (1707-1783) kiterjesztette az elmélet alkalmazhatóságát merev testek mozgásának vizsgálatára is. A mozgások időbeli lefolyásának szabályait differenciálegyenletek segítségével lehet szabatosan leírni. Ezeknek az egyenleteknek nemcsak a megoldása, hanem már felírása is bonyolult feladatot jelent több testből álló mechanikai rendszerek esetében. Ezért nagy jelentőségű *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813) és *William Rowan Hamilton* (1805-1865) munkássága, akik általános érvényű mechanikai elvek és módszerek kidolgozásával a mechanikai problémák jól áttekinthető matematikai tárgyalását tették lehetővé. Fontos kiemelni, hogy a mechanika fejlődése elképzelhetetlen lett volna a megfelelő matematikai módszerek kidolgozása nélkül. Az említett tudósok közül például Newton a differenciálszámítás kidolgozásával, Euler pedig (számos egyéb eredménye mellett) a koordináta-rendszerek alkalmazásával alkotott maradandót a matematikában.

A jegyzet elsősorban Stépán Gábor „Kinematika és Dinamika” illetve „Dinamika” előadásainak tananyagán alapul, melyeket a BME Gépészmérnöki Karán másodéves gépészmérnök és mechatronikai mérnök hallgatóknak tartott, azonban egyes témakörök tárgyalásmódja számos részletben eltér az előadásokon elhangzottaktól.

A dinamika tudománya folyamatosan fejlődött a Newton munkássága óta eltelt mintegy háromszáz évben. Ezalatt kutatók generációi finomították a fogalmak jelentését és ennek során számos eltérő értelmezés, gondolatmenet is született. A mérnöki gyakorlat, a felada-

tok megoldása szempontjából ezek között az értelmezések között nincs lényegi különbség. A dinamika azonban nem egyszerűen csak a mozgással kapcsolatos feladatok *megoldásáról* szól! Egy jól képzett mérnöknek azt is látnia kell, hogy az alkalmazások mögött egy szisztematikusan felépített, az évszázadok próbáját kiállt elmélet áll, mely egyszerű kiindulási feltevésekből, modellekből kiindulva rendkívül bonyolult gyakorlati problémák megoldására használható eredményekhez vezetett.

Az elméleti anyag felépítése során arra törekedtem, hogy az olvasó minden lépésben világosan lássa, miért van szükség újabb és újabb fogalmak, tételek kimondására. A tananyag befogadását rövid feladatok kidolgozásával próbáltam megkönnyíteni. Egyes elméleti anyagrészeket megjegyzésbe vagy lábjegyzetbe tettem, továbbá a jegyzet végén két fejezetben összefoglaltam a dinamika legfontosabb eredményeit, valamint a megértéshez szükséges matematikai ismereteket. A szöveg jobb tagolása érdekében a tételek, következmények, példák végét a ♠, míg a definíciók és megjegyzések végét a ♣ szimbólum jelzi.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Takács Dénes kollégám segítségét, aki az ábrák átgondolt, pontos és esztétikus megrajzolása mellett hasznos, lényeglátó megjegyzésekkel segítette a munkámat.

Hálás vagyok a BME Műszaki Mechanikai Tanszéken dolgozó minden volt és jelenlegi munkatársamnak, akik a tantárgy oktatása során folyamatosan segítették a tananyag alakulását, fejlődését.

Fraller Csaba fizika tanár barátomnak is köszönöm a jegyzethez fűzött megjegyzéseit, melyek számos fogalom értelmezését új megvilágításba helyezték.

Külön köszönettel tartozom az általam leginkább tisztelt egyetemi oktatómnak, Hraskó Péternek, aki kristálytisza logikájával, bölcsességével és egész személyiségével meghatározó hatással volt természettudományos világképemre.

1. fejezet

Kinematika

A kinematika a testek mozgásának *leírásával* foglalkozó tudomány. A testek mozgásának *okait*, a kialakuló mozgás és más testek hatása (erők) közötti összefüggéseket azonban nem vizsgálja – ezek a témakörök a kinetika (2. fejezet) tárgykörébe tartoznak. Mivel a bennünket körülvevő világ rendkívül összetett, a valós jelenségek leírása során nem vehetünk figyelembe minden körülményt. Ehelyett alkalmas közelítésekkel élünk: a vizsgált probléma szempontjából legfontosabb jellemzőkre, hatásokra korlátozzuk figyelmünket – azaz *modelleket* állítunk fel. A valóságos testek legegyszerűbb modellje az anyagi pont.

1.1. definíció. ANYAGI PONTKÉNT olyan testeket modellezünk, melyek méretei lényegtelenek a vizsgált probléma megoldása szempontjából vagy elhanyagolhatóak a vizsgált problémában szereplő egyéb távolságokhoz képest. Az anyagi pontként modellezett testek térbeli mozgását egy pontjuk mozgásának megadásával jellemezzük. ♣

Az anyagi pontoknak nincs belső struktúrája vagy alakja – ha egy valós test esetében vannak is erre vonatkozó információink, azokat a modellezés során nem vesszük figyelembe. Bizonyos esetekben – például egy részecskegyorsítóban mozgó elektron vizsgálata során – erre nem is nyílik lehetőség. Ugyanakkor csillagászati problémákban akár a Naprendszer bolygói is anyagi pontokként modellezhetők. Ugyanazt a testet különböző feladatokban más-más mechanikai modellekkel vehetjük figyelembe. Az országutakon közlekedő gépkocsikat anyagi pontokként modellezhetjük, ha a cél a járműforgalom jellemzése (lásd 1.1 ábra). Egy



1.1. ábra. Anyagi pont modellel írható le egy V sebességgel haladó gépkocsi mozgása az utakon.

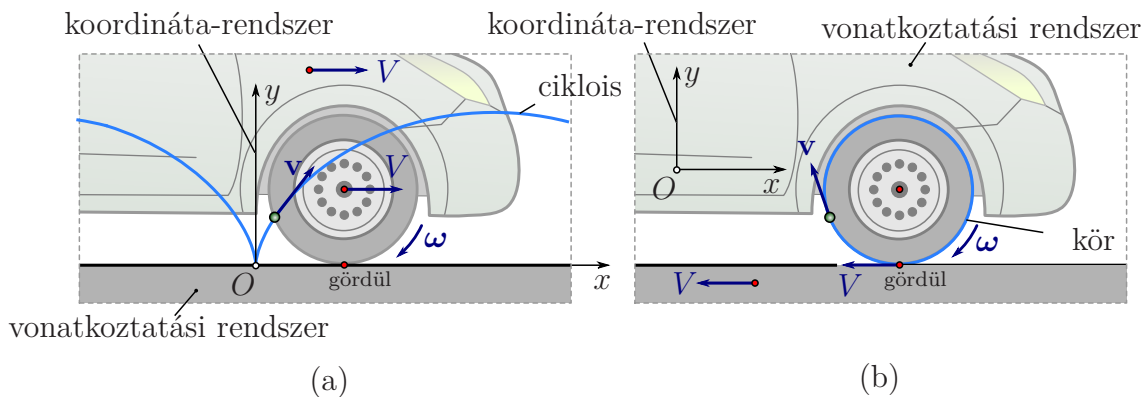
adott manőver (fékezés, kanyarodás) vizsgálata során már fontos a gépkocsi mérete, alakja, tömegeloszlása, tehát alkalmazhatóvá válik a merev test modell. Frontális ütközés közben deformálódik a gépkocsi karosszériája is, tehát itt már deformálható testként kell modellezni.

A kinematikában kiterjedt (tehát nem elhanyagolható méretű) testek egyes pontjainak mozgását is vizsgálhatjuk úgy, mint az ott lévő anyagi pontok mozgását. Ez lehetőséget teremt arra, hogy a merev testek kinematikáját (1.2 fejezet) is az anyagi pontok kinematikájából kiindulva, annak alapvető fogalmait felhasználva vezessük le.

1.1. Az anyagi pontok kinematikája

1.1.1. A kinematika alapvető fogalmai

Bármely anyagi test helyzete és mozgása csak más testekhez képest értelmezhető. Tehát egy test mozgásának leírásához választani kell egy (vagy több) másik testet, amelyhez a mozgást viszonyítjuk.¹ A továbbiakban ezt a „másik” testet *vonatkoztatási rendszernek* nevezzük. A vonatkoztatási rendszert mindig meg kell adni, mert egy adott mozgás különböző vonatkoztatási rendszerekből nézve egészen különböző lehet. Például egy gépkocsi gördülő kerekének pontjai a karosszériához képest körpályákon mozognak, az úthoz képest viszont ún. cikloisgörbéken. Ugyanakkor a mozgó járműben ülve az utastér pontjait állónak látjuk és úgy tűnik, mintha a környezet mozogna (1.2 ábra).



1.2. ábra. A gördülő kerék egy pontjának mozgása függ a vonatkoztatási rendszertől: más alakú pályát és más v sebességvektort látunk a talajhoz rögzített rendszerből (bal oldali ábra), mint a gépkocsihoz rögzítetből (jobb oldali ábra).

A mozgások matematikai leírásához *koordináta-rendszert* kell felvenni.² Fontos annak megértése, hogy egy mechanika feladat megoldása során mind a használandó vonatkoztatási rendszert, mind a koordináta-rendszert nekünk kell megválasztanunk. Mivel a feladatokban általában több kézenfekvő választási lehetőség is adódhat (elvileg végtelen sok van!) a választás során az a legfontosabb szempont, hogy a kiválasztott vonatkoztatási rendszerben és koordináta-rendszerben a lehető legegyszerűbb legyen a feladat megoldása. Például ha a mozgás egy egyenes mentén történik, akkor elegendő egy azzal párhuzamos koordinátatengely felvétele. Bizonyos síkbeli mozgások – például kör- vagy ellipszispályán történő mozgás

¹Célszerű egy merev testet választani, lásd 1.2 fejezet.

²Ezt leggyakrabban a kiválasztott vonatkoztatási rendszerhez rögzítik, de néha célszerű lehet egy másik merev testtel együtt mozognak képzelni.

– esetén alkalmazható a polárkoordináta-rendszer is. Általános térbeli mozgás leírásához a legtöbb esetben a *Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert* használják. Sok esetben található egy kitüntetett irány, például merev test rögzített tengely körüli forgása esetében a tengellyel párhuzamos irány. Ilyenkor célszerű lehet a z tengelyt is ezzel párhuzamosan felvenni. Bonyolult feladatokban viszont általában mérlegelni kell, hogy a koordináták felvételének többféle módja közül melyiket érdemes választani. A koordináták megfelelő megválasztásának nagy jelentősége van a rezgéstani feladatokban is [4].

Az eddig elmondottak tetszőleges test mozgásának leírására is érvényesek. A feladatok megoldása során az első lépésben fel kell állítani a vizsgált testből és környezetéből álló *mechanikai rendszer* modelljét. Ez nemcsak azt jelenti, hogy valamilyen kategóriába (pl. anyagi pont, merev test, deformálható test) soroljuk a testet, hanem a modell alkalmazásához szükséges paraméterek megállapítását (pl. merev test esetében a test alakja, méretei) is magában foglalja. Sőt, azt is meg kell fontolni, hogy hogyan befolyásolják a vizsgált test mozgását a környezetében lévő egyéb testek (lásd 1.1.4 fejezet). Például egy meredek lejtőre tett hasáb esetében kézenfekvő feltételezni, hogy a lejtővel párhuzamosan fog mozogni.

A következő lépésben választani kell a modellhez egy vonatkoztatási rendszert és egy koordináta-rendszert. Egy kiterjedt test esetében akkor tekintjük ismertnek a mozgást, ha a test bármely pontjának adott időpontbeli helyét meg tudjuk mondani. Ha a test pontjainak mozgása között található valamilyen összefüggés, akkor ez akár véges sok időfüggvény segítségével is megtehető.

1.2. definíció. A MOZGÁSTÖRVÉNY az a függvény (vagy függvények összessége), mely(ek) alapján – a mechanikai rendszer modellje, a vonatkoztatási rendszer és a koordináta-rendszer ismeretében – egyértelműen megadható, hogy a vizsgált test pontjainak helye hogyan változik az időben. Anyagi pontként modellezhető testek esetében a mozgástörvény a helyvektor időbeli változását megadó vektor értékű $\mathbf{r}(t)$ függvény.³ ♣

1.1. megjegyzés: A mozgásállapot szabatos leírásához és vizsgálatához nemcsak az anyagi pontok, hanem a merev testek esetében is vektorokat fogunk használni. Nagyon fontos, hogy az egyenletekből egyértelműen kiderüljön, hogy egy adott szimbólum skalár mennyiséget, vektort, annak egy komponensét, nagyságát, stb. jelöli-e. A skalár mennyiségeket dőlt betűvel (pl. m) jelöljük. A differenciálás és integrálás során használt „d” betű viszont álló karakter, mert az nem önálló változó, hanem a differenciált jelöli. Nyomtatásban – ebben a jegyzetben is – a vektorokat vastag betűvel (pl. \mathbf{v}) jelöljük, de kézírásban célszerű az aláhúzás (\underline{v}) vagy a nyíl (\vec{v}) használata. Egy vektor nagyságát (mely lehet előjeles mennyiség is) dőlt betűvel (v), adott skalár komponensét pedig alsó index használatával (v_x) jelöljük. Ha ki akarjuk hangsúlyozni, hogy nem előjeles mennyiségről van szó, akkor az abszolút érték jelet használjuk ($|\mathbf{v}|$) a vektor nagyságának megadásakor. Mátrixok jelölésére nyomtatásban vastag betűt (Θ), kézírásban kettős aláhúzást ($\underline{\underline{\Theta}}$) használunk. A jegyzetben bemutatott levezetések megértéséhez és a számítási módszerek használatához szükséges alapvető vektoralgebrai ismeretek összefoglalása a ?? fejezetben található. ♣

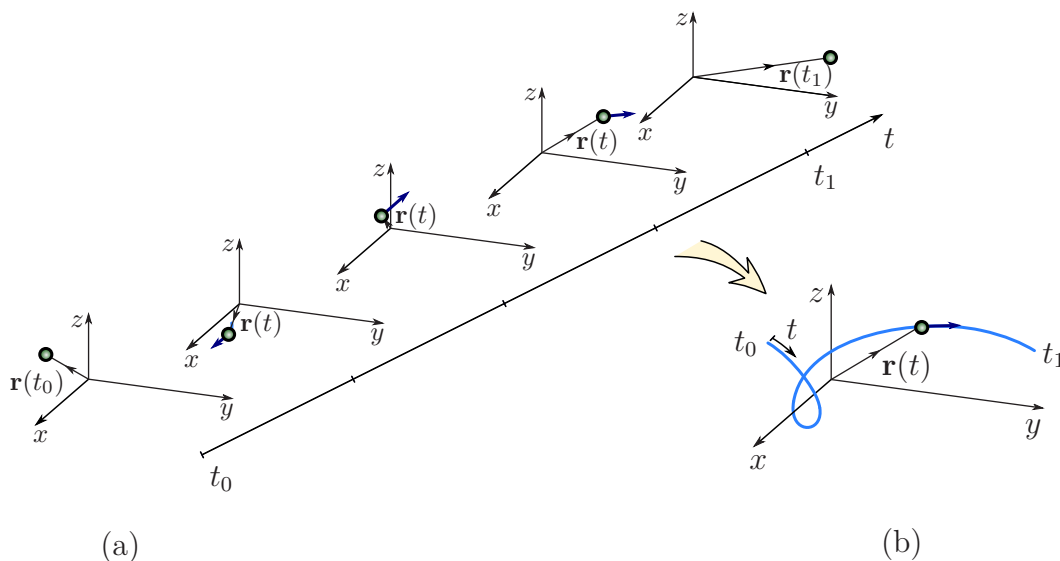
Az anyagi pontok mozgástörvénye – azaz helyvektora – a legáltalánosabb, térbeli mozgás esetében három skalárfüggvény segítségével adható meg, melyek az egyes koordináták

³A magyar nyelvű műszaki mechanikai szakirodalomban általában csak az $\mathbf{r}(t)$ függvényt nevezik mozgástörvénynek (vagy mozgásfüggvénynek), míg a fizikai – és a külföldi – szakirodalom nem használja ezt a fogalmat. Mi hasznosnak találtuk a fenti, kibővített értelemben megőrizni a mozgástörvény fogalmát.

időbeli változását írják le.⁴ A leggyakrabban használt, Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ koordináták időbeli változásának együttes ábrázolásához négydimenziós térre (x, y, z, t) lenne szükség. Megoldást jelenthet egy ábrásorozat („film”) készítése, mint



1.3. ábra. Anyagi pont mozgása térben és időben. A bal oldali ábrásorozaton az anyagi pont helyét ábráztuk különböző időpontokban. A jobb oldali ábra az egymás után elfoglalt térbeli pozíciók összekötésével kapott pályát mutatja.

az 1.3 ábrán. Ennél gyakrabban alkalmazott megoldás, hogy külön-külön ábrázolják az $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ függvényeket, vagy az (xyz) koordináta-rendszerben rajzolják meg a mozgástörvény grafikonját – azaz nem ábrázolják az időtengelyt. Ez utóbbi esetben kapjuk az anyagi pont pályáját.

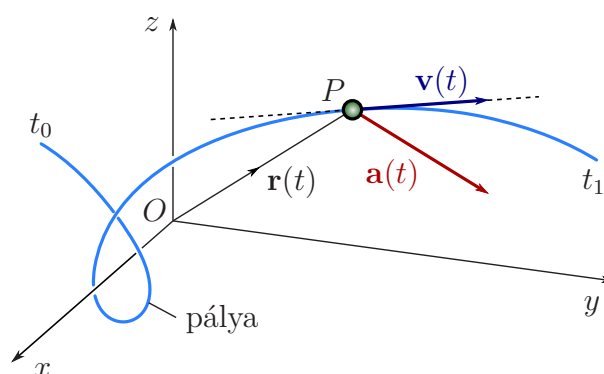
1.3. definíció. A PÁLYA az anyagi pont $\mathbf{r}(t)$ helyvektorának grafikonja térben, az időfüggés feltüntetése nélkül. A pálya tehát azt adja meg, hogy mely geometriai pontokon halad keresztül mozgása során az anyagi pont (1.4 ábra). ♣

1.4. példa: Egy anyagi pont mozgástörvényéről tudjuk, hogy

$$\mathbf{r}(t) \equiv \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t \\ z_0 + v_{0z}t \end{bmatrix}$$

alakú, ahol x_0 , y_0 , z_0 , v_{0x} , v_{0y} és v_{0z} ismert, állandó értékű paraméterek. Milyen alakú a pálya?

⁴Ezeknek a skalárfüggvényeknek egyértékűeknek és folytonosoknak kell lenniük, továbbá – a később bevezetendő sebesség és gyorsulás definíciójával összhangban – feltételezzük, hogy legalább kétszer differenciálhatók is.



1.4. ábra. Anyagi pont mozgásának kinematikai jellemzői. Az ábra a pálya t_0 és t_1 időpontok közti szakaszát ábrázolja, külön feltüntetve a pálya P geometriai pontjában található anyagi pont $\mathbf{r}(t)$ helyvektorát, $\mathbf{v}(t)$ sebességét és $\mathbf{a}(t)$ gyorsulását egy kiválasztott t pillanatban.

Megoldás:

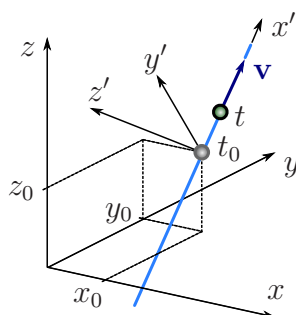
A helyvektor $x(t)$ komponenséből kifejezhető a t idő:

$$t = \frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}.$$

Az eredmény behelyettesíthető a másik két skalárfüggvénybe, melyek így az x koordináta függvényei lesznek:

$$y(x(t)) = y_0 + v_{0y} \frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}, \quad z(x(t)) = z_0 + v_{0z} \frac{x(t) - x_0}{v_{0x}}.$$

Ez azt jelenti, hogy elég csupán az $x(t)$ függvény a mozgás leírásához. Mivel mind az $y(x)$, mind a $z(x)$ függvény lineáris x -ben, az anyagi pont pályája egyenes, azaz egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez, amint az 1.5 ábra mutatja. ♠



1.5. ábra. Térbeli egyenesen mozgó anyagi pont és a pályához illeszkedő koordináta-rendszer.

1.2. megjegyzés: Az előző példa megoldásából látszik, hogy ott nem a legcélszerűbben volt felvéve az (xyz) koordináta-rendszer. Jelentősen egyszerűsíthettük volna a mozgás leírását, ha az egyenes pályával párhuzamosan vesszük fel az egyik tengelyt, mint az 1.5 ábrán az x' tengelyt. ♣

A mozgástörvény minden információt tartalmaz az anyagi pont mozgásával kapcsolatban, mégis érdemes további, a hétköznapi életben is használatos fogalmakat bevezetni. A mozgás ütemét és irányát a *sebesség* jellemzi:

1.5. definíció. *Anyagi pont* PILLANATNYI SEBESSÉGE (VAGY SEBESSÉGE): az $\mathbf{r}(t)$ helyvektor idő szerinti deriváltja, vektormennyiség. Mértékegysége: m/s.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (1.1)$$

Az idő szerinti deriválást gyakran a deriválandó függvény fölé tett ponttal jelöljük, azaz

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t). \quad \clubsuit$$

A differenciálhányados értelmezéséből következik, hogy a sebességvektor mindig a pálya érintője irányába – a haladás irányába – mutat, amint az 1.4 ábrán is látszik.

1.3. megjegyzés: A dinamika levezetéseiben gyakran van szükség vektormennyiségek deriválására, ezért nagyon fontos kiemelni, hogy *csak akkor nulla egy vektor idő szerinti deriváltja, ha sem a nagysága, sem az iránya nem változik*. Ez könnyen belátható a a körpályán történő mozgás (lásd 1.15. példa) kapcsán: ha a kör középpontjában vesszük fel az origót, akkor az $\mathbf{r}(t)$ helyvektor nagysága a körpálya sugarával egyezik meg, tehát állandó, a sugárra merőleges irányú sebesség viszont – a helyvektor idő szerinti deriváltja – természetesen nem nulla! \clubsuit

A mozgás során a sebesség is változhat, ennek ütemét jellemzi a *gyorsulás*:

1.6. definíció. *Anyagi pont* PILLANATNYI GYORSULÁSA (GYORSULÁSA): a sebességvektor idő szerinti deriváltja, vektormennyiség. Mértékegysége: m/s².

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t). \quad (1.2)$$

\clubsuit

A definícióból következik, hogy a gyorsulás a helyvektor idő szerinti második deriváltja: $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$.

A gyorsulásvektor kapcsán ismét utalunk a vektorok deriválásával kapcsolatos 1.3. megjegyzésre. Ennek értelmében a gyorsulás akkor is különbözik nullától, ha a sebességnek csak az iránya változik. Tehát egy állandó *nagyságú* sebességgel körpályán (vagy bármilyen, nem egyenes pályán) mozgó anyagi pont gyorsulása nem nulla. *Csak az egyenes vonalú, egyenletes mozgás esetében nulla a gyorsulás.*

1.4. megjegyzés: Mivel a kinetika egyenleteinek felírásához (lásd 2.1 fejezet) általában nem szükséges a helyvektor magasabb rendű deriváltjainak ismerete, ezeket ritkán használják. A helyvektor harmadik deriváltjának (németül „ruck”, angolul „jerk”) értéke például a tömegközlekedési járművek mozgása során lehet fontos: az álló utasok testtartásuk megváltoztatásával könnyen tudnak alkalmazkodni egy adott gyorsuláshoz, a gyorsulás – és a ható erők – hirtelen megváltozását viszont nem tudják követni. \clubsuit

1.1.2. A sebesség és a gyorsulás a pályához illeszkedő koordináta-rendszerben

Az előző fejezetben beláttuk, hogy a sebességvektornak párhuzamosnak kell lennie a pálya érintőjével. Következésképpen, ha a pálya minden pontjához hozzárendelünk egy olyan koordináta-rendszert, melynek az egyik tengelye érintő irányú, akkor a sebességvektor megadása leegyszerűsödik.

Ehhez hasonlóan, a gyorsulásvektor is megadható két „természetes”, pályához illeszkedő komponens segítségével, melyek közül az egyik a sebesség *nagyságának* változásával kapcsolatos és szintén érintő irányú, a másik pedig a sebesség *irányának* változását jellemzi és a pálya érintőjére merőleges.

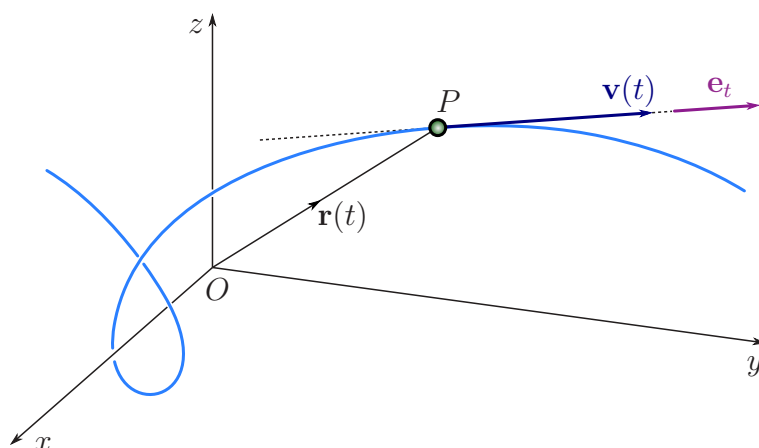
A fenti állítások bizonyításához fel kell használnunk a differenciálgeometria [13, 16] néhány fogalmát és összefüggését. Ehhez feltételezzük, hogy a pálya vizsgált szakasza kétszer deriválható folytonos görbe és a sebesség nem nulla, azaz valóban halad az anyagi pont⁵.

Vezessük be a sebességvektorral párhuzamos \mathbf{e}_t *érintő egységvektor*, más néven *tangenciális egységvektor* fogalmát az alábbi módon:

1.7. definíció. Az \mathbf{e}_t TANGENCIÁLIS EGYSÉGVEKTOR a pálya érintője irányába mutató, a sebességvektorral megegyező értelmű, egységnyi hosszúságú vektor, azaz

$$\mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}, \quad (1.3)$$

ahol $|\mathbf{v}(t)|$ a sebesség abszolút értéke (1.6 ábra). ♣



1.6. ábra. Az \mathbf{e}_t érintő egységvektor egységnyi hosszúságú és a pálya érintőjével – egyúttal a sebességvektorral is – párhuzamos.

1.8. következmény. A sebességvektor kifejezhető

$$\mathbf{v}(t) = |\mathbf{v}(t)|\mathbf{e}_t \quad (1.4)$$

alakban. Ennek megfelelően, a tangenciális egységvektort egy pályához illeszkedő koordináta-rendszer egyik bázisvektorának tekinthetjük, ahogy az 1.8 ábra is mutatja. ♠

A gyorsulásvektor általában nem párhuzamos a pálya érintőjével, de annak is lehet érintő irányú komponense (lásd 1.7 ábra).

⁵A sebességet csak a pálya megfelelően sima szakaszain tudjuk értelmezni, hiszen egy „szögletes”, például sokszög alakú pálya esetében a csúcsokban nem értelmezhető a helyvektor deriváltja. Továbbá, a pályához illeszkedő koordináta-rendszer tengelyeinek irányítását a sebesség irányával szeretnénk megadni, azonban nulla sebesség mellett ez határozatlan.

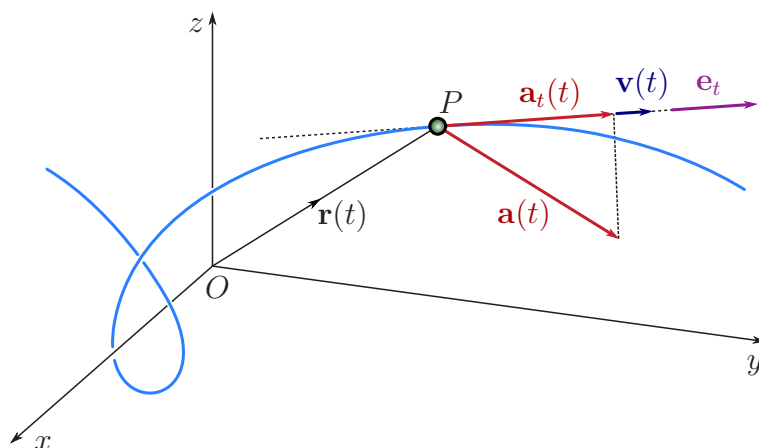
1.9. definíció. A gyorsulásvektor érintő irányú vetülete, az a_t TANGENCIÁLIS GYORSULÁS (skalármennyiség) az alábbi skaláris szorzattal kapható meg:

$$a_t = \mathbf{a} \mathbf{e}_t. \quad (1.5)$$

A sebességvektorhoz hasonlóan bevezethetjük az \mathbf{a}_t TANGENCIÁLIS GYORSULÁSVEKTOR fogalmát is, az alábbi módon:

$$\mathbf{a}_t \equiv a_t \mathbf{e}_t = (\mathbf{a} \mathbf{e}_t) \mathbf{e}_t. \quad (1.6)$$

♣



1.7. ábra. A gyorsulásnak is lehet a pálya érintőjével (azaz a \mathbf{v} és \mathbf{e}_t vektorokkal) párhuzamos összetevője: az \mathbf{a}_t tangenciális gyorsulás.

A gyorsulásnak azt az \mathbf{a}_n komponensét ami nem párhuzamos a sebességgel, *normális gyorsulásvektornak* nevezzük.

1.10. definíció. A NORMÁLIS GYORSULÁSVEKTOR az anyagi pont \mathbf{a} gyorsulásvektorának és az \mathbf{a}_t tangenciális gyorsulásvektornak a különbsége:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t. \quad (1.7)$$

♣

A fenti képletekből következik, hogy a normális gyorsulás vektora merőleges az \mathbf{e}_t tangenciális egységvektorra (1.8 ábra).

Ha a normális gyorsulás nagysága nem nulla, azaz

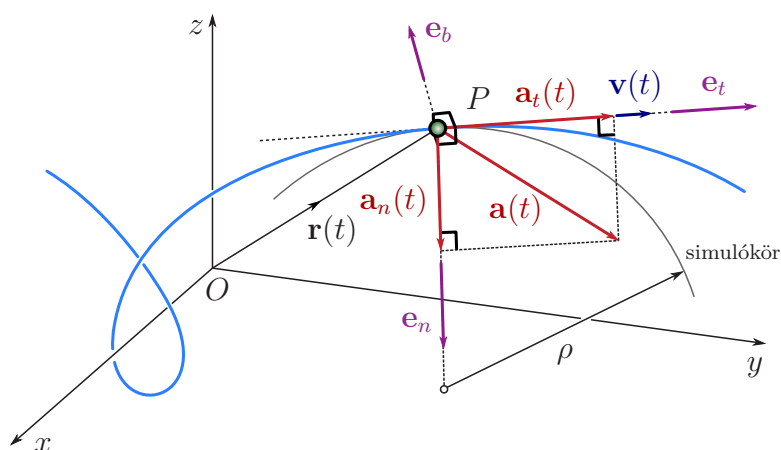
$$a_n \equiv |\mathbf{a}_n| \neq 0, \quad (1.8)$$

akkor az alábbi módon definiálható a pályához illeszkedő koordináta-rendszer második tengelyének bázisvektora, az egységnyi hosszúságú \mathbf{e}_n normális egységvektor:

1.11. definíció. A NORMÁLIS EGYSÉGVEKTOR

$$\mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{a}_n}{a_n}. \quad (1.9)$$

♣



1.8. ábra. A sebesség a pálya érintőjével párhuzamos, a gyorsulás pedig egy érintő irányú \mathbf{a}_t és egy arra merőleges, a simulókör középpontja felé mutató \mathbf{a}_n komponensre bontható. Ennek megfelelően a pálya minden pontjához hozzárendelhető az \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n és \mathbf{e}_b egységvektorokból álló bázis, az ún. kísérő triéder.

1.12. következmény. A gyorsulásvektor a következő alakban fejezhető ki az \mathbf{e}_t tangenciális és \mathbf{e}_n normális egységvektorokkal:

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{e}_t + a_n \mathbf{e}_n. \quad (1.10)$$



A fentiek szerint mind a sebesség, mind a gyorsulás megadható a bevezetett \mathbf{e}_t és \mathbf{e}_n bázisvektorok segítségével. A pályához illeszkedő koordináta-rendszer harmadik, \mathbf{e}_b binormális bázisvektorát abból kiindulva vezetjük be, hogy az legyen merőleges mind az \mathbf{e}_t , mind az \mathbf{e}_n vektorra, továbbá \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n és \mathbf{e}_b alkossanak jobbsodrású rendszert. Mindkét követelmény teljesül, ha a vektoriális szorzás tulajdonságait kihasználva az alábbi módon definiáljuk a binormális egységvektort:

1.13. definíció. A BINORMÁLIS EGYSÉGVEKTOR

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n. \quad (1.11)$$



Mivel a pálya minden pontjában más és más irányúak lehetnek az \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n és \mathbf{e}_b vektorok, ezt a három bázisvektort *kísérő triédernek* nevezik (1.8 ábra).

A kísérő triéder bevezetését az motiválta, hogy kapcsolatot találtunk a pálya alakja és a sebesség iránya – a tangenciális egységvektor – között. Az alábbi tételben azt vizsgáljuk meg, hogy a *gyorsulás* összetevői milyen kapcsolatban vannak a pálya geometriai jellemzőivel.

1.14. tétel. A TANGENCIÁLIS GYORSULÁS a sebesség ABSZOLÚT ÉRTÉKÉNEK idő szerinti deriváltja:

$$a_t = |\dot{\mathbf{v}}|. \quad (1.12)$$

A NORMÁLIS GYORSULÁS a sebesség IRÁNYÁNAK változásával kapcsolatos mennyiség. Nagysága

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (1.13)$$

ahol ρ a pálya görbületi sugara. A normális gyorsulásvektor a pálya görbületi középpontja felé mutat, ahogy az 1.8 ábra is mutatja. A fentiek szerint a gyorsulásvektor az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mathbf{a} = |\dot{\mathbf{v}}|\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n. \quad (1.14)$$

Bizonyítás:

Az (1.10) képlet szerint

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{e}_t + a_n\mathbf{e}_n. \quad (1.15)$$

Ugyanakkor, mivel a gyorsulás az (1.4) egyenlettel kifejezhető sebességvektor idő szerinti deriváltja,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(|\mathbf{v}|\mathbf{e}_t) = |\dot{\mathbf{v}}|\mathbf{e}_t + |\mathbf{v}|\dot{\mathbf{e}}_t. \quad (1.16)$$

Itt $|\dot{\mathbf{v}}|$ a sebesség abszolút értékének deriváltja. Az \mathbf{e}_t tangenciális egységvektor deriváltjának kifejezéséhez vegyük figyelembe, hogy annak nagysága nem változhat, hiszen mindig egységyi hosszúságú. Ezért \mathbf{e}_t deriváltja csak az irányának – és egyúttal a sebesség irányának – megváltozásával lehet kapcsolatban (lásd 1.3. megjegyzés). A derivált kiszámításához írjuk át az $|\mathbf{e}_t| = 1$ feltételt egy ezzel egyenértékű, de matematikailag jobban kezelhető alakba:

$$|\mathbf{e}_t| = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_t^2 = \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t = 1. \quad (1.17)$$

A kapott kifejezés idő szerint deriválásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_t^2 = 2\mathbf{e}_t \cdot \dot{\mathbf{e}}_t = 0,$$

azaz a skaláris szorzat tulajdonságai miatt az $\dot{\mathbf{e}}_t$ vektor merőleges az \mathbf{e}_t vektorra. Ebből következik, hogy az (1.15) és (1.16) képletek összehasonlításából

$$a_t = |\dot{\mathbf{v}}| \quad \text{és} \quad (1.18)$$

$$a_n\mathbf{e}_n = |\mathbf{v}|\dot{\mathbf{e}}_t. \quad (1.19)$$

(1.18) szerint a tétel tangenciális gyorsulásra vonatkozó részét beláttuk. Az (1.19) képletből látható az is, hogy az $\dot{\mathbf{e}}_t$ vektor párhuzamos az \mathbf{e}_n normális egységvektorral, tehát a normális gyorsulás valóban a sebesség irányának megváltozását jellemzi.

A normális gyorsulás nagyságának kifejezéséhez a differenciálgeometria egy fontos tételét használjuk fel.

A tétel szerint egy $\mathbf{r}(t)$ vektor-skalár függvénnyel megadott sima pálya pontjaihoz ún. *simulókört* lehet rajzolni. A pályához rendelhető \mathbf{e}_t érintő egységvektor $\dot{\mathbf{e}}_t$ deriváltja (tehát a fentiekből következően \mathbf{e}_n is) egy olyan vektor, mely a simulókör görbületi középpontja felé mutat. A pálya ρ görbületi sugara definíció szerint a simulókör sugarával egyezik meg, ami

$$\rho = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^3}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}. \quad (1.20)$$

Mivel $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $|\dot{\mathbf{r}}| = |\mathbf{v}|$ és $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}$, a görbületi sugár kifejezése átírható az alábbi alakba:

$$\rho = \frac{|\mathbf{v}|^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{\left| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \times \mathbf{a} \right|}, \quad (1.21)$$

ahol $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ a tangenciális egységvektor. A tört számlálójában a sebesség előjeles nagyságát megadó v négyzete $v^2 = |\mathbf{v}|^2$. A nevezőből pedig $\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_t = \mathbf{0}$ és $|\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n| = |\mathbf{e}_b| = 1$ felhasználásával kifejezhető a normális gyorsulás nagysága:

$$\left| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \times \mathbf{a} \right| = |\mathbf{e}_t \times (a_t \mathbf{e}_t + a_n \mathbf{e}_n)| = |\mathbf{e}_t \times a_n \mathbf{e}_n| = a_n. \quad (1.22)$$

Következésképpen,

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (1.23)$$

azaz a tétel minden állítását beláttuk. (1.19) és (1.23) összehasonlításából az is látszik, hogy

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \frac{|\mathbf{v}|}{\rho} \mathbf{e}_n. \quad (1.24)$$



A fenti tételben szereplő $|\mathbf{v}|$ a sebesség abszolút értékét jelöli, hiszen a tangenciális egységvektor tartalmazza a sebesség irányával kapcsolatos információt. Ennek megfelelően, az a_t tangenciális gyorsulás a sebesség abszolút értékének változását mutatja: pozitív, ha a sebesség abszolút értéke nő és negatív, ha a sebesség abszolút értéke csökken.

A normális gyorsulás mindig a normális egységvektor irányába, azaz a pálya görbületi középpontja felé mutat, ezért nem lehet negatív. Nulla értéket $v = 0$ vagy $\rho \rightarrow \infty$ esetében vehet fel. Ez utóbbi feltétel egyenes vonalú pályán és görbe vonalú pálya inflexiók pontjaiban teljesül.⁶

1.5. megjegyzés: Differenciálgeometriából az is ismert, hogy ha az anyagi pont az (x, y) síkon mozog és adott a pályát leíró $y(x)$ függvény, akkor a pálya κ görbülete – a simulókör sugarának reciproka – az alábbi képlettel számítható:

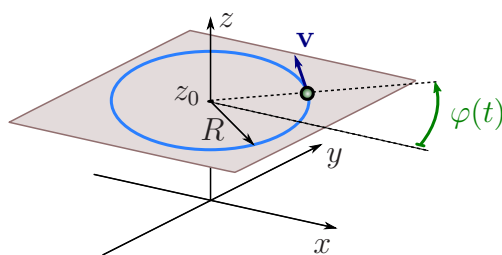
$$\kappa \equiv \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ezt a képletet használják a Szilárdságtan keretében tárgyalt rugalmas szál differenciálegyenletének levezetése során is. 

Merev testek mozgásának vizsgálata során sok feladatban találhatók körpályán mozgó pontok. Ezek azonosítása jelentősen egyszerűsíti a kialakuló mozgás elképzelését és a feladatok megoldását, hiszen közvetlenül alkalmazhatóvá válnak az anyagi pontok kinematikájának eredményei. Ez adja a következő példa jelentőségét, melyben anyagi pont keringésére alkalmazzuk a sebességről és gyorsulásról tanultakat.

1.15. példa: Anyagi pont rögzített O pont körüli R sugarú körpályán történő mozgása, azaz KERINGÉSE.

⁶Anyagi pont pillanatnyi sebessége is és gyorsulása is a simulókör síkjába, az ún. simulósíkba esik. A pálya akkor lehet igazi térbeli görbe, ha a mozgás során folyamatosan változó irányú \mathbf{e}_t és \mathbf{e}_n vektorok által kifeszített simulósík helyzete változik. Megmutatható, hogy a simulósík pálya menti elfordulását a *torzió* nevű mennyiség jellemzi, ami a helyvektor harmadik deriváltjával van kapcsolatban.



1.9. ábra. Körpályán mozgó anyagi pont.

Keringés során a test helyvektora

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cos(\varphi(t)) \\ R \sin(\varphi(t)) \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

alakban adható meg, az 1.9 ábra szerint. Itt kihasználtuk, hogy a test helyzete jellemezhető egy időben változó $\varphi(t)$ szögkoordináta segítségével. A továbbiakban feltételezzük, hogy a φ szöget a sebesség irányának megfelelő irányítással mérjük fel, tehát a mozgás során φ nő. Határozzuk meg az anyagi pont sebességét és gyorsulását, valamint azok pályához illeszkedő komponenseit!

Megoldás:

A helyvektor idő szerinti deriválásával – az összetett függvények deriválási szabályát alkalmazva – meghatározható az anyagi pont sebessége:

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} -R\dot{\varphi} \sin(\varphi(t)) \\ R\dot{\varphi} \cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{bmatrix} = R\dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

és gyorsulása:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) &= \begin{bmatrix} -R\ddot{\varphi} \sin(\varphi(t)) - R\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi(t)) \\ R\ddot{\varphi} \cos(\varphi(t)) - R\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= R\ddot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{bmatrix} + R\dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} -\cos(\varphi(t)) \\ -\sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Az eredményül kapott vektorokat az 1.10 ábrán tüntettük fel. A képletek alapján belátható, hogy a \mathbf{v} sebességvektor nagysága $v = |\mathbf{v}| = R\dot{\varphi}$, iránya pedig merőleges az \mathbf{r} helyvektorra, tehát valóban érintő irányú.

A tangenciális egységvektor

$$\mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{v}}{v} = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Ilyen irányú a gyorsulásvektort megadó (1.27) képlet első tagja is, melyben az \mathbf{a}_t tangenciális gyorsulásvektort ismerhetjük fel. Ennek előjeles nagysága

$$a_t \equiv \dot{v} = R\ddot{\varphi}, \quad (1.29)$$

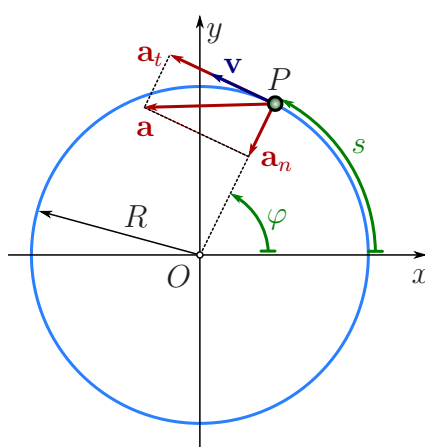
ami valóban a sebesség nagyságának a deriváltja.

A gyorsulásvektor másik komponense a normális gyorsulás, melynek egységvektora a körpálya középpontja felé mutat:

$$\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} -\cos(\varphi(t)) \\ -\sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Mivel a pálya görbületi sugara R , a normális gyorsulás nagysága is összhangban van az 1.14. tétel állításaival:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\dot{\varphi})^2}{R} = R\dot{\varphi}^2. \quad (1.31)$$



1.10. ábra. Körpályán mozgó anyagi pont sebességének és gyorsulásának pályához illeszkedő komponensei.

A fenti példában feltettük, hogy ismert a sebesség iránya, ezért annak megfelelően tudtuk felvenni a tangenciális egységvektort. Következésképpen, használhattuk a sebesség előjeles nagyságát jelölő v szimbólumot a sebesség $|\mathbf{v}|$ abszolút értéke helyett.

Természetesen előfordulhat – például rezgéstani feladatokban –, hogy az adott pályán mozgó anyagi pont megáll és ugyanazon a pályán visszafelé indul el. Ekkor az $\mathbf{e}_t = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ definíció szerint minden irányváltáskor megfordul a tangenciális egységvektor iránya is, a megállás pillanatában pedig \mathbf{e}_t nem értelmezhető.

Ebben az esetben úgy járhatunk el, hogy a két lehetséges (egymással ellentétes) tangenciális egységvektor közül kiválasztjuk az egyiket és a sebesség v előjeles nagyságával számolunk $|\mathbf{v}|$ helyett.

1.16. definíció. A sebesség v előjeles nagyságát PÁLYASEBESSÉGNEK nevezzük.



Ha az \mathbf{e}_t tangenciális egységvektort a sebesség tényleges irányában vesszük fel, akkor $\dot{v} > 0$ azt jelenti, hogy a pozitív v nagyságú sebesség nő, tehát ez megfelel a tangenciális gyorsulásnak. Azonban ha a sebesség tényleges irányával ellentétesen vesszük fel a tangenciális egységvektort, akkor v negatív, ezért $\dot{v} > 0$ a sebesség abszolút értékének csökkenését jelenti, ami nem felel meg a tangenciális gyorsulás eredeti értelmezésének. Ezért szokták bevezetni a pályagyorsulás fogalmát:

1.17. definíció. A PÁLYAGYORSULÁS a sebesség előjeles nagyságának idő szerinti deriváltja. ♣

A szakirodalomban általában a pályagyorsulást is tangenciális gyorsulásnak nevezik. E két fizikai mennyiség valóban megegyezik, ha egy olyan kiválasztott pillanatban vizsgáljuk a mozgást, amikor a sebesség iránya ismert. A következő fejezetben megmutatjuk, hogy a pályagyorsulás fogalma abban különbözik a tangenciális gyorsulástól, hogy nem a sebességtől függő irányú \mathbf{e}_t tangenciális egységvektorhoz képest, hanem egy pálya mentén felvett koordinátához képest adja meg a sebesség változásának az előjelét.

1.1.3. Pályához illeszkedő koordináták

Körpálya menti mozgás leírása

Az 1.15. példában láttuk, hogy az anyagi pont körpályán történő mozgásának jellemzésére elegendő a $\varphi(t)$ szög időbeli változásának megadása. Ezt a szöveget a pont koordinátájának is tekinthetjük egy pályához illeszkedő polárkoordináta-rendszerben, ahol $r = R =$ állandó. Ha definiáltuk a φ koordináta növekedésének irányát, akkor a pálya ismeretében a $\varphi(t)$ függvény alapján megállapítható az anyagi pont mozgásának minden jellemzője.

A sebesség előjeles nagysága – a *pályasebesség* – megadható a $\varphi(t)$ szög idő szerinti deriváltja segítségével:

$$v = R\dot{\varphi}. \quad (1.32)$$

A pályasebesség további deriválásával a gyorsulás érintő irányú komponensének előjeles nagyságát kapjuk, a *pályagyorsulást*:

$$\dot{v} = R\ddot{\varphi}. \quad (1.33)$$

A fentiek alapján körpályán történő keringés jellemzésére érdemes bevezetni két újabb fogalmat:

$$\omega = \dot{\varphi}(t) \quad (1.34)$$

a *keringés szögsebessége*,

$$\varepsilon = \ddot{\varphi}(t) \quad (1.35)$$

pedig a *keringés szöggyorsulása*. Ezekkel az előjeles mennyiségekkel megadható mind a pályasebesség, mind a pályagyorsulás:

$$v = R\omega, \quad (1.36)$$

$$\dot{v} = R\varepsilon. \quad (1.37)$$

Nagyon fontos hangsúlyozni, hogy *anyagi pont szögsebességét és szöggyorsulását nem értelmezzük*, a bevezetett mennyiségek a *körpályán történő keringést* jellemzik! Úgy is képzelhetjük, hogy a körpályán keringő pont egy rögzített irányú tengely körül forgó merev test valamely pontja és a bevezetett szögsebesség illetve szöggyorsulás ennek a merev testnek a mozgását jellemzi (lásd 1.2 fejezet).

1.6. megjegyzés: Ha összevetjük az (1.36) képletet az (1.24) képlettel, akkor láthatjuk, hogy $|\dot{\mathbf{e}}_t| = |\omega|$. A szögsebesség tehát – mely a merev testek kinematikájának egyik központi fogalma – úgy tekinthető, hogy egy vektor „elfordulásának ütemét” jellemzi. ♣

Tetszőleges pályához illeszkedő koordinátázás

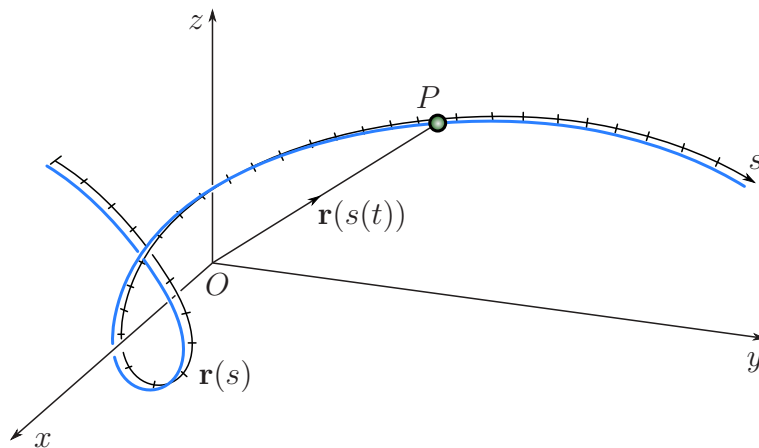
A pályasebesség és a pályagyorsulás akkor is értelmezhető, ha a pálya nem kör alakú, de ehhez a φ szög helyett egy másik, pályához illeszkedő koordinátára van szükség. Ha a pálya egyenes, akkor célszerű a pályával párhuzamos irányban felvenni az egyik koordináta-tengelyt – például az x tengelyt –, mint az 1.25. példában. Ekkor a pályagyorsulás és a pályasebesség

$$v = \dot{x}, \quad (1.38)$$

$$\dot{v} = \ddot{x}. \quad (1.39)$$

Előfordulhat, hogy az anyagi pont pályája ismert, de nem egyenes vagy kör, hanem valamilyen bonyolult alakú görbe – például ilyen egy autópálya nyomvonala. Ebben az esetben is bevezethető egy olyan koordináta, ami felhasználható a pályán haladó anyagi pont mozgásának leírására. Nem választhatjuk minden pálya esetében valamelyik Descartes-koordinátát, ugyanis ha a pálya hurkokat ír le a térben, akkor az x , y vagy z koordináta egy adott értéke a pálya több pontját is jellemezheti (lásd pl. 1.4 ábra). Ehelyett a pálya mentén mért s ívhosszt használhatjuk, mert az egyértelműen megadja az anyagi pont pályán elfoglalt helyét.

1.18. definíció. Adott pályán mozgó anyagi pont pozícióját egyértelműen megadhatjuk egy választott kezdőponttól mért s ÍVHOSSZPARAMÉTERREL, azaz a pálya mentén mért koordinátával (1.11 ábra). Az ívhosszparaméter időbeli változását megadó $s(t)$ skalárfüggvényt BEFUTÁSI TÖRVÉNYNEK nevezzük. ♣



1.11. ábra. Az s ívhossz megadja az anyagi pont pálya menti pozícióját – mintha egy mérőszalagot illesztenénk a pályához.

A pálya ismeretében tehát az $\mathbf{r}(t)$ helyvektor $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ komponensei kifejezhetők a befutási törvény segítségével, azaz $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t))$ (1.12 ábra). Az 1.15. példában a befutási törvény $s(t) = R\varphi(t)$ alakban adható meg, tehát $x(t) = R \cos(s(t)/R)$. A mozgástörvény és a befutási törvény közötti összefüggés sok esetben ennél jóval bonyolultabban adható meg. Egy autópályán haladó gépkocsi esetében az út mentén található kilométer táblák mutatják az s ívhosszparaméter aktuális értékét. A táblák koordinátái nem képlet, hanem például egy térkép segítségével határozhatók meg az ívhosszparaméter értékéből.

Az ívhosszparaméter nem keverendő össze a középiskolában megismert út fogalmával: s a pálya menti *pozíciót* (pálya menti elmozdulást) adja meg, tehát a kezdőpont felvételétől

függően akár negatív is lehet, illetve a mozgás irányától függően növekedhet vagy csökkenhet. Ezzel szemben az anyagi pont által megtett út mindig pozitív: ha a test a pálya A kezdőpontjából B -be megy, majd vissza az $s = 0$ ívhosszparaméterű A kezdőpontba, akkor a mozgás végén az ívhosszparaméter zérus, a megtett út viszont az AB ívhossz kétszerese lesz.

Az alábbi tétel szerint az ívhosszparaméter fogalma jól használható a pályasebesség és pályagyorsulás kiszámítása során.

1.19. tétel. *A PÁLYASEBESSÉG a befutási törvény idő szerinti deriváltja:*

$$v = \dot{s}(t) \quad (1.40)$$

Bizonyítás:

Az összetett függvények differenciálási szabálya segítségével a sebesség az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}(s(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (1.41)$$

Differenciálgeometriai alapon belátható, hogy a fenti szorzat első tényezője egységnyi hosszúságú és a pálya érintőjével párhuzamos. Ez tehát egy olyan vektor, ami vagy megegyezik a sebesség irányában felvett tangenciális egységvektorral, vagy azzal ellentétes irányú:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \pm \mathbf{e}_t. \quad (1.42)$$

Mivel a sebességnek csak érintő irányú komponense lehet, az (1.41) jobb oldalán szereplő szorzat második tényezője a sebesség előjeles nagysága, azaz a pályasebesség. ♠

1.20. következmény. *A PÁLYAGYORSULÁS a befutási törvény második idő szerinti deriváltja:*

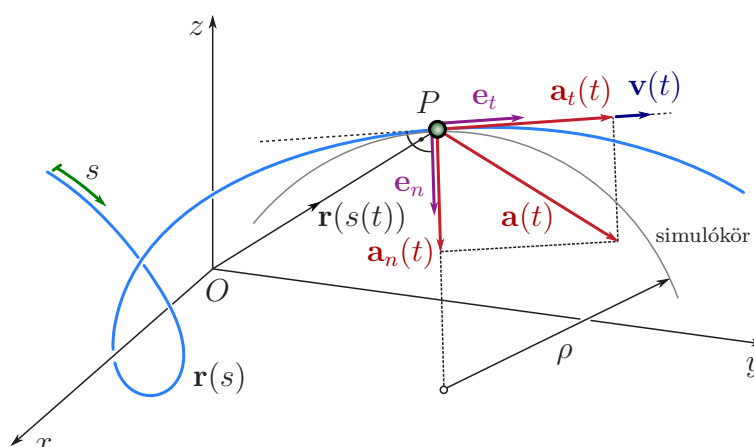
$$\dot{v} = \ddot{s}(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2}. \quad \spadesuit$$

Anyagi pontok mozgása jól szemléltethető az $s(t)$ befutási törvény, $\dot{s}(t)$ pályasebesség és $\ddot{s}(t)$ pályagyorsulás függvények ábrázolásával.

1.21. definíció. *Az $s(t)$ befutási törvény, $v = \dot{s}(t)$ pályasebesség és $\dot{v} = \ddot{s}(t)$ pályagyorsulás grafikonjait FORONÓMIAI GÖRBÉKNEK nevezzük.* ♣

Ha az anyagi pont nem fordul vissza a pályáján, akkor az ívhosszparamétert a sebesség irányának megfelelően célszerű felvenni. Ekkor a pályasebesség pozitív, a pályagyorsulás pedig a tangenciális gyorsulással egyezik meg, azaz $v = |\mathbf{v}|$ és $a_t = \dot{v}$. Ilyen eseteket láthatunk az 1.13 és 1.24 ábrákon.

A pályagyorsulás és a tangenciális gyorsulás akkor különbözik, ha az ívhosszkoordinátát nem a sebesség irányának megfelelően vesszük fel. Adott pályán történő, váltakozó irányú mozgás esetén célszerű az ívhosszkoordinátával definiált pályasebesség és pályagyorsulás használata. Ugyanis ha például egy egyenes pályán mozgó anyagi pont lelassul nulla nagyságú sebességre, majd ellenkező irányban felgyorsul, akkor a sebesség irányához kötött



1.12. ábra. Az $s(t)$ ívhosszparaméter (befutási törvény) alapján egyértelműen meghatározható az $\mathbf{r}(s(t))$ mozgástörvény, így a sebesség és a gyorsulás komponensei is kifejezhetők a befutási törvény deriváltjai segítségével.

skalár tangenciális gyorsulás előjelet vált, míg a pályagyorsulás nem vált előjelet.⁷ A pályagyorsulás és a tangenciális gyorsulás közti különbséget az 1.14 ábra szemlélteti. Ahogy az ábrán is látszik, a rezgő mozgás folyamatának jellemzésére sokkal alkalmasabb a $v = \dot{s}$ pályasebesség és az \ddot{s} pályagyorsulás, mint a sebesség $|\mathbf{v}|$ abszolút értéke és az a_t tangenciális gyorsulás.

1.7. megjegyzés: A szakirodalomban elterjedtebb az a megközelítés, melyben nem kötik ki, hogy az \mathbf{e}_t érintő egységvektor a sebességgel egyező értelmű legyen. Ebben az esetben a sebesség $\mathbf{v} = \dot{s}(t)\mathbf{e}_t$ alakban, a gyorsulás pedig $\mathbf{a} = \ddot{s}(t)\mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}(t)^2}{\rho}\mathbf{e}_n$ alakban írható fel. Következésképpen, nincs különbség a tangenciális gyorsulás és a pályagyorsulás között. Mivel fontosnak tartottuk kihangsúlyozni a tangenciális gyorsulás fogalmának bevezetése során, hogy az a sebesség abszolút értékének változásával kapcsolatos mennyiség, mi nem ezt a megközelítést választottuk. ♣

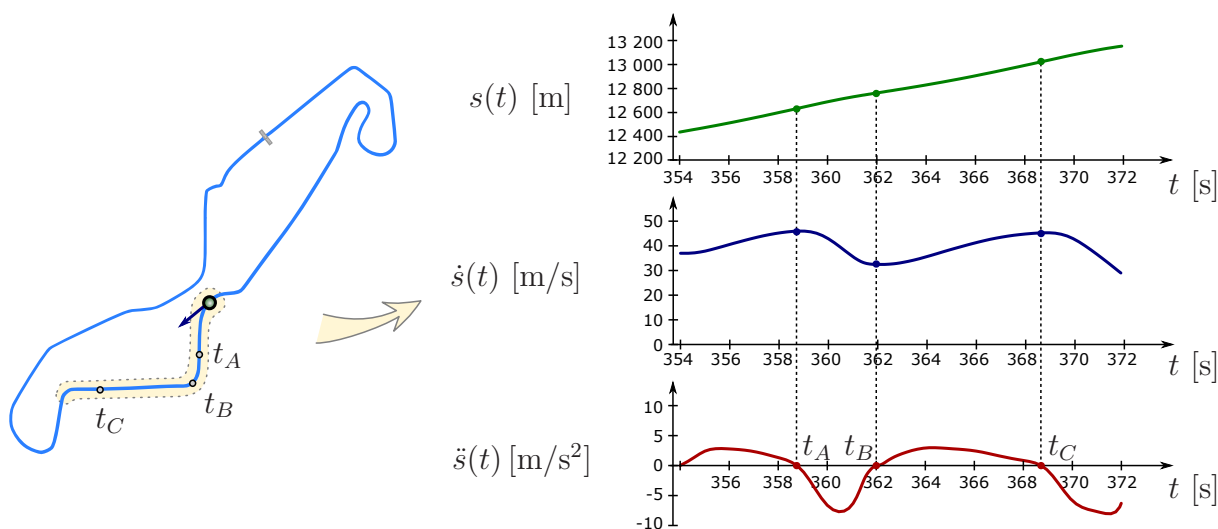
1.1.4. Kényszerek: a mozgást korlátozó feltételek

A legáltalánosabb, térbeli mozgások – az úgynevezett *szabad mozgások* során – a helyvektor mindhárom koordinátájának változását meg kell adni az anyagi pont mozgásának leírásához – gondoljunk például egy repülő madárra vagy repülőgépre. A legtöbb gyakorlati esetben azonban van valamilyen *információnk* a lehetséges mozgásokról, amit kihasználva elérhetjük, hogy kevesebb skalárfüggvény is elég legyen a mozgás egyértelmű megadásához. Ezt használtuk fel a körpályán történő mozgást ismertető 1.15. példában is, ahol a $\varphi(t)$ szög vagy az $s(t) = R\varphi(t)$ befutási törvény egyértelműen megadta a pont helyét.

1.22. definíció. Egy mechanikai rendszer SZABADSÁGI FOKA azon független skalárfüggvények száma, melyek egyértelműen megadják a rendszer mozgástörvényét. ♣

Emlékeztetünk arra, hogy a mozgástörvény (lásd 1.2. definíció) a vizsgált mechanikai rendszer *modellje*, a *vonatkoztatási rendszer* és a *koordináta-rendszer* ismeretében teszi lehetővé a mozgás leírását. Ez azt jelenti, hogy a szabadsági fok szoros kapcsolatban van azzal,

⁷E folyamat során a tangenciális gyorsulás \mathbf{a}_t vektora sem változtatja meg értelmét, az mindig a gyorsulásvektornak a sebességvektor egyenesébe eső komponense.



1.13. ábra. Egy versenypályán haladó motorkerékpár foronómiai görbéi. Az ábrán megfigyelhető, hogy a kanyarokhoz érkezés előtt, a t_A illetve t_C pillanatokban kezd fékezni a motoros.

hogy milyen pontos modellt állítunk fel a vizsgált feladat megoldásához. A modell felállítása során kell átgondolni, hogy a mozgás milyen összetevőit tekinthetjük elhanyagolhatónak.

Például egy versenypályán száguldó motorkerékpár t időpontbeli helyének megadása során célszerű lehet elhanyagolni a versenypálya szélességét. Ez esetben elég csak azt megmondani, hogy az út mentén hol található a motor, azaz csupán egy darab $s(t)$ függvényre van szükség (lásd 1.13 ábra), a rendszer egy szabadsági fokú. Azonban annak is lehet jelentősége, hogy a motor egy kanyar külső vagy belső ívén halad-e. Ha ezt is figyelembe akarjuk venni, akkor nem elég a pálya menti ívhosszparamétert megadni, hanem szükség van egy másik koordinátára is – tehát már két szabadsági fokú lesz a rendszer.

Ehhez hasonlóan, egy nyugalomból elengedett, szabadon eső test esetében el szokták hanyagolni a vízszintes irányú hatásokat (lásd 2. fejezet), ezért a pályájáról célszerű feltételezni, hogy egyenes. Ennek megfelelően tekinthetjük ezt a rendszert egy szabadsági fokúnak.

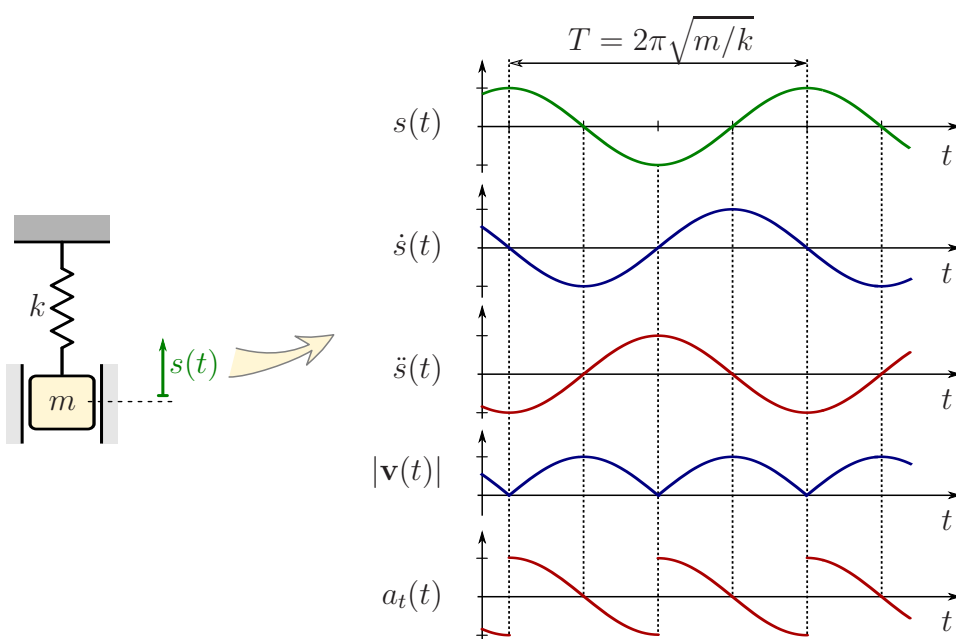
Sok esetben a vizsgált test érintkezik a környezetében lévő többi testtel és ez alapján vonhatunk le következtetéseket a mozgással kapcsolatban. Például egy hasáb sík asztalra történő mozgása során elhanyagolhatjuk az asztal deformációját. Következésképpen, a mozgás egy síkban történik, így leírásához elegendő két skalárfüggvény – például $x(t)$ és $y(t)$ – azaz a szabadsági fok kettő.

A körpályán történő mozgással kapcsolatos 1.15. példában nem foglalkoztunk azzal, hogy milyen mechanikai rendszerről van szó. Ha a vizsgált pont egy tengely körül forgó kiterjedt test valamelyik pontja (például az 1.32 ábrán a B pont), akkor a test deformációjának elhanyagolásából következik, hogy a pálya kör alakú.

A fentiek szerint a modell felállítása során megfogalmazhatunk olyan feltételeket, melyek a leszűkítik a lehetséges mozgások körét és így egyszerűsítik a feladat megoldását. Ezeket a mozgást korlátozó feltételeket *kényszereknek* nevezzük.

1.23. definíció. A KÉNYSZEREK előírt geometriai vagy kinematikai feltételek, melyek korlátozásokat jelentenek a mozgásokra nézve. ♣

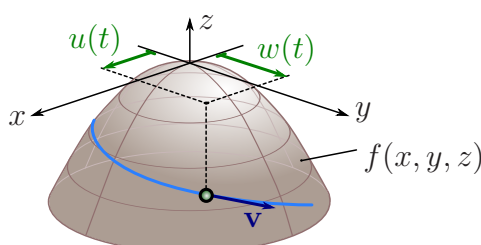
Előfordulhat, hogy a kényszerfeltételek adott módon változnak az időben (*időfüggő kénysze-*



1.14. ábra. Egy k merevségű rugóra függesztett m tömegű test (lineáris lengőrendszer) $s(t)$ befutási törvénye, $\dot{s}(t)$ pályasebessége és $\ddot{s}(t)$ pályagyorsulása (azaz a foronómiai görbék), valamint a sebesség $|\mathbf{v}(t)|$ abszolút értéke és az $a_t(t)$ tangenciális gyorsulás. A foronómiai görbék folytonosak és simák. Ezzel szemben a sebesség abszolút értékét ábrázoló görbének törése, a tangenciális gyorsulás görbéjének pedig szakadása van a sebességvektor irányváltásainak pillanataiban. A tangenciális gyorsulás akkor pozitív, ha a sebesség abszolút értéke nő.

rek), vagy a helykoordináták időbeli deriváltjai, a sebességek között kell valamilyen összefüggésnek teljesülnie (*kinematikai kényszerek*). Ha a kényszerfeltétel kifejezhető csupán a helykoordináták és az idő segítségével, akkor *geometriai kényszerről* beszélünk.

A legegyszerűbb, *időtől független geometriai kényszerek* esetében az anyagi pont egy görbült kényszerfelületen, sík- vagy térgörbén (kényszerpályán) mozog. *Kényszerfelületen* történő mozgás esetén a mozgástörvény $\mathbf{r}(u(t), w(t))$ alakban írható fel, ahol u és w a felület paraméterei. Mivel két független skalárfüggvény ($u(t)$ és $w(t)$) szerepel a mozgástörvényben, ez a mozgás két szabadsági fokú.



1.15. ábra. Forgásparaboloidon történő mozgás.

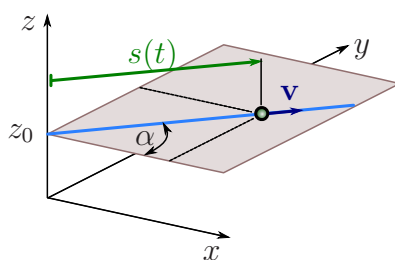
1.24. példa: Az 1.15 ábrán látható forgásparaboloidon történő mozgás esetén a kényszerfeltétel az $f(x, y, z) \equiv z(t) - x(t)^2 - y(t)^2 = 0$ függvény alakjában írható fel, ezért az $x \equiv u$,

$y \equiv w$ paraméterezéssel

$$\mathbf{r}(u(t), w(t)) = \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \\ -u(t)^2 - w(t)^2 \end{bmatrix}. \quad \spadesuit$$

Ha az anyagi pont egy előírt görbén, azaz *kényszerpályán* mozog, akkor a három térbeli koordináta közötti összefüggéseket két skalár egyenlet segítségével adhatjuk meg, a szabadsági fok egy.

1.25. példa: *A $z = z_0$ síkon olyan egyenes pályán mozog egy anyagi pont, mely áthalad a z tengelyen és az x tengellyel α szöget zár be (1.16 ábra).*



1.16. ábra. *Egyenes kényszerpályán mozgó anyagi pont.*

Ekkor a két kényszer egyenlet

$$\begin{aligned} f(x(t), y(t), z(t)) &\equiv z(t) - z_0 = 0 \quad \text{és} \\ g(x(t), y(t), z(t)) &\equiv \frac{y(t)}{x(t)} - \tan(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Az anyagi pont helyét egyértelműen megadja akár az $x(t)$, akár az $y(t)$ függvény, hiszen ha bármelyik ismert, akkor a másik két térbeli koordináta értéke kiszámítható a fenti két kényszerfeltétel alapján. Például az $x(t)$ koordinátát választva a mozgástörvény

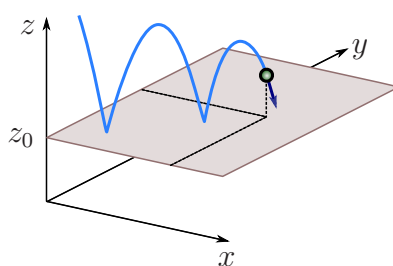
$$\mathbf{r}(x(t)) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) \tan(\alpha) \\ z_0 \end{bmatrix},$$

ami valóban csak egyetlen skalárfüggvényt tartalmaz.

Ebben a példában jól használható az s ívhossz koordináta is a mozgás leírására. Például választhatjuk ívhossz koordinátának az anyagi pont origótól mért $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ távolságát (1.16 ábra). Ebben az esetben $x(t) = s(t) \cos(\alpha)$ és $y(t) = s(t) \sin(\alpha)$, azaz a mozgástörvény

$$\mathbf{r}(s(t)) = \begin{bmatrix} s(t) \cos(\alpha) \\ s(t) \sin(\alpha) \\ z_0 \end{bmatrix}. \quad \spadesuit$$

A fenti példákban a kényszerfeltételeket $f(x, y, z) = 0$ alakú egyenletekkel lehetett megadni. Azonban előfordulhatnak olyan kényszerfeltételek is, melyeket egyenlőtlenséggel fejezhetünk ki. Ezeket *unilaterális* (egyoldalú) kényszereknek nevezik. Például ha egy vízszintes

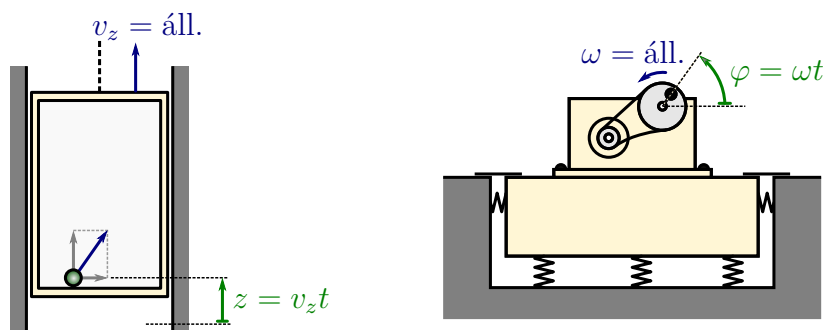


1.17. ábra. Példa unilaterális kényszerre: a $z = z_0$ felületen pattogó labda.

asztallapon mozgó test elválhat a felülettől – mint az 1.17 ábrán látható pattogó labda –, akkor a kényszerfeltétel $z(t) - z_0 \geq 0$ alakban fogalmazható meg.

Az $u(t)$, $w(t)$, $x(t)$, $s(t)$ függvények időfüggése annak felel meg, hogy az anyagi pont a felületen vagy görbén mozog, maga a kényszerfelület vagy görbe viszont nem változik az időben, azaz *időtől független* kényszerrel van szó. Például egy domboldalon lecsúszó kavics (lásd 1.15 ábra) esetében a talaj nem mozog, de a test pozíciója – mely két számmal adható meg, mint az 1.24. példában – időben változik.

Ezzel szemben az *időtől függő geometriai kényszereket*⁸ legtöbbször úgy képzelhetjük el, hogy maga a kényszerfelület vagy kényszerpálya mozog. Például egy állandó v_z sebességgel mozgó lift egyenletesen változó $z_{\text{lift}}(t) = v_z t$ koordinátájú padlóján elgurított golyó esetében a kényszerfeltétel $z(t) - z_{\text{lift}}(t) = 0$, azaz $z(t) - v_z t = 0$. Az is időfüggő kényszerhez vezet, ha a vizsgált mechanikai rendszer egy eleme időben előírt, ismert mozgást végez, mint például egy gép adott fordulatszámmal forgó tengelye (1.18 ábra).

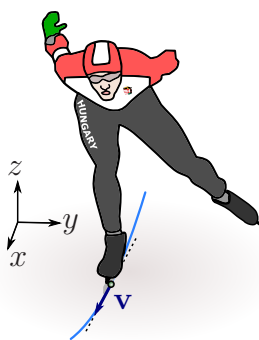


1.18. ábra. Példák időtől függő kényszerekre.

*Kinematikai kényszerek*⁹ esetében a mozgásra vonatkozó feltétel a koordináták deriváltjai (a sebességek) között fejez ki valamilyen kapcsolatot és nem fejezhető ki csupán a koordináták segítségével – még integrálással sem. Ha a sebességekkel kifejezett kényszer átírható geometriai kényszerre, az azt jelenti, hogy a koordináták között áll fenn valamilyen kapcsolat, azaz a test nem vihető át bármilyen pozícióba. Ha minden pozícióba el tud jutni a test, akkor az integrálás nem hajtható végre, tehát valóban kinematikai kényszerrel állunk szemben. Ilyen esetre példa a szánkózás vagy a korcsolyázás (1.19 ábra). A korcsolyával a jégpálya bármely pontjába, bármilyen szöghelyzetben eljuthatunk, a kényszer csak azt köti ki, hogy az él valamely pontjának sebessége párhuzamos kell legyen az él irányával.

⁸A szakirodalomban az időtől független kényszereket *szkleronomnak*, az időtől függőeket pedig *reonomnak* nevezik.

⁹Ezeket a szakirodalomban *anholonom kényszereknek* nevezik, szemben a geometriai kényszerfeltételekkel kifejezhető *holonom kényszerekkel*.



1.19. ábra. Példa kinematikai kényszerre.

A fentiek szerint a kinematikai kényszerfeltétel integrálhatósága nem csak matematikai kérdés. Ha egy adott feladat kapcsán megfogalmazzunk egy sebességállapottal kifejezhető kényszert és nem tudjuk végrehajtani az integrálást, akkor *kísérleti úton* kell eldönteni, hogy a vizsgált test eljuthat-e minden (a geometriai kényszerek által megengedett) helyzetbe.

1.8. megjegyzés: Az 1.2 fejezetben látni fogjuk, hogy egy vízszintes síkon gördülő, síkmozgást végző r sugarú korong súlypontjának sebessége $v_S = r\omega$ nagyságú, ahol ω a szögsebesség nagysága. Ez a gördülés kényszerfeltételének felel meg (1.20 ábra). Első pillantásra ez kinematikai kényszernek tűnik, azonban integrálással átírható $x_S = r\varphi$ alakba, ahol φ a korong szögelfordulása és x_S a súlypont koordinátája. Itt tehát a sebességállapokra vonatkozó kényszerfeltétel egy csak koordinátákat tartalmazó kifejezés teljes idő szerinti deriválva, ezért lehetett integrálni. Kinematikai kényszerek esetében – például ha *térbeli* gördülést végez a korong, azaz ide-oda billeghet és elkanyarodhat – az integrálás nem hajtható végre. ♣

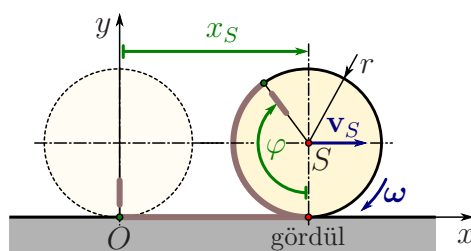
1.9. megjegyzés: Bármilyen kényszerfeltétel idő szerinti deriváltjának is teljesülnie kell. Ez azt jelenti, hogy ha valamilyen összefüggés áll fenn a koordináták között, akkor a megfelelő kényszerfeltétel idő szerinti deriválása a sebességre illetve gyorsulásra vonatkozó feltételekre vezet. Például egy $z = z_0 \equiv$ állandó felületen mozgó anyagi pont sebességének (és gyorsulásának) a z komponense nulla. Az 1.2 fejezetben még számos további példát látunk majd a kényszerfeltételek deriválására.

A dinamika alaptétele (lásd 2.3 és 3.2 fejezetek) alapján egy test *gyorsulásállapota* hozható kapcsolatba a rá ható erőrendszer hatásával. Ezért a dinamika alaptételének alkalmazása során a kényszerfeltételeket is a gyorsulásállapokra kell alkalmazni – ehhez pedig kétszer kell deriválni a geometriai kényszerek koordinátákkal kifejezett alakját.

A fentieknek megfelelően, a szakirodalom megkülönböztet *geometriai szintű*, *sebesség szintű* és *gyorsulás szintű* kényszerfeltételeket, attól függően, hogy az adott kényszert a koordinátákkal, a sebességekkel vagy a gyorsulásokkal fejezzük-e ki. A geometriai kényszerek mindhárom szinten megfogalmazhatók, a kinematikai kényszerek azonban csak a sebességek és a gyorsulások szintjén. ♣

A kényszerek csökkentik a vizsgált mechanikai rendszer szabadsági fokát.¹⁰ Az általuk megadott korlátozások gyakran világosan látszanak a problémák megfogalmazásából. Ugyanakkor ne felejtjük el, hogy a kényszerek felvétele a *modellalkotás* része, ezért a műszaki problémák megoldásának fontos lépése. Az asztallapra helyezett golyó a valóságban

¹⁰Minden geometriai kényszerfeltétel eggyel csökkenti a szabadsági fokok számát. A kinematikai kényszerfeltételek és a szabadsági fokok kapcsolata viszont meglehetősen bonyolult probléma, ennek tárgyalása túlmutat e jegyzet keretein.



1.20. ábra. A vízszintes síkon gördülő, síkmozgást végző korong súlypontja által megtett x_S távolság megegyezik az r sugár és a φ szögelfordulás szorzatával. Bár a kényszerfeltételt sokszor $v_S = r\omega$ vagy – újabb deriválással – $a_S = r\varepsilon$ alakban célszerű felírni, ebben az esetben felírható a gördülés feltétele a koordináták közti összefüggés segítségével is, tehát ez geometriai kényszer.

kis mértékben deformálja az asztalt, az autópályán haladó gépkocsi pedig csak az út által kijelölt tartományon belül marad – menet közben például áttérhet a másik sávba. Ehhez hasonlóan, a gépek alkatrészei – például mechanizmusok rúdjai – rugalmasan deformálódnak mozgás közben és az azokat meghajtó motorok fordulatszámja is ingadozik a terhelés függvényében. Nyilvánvalóan egyszerűsíti a mozgás leírását, ha ezeket a kis eltéréseket elhanyagoljuk, azonban mindig tudatában kell lennünk annak, hogy a kényszerek a valóságban sohasem teljesülnek tökéletesen.

A kényszer fogalmának jelentőségét mutatja, hogy a merev testek kinematikáját abból kiindulva építjük fel az 1.2 fejezetben, hogy a merev testek egymással kényszerkapcsolatban álló anyagi pontokból állnak.

1.1.5. Az anyagi pont kinematika alkalmazásai

Ferde hajítás

A Föld felszíne közelében elhajított testek jó közelítéssel $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ nagyságú gyorsulással esnek függőlegesen lefelé. A sebességnek csak a függőleges komponense változhat, ezért a kezdeti pozíció és sebesség kijelöli azt a függőleges síkot, melyben az elhajított test mozog. Következésképpen, ez egy két szabadsági fokú mozgás, elegendő két koordináta (x és y), melyek tengelyeit a mozgás síkjában vesszük fel az 1.21 ábrának megfelelően.

Ha valamilyen $\mathbf{r}_0 = [x_0 \ y_0]^T$ kezdeti pozícióból $\mathbf{v}_0 = [v_{0x} \ v_{0y}]^T$ kezdeti sebességgel hajítunk el egy anyagi pontot a $t = t_0$ pillanatban, akkor az ismert

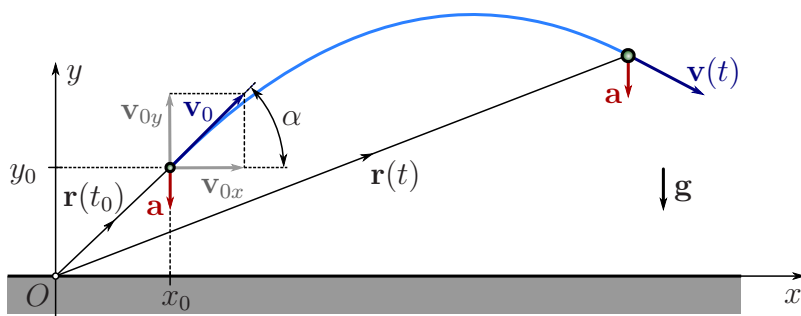
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

gyorsulásvektor integrálásával a test sebessége és pozíciója is kiszámítható egy későbbi t időpontban.

A sebesség

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a} \, dt = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0), \quad \text{azaz}$$

$$\begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - g(t - t_0) \end{bmatrix}.$$



1.21. ábra. Egy $\mathbf{r}(t_0)$ pontból \mathbf{v}_0 sebességgel elhajított anyagi pont pályája és a t pillanatban érvényes kinematikai jellemzői. A gyorsulás a pálya minden pontjában megegyezik a nehézségi gyorsulással.

A mozgástörvény egy újabb integrálással fejezhető ki:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{\mathbf{a}}{2}(t - t_0)^2, \quad \text{amiből}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

A kezdeti sebesség vektorát egyértelműen megadja a sebesség v_0 nagysága és vízszintessel bezárt α szöge, tehát $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$ és $v_{0y} = v_0 \sin(\alpha)$, amivel

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \end{bmatrix}.$$

A gyorsulás nem tartalmaz minden információt a mozgás sebességéről és mozgástörvényéről, ezért kellett felhasználnunk a kezdeti sebességet megadó \mathbf{v}_0 és kezdeti pozíciót megadó \mathbf{r}_0 vektorokat. Ezek a vektorok a határozatlan integrálás kapcsán bevezetett integrálási konstansoknak felelnek meg.

1.10. megjegyzés: A fenti képletekből látszik, hogy a ferdén elhajított test sebességének vízszintes komponense a mozgás során nem változik. Ebből következik, hogy az $x(t)$ függvény lineáris: $x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$. Következésképpen, $t(x) = \frac{x - x_0}{v_{0x}} + t_0$, amit $y(t)$ kifejezésébe helyettesítve megkapjuk a pályát megadó $y(x)$ függvényt:

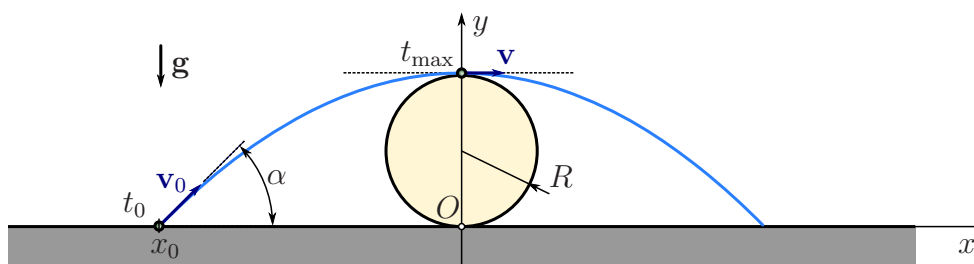
$$y(x) = y_0 + v_{0y} \frac{x - x_0}{v_{0x}} - \frac{g}{2} \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2.$$

Ez a függvény x -ben másodfokú, tehát a ferde hajtás pályája parabola. A valóságban számos tényező befolyásolja az elhajított test mozgását, például a légellenállás, a Föld forgása és a gravitációs erő magasságfüggése. A feladat bonyolultsága miatt nagy pontosságot igénylő feladatokban numerikusan számítják ki a valódi pályát, melyet ballisztikus görbének neveznek. ♣

1.26. példa: Egy anyagi pontot az 1.22 ábrán látható módon át akarunk hajtani egy $R = 1$ m sugarú hengeres test felett úgy, hogy a pályája legfelső pontjában még éppen ne érintse a hengert. A koordináta-rendszer origóját a henger és a talaj érintkezési pontjában vesszük fel. Ebben a rendszerben a kezdeti pozíció

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol x_0 -at a feladat követelményeinek megfelelően választhatjuk meg. Legfeljebb mekkora lehet a kezdeti sebesség vízszintessel bezárt α szöge, hogy ez a feladat végrehajtható legyen?



1.22. ábra. Anyagi pont áthajítása egy R sugarú hengeres test felett.

Megoldás:

Egyszerűsíti a feladat megoldását ha az időt az elhajítás pillanatától mérjük, mert akkor $t_0 = 0$. A pálya legfelső pontjában a függőleges (y irányú) sebesség éppen nulla, ezért ennek időpontja a $v_y(t_{\max}) = v_{0y} - gt_{\max} = 0$ egyenletből számítható ki, azaz $t_{\max} = v_{0y}/g \equiv v_0 \sin(\alpha)/g$. Ebben a pillanatban a test helyvektora (1.43) alapján

$$\begin{bmatrix} x(t_{\max}) \\ y(t_{\max}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \frac{v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} \\ \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_0 + \frac{v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} \\ \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

Mivel az R sugarú henger magassága $2R$, akkor érinti a pálya a hengert, ha $y(t_{\max}) = 2R$, azaz

$$\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} = 2R, \quad (1.45)$$

amiből $0 < \alpha < 90^\circ$ feltételezésével

$$v_0 = \frac{\sqrt{4gR}}{\sin(\alpha)}.$$

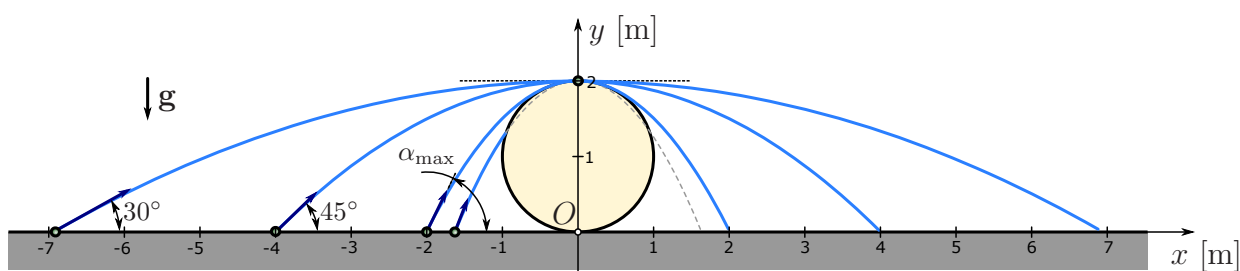
Minél kisebb az α szög, annál nagyobb v_0 kezdeti sebességre van szükség, például $\alpha = 45^\circ$ mellett $v_0 \approx 8.86$ m/s, míg $\alpha = 30^\circ$ esetén $v_0 \approx 12.53$ m/s. Mivel a pálya legfelső pontja az $x(t_{\max}) = 0$ koordinátájú pontban kell legyen, a kezdeti pozíció is kiszámítható (1.44) alapján:

$$x_0 = -\frac{v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g}. \quad (1.46)$$

Eszerint minél nagyobb a hajítás szöge, annál közelebről kell elhajítani a testet (pl. $\alpha = 45^\circ$: $x_0 = -4$ m; $\alpha = 30^\circ$: $x_0 \approx -6.93$ m).

Nagy α szögek mellett azonban a fenti számítás alapján már olyan közelről kellene elhajítani a testet, hogy az beleütközne az R sugarú hengerbe, még mielőtt elérné a pályája csúcsát (1.23 ábra). Csak úgy kerülhető el ez az ütközés, ha a pálya legfelső pontjában R -nél nagyobb a pálya simulókörének görbületi sugara. Az 1.13 egyenlet szerint a simulókör görbületi sugara a sebesség nagyságából és a normális gyorsulás nagyságából számítható. A pálya legfelső pontjában a sebesség vízszintes irányú, megegyezik a kezdeti sebesség vízszintes irányú összetevőjével, azaz

$$\mathbf{v}(t_{\max}) = \begin{bmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}.$$



1.23. ábra. Különböző kezdeti feltételekhez tartozó pályák. Túl közelről hajítva az anyagi pontot, a pálya belemetsz a hengeres testbe, mert görbületi sugara kisebb R -nél.

A gyorsulásról tudjuk, hogy az a pálya minden pontjában függőleges. Ez azt jelenti, hogy a pálya csúcspontjában nulla a tangenciális gyorsulás, így a teljes nehézségi gyorsulás normális irányú, azaz $a_n = g$. Tehát a pálya görbületi sugara a legfelső pontban, (1.13) szerint

$$\rho \equiv \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g}. \quad (1.47)$$

A legnagyobb megengedhető hajítási szög mellett $\rho = R$, amiből

$$v_0^2 \cos^2(\alpha) = Rg.$$

Ugyanakkor az átdobás másik feltételét megadó (1.45) egyenletből

$$v_0^2 \sin^2(\alpha) = 4Rg.$$

E két egyenletet összeadva, gyökvonás után megkapjuk azt a legkisebb sebességet, amivel még át tudjuk dobni a testet a henger felett:

$$v_{0\min} = \sqrt{5Rg} \approx 7.0036 \text{ m/s.}$$

Ezt visszahelyettesítve az előző egyenletekbe, megkapjuk a legnagyobb szöget, amivel a feladat megoldható:

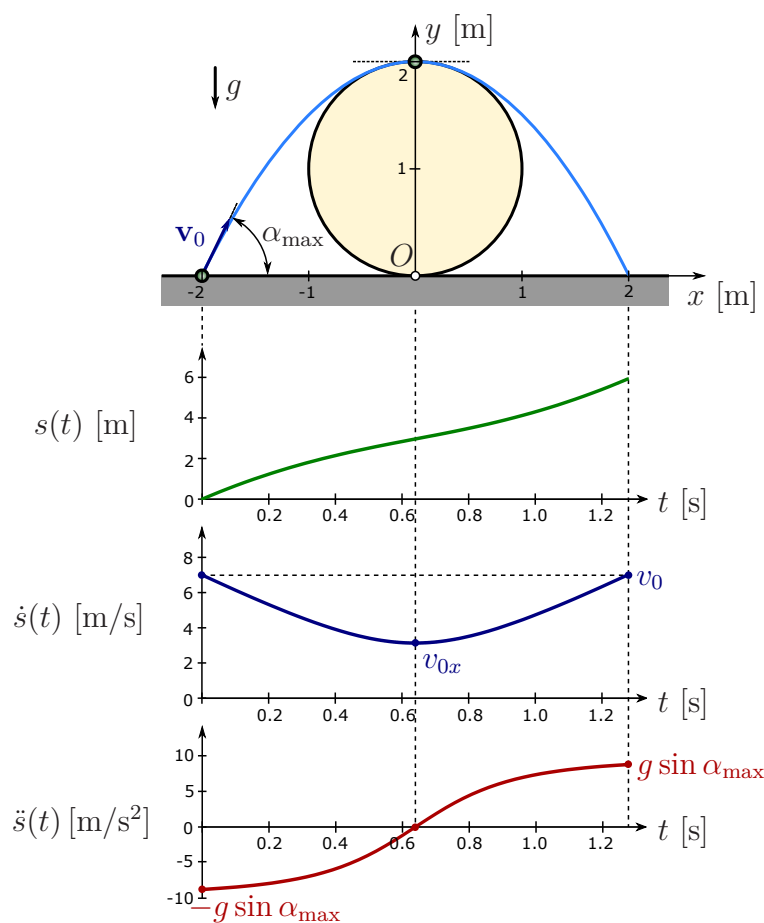
$$\alpha_{\max} = \arccos\left(\frac{\sqrt{Rg}}{v_{0\min}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.453^\circ.$$

Ezt a szöget behelyettesítve az (1.46) képletbe, megkapjuk a hozzá tartozó x_0 értéket is:

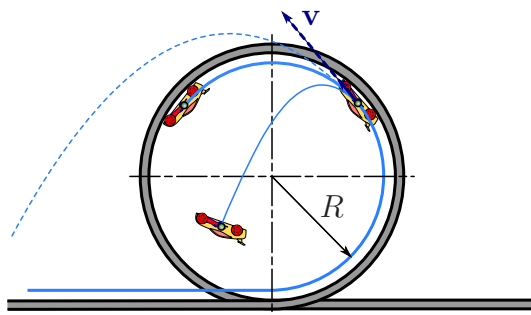
$$x_{0\max} = -2R = -2 \text{ m.}$$

Az 1.24 ábra az α_{\max} szögű hajításhoz tartozó foromómiai görbéket mutatja. A pálya többi pontjában nem nulla a tangenciális gyorsulás, ezért a normális gyorsulás azokban a pontokban g -nél kisebb, a sebesség pedig $v_0 \cos(\alpha)$ -nál nagyobb. Következésképpen, a ρ görbületi sugár a pálya legfelső pontjában a legkisebb – így a kiszámolt hajítási szög mellett sehol sem ütközik neki az anyagi pont a hengeres testnek. ♠

1.27. példa: Egy anyagi pont (pl. kisautó) olyan pályán halad, melynek egy szakaszán „fejjel lefelé” mozog (1.25 ábra). Magyarázzuk meg kinematikai ismereteink alapján, hogy miért nem esik le a kényszerpályáról!



1.24. ábra. Ferde hajítás foronómiai görbéi α_{\max} szögű hajítás esetén.



1.25. ábra. Kisautó mozgása függőleges kényszerpályán. Kis sebesség mellett leesne a kényszerpályáról (vékony folytonos vonal), elegendően nagy sebesség mellett azonban a kényszerpálya „visszatartja” (vastag folytonos vonal). A szaggatott vonal a nagy kezdősebességgel történő ferde hajítás pályáját mutatja.

Megoldás:

Képzeljük el úgy a problémát, mintha az anyagi pontot elhajítanánk a kényszerpálya egy pontjából! Egy ferdén elhajított anyagi pont esetében természetesnek érezzük, hogy nem függőlegesen esik le (mint egy álló helyzetből elengedett test), hanem görbült pályán halad. Ennek az az oka, hogy a sebesség ugyan mindig a gyorsulásnak megfelelő irányban változik, de ez a változás fokozatosan következik be. Következésképpen, minél nagyobb a test vízszintes

irányú sebessége, annál „laposabb” lesz a pálya alakja. Az (1.47) képletből is látszik, hogy minél nagyobb kezdeti sebességgel hajtának el egy testet, annál nagyobb lesz a pálya görbületi sugara a legfelső pontban. Ha a test sebessége elég nagy, akkor az így számolható, hajtáshoz tartozó görbületi sugár nagyobb lesz a kényszerpálya sugaránál, tehát a kényszerpálya inkább „visszatartja” a rajta mozgó anyagi pontot, az nem esik le – ezt illusztrálja az 1.25 ábrába berajzolt szaggatott vonalú pálya.

Más megközelítésben: a pálya R sugara és a pont sebessége meghatározza a pályán haladáshoz szükséges normális gyorsulás értékét:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Ha elég nagy az anyagi pont sebessége, akkor $a_n > g$, tehát a nehézségi gyorsulás önmagában nem is elegendő ahhoz, hogy a pályán haladáshoz szükséges ütemben változtassa a sebesség irányát – pedig az anyagi pontnak az R sugárnál kisebb sugarú pályán (azaz $\frac{v^2}{R}$ -nél nagyobb normális gyorsulással) kellene repülnie, hogy leessen. ♠

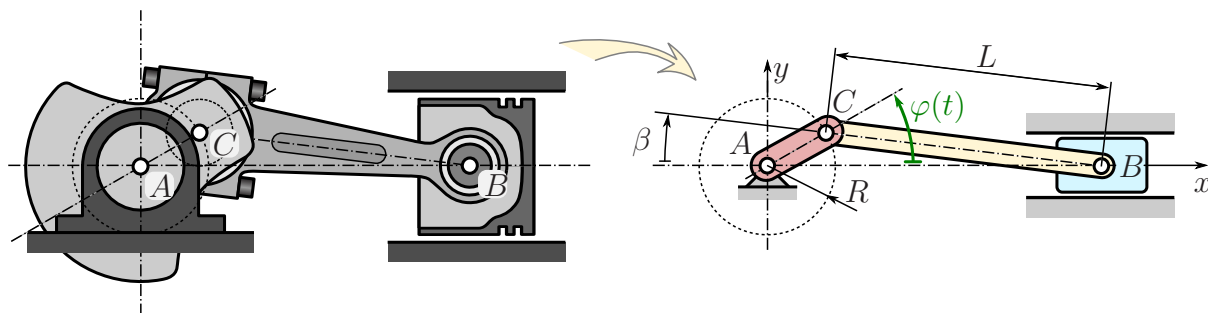
Forgattyús mechanizmus

1.28. példa: *Dízelmotordony motor forgattyús mechanizmusának vizsgálata az anyagi pontok kinematikája alapján. Az 1.26 ábrán egy dízelmotor forgattyús mechanizmusának sematikus ábrája és az annak megfelelő mechanikai modell látható. A mechanizmus AC forgattyújának szöghelyzete a*

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\varepsilon(t - t_0)^2 \quad (1.48)$$

függvény szerint változik. Számítsuk ki ez alapján a mechanizmus B csúszkájának x_B pozícióját, v_{Bx} sebességét és a_{Bx} gyorsulását a $t \equiv t_1 = 0.1$ s időpontban!

Adatok: $t_0 = 0$ s, $\varphi_0 = 2$ rad, $\omega_0 = 100$ rad/s, $\varepsilon = 500$ rad/s², $R = 0.1$ m, $L = 0.4$ m.



1.26. ábra. *Dízelmotor forgattyús mechanizmusa és annak mechanikai modellje.*

Megoldás:

Feltételezzük, hogy a mechanizmus alkatrészeinek deformációja elhanyagolható. Ebből következik, hogy a C pont R sugarú körpályán, a B pont pedig egyenes pályán mozog. Ezeket a kényszerfeltételeket felhasználjuk a megoldás során.

A vizsgált $t = t_1$ pillanatban

$$\tilde{\varphi}(t_1) = \varphi_0 + \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\varepsilon t_1^2 = 14.5 \text{ rad.} \quad (1.49)$$

Mivel a kapott érték a 2π többszöröse, a forgattyú többször körbe fordult a t_1 ideig tartó mozgása során. A szöghelyzet megadásához elegendő a fenti érték 2π -vel való osztása utáni maradékot megadni: $\varphi(t_1) = \tilde{\varphi}(t_1) \bmod 2\pi \approx 1.934$ rad.

Az (1.48) függvény deriválásával kiszámítható, hogy a C pont keringésének a szögsebessége a t_1 pillanatban

$$\omega(t_1) = \omega_0 + \varepsilon t_1 = 150 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad (1.50)$$

a keringés szöggyorsulása pedig $\varepsilon = 500$ rad/s².

A következő lépésben meg kell határozni a φ szög és a B pont x koordinátája közti kapcsolatot. Az ABC háromszögre felírható szinusz-tétel alapján

$$\sin(\beta) = \frac{R}{L} \sin(\varphi), \quad (1.51)$$

ezért

$$x_B(t) = R \cos(\varphi(t)) + L \cos(\beta(t)) = R \cos(\varphi(t)) + L \cos\left(\arcsin\left(\frac{R}{L} \sin(\varphi(t))\right)\right). \quad (1.52)$$

A vizsgált időpillanatban:

$$x_B(t_1) \approx 0.353 \text{ m}. \quad (1.53)$$

Figyelembe véve, hogy a $\varphi(t)$ szög is függ az időtől, az összetett függvények differenciálási szabálya alapján

$$v_{Bx}(t) \equiv \dot{x}_B(t) = - \left(\frac{R^2 \cos(\varphi(t)) \sin(\varphi(t))}{L \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\varphi(t)) R^2}{L^2}}} + \sin(\varphi(t)) R \right) \dot{\varphi}(t). \quad (1.54)$$

$\varphi(t) = \varphi(t_1)$ és $\dot{\varphi}(t) = \omega(t_1)$ behelyettesítésével

$$v_{Bx}(t_1) \approx -12.744 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.55)$$

További differenciálás után, a φ szög időfüggésének jelölését mellőzve, kapjuk a B pont gyorsulását:

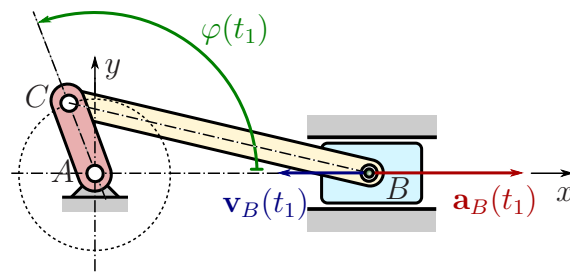
$$\begin{aligned} a_{Bx}(t) \equiv \dot{v}_{Bx}(t) = & - \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) \ddot{\varphi} R^2}{L \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\varphi) R^2}{L^2}}} + \frac{\sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 R^2}{L \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\varphi) R^2}{L^2}}} - \frac{\cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 R^2}{L \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\varphi) R^2}{L^2}}} \\ & - \frac{\cos^2(\varphi) \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 R^4}{L^3 \left(1 - \frac{\sin^2(\varphi) R^2}{L^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \sin(\varphi) \ddot{\varphi} R - \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 R, \end{aligned} \quad (1.56)$$

amiből behelyettesítés után, $\ddot{\varphi} = \varepsilon$ felhasználásával

$$a_{Bx}(t_1) \approx 1184.66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.57)$$

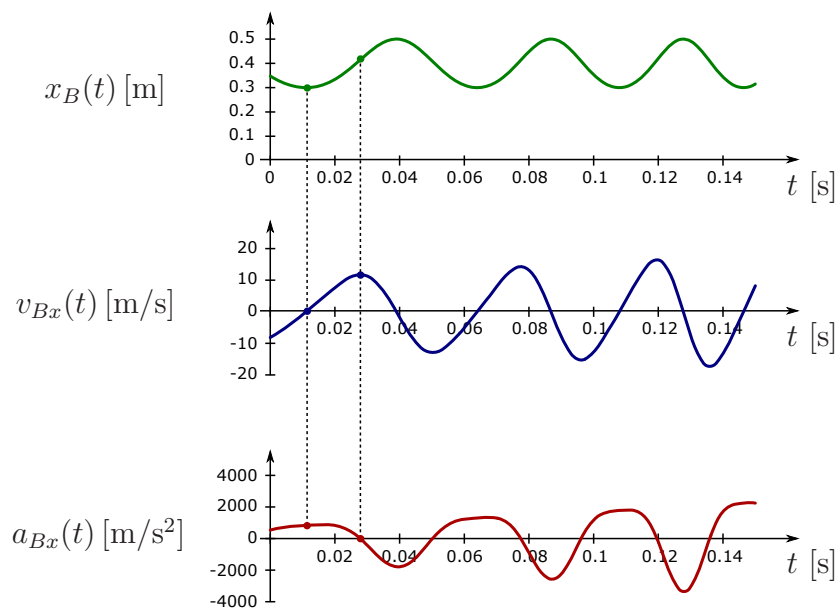
A kapott eredményeket az 1.27 és 1.28 ábrák szemléltetik.

A forgattyús-csúszkás mechanizmus egy szabadsági fokú, mert minden helyzete leírható egyetlen koordinátával. Általában jó választás lehet akár a φ , akár az x koordináta használata, azonban az ezek közötti (1.52) kényszerkapcsolat egy összetett, nemlineáris függvénnyel írható le. Ez az oka annak, hogy a kényszerfeltétel deriválásával levezetett sebesség és gyorsulás kifejezései meglehetősen bonyolultak lettek.



1.27. ábra. A mechanizmus helyzete, valamint a B pont sebessége és gyorsulása a t_1 pillanatban.

Az anyagi pont kinematika eszköztárát használva az időfüggvények felírása és deriválása még akkor is elkerülhetetlen, ha nem a mozgás *időbeli lefolyására* vagyunk kíváncsiak, csupán egy adott pillanatban szeretnénk meghatározni valamely pontok sebességét vagy gyorsulását. Azonban ha egy merev testekből összetett mechanikai rendszernek csak a *pillanatnyi* mozgásállapotát szeretnénk megvizsgálni, akkor van egy olyan módszer, ami sokkal gyorsabban vezet eredményre. Ennek a módszernek a leírásával foglalkozik a következő fejezet.



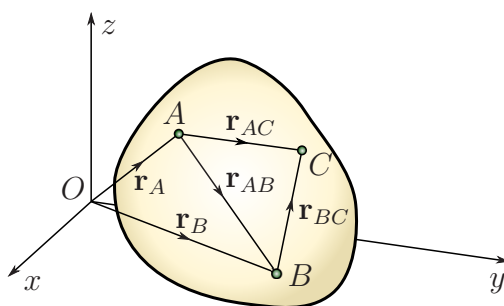
1.28. ábra. Forgattyús mechanizmus B pontjának foronómiai görbéi. Mivel egyenes vonalú mozgást végez a dugattyú, az ívhosszparaméter $s \equiv x_B$. A befutási törvény, a pályasebesség és a pályagyorsulás így rendre megegyezik az ábrázolt $x_B(t)$, $v_{Bx}(t)$ és $a_{Bx}(t)$ mennyiségekkel. Megfigyelhető, hogy amikor a sebesség nulla, akkor a csúszka kitérésének, nulla gyorsulás mellett pedig a sebességének van lokális szélső értéke.

1.2. A merev testek kinematikája

1.2.1. A merev test helyzetének megadása

A műszaki gyakorlatban általában nem hagyhatjuk figyelmen kívül a mozgó testek alakját és méreteit. A valóságban a szilárd testek deformálhatóak, méreteik változhatnak, de ez a deformáció számos gyakorlati problémában olyan csekély, hogy a test egészének a mozgását vizsgálva eltekinthetünk tőle, azaz merevnek tekinthetjük a testet.

1.29. definíció. MEREV TEST: olyan anyagi test, melynek bármely két A illetve B pontja közötti távolság időben állandó: $|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó}$ (1.29 ábra).



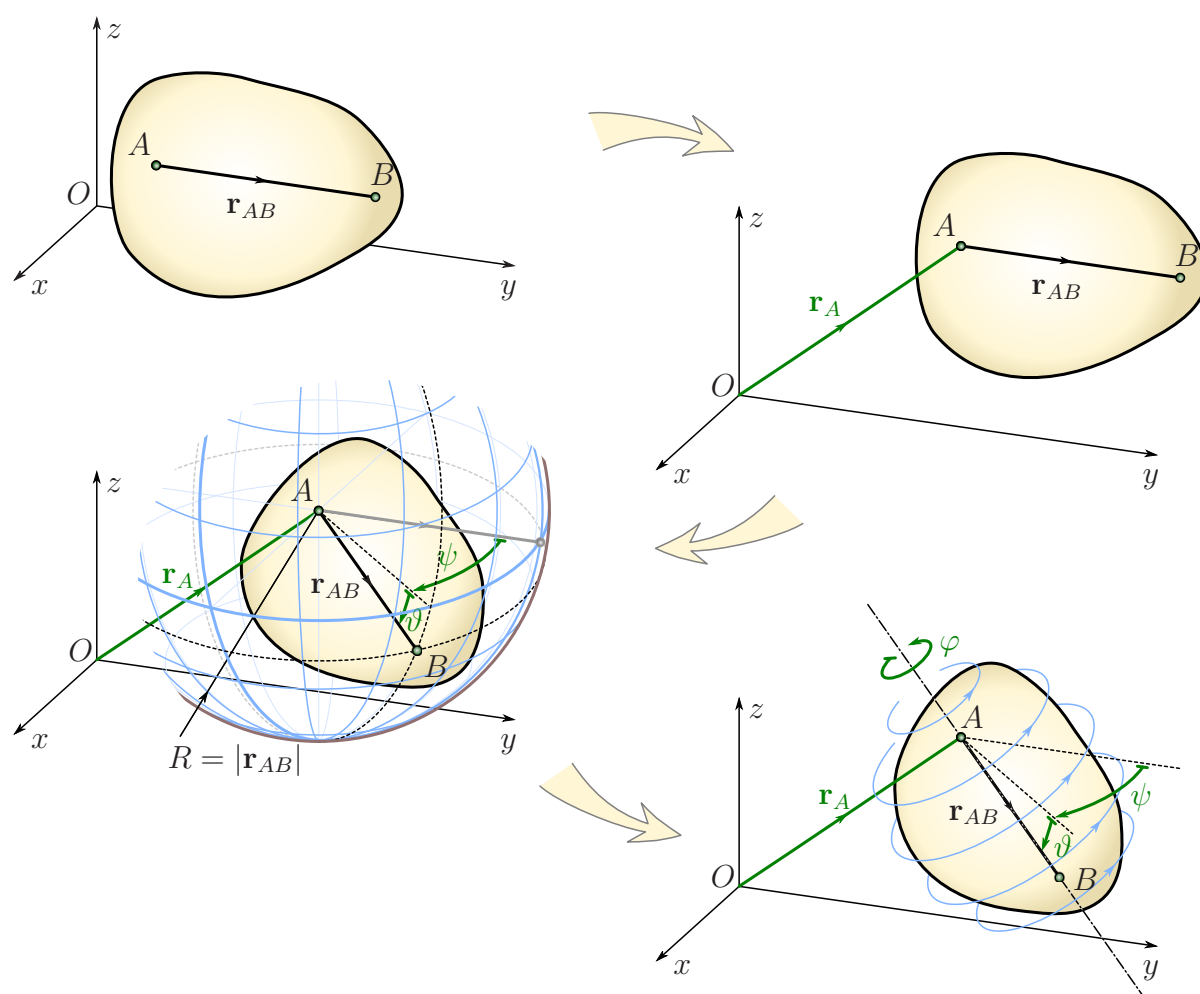
1.29. ábra. A merev test bármely két pontja – például A és B , B és C vagy A és C – közti távolság állandó. Az A , B és C pontok helye meghatározza a merev test helyzetét.

Az $|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó}$ kifejezés kényszerfeltétel, hiszen korlátozást jelent a test pontjainak mozgására nézve.¹¹ Ezt a kényszerfeltételt felhasználva a merev test helyzete megadható például a következő gondolat kísérlet alapján, melyet az 1.30 ábrán szemléltetünk.

Az első lépésben rögzítjük az A pont helyzetét az \mathbf{r}_A vektor megadásával – ez három egymástól független koordinátát tartalmaz. Ezután a B pont már csak egy $|\mathbf{r}_{AB}|$ sugarú gömbfelületen lehet, tehát további két koordináta szükséges a helyének a megadásához. Általában két szögkoordinátát használnak (az ábrán ψ és ϑ), hasonlóan mint a földrajzi szélességi és hosszúsági fokok esetében. Az A és B pontok helyének rögzítése után még mindig végtelen sokféle helyzetben lehet a merev test, az AB pontok egyenesét körül elforgatva. Tehát a teljes merev test helyzetének megadásához még meg kell adni egy hatodik, φ koordinátát is, ami az AB tengely körüli szögelfordulást jellemzi. A szabad mozgást végző merev test szabadsági fokainak száma tehát hat.

A szabadsági fokok számát egy egyszerű számítással is meghatározhatjuk: a merev test helyzete három nem egy egyenesbe eső pontjának megadásával rögzíthető (1.29 ábra), amihez a térben $3 \times 3 = 9$ koordináta szükséges. Ezek a koordináták azonban nem változhatnak függetlenül a test mozgása során, hiszen a három pont közötti távolságok állandóak, ami három geometriai kényszerfeltételt jelent. Mivel a kényszerek mindegyike eggyel csökkenti a szabadsági fokot, ismét arra jutunk, hogy a merev test hat szabadsági fokú.

¹¹Itt ismét emlékeztetünk arra, hogy a kényszerek felvétele a modellalkotás része. Egy adott feladat megoldása során meg kell fontolni, hogy a vizsgált test deformációja tényleg elhanyagolható-e, azaz használható-e a merev testeket jellemző $\mathbf{r}_{AB} = \text{állandó}$ kényszerfeltétel.

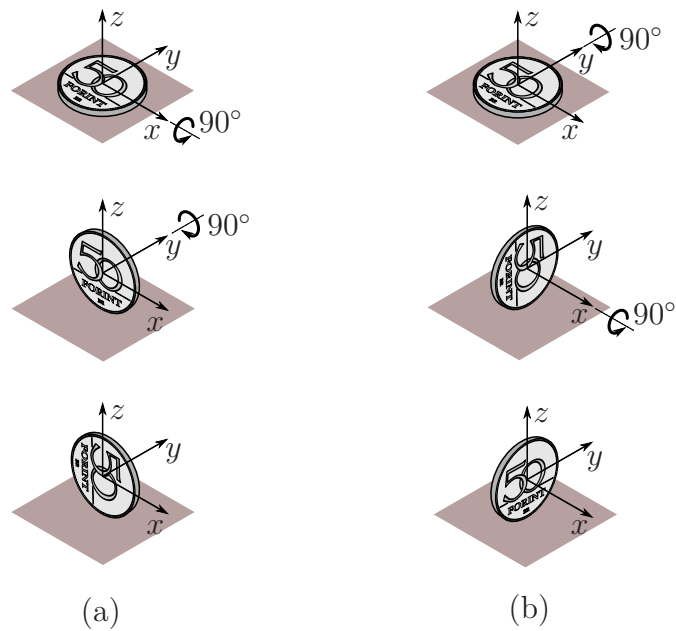


1.30. ábra. A merev test helyének és helyzetének megadása, kihasználva, hogy $|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó}$.

1.11. megjegyzés: A merev test helyzetének megadásához gyakran szögelfordulásokat kell megadnunk különböző tengelyek körül. Egy szögelfordulás azonban nem vektor, hanem mátrix segítségével írható le (lásd 3.5.3 fejezet). Egymás utáni elfordulások eredménye a megfelelő mátrixok szorzatával számítható ki, viszont – mivel a mátrixok szorzása általában nem kommutatív – a forgatások sorrendje nem tetszőleges! Az 1.31 ábrán is látható, hogy a forgatások sorrendjének felcserélése más végeredményre vezet.

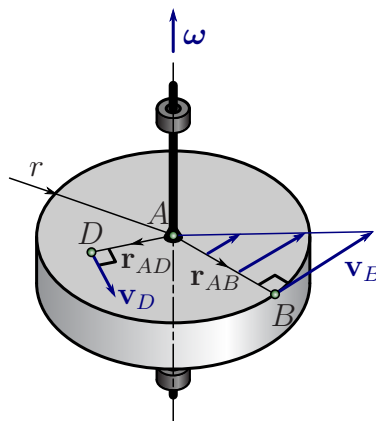
1.2.2. A merev test sebességállapota

A merev test pontjai végtelen sokféle különböző sebességgel mozoghatnak egy adott pillanatban. Gondoljunk például egy álló tengely körül forgó korongra! Ennek összes pontja körpályán mozog, ezért a különböző irányú sugarak mentén (pl. az 1.32 ábra D illetve B pontjában) különböző a sebességvektorok iránya. A tengelytől távolodva pedig nő a pontok sebességének nagysága, ahogy az ábra A és B pontja között berajzolt sebességvektorok is mutatják. Ez azt jelenti, hogy nem beszélhetünk egy merev test sebességéről, csak a test valamely *adott pontjának* sebességéről. Lehetetlen egyesével megadni ezeket a sebességvektorokat, ezért inkább egy olyan *szabályt* szeretnénk találni, mellyel véges sok adat



1.31. ábra. Két forgatás egymásutánja. Bal oldali ábrák: forgatások először az x , majd az y tengely körül. Jobb oldali ábrák: forgatások először az y , majd az x tengely körül.

segítségével bármely pont sebessége kiszámolható. Ha ismertek a szabály alkalmazásához szükséges adatok, akkor azt mondjuk, hogy ismerjük a merev test *sebességállapotát*.



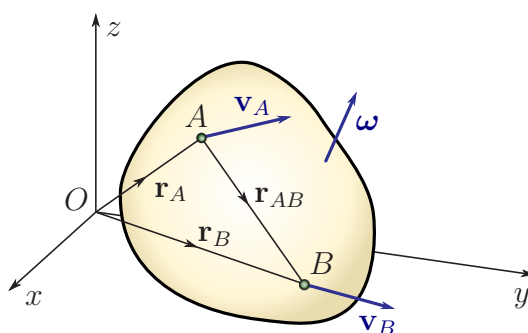
1.32. ábra. Álló tengely körül forgó korong sebességállapota. A tengelyre merőleges síkokban ugyanolyan az egymás „alatti” vagy „fölötti” pontok sebessége, de egy síkon belül az összes pont sebességvektora más-más irányú vagy nagyságú.

1.30. tétel. A merev test A és B pontjainak sebességvektorai között a következő összefüggés áll fenn:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}, \quad (1.58)$$

ahol $\boldsymbol{\omega}$ a merev test forgását jellemző SZÖGSEBESSÉG (mértékegysége rad/s). A fenti képletet SEBESSÉGREDUKCIÓS KÉPLETNEK nevezzük.¹²

¹²A szakirodalomban *Euler-féle formula* néven is szerepel ez a képlet.



1.33. ábra. A merev test sebességállapotát megadó vektorok: egy pont sebessége (pl. \mathbf{v}_A) és a merev test $\boldsymbol{\omega}$ szögsebessége.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy a test A pontjának \mathbf{v}_A sebessége ismert. Ekkor az 1.33 ábrának megfelelően $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}$, ahol $|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó}$, és a B pont sebességét (1.1) alapján idő szerinti deriválással kaphatjuk meg:

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{AB} \Rightarrow \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \dot{\mathbf{r}}_{AB}. \quad (1.59)$$

Kérdés, hogy mi az \mathbf{r}_{AB} vektor deriváltja. Mivel ez egy állandó nagyságú vektor, a deriváltja csak az irányának megváltozásával – a vektor elfordulásával – lehet kapcsolatos. A derivált kiszámításához írjuk át a merev testet jellemző $|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó}$ kényszerfeltételt egy ezzel egyenértékű, de matematikailag jobban kezelhető alakba, ugyanúgy, mint az 1.14. tétel bizonyításában:

$$|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó} \Rightarrow \mathbf{r}_{AB}^2 \equiv \mathbf{r}_{AB} \cdot \mathbf{r}_{AB} = \text{állandó}. \quad (1.60)$$

A kapott kifejezés idő szerint deriválásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_{AB}^2 = 2\mathbf{r}_{AB} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{AB} = 0,$$

azaz a skaláris szorzat tulajdonságai miatt az $\dot{\mathbf{r}}_{AB}$ vektor merőleges az \mathbf{r}_{AB} vektorra. Kihhasználva, hogy két vektor *vektoriális szorzata* mindkét vektorra merőleges, biztosan található egy olyan $\boldsymbol{\omega}$ vektor, mellyel $\dot{\mathbf{r}}_{AB}$ kifejezhető a következő alakban:

$$\dot{\mathbf{r}}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}. \quad (1.61)$$

Mivel tudjuk, hogy az \mathbf{r}_{AB} vektornak a nagysága nem változhat, az $\boldsymbol{\omega}$ vektor csak az \mathbf{r}_{AB} forgásával lehet kapcsolatos. Ezért – az anyagi pont keringése kapcsán bevezetett szögsebesség fogalom általánosításaként – az $\boldsymbol{\omega}$ vektort *a merev test szögsebességének* nevezzük.

A tétel bizonyításához azt kell még belátnunk, hogy bármely két pont választása esetén ugyanazt a szögsebességet kapjuk. (1.59) és (1.61) alapján még csak az jelenthető ki, hogy a B pont sebessége felírható ebben az alakban: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$.

Válasszunk a merev testen egy harmadik, C pontot is (1.29 ábra), oly módon, hogy ne legyen rajta az AB egyenesen! Ekkor a fentiekhez hasonlóan írhatjuk, hogy

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BC} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CA}. \quad (1.62)$$

Ugyanakkor nyilván

$$\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC} + \mathbf{r}_{CA} = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad (1.63)$$

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) + (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_C) + (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_B) = \mathbf{0}, \quad (1.64)$$

tehát e két összeg vektorai két vektorháromszöget alkotnak. Az (1.62) összefüggés miatt (1.64) így is írható:

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{BC} + \boldsymbol{\omega}_{CA} \times \mathbf{r}_{CA} = \mathbf{0}. \quad (1.65)$$

Az (1.63) és (1.65) összegek mindhárom tagja egy síkba esik (különben nem lehetne nullvektor az összegük), ez pedig csak akkor teljesülhet, ha $\boldsymbol{\omega}_{AB} \parallel \boldsymbol{\omega}_{BC} \parallel \boldsymbol{\omega}_{CA}$.

Tegyük fel, hogy e három szögsebességvektor nagysága rendre a , b és c ! Ekkor (1.65) átírható az alábbi alakba:

$$\boldsymbol{\omega}_e \times (a \mathbf{r}_{AB} + b \mathbf{r}_{BC} + c \mathbf{r}_{CA}) = \mathbf{0}, \quad (1.66)$$

ahol $\boldsymbol{\omega}_e$ a szögsebességekkel párhuzamos egységvektor, tehát például $\boldsymbol{\omega}_{AB} = a\boldsymbol{\omega}_e$. A fenti egyenlet csak akkor lehet igaz, ha a zárójelben szereplő kifejezés nulla vagy párhuzamos az $\boldsymbol{\omega}_e$ vektorral.

Vizsgáljuk először az $(a \mathbf{r}_{AB} + b \mathbf{r}_{BC} + c \mathbf{r}_{CA}) = \mathbf{0}$ esetet! Ha az ABC pontok nincsenek egy egyenesen, akkor \mathbf{r}_{AB} , \mathbf{r}_{BC} és \mathbf{r}_{CA} háromszöget alkotnak, tehát a fenti kifejezés csak úgy lehet nulla, ha a háromszög minden oldalát azonos mértékben nagyítjuk vagy kicsinyítjük. Következésképpen, $a = b = c$, ezért $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_{BC} = \boldsymbol{\omega}_{CA}$, azaz bármely két pont választása esetén ugyanazt az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektort használhatjuk a sebességredukciós képletben.

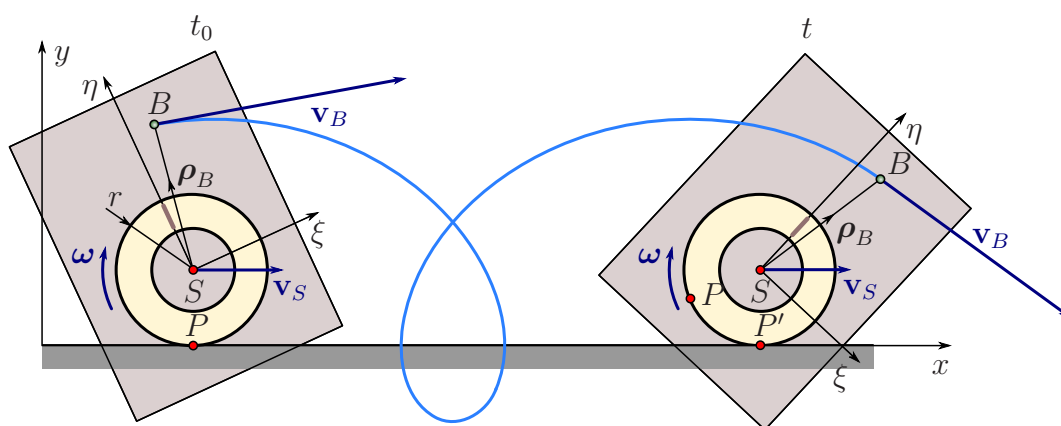
Az $(a \mathbf{r}_{AB} + b \mathbf{r}_{BC} + c \mathbf{r}_{CA}) \parallel \boldsymbol{\omega}_e$ feltétel csak abban a kis valószínűségű esetben teljesülhet, ha a szögsebesség éppen az \mathbf{r}_{AB} , \mathbf{r}_{BC} és \mathbf{r}_{CA} által kifeszített síkkal párhuzamos. Ekkor válasszunk egy olyan D pontot, ami az ABC háromszög síkján kívül esik! Az előző gondolatmenet alapján, az ABD pontokat vizsgálva belátható, hogy $\boldsymbol{\omega}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_{BD} = \boldsymbol{\omega}_{DA} = \boldsymbol{\omega}$, a BCD ponthármas vizsgálatából $\boldsymbol{\omega}_{BC} = \boldsymbol{\omega}_{CD} = \boldsymbol{\omega}_{DB} = \boldsymbol{\omega}$, az ACD ponthármassal pedig $\boldsymbol{\omega}_{AC} = \boldsymbol{\omega}_{CD} = \boldsymbol{\omega}_{DA} = \boldsymbol{\omega}$. Természetesen egy egyenesbe eső ABC pontok esetén is választhatunk egy megfelelő D pontot, így a bizonyítás arra az esetre is kiterjeszhető.

Tehát valóban bármely két pont esetében ugyanazt a szögsebességvektort használhatjuk, a merev test mozgását egy szögsebességvektor jellemzi. ♠

1.12. megjegyzés: A sebességredukciós képlet levezetése során abból indultunk ki, hogy mind az A , mind a B pont a merev testhez tartozik. A továbbiakban a „merev test pontja” kifejezést kibővített értelemben használjuk: a feladattól függően ugyanis célszerű lehet bizonyos, a merev testen kívüli pontok mozgását is úgy képzelni, mintha a testtel együtt mozognának. Például a merev test nulla sebességű sebességpólusa, nulla gyorsulású gyorsuláspólusa (1.55. és 1.58. definíciók) vagy súlypontja (lásd 1.34 ábra) kerülhet a test kontúrjain kívüli pontba. Síkmozgás esetén (1.2.8 fejezet) a testre ragasztott, a merev test kontúrjánál nagyobb papírlap segítségével szemléltethető ez a kiterjesztés.

1.13. megjegyzés: A szögsebességvektor az anyagi pontok keringése vagy körmozgása (1.15. példa) kapcsán bevezetett szögsebesség fogalom általánosítása. Tekintsünk például egy rögzített irányú tengely körül forgó r sugarú korongot (1.35 ábra). A tengely pontjai nem mozognak, tehát $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ és így az (1.58) képlet alapján $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$. Mivel $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_{AB}$, a vektoriális szorzás tulajdonságai miatt a $v_B = r\omega$ nagyságú \mathbf{v}_B sebességvektor éppen a szemléletnek megfelelő értelmű, a sugárra merőleges vektor. Úgy tekinthetjük tehát, hogy a B pont az A pont körül körpályán kering.

A tengely egy másik, szintén álló C pontjából felírva a B pont sebességét, $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CB}$ adódik. A vektoriális szorzat tulajdonságai és $|\mathbf{r}_{CB}| \sin(\varphi) = r$ miatt ezzel a képlettel is ugyanolyan irányú és nagyságú sebességet kapunk, mint a $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$ képlettel. Tehát a C viszonyítási pontnak nem kell a mozgás síkjában lennie, mint a keringésnél.



1.34. ábra. A sebesség- és gyorsulásállapot elképzelését és a számítások elvégzését segítheti, ha találunk speciális tulajdonságú – például nulla sebességű vagy gyorsulású – pontokat, ezek viszont sok esetben a test kontúrjain kívül esnek. Ezért számításaink során gyakran célszerű a vizsgált testet kiterjesztett értelemben tekinteni, mintha a rajta kívül fekvő pontok (pl. az ábrán a B pont) is vele együtt mozognának.

A körmozgás egy további általánosítását is megengedi az (1.58) képlet, amikor például az A pont – és a tengely többi pontja – nem rögzített, hanem tetszőlegesen mozog. Ebben az esetben viszont a $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$ képletet úgy is értelmezhetjük, hogy az A és B pontok közül egyik sincs kitüntetve a másikhoz képest; ezek a pontok egymás körül keringenek $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel. ♣

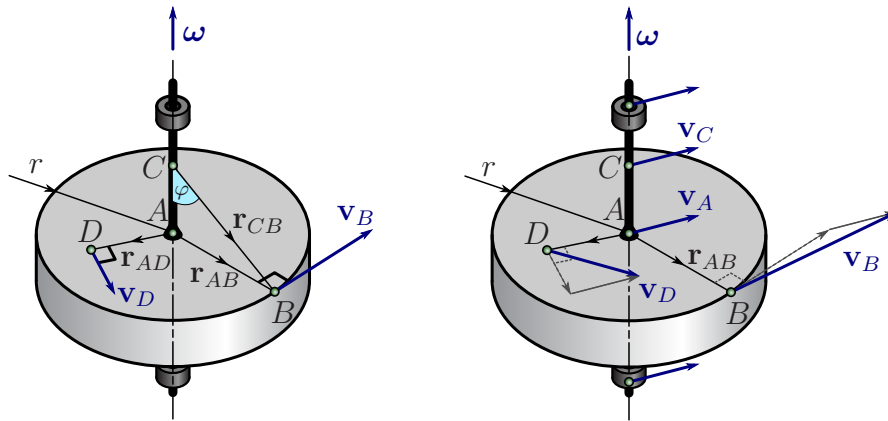
1.31. következmény. Az (1.58) sebességredukciós képlet szerint $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$. A vektorális szorzat tulajdonságai miatt $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \perp \mathbf{r}_{AB}$, tehát egy merev test két pontjának sebessége csak a pontokat összekötő egyenesre merőleges komponenseiben különbözhet. Például egy rúd két végpontjának rúdirányú sebességkomponenseinek meg kell egyezniük, különben a végpontok távolsága nőne vagy csökkenne (1.36 ábra).

1.32. következmény. Csak azt a kényszerfeltételt használtuk ki az 1.30. tételben, hogy $|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó}$, az \mathbf{r}_{AB} vektor egyéb tulajdonságait nem. Ezért kijelenthető, hogy bármely \mathbf{p} állandó nagyságú, de $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forgó vektor idő szerinti deriváltja:

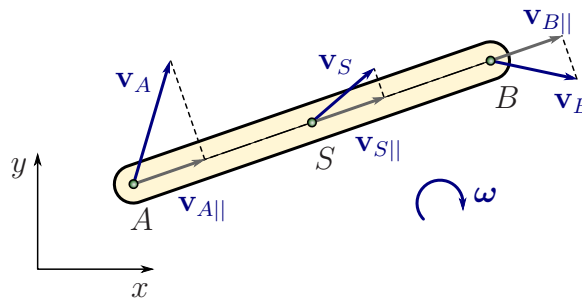
$$\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}. \quad (1.67)$$

Az így kapható $\dot{\mathbf{p}}$ vektor merőleges az eredeti \mathbf{p} vektorra. Ha a \mathbf{p} vektor nagysága is változik, akkor $\dot{\mathbf{p}}$ -nak \mathbf{p} -vel párhuzamos összetevője is lesz. ♠

A szögsebesség vektori jellege első pillantásra egyértelműnek tűnik, hiszen iránya (milyen tengely körül, milyen irányba forog a test) és nagysága is van. E két tulajdonság mellett azonban az összeadásra vonatkozó parallelogramma-szabályt is ki kell elégíteniük a vektoroknak (5.1. definíció), amiből az következik, hogy az összeadandó vektorok sorrendje felcserélhető. Láttuk az 1.11. megjegyzés kapcsán, hogy a véges elfordulások nem írhatók le vektorokkal, ráadásul az egymás utáni elforgatások sorrendjének felcserélése más eredményre vezet. Ezzel szemben megmutatható (lásd 1.2.6 fejezet), hogy a szögsebesség tényleg vektor, így két különböző tengely körüli forgás eredő szögsebességét a szögsebességvektorok



1.35. ábra. A sebességredukciós képlet, mint a körpályán való keringés általánosítása. A bal oldali ábrán láthatjuk, hogy a körpályán mozgó B pont sebessége nemcsak a körpálya középpontjában lévő A referenciapont segítségével számítható ki, hanem a tengely tetszőleges C pontja is választható referenciapontnak. A jobb oldali ábra az általánosítás következő lépését mutatja, amikor a tengely pontjai (pl. az A pont) már bármilyen irányú és nagyságú sebességgel mozoghatnak.



1.36. ábra. Mivel a merev test pontjainak távolsága állandó, az A és B pontokat összekötő szakaszra eső összes pont rúdírányú sebessége megegyezik. Tehát $\mathbf{v}_{A||} = \mathbf{v}_{S||} = \mathbf{v}_{B||}$.

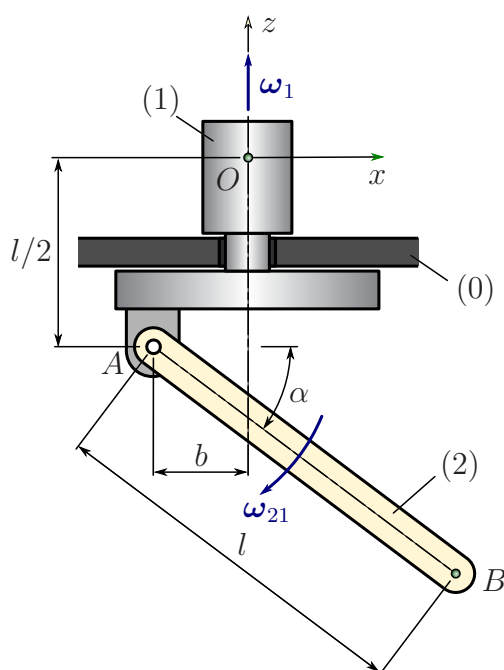
összegeként számíthatjuk ki. Ehhez hasonlóan, a szögsebességvektor a feladatnak megfelelő irányú komponensek összegére is felbontható.

Gyakran olyan esetekben van szükség a szögsebességek összeadására, amikor a vizsgált, (2) jelű test egy másik, ω_1 szögsebességgel forgó (1) testhez képest is forog, ω_{21} szögsebességgel. Előre bocsátjuk, hogy ennek a szituációnak az alapos megértéséhez szükséges lehet a relatív kinematikában (1.2.11 fejezet) bevezetett abszolút és relatív szögsebesség fogalmának ismerete. A szögsebességek vektori összeadhatósága relatív kinematikai alapon is levezethető, ezzel kapcsolatban lásd az 1.78. tételt.

1.33. példa: Az 1.37 ábrán vázolt, l hosszúságú, (2) jelű rúd az A csuklón keresztül kapcsolódik a függőleges z tengely körül ω_1 szögsebességgel forgó (1) testhez. A vázolt helyzetben a rúd az (1) testhez képest ω_{21} pillanatnyi szögsebességgel mozog. Határozzuk meg az A és B pont sebességét, valamint a (2) rúd ω_2 szögsebességét, ha $l = 0.5$ m, $b = 0.125$ m, $\omega_{1z} = 10$ rad/s, $\omega_{21y} = 5$ rad/s, továbbá $\sin(\alpha) = 0.6$ és $\cos(\alpha) = 0.8$!

Megoldás:

Az (1) test O pontja az álló z tengelybe esik, ezért annak a sebessége is nulla: $\mathbf{v}_O = 0$. Ezért



1.37. ábra. Példa a sebességredukciós képlet alkalmazására.

az A pont sebessége – mely szintén az (1) test pontja:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ -l/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b\omega_{1z} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.25 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.68)$$

Mivel az (xyz) koordináta-rendszer jobbsodrású, az y tengely az ábra síkjába befelé mutat, tehát az A pont a szemléletnek megfelelően, az ábra síkjából kifelé (az olvasó felé) mozog. Az O és B pontok sebességei közötti kapcsolatot nem lehet közvetlenül, egy sebességredukciós képlettel megadni, mert e két pont különböző testekhez tartozik. A B pont sebességének kiszámításához azt használjuk ki, hogy az (1) és (2) testek A pontjai egybeesnek, tehát azonos sebességűek. Következésképpen,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{AB}. \quad (1.69)$$

A fenti kifejezés kiszámításához szükség van a (2) test $\boldsymbol{\omega}_2$ szögsebességére is. A szögsebességek vektori összegzését alkalmazva

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{21y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{21y} \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.70)$$

Felhasználva, hogy $\mathbf{r}_{AB} = [l \cos(\alpha) \quad 0 \quad -l \sin(\alpha)]^T$, a B pont sebessége

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} -l \sin(\alpha) \omega_{21y} \\ -b\omega_{1z} + l \cos(\alpha) \omega_{1z} \\ -l \cos(\alpha) \omega_{21y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2.75 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.71)$$

Az 1.31. következmény teljesülését is ellenőrizhetjük ebben a példában. Szemlélet alapján belátható, hogy az A és B pontok rúdírányú sebességkomponensei egyaránt nulla értékűek. Az A pont esetében ez közvetlenül látszik a fenti számítás eredményeiből is, a B pont

sebességének rúdirányú komponense pedig skaláris szorzással számítható ki:

$$v_{B\parallel} = \mathbf{v}_B \cdot \frac{\mathbf{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-1.5l \cos(\alpha) - 2l(-\sin(\alpha))}{l} = 0. \quad (1.72)$$



1.2.3. Vektorkettősök redukciója

Az (1.58) sebességredukciós képletnek megfelelően a sebességállapot *két vektorral*: a merev test valamely pontjának¹³ sebességével és az egész merev testet jellemző szögsebességgel jellemezhető. A dinamikában sokszor fogunk még találkozni olyan esetekkel, amikor valamilyen állapotot vagy hatást két vektor segítségével tudunk leírni. Ezeknek az eseteknek a megfelelő tárgyalásához célszerű bevezetni a *vektorkettős* fogalmát.

A matematikában definiált vektorok – az Euklideszi vektortér elemei – esetében nem foglalkozunk a vektorok kezdőpontjával, azok bárhol elhelyezkedhetnek a térben.

A mechanikában azonban általában nagy jelentősége van annak is, hogy a vizsgált testhez képest hol található egy vektor hatásvonalára vagy támadáspontja. Ennek megfelelően, *mechanikai szempontból* megkülönböztetjük a vektorok alábbi három típusát:

- A *szabad vektorok* esetében nem számít a vektor térbeli elhelyezkedése, ezek önmagukkal párhuzamosan bárhová eltolhatók. A szabad vektorok három térbeli koordinátával adhatók meg, melyekből kifejezhető a vektor nagysága és iránya.
- A *ponthoz kötött* vektorok esetében meg kell adni a vektor kezdőpontjának a helyét is, „ahol a vektor hat”. Elsősorban a deformálható testek mechanikájában van szerepük; ebben a jegyzetben ponthoz kötött vektorokkal nem foglalkozunk. A félreértések elkerülése érdekében felhívjuk a figyelmet arra, hogy a *pontra számított* vektoroknak viszont nagy jelentősége lesz a következőkben.
- A vektorok harmadik csoportját a *hatásvonalukhoz kötött* vektorok alkotják. Ezek a vektorok a hatásvonaluk mentén szabadon eltolhatók, mert ettől a hatásuk nem változik meg.

Statikából ismert, hogy egy merev testre ható erő a hatásvonalára mentén eltolható, de ha a hatásvonalat is elmozdítjuk, akkor a hatása (adott pontra számított nyomaték) megváltozik – itt tehát *hatásvonalához kötött* vektorról van szó. Egy koncentrált erőpár viszont szabad vektor: a merev test bármely pontjába áthelyezhető és a hatása ugyanaz marad.

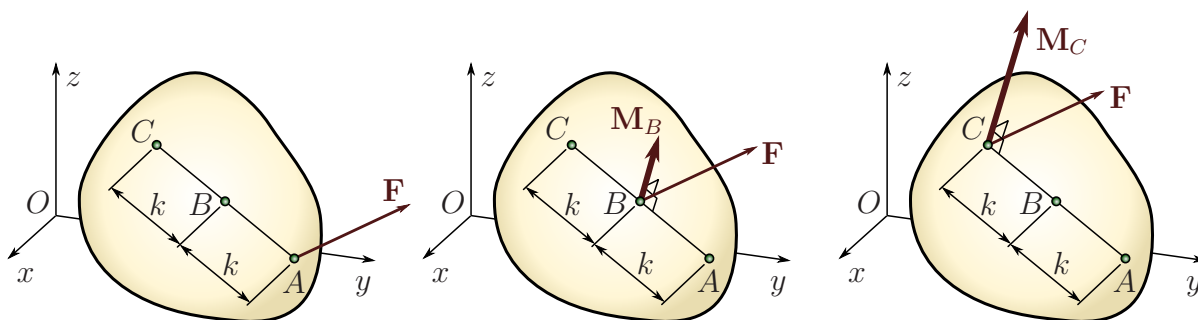
A hatásvonalához kötött \mathbf{F} erő vektor hatásának jellemzésére célszerűnek bizonyult bevezetni egy másik, általunk választott (pl. A) referenciapontra *számított* vektort is, az erő \mathbf{M}_A nyomatékát. Ha megadjuk a referenciapontot, akkor már elég két számhármassal, az \mathbf{F} és \mathbf{M}_A vektorok komponenseivel jellemezni az erő hatását. Úgy is elképzelhetjük, hogy az adott hatásvonalú erőt eltolhatjuk a referenciapontba, de mivel így megváltozna a hatása, ezt a változást egy megfelelő nyomatékú koncentrált erőpárral kompenzáljuk. Így ugyanazt a hatást végtelenül sokféleképpen tudjuk leírni, minden referenciaponthoz a megfelelő nyomatékot választva.

A nyomaték (koncentrált erőpár) tehát szabad vektor, indexe az *erő* hatásvonaláról ad információt. Ábrákon a nyomatékot is a referenciapontba szokták berajzolni, hiszen oda

¹³Itt az 1.12. megjegyzés szerint kiterjesztett merev testre gondolunk.

lehet képzelni egy nyomatékkal párhuzamos tengelyt, mintha az erőrendszer akörül forgatná a merev testet.

Az 1.38 ábrán látható, hogy az A ponton átmenő hatásvonalú \mathbf{F} erő hatása egyenértékű egy olyan erőrendszer hatásával, mely egy B támadáspontú \mathbf{F} erőből és egy $\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$ koncentrált erőpárból áll. Ha az \mathbf{F} erőt ehhez képest kétszeres távolságba toljuk, a C pontba, akkor az erőrendszerek egyenértékűségéhez $\mathbf{M}_C = \mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F} = 2\mathbf{M}_B$ nyomatékra van szükség az \mathbf{F} erő mellett.



1.38. ábra. Három egyenértékű, azaz azonos hatású erőrendszer.

Ennek a megközelítési módnak az az előnye, hogy lehetővé teszi egy merev testre ható erőrendszer eredőjének kiszámítását, az ún. *redukciót*. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ koncentrált erőkből és $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_m$ koncentrált erőpárokból álló erőrendszer helyettesíthető egy egyszerűbb erőrendszerrel:

$$\text{az } A \text{ ponton áthaladó hatásvonalú } \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \text{ erővel és} \quad (1.73)$$

$$\text{a szabad } \mathbf{M}_A = \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \text{ erőpárral,}$$

ahol \mathbf{r}_i az A pontból az \mathbf{F}_i erő hatásvonalának bármely pontjához húzott vektor.¹⁴

Matematikailag az erőrendszer hatásának megadásához a következő adatok kellenek: a referenciapont (pl. A) helye, az \mathbf{F} vektor három komponense és az \mathbf{M}_A vektor három komponense. Ezeket az információkat az $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A$ *statikai vektorkettőssel* szokták tömören megadni. Megmutatható, hogy a referenciapont megfelelő megválasztásával található olyan vektorkettős, melyben a nyomaték nulla vagy párhuzamos az erő vektorral – az így kapható vektorkettőst tekintjük a lehető legegyszerűbb alakúnak.¹⁵

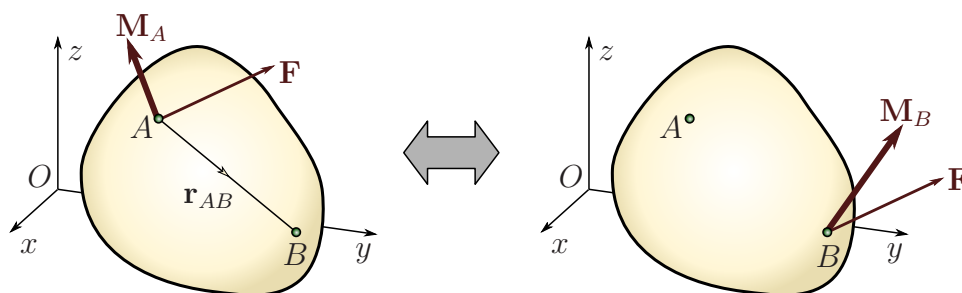
Az (1.73) képletből következik, hogy az \mathbf{F} és \mathbf{M}_A vektorok helyettesíthetők egy B ponton átmenő hatásvonalú \mathbf{F} erővel és az

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{M}_A + \mathbf{F} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (1.74)$$

nyomatékkal (1.39 ábra). Tehát \mathbf{M}_B két másik vektor eredőjeként fogható fel: az egyik a szabad \mathbf{M}_A nyomaték, a másik pedig az A ponton átmenő hatásvonalú \mathbf{F} erő nyomatéka.

¹⁴Sokféleképpen el lehet képzelni a fenti két vektort. Vannak, akik ponthoz kötöttnek tekintik az \mathbf{M}_A nyomatéket – mintha egy A ponton átmenő tengely körül forgatna – és szabadnak a vektorkettősben szereplő \mathbf{F} erőt. A mi szempontunkból ennek nincs különösebb jelentősége: az a fontos, hogy matematikailag egyértelműen írjuk le az erőrendszer hatását.

¹⁵A bizonyítás az 1.2.4 fejezetben leírt módon végezhető el, $\mathbf{F} \leftrightarrow \boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{M}_A \leftrightarrow \mathbf{v}_A$ cserével.



1.39. ábra. A statikai vektorkettős redukálása.

Minden olyan vektor-párt vektorkettősnek nevezünk, melyre ugyanez a redukálási szabály alkalmazható.

1.34. definíció. A \mathbf{w} vektor és a pontra számított \mathbf{u}_A vektor VEKTORKETTŐST alkot, ha az \mathbf{u} vektor B pontbeli értékét a következő összefüggéssel számíthatjuk:

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \mathbf{w} \times \mathbf{r}_{AB}. \quad (1.75)$$

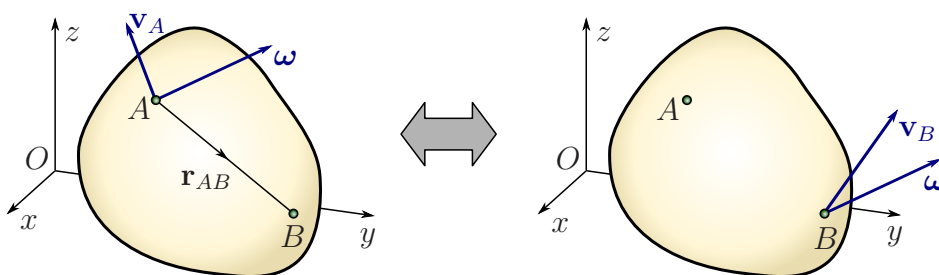
Az A referenciapontba redukált vektorkettős jelölése: $[\mathbf{w}; \mathbf{u}_A]_A$. ♣

A fenti definíció alapján a sebesség- és szögsebességvektorok is egy vektorkettőst, ún. kinematikai vektorkettőst alkotnak, hiszen $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$ (lásd 1.40 ábra). Tehát a merev testek sebességállapotát is végtelenül sokféleképpen meg lehet adni, a referenciapont választásától függően.

1.35. definíció. A merev test A pontba redukált KINEMATIKAI VEKTORKETTŐSE

$$[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_A]_A. \quad (1.76)$$

♣



1.40. ábra. A kinematikai vektorkettős redukálása.

1.14. megjegyzés: Összehasonlítva az $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A$ statikai és az $[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_A]_A$ kinematikai vektorkettőst, arra a következtetésre juthatunk, hogy az $\boldsymbol{\omega}$ vektor is hatásvonalához kötött, mint az erő. Ennek megfelelően, úgy képzelhetjük a merev test mozgását, hogy az egy haladó, azaz $\mathbf{0}$ szögsebességű mozgás és egy forgó mozgás eredője (lásd 1.2.4 fejezet). Tehát egy B pont sebessége is két vektor eredőjeként számítható, az 1.41 ábra szerint.

Az egyik, \mathbf{v}_{B1} vektor egy haladó mozgást végző test sebessége. Ez a sebesség az A referenciapont \mathbf{v}_A sebességével egyezik meg és a haladó test minden pontjára ugyanaz a vektor, tehát a szabad koncentrált erőpárnak felel meg.

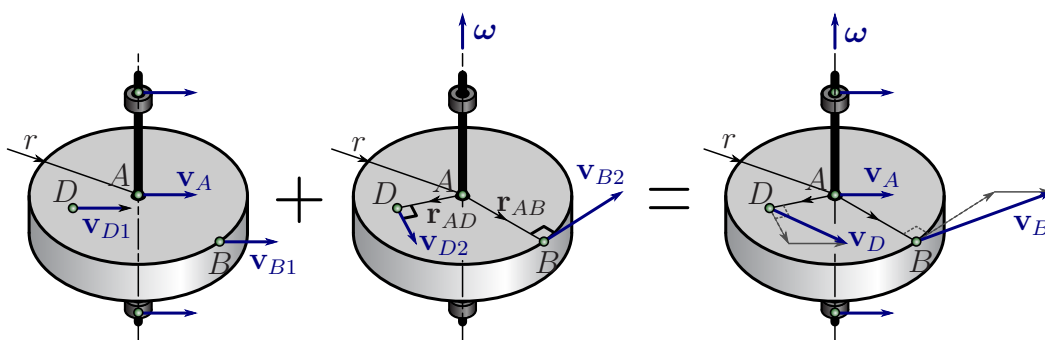
A másik, $\mathbf{v}_{B2} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$ sebességvektor pedig egy olyan test B pontjának a sebessége, ami az álló A (referencia)ponton átmenő tengely körül $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forog. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a forgásból adódó \mathbf{v}_{B2} sebesség a szögsebesség A pontra számított „nyomatékából” származtatható: $\mathbf{v}_{B2} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$.

A B pont sebességének kiszámításához a merev test bármelyik másik pontját – pl. a D pontot – is használhatjuk referenciapontnak. Ez annak felel meg, hogy áthelyezzük a képzeletbeli tengelyt a D pontba, a haladó mozgás sebességét pedig \mathbf{v}_D -re változtatjuk.

A $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$ sebességredukciós képlet arra is lehetőséget ad, hogy a vonatkoztatási rendszer valamely térben rögzített O pontjához viszonyítsuk a mozgást. $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \equiv \mathbf{r}_{OB} - \mathbf{r}_{OA}$, ezért

$$\mathbf{v}_B = (\mathbf{v}_A - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OA}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{OB} \quad (1.77)$$

alakban is felírhatjuk a B pont sebességét. Az első tag itt is haladó, a második pedig forgó mozgásnak feleltethető meg.



1.41. ábra. Bármilyen sebességállapot elképzelhető egy haladó és egy forgó mozgás eredőjeként. $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B1} + \mathbf{v}_{B2}$, ahol $\mathbf{v}_{B1} = \mathbf{v}_A$ a bal oldali, haladó mozgást végző testet jellemzi, $\mathbf{v}_{B2} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$ pedig az álló A ponton átmenő tengely körül forgó mozgást végző test B pontjának sebessége.

A statikai és kinematikai vektorkettősök közti analógia teljessé tehető az ún. *forgáspár* fogalmának bevezetésével. A forgáspár két azonos nagyságú és ellentétes irányú szögsebességvektorból áll, az erőpárhoz hasonlóan. Belátható, hogy a forgáspár egy haladó mozgással egyenértékű, mely a forgáspár síkjára merőleges irányú.

A fenti értelmezéstől eltérő módokon is elképzelhető a szögsebesség és a sebesség fizikai tartalma. Mivel a szögsebességhez nem feltétlenül kapcsolódik fizikailag is egy hatásvonal, az erő és a szögsebesség között nincs tökéletes analógia. Ez abból is látszik, hogy az \mathbf{F} erőnek az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség, az \mathbf{M}_A nyomatéknak pedig a \mathbf{v}_A sebesség felel meg, noha a szemléletünk alapján – a nyomatékot „forgató hatásként” elképzelve – éppen fordítva várhatnánk. ♣

A különböző fizikai mennyiségeket megadó vektorokra külön-külön meg kell vizsgálni, hogy vektorkettőst alkotnak-e egy másik vektorral – így tettük ezt a sebességredukciós képlet esetében is. A vektorkettősök használata lehetőséget biztosít különféle mechanikai hatások vagy állapotok tömör jelölésére és egységes eljárást ad a más referenciapontba történő redukcióra. Ennek az a jelentősége, hogy akármilyen fizikai mennyiségekre vonatkozik is a vektorkettős, mindig ugyanúgy lehet megtalálni a lehető legegyszerűbb alakját – erről szól a következő fejezet.

1.2.4. Elemi mozgások

Az (1.58) egyenlet alapján a merev testek sebességállapota végtelen sokféle, egymással egyenértékű kinematikai vektorkettőssel adható meg, a referenciapont megválasztástól függően. Mind elméleti, mind gyakorlati szempontból előnyös, ha meg tudjuk keresni ezek közül azt, ami valamilyen szempontból a legegyszerűbb alakú. A kinematikában azokat a vektorkettősöket tekintik legegyszerűbb alakúnak, amiben az egyik vektor nulla vagy a két vektor egymással párhuzamos.

Ezek a tovább nem egyszerűsíthető alakú vektorkettősök a merev test ún. *elemi mozgásait* jellemzik. A következőkben megmutatjuk, hogy egy tetszőleges A pontba redukált $[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_A]_A$ vektorkettős alapján hogyan lehet megállapítani, hogy milyen elemi mozgást végez a test.

Ha a vektorkettős bármelyik vektora nullvektor, akkor nincs lehetőség további egyszerűsítésre. Azonban a sebességvektor nullvektorra redukálható a referenciapont megfelelő megválasztásával, ha a vektorkettős vektorai merőlegesek egymásra. Ez könnyen belátható: ha létezik olyan P pont, melyre a kinematikai vektorkettős $[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{0}]_P$ alakú, akkor bármelyik másik, A pontra számított vektorkettős $[\boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA}]_A$ lesz, tehát az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség valóban merőleges a $\mathbf{v}_A \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA}$ sebességre. Ha $\boldsymbol{\omega} \not\perp \mathbf{v}_A$, akkor a legegyszerűbb alakú vektorkettős olyan alakú, melyben a két vektor párhuzamos.

Az alábbiakban részletesen is megvizsgáljuk és definiáljuk a lehetséges elemi mozgásokat.

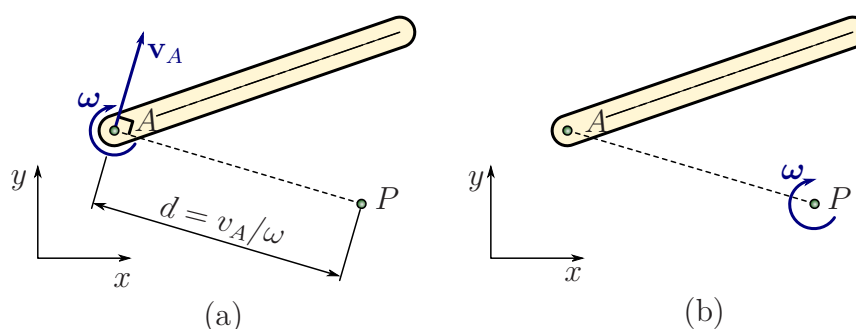
1. $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$: *pillanatnyi nyugalom*,
2. $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, azaz a test nem forog, de $\mathbf{v}_A \neq \mathbf{0}$. Ez a *pillanatnyi haladó mozgás*. Így mozog az 1.41 ábrán a bal oldali test.
3. $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, azaz az A pont sebessége nulla, de $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$. Ez a *pillanatnyi forgó mozgás*. Ekkor a mozgás úgy képzelhető el, hogy a vizsgált pillanatban az álló A ponton átmenő, $\boldsymbol{\omega}$ -val párhuzamos tengely körül forog a test (lásd 1.41 ábra). Ezt a tengelyt *pillanatnyi forgástengelynek* nevezzük.

Az általános esetben a pillanatnyi forgástengely helyét nem egy fizikailag is létező, csapágyazott tengely jelöli ki, hanem a kiterjesztett merev test valamely pontján átmenő képzeletbeli tengelyről van szó. Természetesen pillanatnyi forgó mozgás során a forgástengely minden pontjának nulla a sebessége, hiszen például a tengely C pontjának sebessége $\mathbf{r}_{AC} \parallel \boldsymbol{\omega}$ miatt $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AC} = \mathbf{0}$.

Ez a megfigyelés nagyon jól hasznosítható feladatok megoldása során: ha egy merev testnek van két nulla sebességű pontja (de vannak olyan pontjai is, melyek mozognak), akkor pillanatnyi forgó mozgást végez és a nulla sebességű pontokra illeszkedik a pillanatnyi forgástengely, ami párhuzamos a szögsebességgel.

4. $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}_A$, de $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v}_A \neq \mathbf{0}$. Ez is *pillanatnyi forgó mozgás*, hiszen az 1.42 ábrán látható módon mindig lehet találni olyan $\mathbf{0}$ sebességű P pontot, ami az A ponttól $d = v_A/\omega$ távolságban van a \mathbf{v}_A és $\boldsymbol{\omega}$ vektorokra egyaránt merőleges irányban. Szemlélet alapján belátható, hogy ha ismert az álló P pont helye és a szögsebesség (jobb oldali ábra), akkor a \mathbf{v}_A sebesség iránya a bal oldali ábrának megfelelő, nagysága pedig $v_A = d\omega$. Ez azt jelenti, hogy a P pontba redukált vektorkettős lesz a legegyszerűbb alakú: $[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{0}]_P$.

Az ábrán mutatott eljárás általánosabb esetével és a P pont helyének számításával foglalkozik a következő tétel. A levezetést két lépésre bontjuk: először megmutatjuk,



1.42. ábra. Ha a szögsebesség és a kiválasztott pont sebességvektora merőlegesek, akkor az A ponttól a sebességre és a szögsebességre is merőleges irányban, $d = v_A/\omega$ távolságban van a kiterjesztett testnek egy $\mathbf{0}$ sebességű P pontja. Ide redukálva lesz legegyszerűbb a vektorkettős, tehát ez is pillanatnyi forgó mozgás.

hogy a merev test minden nem nulla szögsebességű mozgása során lehet találni végtelen sok olyan P pontot, amire $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{v}_P \parallel \boldsymbol{\omega}$. A második lépésben pedig azt látjuk be, hogy $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}_A$ esetében a kiválasztott P pont szögsebességgel párhuzamos sebességkomponense is nulla. Amint az 1.43 és 1.47 ábrákon is illusztráljuk, térbeli forgó mozgások során a pillanatnyi forgástengely más és más P pontját találhatjuk meg a tétel segítségével, attól függően, hogy a merev test melyik pontjának sebességét használjuk fel a számítás során.

1.36. tétel. Ha egy merev test szögsebessége nem nulla, akkor mindig választható végtelen sok olyan pont a merev testen, melyek pillanatnyi sebessége nulla vagy párhuzamos az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel. Az ilyen tulajdonságú pontok egy $\boldsymbol{\omega}$ -val párhuzamos egyenesen, az ún. CENTRÁLIS EGYENESEN helyezkednek el. A centrális egyenesnek a merev test egy A pontjához legközelebbi P pontja az A -n átmenő, $\boldsymbol{\omega}$ -ra merőleges síkban helyezkedik el és helye a következő vektorral adható meg:

$$\mathbf{r}_{AP} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\omega^2}. \quad (1.78)$$

Bizonyítás:

A sebességekre levezetett

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AP}$$

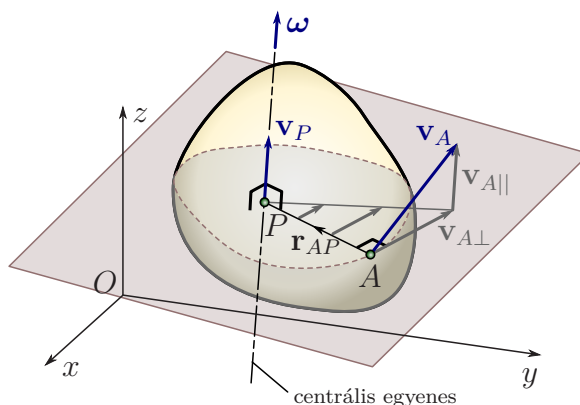
formulát balról vektoriálisan szorozva $\boldsymbol{\omega}$ -val, a keresett P pontot jellemző $\mathbf{v}_P \parallel \boldsymbol{\omega}$ vagy $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$ feltételek miatt (mindkét esetben $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P = \mathbf{0}$) azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AP}).$$

Az 5.5. kifejtési tétel segítségével a jobb oldal átírható:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_{AP}\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{r}_{AP}\omega^2. \quad (1.79)$$

Ahogy az 1.43 ábra is mutatja, a P pontot az A ponton átmenő, $\boldsymbol{\omega}$ -ra merőleges síkban keressük (triviális, hogy így található meg a centrális egyenes A -hoz legközelebbi pontja), ezért $\mathbf{r}_{AP} \perp \boldsymbol{\omega}$. Következésképpen, a jobb oldal második tagjában szereplő skaláris szorzat eredménye nulla, így (1.79)-ből kifejezhető a keresett \mathbf{r}_{AP} vektor, a tétel állításának megfelelően. ♠



1.43. ábra. A legegyszerűbb vektorkettős meghatározása az A referenciapont sebessége és az ω szögsebesség segítségével. A centrális egyenes P pontját az A ponton áthaladó, ω -ra merőleges síkon keressük, tehát egy másik referenciapont helyének és sebességének ismeretében a forgástengely másik pontját találhatjuk meg ezzel az eljárással. A P pontnak már csak szögsebességgel párhuzamos sebességkomponense lehet és $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{A||}$.

1.37. következmény. Az 1.36. tételben szereplő P pont sebessége a sebességredukciós képlet alapján, az 5.5. kifejtési tételt felhasználva:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\omega^2} = \mathbf{v}_A + \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_A) - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{v}_A \omega^2 = \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_A).$$

Ha $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}_A$, akkor az $\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_A = 0$ skaláris szorzat miatt $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$, azaz a centrális egyenes megegyezik a pillanatnyi forgástengellyel.

Ha $\boldsymbol{\omega} \not\perp \mathbf{v}_A$, akkor $\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_A \neq 0$ skalár szám, ezért $\mathbf{v}_P \parallel \boldsymbol{\omega}$, tehát a centrális egyenes pontjai a szögsebességgel párhuzamos sebességűek. ♠

A levezetés alapján a referenciapont eltolásával (P pontba történő redukálással) a vektorkettősben szereplő sebességvektor szögsebességre merőleges komponensét nullára lehet redukálni.

5. $\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}_A \neq 0$. Ekkor egyik vektor sem lehet zérus, és nem is merőlegesek egymásra. Tehát az A pont \mathbf{v}_A sebességvektora felbontható egy $\boldsymbol{\omega}$ -val párhuzamos és egy arra merőleges összetevőre:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{A||} + \mathbf{v}_{A\perp} \quad (1.80)$$

Az 1.36. tétel és az 1.37. következmény szerint ekkor meg lehet találni a centrális egyenest, amely párhuzamos a szögsebességgel és pontjai a szögsebességgel párhuzamos sebességgel mozognak. Ezt az esetet mutatja az 1.43 ábra. Ebben az esetben a centrális egyenest *pillanatnyi csavartengelynek* nevezzük. A csavartengely bármely pontjába redukálva a vektorkettőt, a sebességnek a szögsebességre merőleges összetevője nullává válik (1.43 ábra). Tehát az ehhez az esethez tartozó legegyszerűbb kinematikai vektorkettős egy szögsebességvektorból és egy vele párhuzamos sebességvektorból áll. Ezt az elemi mozgást *pillanatnyi csavarmozgásnak* nevezzük. A csavarmozgás a merev test legáltalánosabb mozgása (Chasles tétele) [3].

1.38. példa: *Vizsgáljuk meg, hogy az 1.33. példában látott (2) jelű rúd milyen elemi mozgást végez!*

Megoldás:

A vizsgált szerkezet az 1.37 ábrán látható. Az l hosszúságú, (2) jelű rúd az A csuklón keresztül kapcsolódik a függőleges z tengely körül ω_1 szögsebességgel forgó (1) testhez. A vázolt helyzetben a rúd az (1) testhez képest ω_{21} pillanatnyi szögsebességgel mozog. Az 1.33. példában meghatároztuk az A pont sebességét és a rúd ω_2 szögsebességét:

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -b\omega_{1z} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.25 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (1.81)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{21y} \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.82)$$

Ezek skaláris szorzata:

$$\boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{v}_A = -b\omega_{1z}\omega_{21y} = -6.25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \neq 0. \quad (1.83)$$

Tehát a (2) rúd elemi csavarmozgást végez. Ha az A csukló a z tengely vonalába esne, akkor $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ miatt a rúd pillanatnyi forgó mozgást végezne. ♠

Ebben a példában a szögsebesség két komponense (ω_{2y} és ω_{1z}) egymástól független. Ennek megfelelően, $\boldsymbol{\omega}_2$ iránya e két komponens arányától függ és széles tartományban változhat.

Azonban számos – a mérnöki gyakorlat szempontjából jelentős – feladatban fontos a szögsebesség irányának megfelelő beállítása, például a gördülés biztosítása érdekében. Bizonyos esetekben pedig már a mechanikai modellből meghatározható a szögsebesség iránya. Leggyakrabban elemi forgó mozgás kapcsán találkozhatunk ilyen feladatokkal, ahol a pillanatnyi forgástengely megkeresése lényegesen megkönnyítheti a sebesség- és gyorsulásállapot áttekintését.

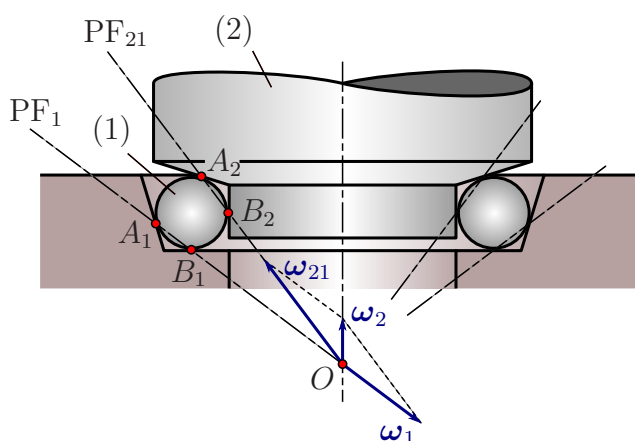
1.39. példa: *Az 1.44 ábrán látható golyós talpcsapágy csapágygolyói két-két ponton megtámaszkodva gördülnek az állórész hornyában. A (2) jelű tengely a csapágygolyókon támaszkodik, szintén két-két ponton érintkezve minden egyes golyóval. Határozzuk meg annak a feltételeit, hogy a golyók ne csússzanak meg és a (2) tengely a tervezett, függőleges forgástengely körül forogjon!*

Megoldás:

Válasszuk ki a csapágygolyók közül az ábrán (1)-gyel jelölt golyót! Ha a golyó nem csúszik meg az állórész hornyában, akkor az A_1 és B_1 pontjainak sebessége nulla. Következésképpen, az (1) jelű golyó PF_1 pillanatnyi forgástengelye átmegy az A_1 és B_1 pontokon. A golyó szögsebessége az állórészhez képest egy olyan ω_1 vektor, mely ezzel a forgástengellyel párhuzamos.

El akarjuk érni, hogy a (2) jelű tengely se csússzon meg a golyókon. Ez akkor teljesül, ha az (1) golyó és a (2) tengely A_2 és B_2 érintkezési pontjainak megegyezik a pillanatnyi sebessége. Ennek megfelelően, a (2) tengely a golyóhoz képest egy olyan PF_{21} pillanatnyi forgástengely körül forog, mely átmegy az A_2 és B_2 pontokon. Ezzel párhuzamos a (2) tengely golyóhoz viszonyított ω_{21} szögsebessége. A PF_{21} pillanatnyi forgástengely irányának elképzelését megkönnyíti, ha elképzeljük, hogy a (2) tengely áll és az „állórész” forog. Ebben az esetben is arra jutunk, hogy a golyó pillanatnyi forgástengelye átmegy az A_2 és B_2 pontokon.

Mind a PF_1 , mind a PF_{21} pillanatnyi forgástengely a golyót követve körbe forog a függőleges tengely körül.



1.44. ábra. Talpcsapággal megtámasztott tengely ω_2 szögsebessége és egy csapágygolyó ω_1 szögsebessége közti kapcsolat.

A szögsebességek összeadhatósága miatt a (2) tengely szögsebessége $\omega_2 = \omega_1 + \omega_{21}$, melynek a tengellyel párhuzamosnak – az ábrán függőlegesnek – kell lennie. További feltétel, hogy a tengely középvonalának sebessége zérus legyen. Ez úgy érhető el, hogy a két pillanatnyi forgástengelynek a tengely középvonalában kell metsződni. Ennek a követelménynek a figyelembevételével kell megtervezni a hornyokat és a tengelyvéget [12]. ♠

1.40. példa: Az 1.45 ábra egy R sugarú kanyarban kanyarodó kerékpárt ábrázol. Kanyarodás közben a kormány szöge állandó és az (1) jelű váz is állandó ω_1 szögsebességgel fordul el a pálya O középpontján áthaladó, függőleges pillanatnyi forgástengely körül. Eközben a kerékpár talajon gördülő, (2) jelű első kereke ω_{21} szögsebességgel forog a vázhoz képest. Határozzuk meg a kerék ω_2 szögsebességét!

Megoldás:

A szögsebességek összeadhatósága miatt a kerék szögsebessége

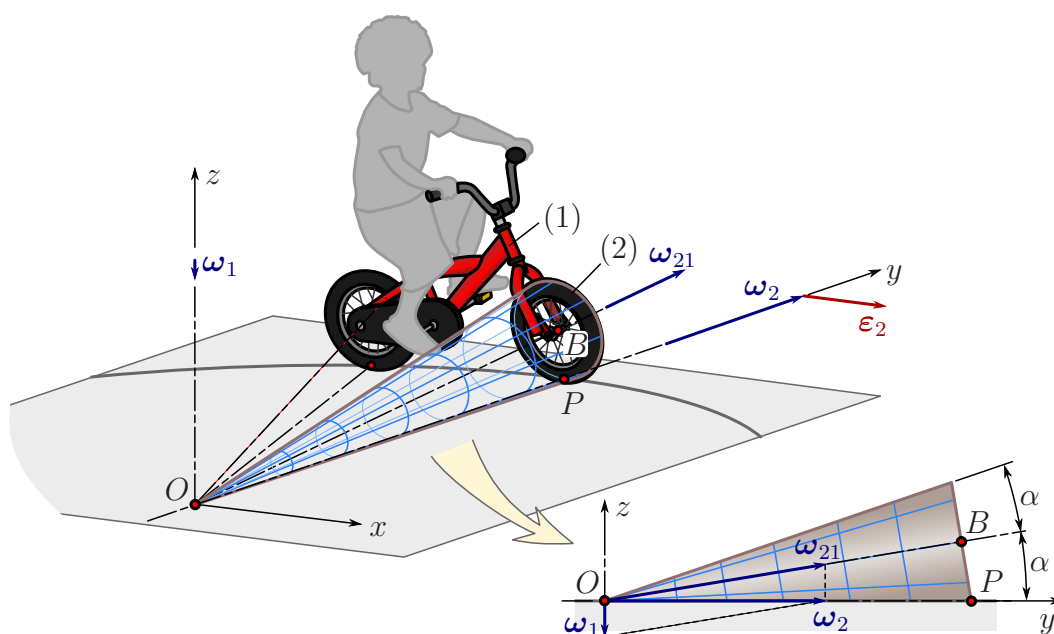
$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_{21}. \quad (1.84)$$

Ha a (2) jelű kerék gördül, akkor az ω_1 és ω_{21} vektorok nem lehetnek függetlenek: a keréknek éppen olyan szögsebességgel kell forognia, hogy a kerékpár a megfelelő sebességgel mozogjon a körpályán.

Az (1) jelű váz mozgásához tartozó pillanatnyi forgástengely a körpálya középpontján áthaladó z tengelybe esik, az ω_1 szögsebesség függőleges irányú. Mivel a kerék tengelye a vázzal együtt mozog, a tengely B pontjának sebességét kiszámíthatjuk csupán az ω_1 szögsebességből. Az egész OB egyenes ω_1 szögsebességgel forog, a kerék többi pontja ehhez képest forog ω_{21} szögsebességgel. Az OB egyenes ehhez a relatív forgáshoz tartozó pillanatnyi forgástengelyt adja meg, tehát ω_{21} párhuzamos az OB egyenessel.

A gördülés feltételének megfelelően a keréknek a P érintkezési pontban nulla a sebessége, tehát ezen a ponton kell átmennie a kerék pillanatnyi forgástengelyének is.

A mozgás során a talajjal érintkező P pont mindig ugyanolyan helyzetben van a kerékpárhoz képest, tehát az OBP háromszög is körbe forog ω_1 szögsebességgel. A fentiek szerint a kerék helyébe egy körbe gördülő kúpot képzelhetünk, melynek csúcsa az O pontban van. Tehát az ω_2 szögsebességhez tartozó pillanatnyi forgástengelynek át kell haladnia mind a P , mind az O ponton. Ezért az ω_2 szögsebességnek is az OP egyenessel párhuzamosnak kell lennie, nagysága pedig csak ω_1 vagy csak ω_{21} ismeretében is meghatározható, például $\omega_2 = \omega_{21} \cos(\alpha)$, ahol $\sin(\alpha) = \omega_1/\omega_{21}$ a kúp félkúpszöge. ♠



1.45. ábra. Kanyarodó kerékpár. Példa a szögsebességek összeadására állandó nagyságú, de forgó szögsebességvektor esetén. Az ábrán a szögsebességvektor idő szerinti deriváltjaként értelmezett ε_2 szöggyorsulásvektort is feltüntettük. A vizsgált példában ε_2 csak az ω_2 szögsebesség irányának változásával kapcsolatos, ezért arra merőleges irányú.

Személygépkocsi kanyarodása során hasonló geometriai összefüggéseknek kell teljesülni a kerekek csúszásmentes gördüléséhez.

Az előző példák kapcsán láthattuk, hogy számos térbeli gördülési probléma visszavezethető egy mozgó kúpnak síkon vagy másik kúpon történő gördülésére. A következő feladatban részletesen elemezzük egy gördülő kúp sebességállapotát.

1.41. példa: r sugarú és h magasságú, egyenes körkúp alakú merev test gördül az xy síkon úgy, hogy O pontja a mozgás során végig a koordináta-rendszer origójában marad. A B pont sebessége adott. A vizsgált pillanatban a kúp egyik alkotója párhuzamos az y tengellyel, az 1.46 ábrának megfelelően. Határozzuk meg a kúp sebességállapotát! Adatok: $r = 0.14$ m, $h = 0.48$ m, $v_{Bx} = 1.92$ m/s.

Megoldás:

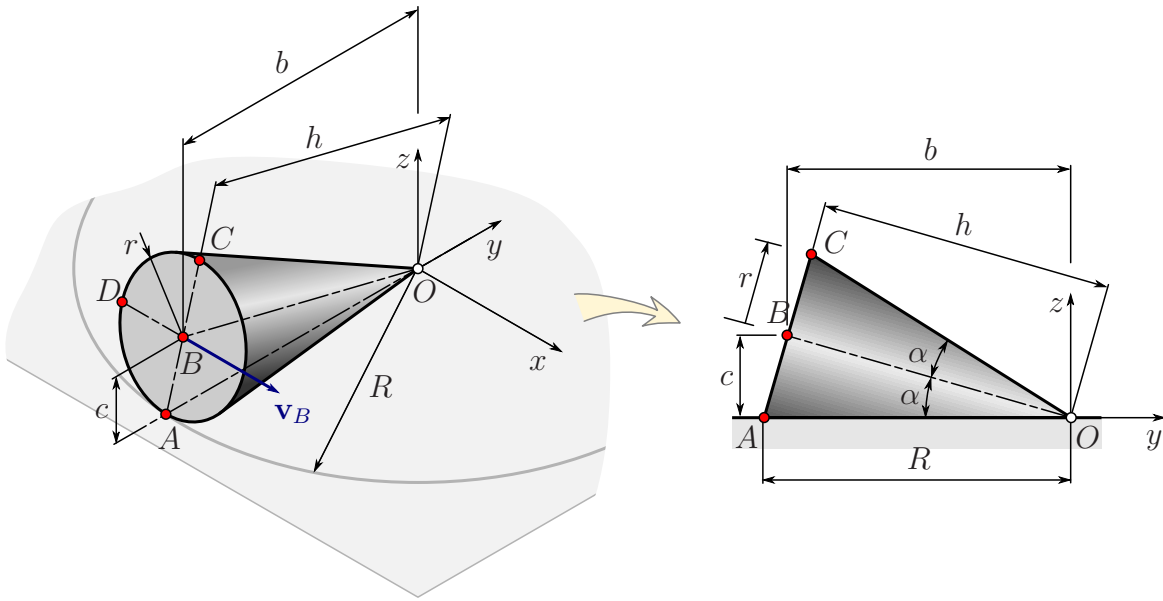
A geometriai adatok alapján a kúp alkotójának mérete $R = \sqrt{h^2 + r^2} = 0.5$ m, α félkúpszögének szinusza és koszinusza pedig

$$\sin(\alpha) = \frac{r}{R} = 0.28, \quad (1.85)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{R} = 0.96. \quad (1.86)$$

Mivel a \mathbf{v}_B sebesség adott, fejezzük ki a B pont helyvektorát is:

$$\mathbf{r}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h \cos(\alpha) \\ h \sin(\alpha) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix}. \quad (1.87)$$



1.46. ábra. Sík talajon gördülő kúp.

A fenti képletben a jelölések rövidítése érdekében bevezettük a $b = h \cos(\alpha) = 0.4608$ m és $c = h \sin(\alpha) = 0.1344$ m paramétereket, az 1.46 ábrának megfelelően.

A sebességállapot meghatározásához először azt tisztázzuk, hogy milyen elemi mozgást végez a test. Szemléletünk alapján azonnal kizárhatjuk a haladó mozgást, tehát két lehetőség jöhet szóba: pillanatnyi forgó mozgás – ilyenkor a testnek van nulla sebességű pontja – vagy csavarmozgás. Most a feladat megfogalmazásából tudjuk, hogy a kúp csúcsa az origóban marad, tehát sebessége nulla, azaz *pillanatnyi forgó mozgással* állunk szemben.

Pillanatnyi forgó mozgás esetében megtalálható a pillanatnyi forgástengely, aminek minden pontja nulla sebességű. Ennek megtalálása azért fontos, mert ezzel párhuzamos a kúp ω_2 szögsebességvektora is. A gördülésnek az a feltétele, hogy a kúp talajjal érintkező pontjainak a sebessége nulla legyen. Ebből következik, hogy a pillanatnyi forgástengely a kúp és a talaj érintkezésének vonalában, az y tengellyel párhuzamosan helyezkedik el, tehát

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{2y} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.88)$$

ω_{2y} kiszámításához felhasználhatjuk a sebességredukciós képletet. Mivel $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{2y} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{2y}c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.89)$$

Tehát – szemléletünknek megfelelően – $\mathbf{v}_B = [v_{Bx} \ 0 \ 0]^T$ és

$$\omega_{2y} = \frac{v_{Bx}}{c} = 14.2857 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.90)$$

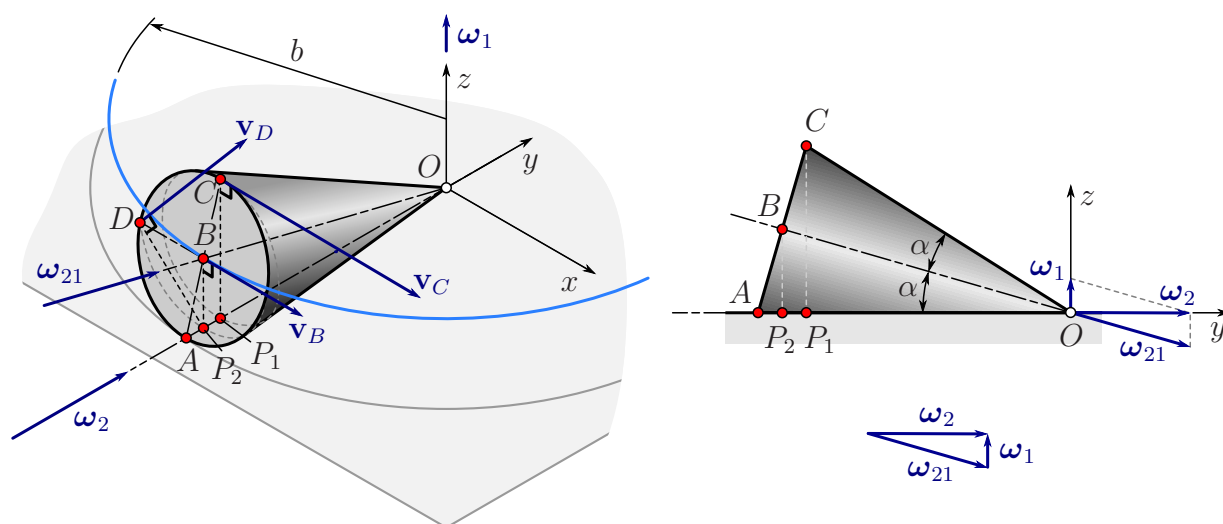
A $v_B = c\omega_2$ eredmény szerint a B pont pillanatnyi sebességállapota szempontjából úgy mozog, mintha az y tengely körül végezne körmozgást.

Megjegyezzük, hogy általánosabb esetben előfordulhat, hogy a szögsebesség minden komponensének meghatározásához egy másik referenciaponthoz (pl. az A -hoz) képezt is ki kell fejezni a B pont sebességét.

Összetett, térbeli mozgások értelmezését megkönnyíti, ha azokat két (vagy esetleg több) különböző tengely körüli forgás összetételeként képzelhetjük el. A mozgás elképzelését segíti, ha találunk körpályán mozgó pontokat. Az 1.47 ábra alapján a szimmetriatengelyen lévő B pont $b = h \cos(\alpha)$ sugarú körpályán mozog a z tengely körül, az xy síktól állandó $c = h \sin(\alpha)$ távolságban. Ehhez hasonlóan, az OB szimmetriatengelynek összes pontja körpályán kering a z tengely körül. Jelöljük a szimmetriatengely forgásának szögsebességét ω_1 -gyel! Ez a vektor a z tengellyel párhuzamos, ezért

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{1z} \end{bmatrix}. \quad (1.91)$$

A kúp többi pontja az ω_1 szögsebességgel körbe forgó OB egyeneshez képest mozog körpályán.¹⁶ Ennek a szimmetriatengely körüli forgásnak a szögsebességét jelölje ω_{21} ! A B pont



1.47. ábra. Gördülő kúp néhány pontjának sebessége és a szögsebesség komponenseinek kapcsolata. Az ábrán bejelöltük a C és D pontok pillanatnyi forgástengelyre vetett merőleges vetületeit – a P_1 és P_2 pontokat – is.

sebességét nem befolyásolja az ω_{21} szögsebességű forgás, ezért a körpályán történő keringés kapcsán tanultak alapján a sebesség nagysága $v_B = b\omega_1$, amiből

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_{Bx}}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.16 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.92)$$

Összehasonlítva ezt az eredményt az (1.90) képlettel, látható, hogy a szögsebességek nagysága között az $b\omega_1 = c\omega_2$ összefüggés érvényes, azaz

$$\frac{b}{c} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (1.93)$$

Ez azt jelenti, hogy a gördülés miatt e két forgás szögsebessége nem független egymástól. Szintén a gördülés feltételéből következik, hogy – mivel az O pontot nemcsak az ω_2 , hanem az ω_1 , és ω_{21} szögsebességű forgás is helyben hagyja – mindhárom forgás pillanatnyi forgástengelye átmegy ezen a ponton, ahogy az 1.47 ábra mutatja.

¹⁶Mivel itt külön vizsgáljuk az OB egyeneshez képest történő mozgást, ez a feladat könnyebben tárgyalható a relatív kinematika eszköztárát felhasználva – lásd 1.89. példa.

A kúp ω_2 szögsebességét így két ismert irányú komponensre bonthatjuk:

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_{21}. \quad (1.94)$$

Ezek a szögsebességvektorok az 1.47 ábra szerinti, az ABO háromszöghöz hasonló vektorháromszöget alkotják. Tehát ez a megközelítés is arra vezet, hogy a szögsebesség komponensei között az (1.93) összefüggés teljesül. Továbbá,

$$\omega_{21} = \frac{\omega_1}{\sin(\alpha)} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 14.881 \text{ rad/s}, \quad (1.95)$$

azaz az ábra szerint, az irányok figyelembevételével

$$\omega_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14.2857 \\ 4.1\dot{6} \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.96)$$

A kúp sebességállapotának ismeretében bármely további pont sebessége is kiszámítható. Például $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ miatt

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \omega_2 \times \mathbf{r}_{AC} = \omega_2 \times \mathbf{r}_{AC} = \begin{bmatrix} 2r \cos(\alpha)\omega_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}_B = \begin{bmatrix} 3.84 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (1.97)$$

a D pont sebessége pedig

$$\mathbf{v}_D = \omega_2 \times \mathbf{r}_{AD} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{2y} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r \\ r \sin(\alpha) \\ r \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha)\omega_{2y} \\ 0 \\ r\omega_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.92 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.98)$$

Az (1.78) egyenlet szerint egy pont sebessége és a szögsebesség ismeretében a pillanatnyi forgástengely egy pontjának helyzete is meghatározható. Az előbb kiszámított \mathbf{v}_C és \mathbf{v}_D sebességekkel

$$\mathbf{r}_{CP1} = \frac{\omega_2 \times \mathbf{v}_C}{\omega_2^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2r \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2688 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad (1.99)$$

illetve

$$\mathbf{r}_{DP2} = \frac{\omega_2 \times \mathbf{v}_D}{\omega_2^2} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ -r \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0 \\ -0.1344 \end{bmatrix} \text{ m}. \quad (1.100)$$

Ahogy az ábrán is illusztráljuk, az így kapott P_1 és P_2 pontok nem esnek egybe, hiszen az egyiket a C pont, a másikat pedig a D pont forgástengelyre való vetítésével kaptuk. ♠

1.2.5. Véges mozgások

A pillanatnyi vagy elemi mozgások mellett véges ideig (tehát nem csak egy pillanatig) tartó, ún. *véges mozgásokat* is definiálhatunk.

A véges mozgásokat geometriai szempontból két csoportra bonthatjuk: ha a test pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak, akkor *síkmozgásról* beszélünk. Az ettől eltérő eseteket *térbeli mozgásnak* szokták nevezni.¹⁷

¹⁷Természetesen a síkmozgás is térben történik, de nem akartunk elszakadni a szokásos elnevezésektől.

Síkmozgás

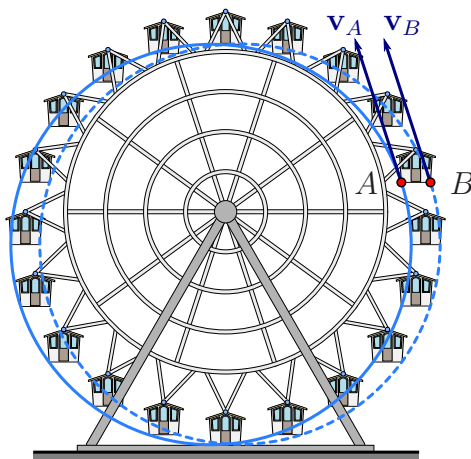
1.42. definíció. SÍKMOZGÁS közben a test pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak, minden pont sebesség- és gyorsulásvektora is párhuzamos ezekkel a síkokkal. Az 1.30. tétel szerint ekkor a szögsebességvektor nulla vagy merőleges a mozgás síkjaira. ♣

Síkmozgás során minden pillanatban elemi haladó vagy elemi forgó mozgást figyelhetünk meg, elemi csavarmozgás nem lehetséges ebben az esetben. Ennek megfelelően a véges síkmozgások két csoportra bonthatók: véges haladó és véges forgó mozgásokra.

A véges mozgások közül a haladó mozgás egyfajta átmenetet képez a merev testek és az anyagi pontok kinematikája között, tehát ez tekinthető a legegyszerűbb véges mozgásnak.

1.43. definíció. SÍKBELI HALADÓ mozgás vagy SÍKBELI TRANSZLÁCIÓ (eltolás) során a merev test térbeli irányítása nem változik, a test pontjai egymással egybevágó síkgörbéket írnak le. A síkbeli haladó mozgás során a test egy véges időtartam minden pillanatában elemi haladó mozgást végez, szögsebessége nulla. ♣

Nemcsak a síkbeli, hanem tetszőleges térbeli haladó mozgás során is igaz, hogy a test bármely két pontjának sebessége és gyorsulása megegyezik, de ennek a közös sebességnek illetve gyorsulásnak az iránya a mozgás során változhat. Ez tehát nem azt jelenti, hogy egyenes vonalon mozog a test, hanem azt, hogy – mivel szögsebessége és szöggyorsulása nulla – *sebességállapota és gyorsulásállapota egyetlen pontjának sebességével és gyorsulásával megadható*, úgy, mint az anyagi pontoknál. Ilyen mozgást végeznek például az 1.48 ábrán látható óriáskerék gondolái, melyek minden pontja ugyanakkora sugarú körpályát ír le.

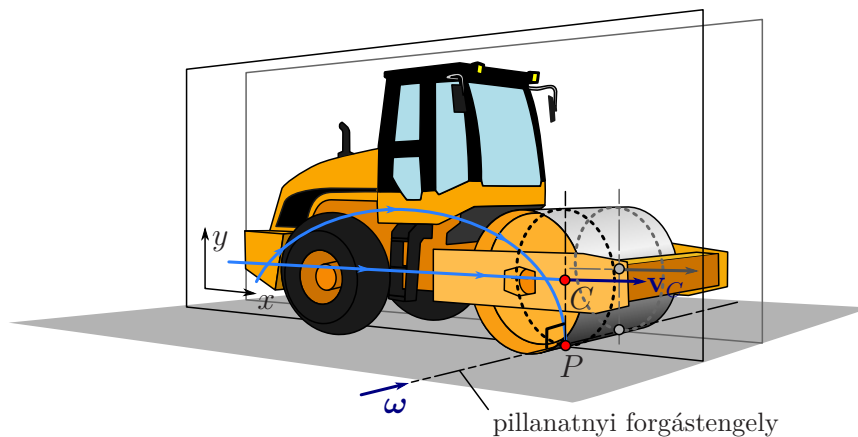


1.48. ábra. Példa haladó mozgásra: az óriáskerék gondolái.

1.44. definíció. SÍKBELI FORGÓ mozgás vagy SÍKBELI ROTÁCIÓ (elforgatás) során a merev test egy véges időtartam minden pillanatában elemi forgó mozgást végez. ♣

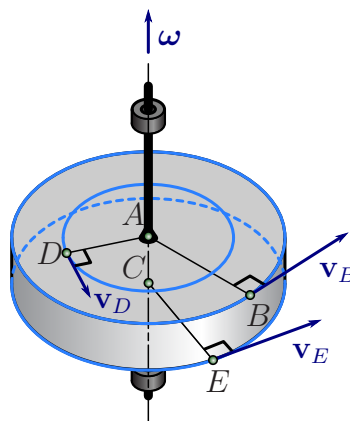
Például az 1.49 ábrán látható úthenger vázszerkezete haladó mozgást, tömörítőhengere forgó mozgást végez.

A síkbeli forgó mozgásnak van egy kitüntetett jelentőségű esete, az álló tengely körüli forgás:



1.49. ábra. Példa síkmozgásra: az úthenger tömörítőhengerének pontjai az állandó irányú pillanatnyi forgástengelyre merőleges síkokban mozognak. Az úthenger vázszerkezete ugyanakkor síkbeli haladó mozgást végez. A két bejelölt síkban ugyanúgy mozognak az egymásnak megfelelő pontok.

1.45. definíció. ÁLLÓ TENGELEK KÖRÜLI FORGÓ MOZGÁS vagy ROTÁCIÓ során a merev testnek egy meghatározott egyenesen, a forgástengelyen levő pontjai változatlanul megtartják helyzetüket, míg a test többi pontjának pályái körívek a forgástengelyre merőleges síkokban. Ez tehát elemi forgó mozgások sorozata, ugyanazon tengely körül (lásd 1.50 ábra). ♣



1.50. ábra. Álló tengely körüli forgó mozgás, mint a síkmozgás egy speciális esete.

Számos gyakorlati probléma vezethető vissza síkmozgás vizsgálatára, ezért a síkmozgás kinematikájával részletesebben is foglalkozunk az 1.2.8 fejezetben.

Térbeli mozgások

A haladó mozgásnak nem csak síkbeli, hanem térbeli változata is van:

1.46. definíció. TÉRBELI HALADÓ mozgás vagy TÉRBELI TRANSZLÁCIÓ (eltolás) során a merev test térbeli irányítása nem változik, a test pontjai egymással egybevágó térgörbéket írnak le. A térbeli haladó mozgás során a test egy véges időtartam minden pillanatában elemi haladó mozgást végez, szögsebessége nulla. ♣

Térbeli haladó mozgást végezhetnek például nyomtatott áramköri elemek beültetéséhez használható robotkarok, de igazán jellemző példát nehéz találni a műszaki gyakorlatban.

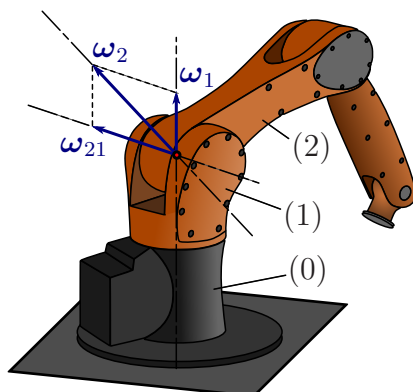
A térbeli mozgások egy másik csoportjával – a gömbi mozgásokkal – sokkal gyakrabban találkozhatunk a legkülönbözőbb gépelemek mozgása kapcsán:

1.47. definíció. GÖMBI MOZGÁS vagy PÖRGETTYŰMOZGÁS során a merev test pillanatnyi forgástengelye mindig ugyanazon pontra illeszkedik. A mozgás elemi forgások sorozata, de a forgástengely iránya változik (lásd 1.2.10 és 3.6 fejezetek). ♣

A definícióból következik, hogy gömbi mozgás során a testnek van egy tartósan nulla sebességű pontja. Ilyen mozgást végeznek a kúpgörgős csapágyak görgői, egy kardáncsukló kereszttagja vagy az 1.51 ábrán látható robotkar.

A robotkar (1) jelű részének szögsebessége ω_1 . Ehhez képest a (2) jelű kar ω_{21} szögsebességgel mozog. A szögsebességek összeadhatósága miatt a (2) kar teljes szögsebessége $\omega_2 = \omega_1 + \omega_{21}$. A pillanatnyi forgástengelyek metszéspontjában található pont tartósan áll.

Számos játék is gömbi mozgást végez, mint például a bűgócsiga (1.52 ábra). Gördülési problémák kapcsán is találkozhatunk gömbi mozgással – ezt az 1.74 ábra szemlélteti egy kúp gördülése kapcsán.



1.51. ábra. Példa gömbi mozgásra: a robotkar (2) jelű karjának szögsebességét az ω_2 vektor adja meg, ami az (1) jelű, ω_1 szögsebességgel körbe forgó talpazattal együtt forog.

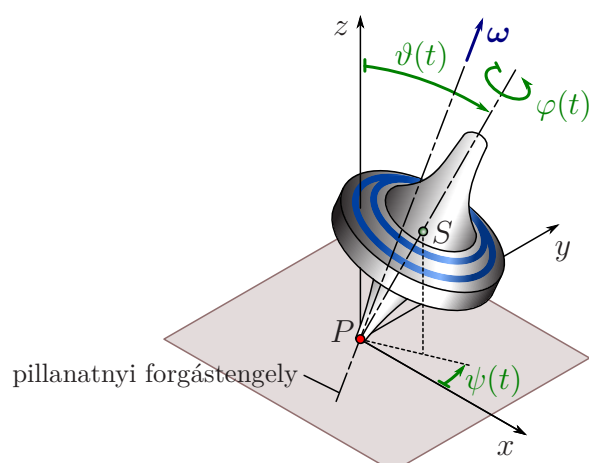
A térbeli mozgások közül a legáltalánosabb a véges csavarmozgás:

1.48. definíció. A VÉGES CSAVARMOZGÁS elemi csavarmozgások sorozata.

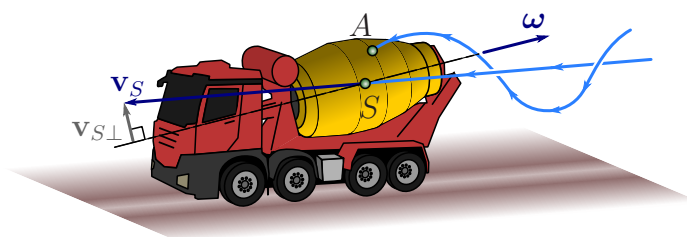
Véges csavarmozgást végez például egy betonkeverő autó tartálya (1.53 ábra) vagy egy fúrószár.

1.2.6. Kiegészítés: a merev testek sebességállapotának tárgyalása elemi eltolások és elforgatások segítségével

Könnyen belátható, hogy a merev test adott 1 kezdőhelyzetből tetszőleges 2 véghelyzetbe átvihető egy eltolással (transzlációval) és egy forgatással (rotációval). Az eltolás egy pont elmozdulásával ekvivalens, tehát három szabadsági fok jut rá, míg a forgatás megadásához



1.52. ábra. Példa gömbi- vagy más néven pörgettyűmozgásra: bűgócsiga.



1.53. ábra. Példa csavarmozgásra: betonkeverő autó tartálya.

szükség van a forgástengely irányára – ez két szöggel adható meg – és az elforgatás szögére is. Tehát a forgatásra is három szabadsági fok jut, ahogy az 1.30 ábrán szemléltettük.

Az így kapott, egy eltolásból és egy rögzített tengely körüli forgatásból előálló mozgás általában eltér a közbülső helyzetekben a valóságos, 1 és 2 helyzetek közti mozgástól, hiszen a gyakorlatban mind a haladás (eltolás) iránya, mind a forgástengely iránya folyamatosan változhat az időben. Nagyon kicsi elmozdulások esetén azonban ez az eltérés elhanyagolható. A merev test mozgását tehát végtelenül kicsi elemi haladó mozgások és forgások sorozataként képzelhetjük el. Egy-egy ilyen elemi mozgás közben mind a haladás iránya, mind a forgástengely iránya állandónak tekinthető.

A test A pontjának elmozdulását leíró elemi translációt egy végtelenül kicsi $d\mathbf{r}_A$ vektorral adhatjuk meg. Az elemi elfordulást a pillanatnyi forgástengely iránya és a végtelenül kicsi $d\varphi$ elfordulási szög jellemzi. Mivel iránya és nagysága is van, célszerűnek tűnik bevezetni az elemi elfordulás $d\boldsymbol{\varphi}$ vektorát, a jobb menetű csavarnak megfelelő irányítással. Viszont a véges elfordulásokra nem teljesül a parallelogramma szabály, nem cserélhető fel a sorrendjük (lásd 1.11. megjegyzés és 1.31 ábra), ezért a vektor definíciójából (5.1. definíció) következik, hogy általában nem lehet elfordulásvektort bevezetni. Az alábbi tétel szerint azonban a végtelenül kicsi elfordulások leírhatók vektorok segítségével.

1.49. tétel. *A végtelenül kicsi, elemi elfordulások – a véges nagyságú elfordulásokkal ellentétben – követik a vektori összeadás szabályát, tehát a bevezetett elemi $d\boldsymbol{\varphi}$ elfordulás vektor tényleg vektornak tekinthető.*

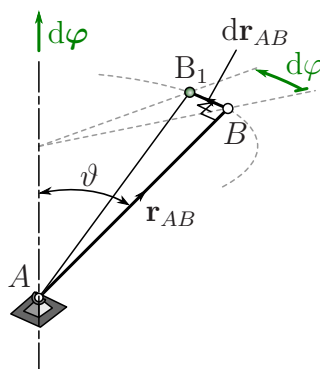
Bizonyítás:

Egy B pont helyzetét rögzített A pont esetén megadja az \mathbf{r}_{AB} vektor. A B pont elmozdulása

a fix A ponton átmenő pillanatnyi forgástengely körüli elemi elforgatás során

$$|d\mathbf{r}_{AB}| = d\varphi |\mathbf{r}_{AB}| \sin(\vartheta),$$

ahol ϑ az \mathbf{r}_{AB} vektor és a forgástengely által bezárt szög (1.54 ábra).



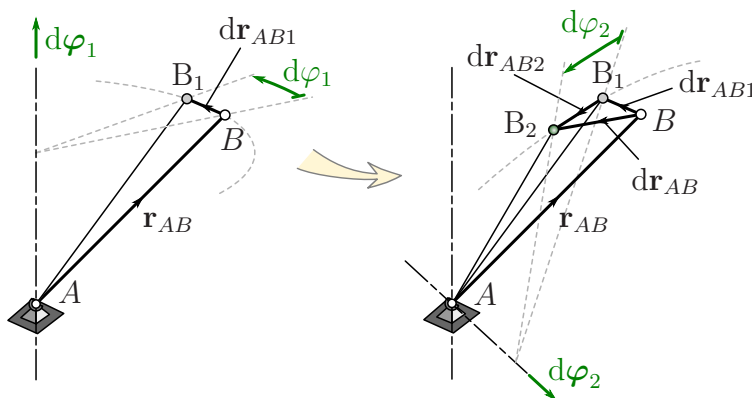
1.54. ábra. Elemi elforgatás az A ponton átmenő tengely körül.

Mivel az elmozdulás merőleges mind a forgástengelyre, mind az \mathbf{r}_{AB} vektorra, a vektoriális szorzás szabályai szerint

$$d\mathbf{r}_{AB} = d\varphi \times \mathbf{r}_{AB}, \quad (1.101)$$

feltéve, hogy $d\varphi$ vektornak tekinthető.

Tekintsünk most két egymás utáni elemi forgatást a rögzített A ponton átmenő két különböző tengely körül, az 1.55 ábrának megfelelően.



1.55. ábra. Két elemi elforgatás egymás utáni alkalmazása: a $d\varphi_1$ forgatás során a B pont B_1 -be, majd a $d\varphi_2$ forgatás után B_2 -be jut.

Az előzőek szerint a B pont elmozdulása

$$\text{a } d\varphi_1 \text{ forgatás során } d\mathbf{r}_{AB1} = d\varphi_1 \times \mathbf{r}_{AB},$$

$$\text{a } d\varphi_2 \text{ forgatás során } d\mathbf{r}_{AB2} = d\varphi_2 \times (\mathbf{r}_{AB} + d\mathbf{r}_{AB1}) = d\varphi_2 \times \mathbf{r}_{AB} + d\varphi_2 \times d\mathbf{r}_{AB1}.$$

A $d\varphi_2 \times d\mathbf{r}_{AB1}$ tag másodrendben kicsi, hiszen mindkét tényezőjét végtelenül kicsinek teteleztük fel. Tehát a többi, elsőrendben kicsi mennyiséghez képest ez elhanyagolható (ami nem tehető meg véges elfordulások esetén). Következésképpen, a B pont eredő elmozdulása:

$$d\mathbf{r}_{AB} = d\mathbf{r}_{AB1} + d\mathbf{r}_{AB2} \approx d\varphi_1 \times \mathbf{r}_{AB} + d\varphi_2 \times \mathbf{r}_{AB} = (d\varphi_1 + d\varphi_2) \times \mathbf{r}_{AB}.$$

Ez azt jelenti, hogy az elemi $d\varphi$ forgások vektorokként adódnak össze, sorrendjük is tetszőleges. ♠

A fentiek szerint a merev test B pontjának tetszőleges elemi elmozdulása összetehető a test valamely A pontjának elemi elmozdulását megadó $d\mathbf{r}_A$ elmozdulásból és az új helyzetben rögzített A ponton átmenő tengely körüli elemi elfordulásból:

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_{AB}. \quad (1.102)$$

Az (1.102) egyenlet mindkét oldalát osztva az elmozduláshoz szükséges kicsi, dt időintervallummal, majd véve a $dt \rightarrow 0$ határátmenetet:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \times \mathbf{r}_{AB}, \quad \text{azaz} \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}, \end{aligned}$$

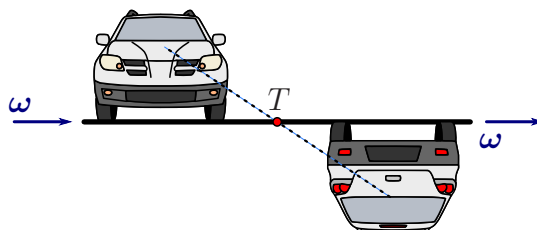
ahol

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$

a *szögsebesség*. Nyilvánvalóan ez ugyanaz a vektor mint amit az 1.30. tételben bevezettünk. Mivel az elemi elfordulás jellemzésére bevezetett $d\boldsymbol{\varphi}$ mennyiségről beláttuk, hogy vektor, a szögsebesség is vektormennyiség.

1.50. következmény. *A szögsebességek vektorként adhatók össze.* ♠

1.15. megjegyzés: Szigorúan véve a szögsebesség ún. *axiális vektor* vagy *pszeudovektor*. Az ún. valódi vagy *poláris* vektorok – mint például a helyvektor vagy az abból származtatott sebességvektor – minden komponense előjelet vált egy pontra való tükrözéskor. A szögsebesség irányát viszont a jobbkéz-szabály alapján értelmezzük. Pontra történő tükrözéskor mindhárom tengely felcserélődik, viszont ez azzal járna, hogy „balkéz-szabályt” kellene alkalmaznunk. Ha továbbra is a jobbkéz-szabályt alkalmazzuk, akkor ez az irány megállapításakor még egy síkra való tükrözésnek felel meg. Ez látszik az 1.56 ábrán, ahol a T pontra történő tükrözés nem változtatja meg a szögsebesség irányát.



1.56. ábra. *A szögsebesség axiális vektor: a felénk tartó gépkocsi kerekeinek szögsebessége és a T pontra való tükrözéssel kapott, tőlünk távolodó gépkocsi kerekeinek szögsebessége ugyanolyan irányú.*

A pszeudovektorok mindig származtathatók poláris vektorok vektoriális szorzásának eredményeként, hiszen a vektoriális szorzás definíciójában is szerepel a jobbkéz-szabály. Ha ismerjük a merev test két olyan A és B pontjának sebességét, melyek a pillanatnyi forgástengelyre merőleges egyenesen vannak, tehát $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_{AB}$, akkor az 1.36. tétel bizonyításához hasonló módon belátható, hogy

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}_{AB} \times \frac{\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A}{|\mathbf{r}_{AB}|^2}. \quad (1.103)$$

Pontra történő tükrözéskor mind az \mathbf{r}_{AB} , mind a $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ vektor komponensei előjelet váltanak, szorzatuk iránya viszont nem változik.

A pszeudovektorok antiszimmetrikus mátrixok alakjában is kifejezhetők – ez az alak jobban kifejezni a forgatási mátrixokkal való kapcsolatukat. A szögsebességnek megfelelő mátrixot az 5.2 fejezetben vezetjük le.

A vektorkettősök redukciójáról szóló 1.2.3 fejezet szerint a szögsebességvektor az erő vektornak feleltethető meg. Ezt az analógiát nem zavarja meg, hogy az erő vektor poláris, a szögsebesség pedig axiális, mert a vektorkettős-formalizmus a vektorok eltolásával, a poláris-axiális megkülönböztetés pedig a vektorok tükrözésével kapcsolatos. ♣

1.2.7. A merev test gyorsulásállapota

A merev test különböző pontjai végtelenül sokféle gyorsulással mozoghatnak egy adott pillanatban, ezért a *gyorsulásállapot* (lásd 1.57 ábra) jellemzésére is egy szabályt keresünk.

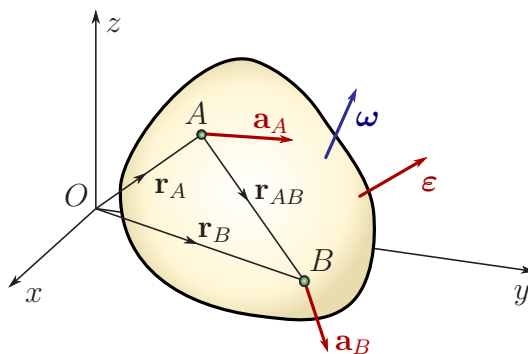
1.51. tétel. *Egy merev test A és B pontjainak gyorsulásvektorai között a következő összefüggés teljesül:*

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}), \quad (1.104)$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ a merev test SZÖGGYORSULÁSA, ami a szögsebességvektor idő szerinti deriváltja. Mértékegysége rad/s^2 . Az (1.104) képletet GYORSULÁSREDUKCIÓS KÉPLETNEK nevezzük. ♠

Bizonyítás:

A $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$ összefüggés deriválásából következik az állítás, felhasználva, hogy $\mathbf{a}_B \equiv \dot{\mathbf{v}}_B$, $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}}$, és $\dot{\mathbf{r}}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$. A vektoriális szorzatot a szorzat szokásos deriválási szabálya szerint kell deriválni, tehát $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{AB}$. ♠



1.57. ábra. Merev test gyorsulásállapota három vektorral: egy pontjának gyorsulásával (pl. \mathbf{a}_A), $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességével és $\boldsymbol{\varepsilon}$ szöggyorsulásával adható meg.

(1.104) szerint egy merev test gyorsulásállapotát három vektorral adhatjuk meg: egy tetszőleges pont gyorsulásával, valamint a merev test egészét jellemző szögsebességgel és szöggyorsulással.

Mivel a szögsebesség vektor, ezért idő szerinti deriváltja – a szöggyorsulás – akkor is lehet nullától különböző, ha a nagysága nem változik, csak az iránya (lásd 1.3. megjegyzés).

1.52. következmény. *Ha egy állandó nagyságú, $\boldsymbol{\omega}_2$ szögsebességvektor $\boldsymbol{\omega}_1 =$ állandó szögsebességgel forog, akkor (1.67) szerint $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ deriváltja*

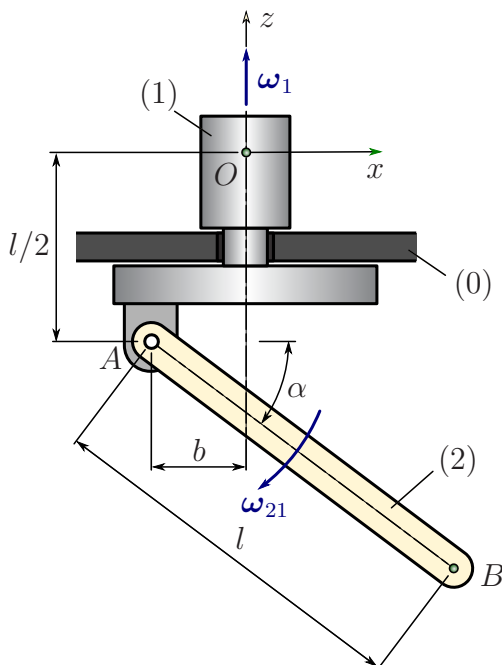
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2. \quad (1.105)$$

♠

Ezt az összefüggést alkalmazhatjuk a 1.40. példa kapcsán is: az ω_2 szögsebességvektor a kerékpár mozgásának megfelelően, ω_1 szögsebességgel körbe forog, ezért az 1.52. következmény szerint az első kerék szöggyorsulása $\varepsilon_2 = \omega_1 \times \omega_2$, ahogy az 1.45 ábra mutatja. Hasonlóan lehet eljárni az 1.41. példában is. Viszont mivel a gördülés megfelelő tárgyalásához még további tételek kimondására van szükség, a gördülő kúp gyorsulásállapotának tárgyalására csak később, az 1.2.10 és 1.2.11 fejezetekben kerítünk sort.

Az 1.33. példában szereplő szerkezet gyorsulásállapota kielégítően tárgyalható az eddig levezetett eredmények alapján, ezért ezt vizsgáljuk meg az alábbiakban.

1.53. példa: Az 1.58 ábrán vázolt, l hosszúságú, (2) jelű rúd az A csuklón keresztül kapcsolódik a függőleges z tengely körül állandó ω_1 szögsebességgel forgó (1) testhez. A vázolt helyzetben a rúd az (1) testhez képest állandó nagyságú ω_{21} szögsebességgel mozog. Határozzuk meg az A és B pontok gyorsulását, valamint a (2) rúd ε_2 szöggyorsulását, ha $l = 0.5$ m, $b = 0.125$ m, $\omega_{1z} = 10$ rad/s és $\omega_{21y} = 5$ rad/s, továbbá $\sin(\alpha) = 0.6$ és $\cos(\alpha) = 0.8$!



1.58. ábra. Példa a gyorsulásredukciós képlet alkalmazására.

Megoldás:

Az ω_1 szögsebesség állandó, ezért $\varepsilon_1 = 0$. Továbbá, mivel a tengelybe eső O pont gyorsulása nulla,

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \varepsilon_1 \times \mathbf{r}_{OA} + \omega_1 \times (\omega_1 \times \mathbf{r}_{OA}) = \omega_1 \times (\omega_1 \times \mathbf{r}_{OA}) = \begin{bmatrix} b\omega_{1z}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.106)$$

A B pont gyorsulásának kiszámításához a (2) test kinematikai jellemzőire van szükség:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \varepsilon_2 \times \mathbf{r}_{AB} + \omega_2 \times (\omega_2 \times \mathbf{r}_{AB}). \quad (1.107)$$

Láttuk az 1.33. példában, hogy a (2) test szögsebessége

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{21y} \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.108)$$

Ez a vektor állandó nagyságú, de $\boldsymbol{\omega}_1$ szögsebességgel forog, ezért az 1.52. következmény miatt

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} -\omega_{1z}\omega_{21y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (1.109)$$

Ezeket az eredményeket felhasználva,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l \sin(\alpha)\omega_{1z}\omega_{21y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_x l \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

és

$$\boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{AB}) = \begin{bmatrix} -l \cos(\alpha) (\omega_{1z}^2 + \omega_{21y}^2) \\ -l \sin(\alpha)\omega_{1z}\omega_{21y} \\ l \sin(\alpha)\omega_{21y}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.111)$$

amiből

$$\mathbf{a}_B = \begin{bmatrix} a_{Ax} - l \cos(\alpha) (\omega_{1z}^2 + \omega_{21y}^2) \\ -2l \sin(\alpha)\omega_{1z}\omega_{21y} \\ l \sin(\alpha)\omega_{21y}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37.5 \\ -30 \\ 7.5 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.112)$$

Bár néhány tagot azonosítani lehet a körmozgással kapcsolatos képletekkel való összevetés után, a B pont gyorsulásának kiszámítása már nagyon nehezen lenne elvégezhető csupán fizikai szemléletünk alapján. ♠

1.2.8. A merev test síkmozgásának kinematikája

Az eddig levezetett összefüggések merev testek tetszőleges térbeli mozgására vonatkoznak. Fontos speciális eset az, amikor a merev test síkmozgást végez, ekkor ugyanis egyszerűbb alakra hozható mind a sebességredukciós-, mind a gyorsulásredukciós képlet és a test mozgásának elképzelése is sokkal könnyebb.

Az 1.42. definíció szerint merev test síkmozgása során a test pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak és minden pont sebesség- és gyorsulásvektora is párhuzamos ezekkel a síkokkal. Az 1.30. tétel szerint ekkor a szögsebességvektornak merőlegesnek kell lennie a mozgás síkjaira. Mivel az egymással párhuzamos síkokban ugyanaz a sebesség- és gyorsulásállapot, a vizsgálatokhoz elegendő egy síkot kiszemelni, a test mozgása abban az egy síkban ábrázolható.¹⁸

Célszerű a koordináta-rendszert úgy megválasztani, hogy az xy sík illeszkedjen a mozgás kiszemelt síkjához – így járunk el az egész fejezetben. Ebben az esetben a helyvektoroknak, a sebességvektoroknak és a gyorsulásvektoroknak csak az x és y komponensük lehet nullától különböző, míg a szögsebesség- és szöggyorsulás vektorok a z tengellyel párhuzamosak:

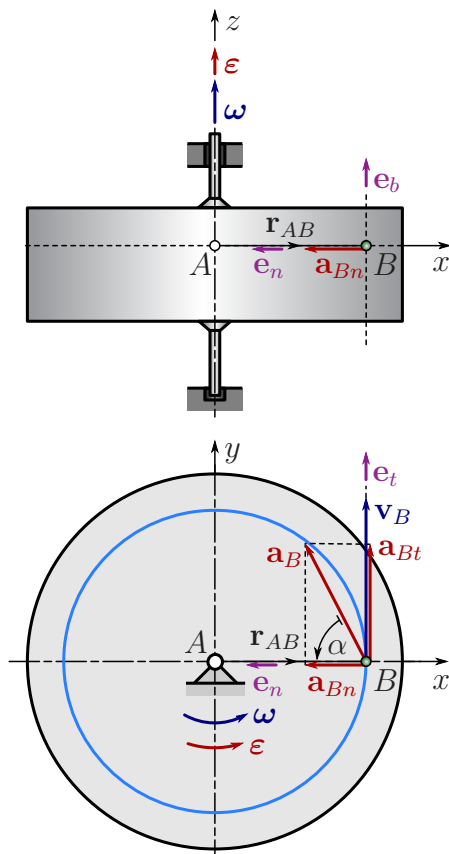
$$\mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_A = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

A sebesség- és gyorsulásállapotot jellemző vektorok speciális alakja lehetővé teszi a számítások egyszerűsítését. Míg az általános esetben a sebesség- és gyorsulásállapot együttes megadásához összesen 12 skalár komponenset kell megadni (pl. \mathbf{v}_A , $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{a}_A és $\boldsymbol{\varepsilon}$ három-három komponensét), síkmozgás esetén mindössze hat nem zérus komponens marad.

¹⁸A szakirodalomban *tárcsának* nevezik a kiszemelt sík és a test metszetét.

Álló tengely körüli forgás

Először az egyik legegyszerűbb síkmozgás, az álló tengely körüli forgás esetét vizsgáljuk, amit az 1.59 ábra szemléltet. Bármelyik, tengelyre merőleges síkot kiválaszthatjuk, hiszen minden síkban ugyanazt a mozgást figyelhetjük meg. Szemeljük ki most a tengelyen lévő A pontot tartalmazó síkot! Mivel a tengely pontjainak mind a sebessége, mind a gyorsulása nulla, célszerű az álló A pontot választani referenciapontnak a többi pont sebességének és gyorsulásának a meghatározásához.



1.59. ábra. Álló tengely körüli forgás. A test minden pontja körpályán mozog, ezért jól elkülöníthetők a gyorsulás tangenciális és normális komponensei.

$\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ miatt a kiválasztott síkban fekvő, $|\mathbf{r}_{AB}|$ sugarú körpályán keringő B pont sebessége:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}.$$

A vektoriális szorzat tulajdonságai miatt

$$\mathbf{v}_B \perp \mathbf{r}_{AB} \quad (1.113)$$

és a pont sebessége a kiválasztott síkba esik. Továbbá, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_{AB}$ következtében a sebesség nagysága is megállapítható:

$$v = \omega |\mathbf{r}_{AB}|. \quad (1.114)$$

Az (1.104) gyorsulásredukciós képlet alkalmazásával $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$ miatt

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}).$$

Az 5.5. kifejtési tételből következik, hogy $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_{AB}\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{r}_{AB}\boldsymbol{\omega}^2$, ahol az $\mathbf{r}_{AB}\boldsymbol{\omega}$ skaláris szorzat $\mathbf{r}_{AB} \perp \boldsymbol{\omega}$ miatt zérus. Tehát

$$\mathbf{a}_B = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB}}_{\perp \mathbf{r}_{AB}} - \underbrace{\mathbf{r}_{AB}\boldsymbol{\omega}^2}_{\parallel \mathbf{r}_{AB}}. \quad (1.115)$$

Látható, hogy a gyorsulásvektor két komponensre bontható, melyek közül az egyik merőleges az \mathbf{r}_{AB} vektorra, a másik pedig párhuzamos vele. Mivel a sebességvektor is merőleges az \mathbf{r}_{AB} vektorra, továbbá $\boldsymbol{\varepsilon} \perp \mathbf{r}_{AB}$, ez azt jelenti, hogy *álló tengely körüli forgás esetében* a tangenciális és normális gyorsulás nagysága¹⁹

$$a_{Bt} = |\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB}| \equiv \varepsilon |\mathbf{r}_{AB}|, \quad \text{illetve} \quad (1.116)$$

$$a_{Bn} = \boldsymbol{\omega}^2 |\mathbf{r}_{AB}|, \quad (1.117)$$

ahol ε a szöggyorsulás előjeles nagysága. ε előjelét a tangenciális gyorsulás előjelének megfelelően kell értelmezni: akkor pozitív, ha a szögsebesség abszolút értéke nő.

Ha a szöggyorsulás nulla ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \text{állandó}$), akkor a B pont gyorsulása a tengely felé mutat, tehát csak normális komponense van. Nulla szögsebesség, de nem nulla szöggyorsulás esetében (ilyen helyzet az indulás pillanatában fordul elő) viszont $\mathbf{a}_B \perp \mathbf{r}_{AB}$, tehát tangenciális irányú a gyorsulás. Szemléletesen jellemzi a két gyorsuláskomponens arányát az α gyorsulásszög:

1.54. definíció. *Álló tengely körüli forgás esetén az α gyorsulásszög a gyorsulásvektortól a normális gyorsulás vektor irányáig felmért előjeles szög. Tangense így számítható:*

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon_z}{\boldsymbol{\omega}^2}. \quad (1.118)$$



Tehát ha $\boldsymbol{\varepsilon}$ az óramutató járásával ellentétes (pozitív) forgásirányú, akkor $\alpha > 0$ és $\varepsilon_z > 0$, ellenkező esetben mindkettő negatív. Továbbá, a definícióból következik, hogy ha az \mathbf{a}_B vektort elforgatjuk α szöggel, akkor a tengely felé mutató vektort kapunk, amint az 1.59 ábrán látható.

Az (1.115) képlet alapján a gyorsulás nagysága

$$a_B = |\mathbf{r}_{AB}| \sqrt{\varepsilon^2 + \boldsymbol{\omega}^4} \equiv |\mathbf{r}_{AB}| \sqrt{\varepsilon_z^2 + \boldsymbol{\omega}_z^4}. \quad (1.119)$$

Az (1.114) és (1.119) képletekből látszik, hogy álló tengely körüli forgás esetében *mind a sebesség, mind a gyorsulás nagysága egyenesen arányos a forgástengelytől mért $|\mathbf{r}_{AB}|$ távolsággal*. Ez alapján könnyen megkereshetjük a test maximális sebességű vagy gyorsulású pontját: ez a test tengelytől legtávolabbi pontja.

A következőkben megmutatjuk, hogy minden síkmozgás visszavezethető tengely körüli forgásra, de a sebességek és gyorsulások szempontjából általában különböző pontokba kell helyezni azt a tengelyt, ami körül a test forgását elképzeljük. A fejezet hátralévő részében közölt, síkmozgással kapcsolatos eredmények felhasználása általában nem feltétlenül szükséges a feladatok megoldásához. Jelentőségüket elsősorban az adja, hogy megkönnyítik a sebesség- és gyorsulásállapot gyors áttekintését, ami nélkülözhetetlen a tervezéshez és a számítások eredményeinek szemlélet alapján történő ellenőrzéséhez.

¹⁹Emlékeztetünk arra, hogy a tangenciális gyorsulás pozitív ha a sebesség abszolút értéke nő és negatív, ha csökken. A normális gyorsulás mindig pozitív.

Síkmozgást végző merev test sebességállapota

A síkmozgást végző testek csak haladó vagy forgó mozgást végezhetnek, csavarmozgást nem. A továbbiakban a forgó mozgásokra koncentrálnunk, mert $\omega \rightarrow 0$ határátmenettel a forgó mozgásra levezetett képletek kiterjeszthetők haladó mozgásra is.

Általános síkbeli forgó mozgást végző merev test esetén akkor egyszerűsödnek le a sebességállapokra vonatkozó egyenletek az (1.113) és (1.114) képletekhez hasonlóan, ha a pillanatnyi forgástengely xy síkba eső P pontját választjuk referenciapontnak. Ezt az 1.36. tétel és (1.78) egyenlet szerint megkereshető, nulla sebességű pontot *sebességpólusnak* nevezzük.

1.55. definíció. *Síkmozgást végző merev test nulla sebességű P pontját PÓLUSPONTNAK vagy SEBESSÉGPÓLUSNAK nevezzük.* ♣

A P sebességpólus helyének ismeretében egy tetszőleges B pont sebessége felírható a következő módon:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PB}. \quad (1.120)$$

Kihhasználva a síkmozgás sajátosságait (azaz azt, hogy $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_{PB}$), arra jutunk, hogy

$$v_B = \omega |\mathbf{r}_{PB}| \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_B \perp \mathbf{r}_{PB}. \quad (1.121)$$

Következésképpen, a sebesség nagysága arányos a sebességpólustól mért távolsággal, iránya pedig merőleges a sebességpólusból húzott helyvektorra, ugyanúgy, mint álló tengely körüli forgás esetében. Tehát kijelenthetjük, hogy a síkmozgást végző test a sebességállapota szempontjából úgy viselkedik, mintha a P sebességpólus (pontosabban: az azon átmenő tengely) körül forogna.

A sebességpólus helyvektora többféle módszerrel is meghatározható a sebességállapot – például az $[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_A]_A$ vektorkettős vagy két pont sebessége – ismeretében:

- Kézenfekvő lehetőség az (1.78) egyenlet alkalmazása:

$$\mathbf{r}_{AP} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\omega^2}.$$

Ebből a képletből látható, hogy haladó mozgás – azaz $\omega = 0$ – esetén a sebességpólus egy végtelen távoli pontba képzelhető.

- A sebességredukciós képlet felhasználásával is kifejezhető a sebességpólus helye. Síkmozgás esetén egy ismert sebességű A pontból a két ismeretlen komponens tartalmazó

$$\mathbf{r}_{AP} = \begin{bmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ 0 \end{bmatrix}$$

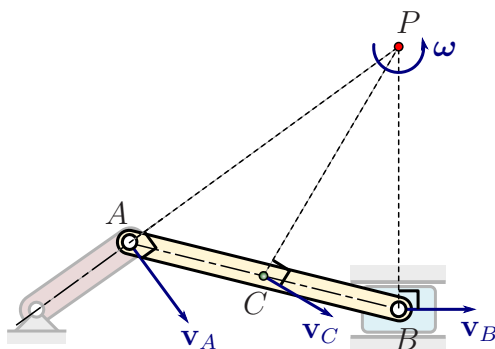
vektor mutat a sebességpólusba. Mivel $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AP}$ és $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} v_{Ax} - \omega_z y_{AP} \\ v_{Ay} + \omega_z x_{AP} \\ 0 \end{bmatrix},$$

ami alapján

$$x_{AP} = -\frac{v_{Ay}}{\omega_z} \quad \text{és} \quad y_{AP} = \frac{v_{Ax}}{\omega_z}.$$

- Az (1.121) egyenletből következik, hogy $\mathbf{v}_A \perp \mathbf{r}_{AP}$. Ez lehetőséget ad a sebességpólus helyének gyors geometriai meghatározására: két (nem párhuzamos sebességű) pont sebességvektorára merőlegeseket állítva a kapott egyeneseknek ki kell metszeniük a sebességpólust, ahogy az 1.60 és 1.61 ábrák mutatják.



1.60. ábra. A sebességpólus helyének geometriai meghatározása, ismert irányú sebességvektorokra merőleges egyenesek metszéspontjaként.

Az ismeretett eljárások síkbeli haladó mozgásra is általánosíthatók. Ennek értelmében egy haladó mozgást végző test sebességpólusa a sebességvektorra merőleges irányban, egy végtelen távoli pontban képzelhető el.

1.16. megjegyzés: Az \mathbf{r}_{AP} vektor komponenseinek számítása jól mutatja, hogy *síkmozgás vizsgálata során a sebességredukciós képlet három skalár komponens egyenletéből csak kettő hordoz információt*: mivel a sebesség az xy síkkal párhuzamos, a z irányú komponens egyenlet $0 = 0$ alakú. Síkmozgás során a gyorsulásoknak is nulla a z komponensük, ezért ez az állítás a gyorsulásredukciós képletre is teljesül. ♣

1.56. példa: Határozzuk meg egy vízszintes talajon gördülő kerék sebességpólusának helyét és ez alapján rajzoljuk meg néhány pont sebességvektorát!

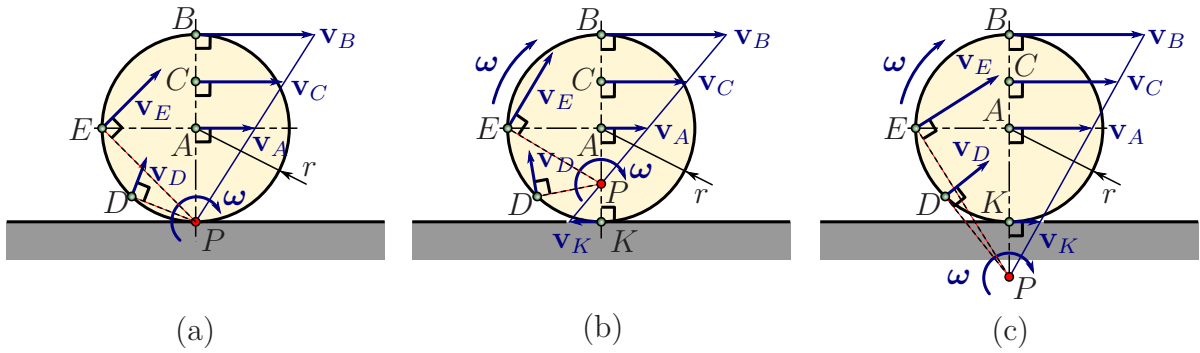
Megoldás:

A gördülés kinematikájáról bővebben lesz szó az 1.2.9 fejezetben. Most csak azt használjuk ki, hogy gördülés során a talajjal érintkező P pont sebessége nulla (lásd 1.8. megjegyzés), tehát az a sebességpólus.

Az (1.121) képletek szerint a kerék pontjainak sebessége egyenesen arányos a sebességpólustól mért távolsággal és merőleges a sebességpólushoz húzható szakaszra. Ez alapján megrajzolhatók a sebességvektorok, az 1.61/a ábrának megfelelően. Az A pont sebességének nagysága $v_A = r\omega$. Az ábrán az is látszik, hogy a talajtól legtávolabbi, B pont sebessége a legnagyobb: $v_B = 2r\omega$.

Az 1.14. megjegyzés szerint a kerék mozgása elképzelhető egy haladó és egy forgó mozgás összetételként. Például az E pont sebessége összetehető a függőleges $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AE}$ komponensből és az A középpont vízszintes irányú, $r\omega$ nagyságú \mathbf{v}_A sebességvektorából. Mivel $|\mathbf{r}_{AE}| = r$, a függőleges komponens nagysága is $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AE}| = r\omega$. Tehát az eredő \mathbf{v}_E sebesség 45° -os szöveget zár be a vízszintes iránnyal – annak megfelelően, hogy merőlegesnek kell lennie a sebességpólusból az E pontba húzott szakaszra.

Ha megcsúszik a kerék – ami nem jelenti azt, hogy nem forog, csupán azt értjük ez alatt, hogy nem nulla a talajjal érintkező pont sebessége – a sebességpólus eltávolodik a talaj és kerék érintkezési pontjától, de továbbra is megkereshető az ismertetett módszerekkel (1.61/b ábra). ♠



1.61. ábra. kerék sebességállapota és a sebességpólus helye. (a) Gördülő kerék. (b) Megcsúszó kerék – például jármű hajtott kereke csúszós talajon történő induláskor. (c) Megcsúszó kerék – így mozog egy jármű vontatott kereke induláskor vagy egy fékezett kerék.

1.17. megjegyzés: A sebességredukciós képlet lineáris volta miatt nemcsak a sebességpólustól húzott egyenesek mentén változik lineárisan a sebesség a távolság függvényében, hanem bármely két pont között is. Az A és B pontok egyenesén fekvő C pont helyvektorát $\mathbf{r}_{AC} = \lambda \mathbf{r}_{AB}$ alakban adhatjuk meg. λ egy skalár szám, mellyel $\lambda = 0$ mellett $C \equiv A$, $\lambda = 1$ esetén pedig $C \equiv B$. Ezt behelyettesítve a sebességredukciós képletbe:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \lambda \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}, \quad (1.122)$$

azaz a sebesség valóban lineárisan függ attól, hogy milyen távol van a C pont az A -tól. Például az előző példában az A és B pontok közti szakaszt felező C pont sebessége $\mathbf{v}_C = (\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B)/2$. Ez az összefüggés gyakran használható, elsősorban a súlypont sebességének gyors meghatározása során. ♣

Arra az eredményre jutottunk, hogy bármilyen síkmozgást végző test sebességállapotának vizsgálata visszavezethető az álló tengely körüli forgás feladatára. Természetesen merül fel a kérdés, hogy a gyorsulásállapot számítása kapcsán is található-e ilyen összefüggés.

Síkmozgást végző merev test gyorsulásállapota

A gyorsulásállapot vizsgálatához a gyorsulásredukciós képletből indulunk ki.

1.57. tétel. Síkmozgás esetén a gyorsulásredukciós képlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}. \quad (1.123)$$

Bizonyítás:

A tétel állítása a kifejtési tétel és az $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_{AB}$ feltétel alapján vezethető le, az (1.115) képlethez hasonlóan. ♠

Az álló tengely körüli forgásra levezetett (1.115) képlet és (1.123) között csak annyi a különbség, hogy az (1.123) kifejezésben általában $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{0}$. Az általános síkmozgást végző merev test mozgása tehát akkor vezethető vissza álló tengely körüli forgásra, ha a testnek van a kiválasztott síkon egy nulla gyorsulású pontja. Ez a pont általában nem esik egybe a sebességpólussal: mivel a P sebességpólus helye független a gyorsulásállapottól, annak gyorsulása általában nem nulla.

1.58. definíció. *Síkmozgást végző merev test nulla gyorsulású pontját GYORSULÁSPÓLUSNAK nevezzük és G -vel jelöljük.* ♣

1.59. tétel. *A GYORSULÁSPÓLUS HELYE a következő képlet alapján határozható meg:*

$$\mathbf{r}_{AG} = \frac{\omega^2 \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.124)$$

Bizonyítás:

A gyorsulásredukciós képletnek megfelelően

$$\mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AG} - \omega^2 \mathbf{r}_{AG} = \mathbf{a}_G \equiv \mathbf{0}. \quad (1.125)$$

Az (1.125) egyenletet balról vektoriálisan szorozva $\boldsymbol{\varepsilon}$ -nal illetve szorozva ω^2 -tel az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AG}) - \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AG} &= \mathbf{0}, \\ \omega^2 \mathbf{a}_A + \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AG} - \omega^4 \mathbf{r}_{AG} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva és kihasználva, hogy a kifejtési tételből következően $\boldsymbol{\varepsilon} \perp \mathbf{r}_{AG}$ (síkmozgás) miatt $\boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AG}) = -\varepsilon^2 \mathbf{r}_{AG}$, azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_A - \varepsilon^2 \mathbf{r}_{AG} + \omega^2 \mathbf{a}_A - \omega^4 \mathbf{r}_{AG} = \mathbf{0},$$

amiből azonnal következik a tétel állítása. ♠

(1.124) levezetése során nem tettünk semmilyen megkötést, a gyorsuláspólus minden síkmozgást végző merev test esetében megkereshető – ha a képlet értelmezhető. Például ha egyszerre $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, $\omega = 0$ és $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$, akkor nem értelmezhető a képlet, mert a test minden pontja nulla gyorsulású. Ha pedig $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, $\omega = 0$ és $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{0}$, akkor haladó mozgást végez a test, ezért gyorsuláspólusa a végtelenbe kerül.

Ha a gyorsuláspólust választjuk referenciapontnak, akkor a gyorsulásredukciós képlet egyszerűbb alakban írható fel:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{GA} - \omega^2 \mathbf{r}_{GA} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{GA} - \omega^2 \mathbf{r}_{GA}. \quad (1.126)$$

Mivel $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{GA} \perp \mathbf{r}_{GA}$ és $-\omega^2 \mathbf{r}_{GA} \parallel \mathbf{r}_{GA}$, ezek a tagok merőlegesek egymásra. Ebből következik, hogy a gyorsulás nagysága

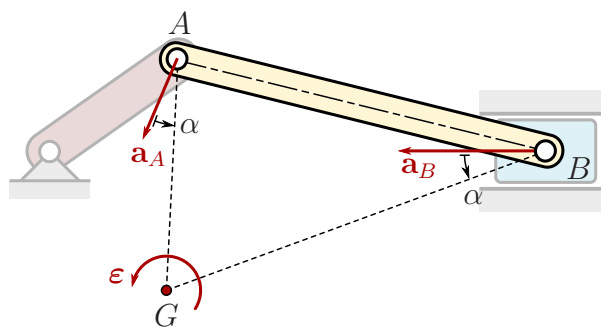
$$a_A = \sqrt{|\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{GA}|^2 + |\omega^2 \mathbf{r}_{GA}|^2} = |\mathbf{r}_{GA}| \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

azaz arányos a gyorsuláspólustól mért távolsággal, ugyanúgy, mint álló tengely körüli forgásnál (lásd (1.119)). Tehát egy síkmozgást végző merev testnek az a pontja mozog legnagyobb gyorsulással, amelyik legmesszebb van a gyorsuláspólustól.

A két komponens merőlegességét felhasználva általánosítható a gyorsulásszög fogalma is:

1.60. definíció. *Általános síkmozgás esetén az (1.126) gyorsulásredukciós képletben szereplő $(-\omega^2 \mathbf{r}_{GA})$ vektor az A pontból a G gyorsuláspólus felé mutat és definíció szerint α gyorsulásszöget zár be az A pont gyorsulásvektorával. A gyorsulásszög független az A pont választásától. Előjelét a szöggyorsulás iránya határozza meg, az alábbi képlet alapján:*

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2}. \quad \clubsuit$$



1.62. ábra. Merev test gyorsuláspólusának szerkesztése

A fenti definíció lehetőséget ad a gyorsuláspólus helyének grafikus meghatározására: az 1.62 ábrából is látszik, hogy ha két gyorsulásvektorra ε irányában α szöggel elforgatott egyeneseket mérünk fel, ezek kimetszik a gyorsuláspólust. Tehát a gyorsuláspólus helye is három különböző módszerrel határozható meg – ugyanúgy, mint a sebességpólus helye:

- Használhatjuk az (1.124) képletet.
- Alkalmazhatjuk a fent említett, a gyorsulásvektorok elforgatásán alapuló geometriai módszert.
- Természetesen számíthatóak a helyvektor komponensei egyenletrendszer felírásával is, a gyorsulásredukciós képlet alapján. Ha a gyorsuláspólus helyvektorát

$$\mathbf{r}_{AG} = \begin{bmatrix} x_{AG} \\ y_{AG} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.127)$$

alakban keressük, akkor a gyorsuláspólus gyorsulására vonatkozó

$$\mathbf{a}_A + \varepsilon \times \mathbf{r}_{AG} - \omega^2 \mathbf{r}_{AG} = \mathbf{0} \quad (1.128)$$

egyenletből – melynek csak x és y komponense hordoz információt – meghatározhatók az ismeretlen x_{AG} és y_{AG} komponensek.

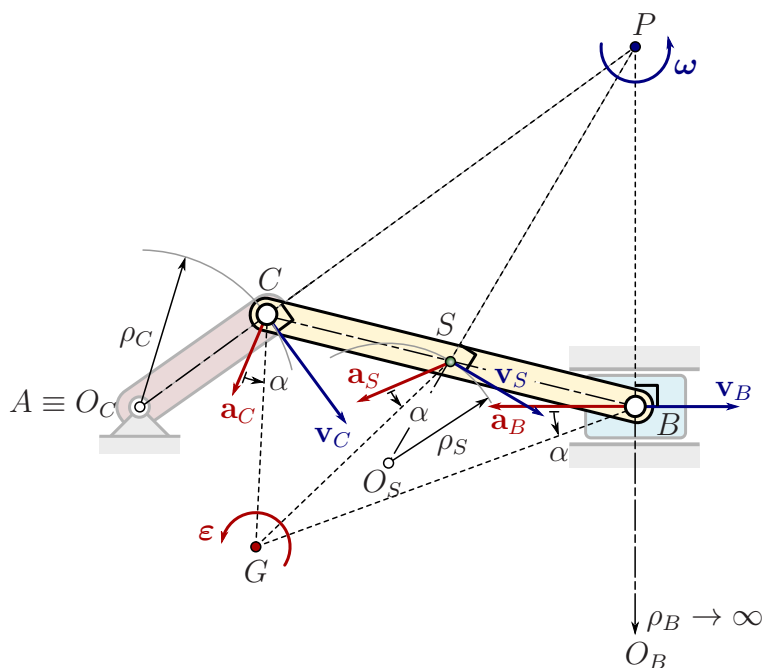
1.18. megjegyzés: A gyorsulásredukciós képlet – a sebességredukciós képlethez hasonlóan (lásd 1.17. megjegyzés) – lineáris, ezért nemcsak a gyorsuláspólustól húzott egyenesek mentén változik lineárisan a gyorsulás nagysága a távolság függvényében, hanem bármely két pont között is. Például az A és B pontok közti szakaszt felező C pont gyorsulása $\mathbf{a}_C = (\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_B)/2$. Ez az összefüggés gyakran használható, elsősorban a súlypont gyorsulásának meghatározása során. ♣

Sebességpólus, gyorsuláspólus és a pálya görbületi középpontja

Úgy tekinthetjük, mintha a sebességek szempontjából a P sebességpólus körül, a gyorsulások szempontjából pedig a G gyorsuláspólus körül forogna a test. Ugyanakkor a merev test egyes pontjai által leírt pályákhoz minden pillanatban tartozik egy-egy *görbületi középpont* is, O . Míg a test pontjainak pályái különbözőek és a pályák egyes pontjaihoz is más és más görbületi középpont tartozik, a merev testnek egy adott pillanatban csak egyetlen P sebességpólusa és egyetlen G gyorsuláspólusa van.

A görbületi középpont helye csak a kiválasztott pont pályájától függ. Ezzel szemben a sebességpólus helyét csak a sebességállapot (a szögsebesség és egy pont sebessége), a gyorsuláspólus helyét pedig csak a gyorsulásállapot (a szögsebesség, szöggyorsulás és egy pont gyorsulása) határozza meg. Ezért *ezek a pontok általában nem esnek egybe*, csak álló (rögzített) tengely körüli forgás esetén.

Az 1.63 ábrán az AC forgattyú az A álló ponton átmenő tengely körül forog. Ezért az A pont a forgattyú sebességpólusa, gyorsuláspólusa és a C pont pályájának O_C görbületi középpontja. Sőt, a forgattyú minden pontjának pályája A körüli körpálya.



1.63. ábra. Forgattyús-csúszkás mechanizmus hajtórúdjának P sebességpólusa, G gyorsuláspólusa, valamint a B , C és S pontok pályáinak görbületi középpontjai. ρ_B , ρ_C és ρ_S a megfelelő görbületi sugarakat jelölik.

Ezzel szemben a CB hajtórúd általános síkmozgást végez. Sebesség- és gyorsuláspólusát a korábban megismert szerkesztési szabályok alapján rajzoltuk be, továbbá feltüntettük három pontjához a pálya görbületi középpontját is.

1.19. megjegyzés: Általános síkmozgás esetén is van összefüggés a sebességpólus és a görbületi középpont elhelyezkedése között: mivel egy S pont sebességvektora merőleges a sebességpólusba mutató \mathbf{r}_{SP} vektorra is és a görbületi középpont felé mutató normális egységvektorra is, a sebességpólusnak az S pontban felvett normális egységvektor egyenesén kell lennie, de általában $O \neq P$. Ez jól látható az 1.63 ábrán, ahol a BC rúd három pontjának görbületi középpontja is be van jelölve, a rúd sebességpólusával együtt. ♣

1.20. megjegyzés: A gyorsuláspólus csak kivételes esetekben esik egybe a referenciaként választott S pont pályájának görbületi középpontjával. Általában ez nem teljesül és ebben az esetben a gyorsuláspólusból felírt

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{GS} - \omega^2 \mathbf{r}_{GS} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{GS} - \omega^2 \mathbf{r}_{GS} \quad (1.129)$$

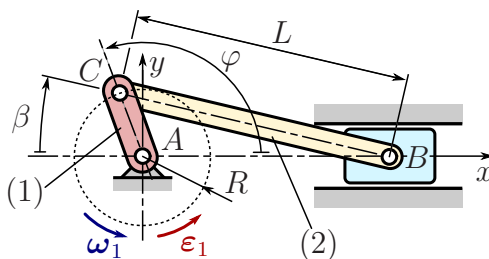
gyorsulás tangenciális (az S pont sebességével párhuzamos) komponense nem egyezik meg $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{GS}$ -sel, hiszen ennek az iránya független az S pont sebességétől. Ehhez hasonlóan,

általában a normális (sebességre merőleges) gyorsuláskomponens sem egyezik meg $(-\omega^2 \mathbf{r}_{GS})$ -sel, pedig az álló tengely körüli forgásra levezetett (1.115) képlettel való hasonlóság miatt ezt várnánk. ♣

Oldjuk meg az 1.28. példát a merev test kinematika összefüggéseit felhasználva!

1.61. példa: *Dízelmotordony motor forgattyús mechanizmusának vizsgálata a merev testek kinematikája alapján. Az 1.64 ábrán egy dízelmotor forgattyús mechanizmusának mechanikai modellje látható. A vizsgált pillanatban ismert a mechanizmus (1) jelű AC forgattyújának φ szöghelyzete, ω_1 szögsebessége és ε_1 szöggyorsulása.*

Számítsuk ki ez alapján a mechanizmus B csúszkájának \mathbf{r}_{AB} pozícióját, \mathbf{v}_B pillanatnyi sebességét és \mathbf{a}_B pillanatnyi gyorsulását! Adatok: $\varphi = 14.5 - 4\pi$ rad ≈ 1.9336 rad, $\omega_{1z} = 150$ rad/s, $\varepsilon_{1z} = 500$ rad/s², $R = 0.1$ m, $L = 0.4$ m.



1.64. ábra. Dízelmotor mechanikai modellje (lásd 1.28. példa).

Megoldás:

Az A pont egy álló tengely pontja, ezért annak mind a sebessége, mind a gyorsulása nulla. Az (1) forgattyú szögsebességének ismeretében meghatározható a C pont sebessége:

$$\mathbf{r}_{AC} = \begin{bmatrix} R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{AC} = \begin{bmatrix} -R\omega_{1z} \sin(\varphi) \\ R\omega_{1z} \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.023 \\ -5.324 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.130)$$

A B pont sebességének meghatározásához ismét egy sebességredukciós képletet írunk fel, ezúttal a C referenciapontból. Mivel mind a B, mind a C pont a (2) jelű hajtórúd pontja, a képletben a hajtórúd ω_2 szögsebessége szerepel:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{CB}. \quad (1.131)$$

Az ABC háromszögre felírható szinusz-tétel alapján

$$\sin(\beta) = \frac{R}{L} \sin(\varphi), \quad (1.132)$$

amiből $\beta \approx 0.236$ rad. Ezzel kifejezhető az \mathbf{r}_{CB} vektor és a B pont \mathbf{r}_{AB} helyvektora:

$$\mathbf{r}_{CB} = \begin{bmatrix} L \cos(\beta) \\ -L \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_{AC} + \mathbf{r}_{CB} \approx \begin{bmatrix} 0.353 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}. \quad (1.133)$$

A következő lépésben kihasználhatjuk, hogy a B pont nemcsak a hajtórúd, hanem a csúszka pontja is, ezért sebessége az x tengellyel párhuzamos: $\mathbf{v}_B = (v_{Bx} \ 0 \ 0)^T$. Továbbá, mivel

síkmozgást végez a mechanizmus, a szögsebességnek csak z komponense lehet. Ez azt jelenti, hogy az (1.131) egyenletben két ismeretlen skalár komponens szerepel: v_{Bx} és ω_{2z} . A vektoriális szorzatot kifejtve,

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Cx} + L\omega_{2z} \sin(\beta) \\ v_{Cy} + L\omega_{2z} \cos(\beta) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.134)$$

A kapott egyenletrendszer megoldása

$$v_{Bx} \approx -12.744 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{és} \quad \omega_{2z} \approx 13.688 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.135)$$

A gyorsulásállapot vizsgálata során is abból indulunk ki, hogy az A pont gyorsulása nulla. A gyorsulásredukciós képlet szerint

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \mathbf{r}_{AC} - \omega_{1z}^2 \mathbf{r}_{AC} \approx \begin{bmatrix} 751.835 \\ -2121.26 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.136)$$

A B pont gyorsulásáról tudjuk, hogy a kényszer miatt x irányú, a szöggyorsulásnak pedig a síkmozgás miatt csak z komponense lehet. A C és B pontok között felírt

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{CB} - \omega_{2z}^2 \mathbf{r}_{CB} \quad (1.137)$$

gyorsulásredukciós képletben így csak két ismeretlen skalár komponens lesz: a_{Bx} és ε_{2z} .

$$\begin{bmatrix} a_{Bx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Cx} + L\varepsilon_{2z} \sin(\beta) - L\omega_{2z}^2 \cos(\beta) \\ a_{Cy} + L\varepsilon_{2z} \cos(\beta) + L\omega_{2z}^2 \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.138)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a_{Bx} \approx 1184.66 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{és} \quad \varepsilon_{2z} \approx 5409.17 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (1.139)$$

Az eredmények megegyeznek az 1.28. példában kiszámított értékekkel. Azonban míg ott célzottan a B pont mozgásának jellemzőit számoltuk ki, a merev testek kinematikája alapján további, a teljes testet jellemző mennyiségeket is meghatározhatunk. Az alábbiakban kiszámítjuk a mechanizmus mozgásának néhány további jellemzőjét is.

A forgattyú sebességpólusa az A pontban van, a hajtórúd sebességpólusának helye pedig:

$$\mathbf{r}_{BP} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_B}{\omega^2} \approx \begin{bmatrix} -0.93 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}. \quad (1.140)$$

A forgattyú gyorsulásszöge

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{\varepsilon_{1z}}{\omega_{1z}^2}\right) \approx 1.273 \text{ rad} \approx 73^\circ. \quad (1.141)$$

A hajtórúdhhoz tartozó gyorsulásszög pedig:

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{\varepsilon_{2z}}{\omega_{2z}^2}\right) \approx 1.536 \text{ rad} \approx 88^\circ. \quad (1.142)$$

A forgattyú gyorsuláspólusa az A pontban van, a hajtórúd gyorsuláspólusának helye pedig:

$$\mathbf{r}_{BG} = \frac{\omega_{2z}^2 \mathbf{a}_B + \varepsilon_2 \times \mathbf{a}_B}{\varepsilon_{2z}^2 + \omega_{2z}^4} \approx \begin{bmatrix} 0.0076 \\ 0.219 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m.} \quad (1.143)$$

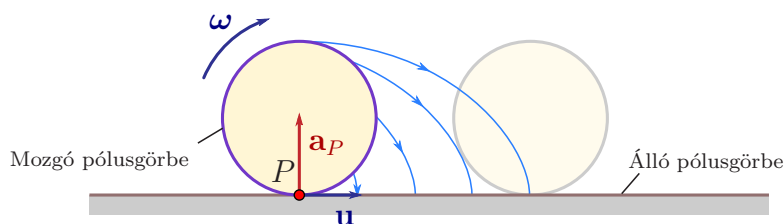
A mechanizmust alkotó testek többi pontjának sebessége és gyorsulása a sebességpólus és a gyorsuláspólus helyének ismeretében számítható. ♠

1.2.9. A gördülés kinematikája

Síkmozgás során általában változik a sebességpólus helye a mozgás során. Az 1.56. példában láttuk, hogy egy talajon gördülő kerék sebességpólusa a talajjal való érintkezési pontban található (lásd 1.61/a és 1.65 ábrák). Ha a kerék átmegy egy víztócsán, a testen és a talajon a nedves pontok jelölik ki azokat a görbét, melyek pontjai valamikor póluspontok voltak.

A merev test pontjainak sem a sebessége, sem a szögsebessége nem változhat ugrásszerűen (lásd 2. fejezet), ezért a pillanatnyi forgástengely és a sebességpólus helye folytonosan változik időben az $\mathbf{r}_{AP} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A)/\omega^2$ (lásd (1.78)) képletnek megfelelően. Mivel a gördülő test és a talaj pontjai az érintkezés után eltávolodnak egymástól, két görbét is definiálhatunk, melynek pontjai póluspontok voltak illetve lesznek: egy gördülő kerék esetében a kerék által a talajon hagyott „nyom” jelöli ki az álló pólusgörbét, a kerék azon pontjai pedig, melyek póluspontok voltak, a mozgó pólusgörbén helyezkednek el.

1.62. definíció. Az ÁLLÓ PÓLUSGÖRBE a P sebességpólus mint geometriai pont pályája a vonatkoztatási rendszerben. ♣



1.65. ábra. Gördülő kerék álló- és mozgó pólusgörbéi, az \mathbf{u} pólusvándorlási sebesség és a sebességpólus \mathbf{a}_P gyorsulása.

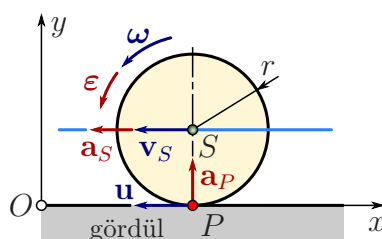
1.63. definíció. A MOZGÓ PÓLUSGÖRBE a P sebességpólus mint geometriai pont pályája a merev testhez képest. ♣

Gördülés során a nulla sebességű sebességpólus változtatja helyét a síkon. Ezt a folyamatot *pólusvándorlásnak* nevezzük.

1.64. definíció. A PÓLUSVÁNDORLÁS SEBESSÉGE a P sebességpólus mint geometriai pont sebessége, ahogy halad az álló pólusgörbén. Jele: \mathbf{u} . ♣

A pólusvándorlás úgy is elképzelhető, hogy a póluspont szerepét mindig újabb és újabb geometriai pontok veszik át, és ez a „jel” terjed a pólusvándorlás sebességével – hasonlóan ahhoz, mintha egy mozgó reflektor falra vetett fényfoltjának a mozgását követnénk. Az \mathbf{u} pólusvándorlási sebességnek gyakran ismert az iránya, hiszen ha egy test egy másikon gördül, akkor a közös érintővel párhuzamosnak kell lennie. Ez a megfigyelés jól használható egyes feladatok megoldása során.

1.65. példa: Egyenes kényszerpályán ω szögsebességgel és ε szöggyorsulással gördül egy homogén anyagú r sugarú korong. Határozzuk meg a súlypont és a sebességpólus sebességét és gyorsulását, valamint a pólusvándorlás sebességét!



1.66. ábra. Egyenes kényszerpályán gördülő korong.

Megoldás:

- Az álló pólusgörbe az egyenes kényszerpálya, a mozgó pólusgörbe pedig a korong körvonalala.
- Az 1.66 ábrán is látható, hogy a sebességpólus a talajjal érintkező pontban található, ezért a súlypont sebességének nagysága $v_S = r\omega$, iránya pedig az \mathbf{r}_{PS} vektorra merőleges, a szemléletnek megfelelő értelmű. A berajzolt koordináta-rendszerben értelmezett komponensekkel $v_{Sx} = -r\omega_z$.
- A súlypont *tangenciális* gyorsulása a sebesség nagyságának idő szerinti deriváltja. Tehát $a_{St} = r\dot{\omega} = r\varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$, ha a szögsebesség nő. Növekvő szögsebesség mellett az \mathbf{a}_{St} vektor a sebességgel megegyező értelmű, csökkenő szögsebesség esetén azzal ellentétes. Az (xyz) koordináta-rendszerben $a_{Sx} = -r\varepsilon_z$.
- A súlypont sebességének nem változik az iránya, tehát $\mathbf{a}_{Sn} = \mathbf{0}$, amiből $a_{Sy} = 0$.
- A sebességpólus vándorlási sebessége abból a feltételből határozható meg, hogy a sebességpólus mindig az S súlypont talajra vetett merőleges vetületében található, tehát együtt mozog a súlyponttal, azaz $\mathbf{u} = \mathbf{v}_S$, $u = r\omega$.
- A sebességpólus sebessége definíció szerint nulla, gyorsulásának meghatározásához pedig a sebességredukciós képletet használjuk.

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_S + \varepsilon \times \mathbf{r}_{SP} - \omega^2 \mathbf{r}_{SP} = \begin{bmatrix} -r\varepsilon_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.144)$$

Az eredmény szerint a sebességpólus gyorsulása a talajtól a súlypont felé mutat – azaz *merőleges a kényszerpályára* –, nagysága pedig $a_P = r\omega^2$.

Speciális esetek:

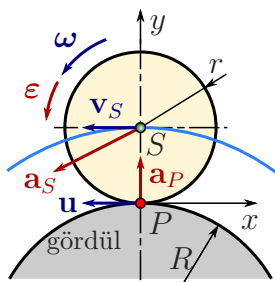
1) Ha a szöggyorsulás nulla, de a szögsebesség nem nulla ($\varepsilon = \mathbf{0}$, $\omega \neq \mathbf{0}$) – azaz állandó szögsebességgel gördül a test – akkor a súlypont gyorsulása is zérus (és ez lesz a test egyetlen nulla gyorsulású pontja), tehát $S \equiv G$.

2) Ha a szöggyorsulás nem nulla, de a szögsebesség nulla ($\varepsilon \neq \mathbf{0}$, $\omega = \mathbf{0}$) – azaz a kerék az indulás pillanatában van – akkor minden pontja nulla sebességű, tehát a sebességpólust nem értelmezzük. Viszont a gyorsuláspólus helyét megadó (1.124) képlet ekkor leegyszerűsödik és eszerint

$$\mathbf{r}_{SG} = \frac{\varepsilon \times \mathbf{a}_S}{\varepsilon^2},$$

amiből $a_S = r\varepsilon$ miatt következik, hogy a gyorsuláspólus a talajjal érintkező pontban van. ♠

1.66. példa: r sugarú homogén korong R sugarú kényszerpályán gördül ω szögsebességgel és ε szöggyorsulással. Határozzuk meg a súlypont és a sebességpólus sebességét és gyorsulását, valamint a pólusvándorlás sebességét!



1.67. ábra. R sugarú kényszerpályán gördülő r sugarú korong.

Megoldás:

- Az álló pólusgörbe az R sugarú kényszerpálya, a mozgó pólusgörbe pedig a korong körvonala.
- Az 1.67 ábrán is látható, hogy a sebességpólus a talajjal érintkező pontban található, ezért a súlypont sebességének nagysága $v_S = r\omega$, iránya pedig az \mathbf{r}_{PS} vektorra merőleges, a szemléletnek megfelelő értelmű.
- A súlypont *tangenciális* gyorsulása a sebesség nagyságának idő szerinti deriváltja. Tehát $a_{St} = r\dot{\omega} = r\varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$, ha a szögsebesség nő. Növekvő szögsebesség mellett az \mathbf{a}_{St} vektor a sebességgel megegyező értelmű, csökkenő szögsebesség esetén azzal ellentétes. Az ábrán felvett koordináta-rendszerben $a_{Sx} = -\varepsilon_z r$.
- A súlypont $r + R$ sugarú körpályán mozog, ezért sebességének folyamatosan változik az iránya. Normális gyorsulásának nagysága

$$a_{Sn} = \frac{v_S^2}{r + R} \equiv \frac{r^2 \omega^2}{r + R},$$

iránya pedig a körpálya középpontja felé mutat, azaz

$$a_{Sy} = -\frac{r^2 \omega^2}{r + R}. \quad (1.145)$$

- A sebességpólus vándorlási sebessége abból a feltételből határozható meg, hogy az S súlypont által leírt $r + R$ sugarú körpálya O görbületi középpontja és az S pont egyenesére esik a P sebességpólus (lásd 1.19. megjegyzés). Ebben az esetben a sebességpólus R sugarú körpályán vándorol. Vándorlási sebessége párhuzamos a súlypont sebességével $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}_S$, nagysága pedig a sugarak arányából határozható meg:

$$u = v_S \frac{R}{r + R} \equiv \frac{Rr\omega}{r + R}.$$

- A sebességpólus sebessége definíció szerint nulla, gyorsulásának meghatározásához pedig a sebességredukciós képletet használjuk.

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_S + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{SP} - \omega^2 \mathbf{r}_{SP} = \begin{bmatrix} -r\varepsilon_z \\ -\frac{r^2}{r+R}\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Rr\omega^2}{r+R} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.146)$$

Az eredmény szerint a sebességpólus gyorsulása ebben az esetben is a talajtól a súlypont felé mutat – azaz *merőleges a kényszerpálya érintőjére* –, nagysága pedig

$$a_P = \frac{Rr\omega^2}{r + R}.$$

A példa megoldása értelemszerűen módosítható abban az esetben, amikor a kényszerpálya konkáv, azaz egy kör alakú pálya belsejében gördül a korong, mint például az 1.71 ábrán. Ekkor $r + R$ helyett $R - r$ kerül a képletekbe. Az $R \rightarrow \infty$ határátmenettel pedig természetesen visszakapjuk az 1.65. példa eredményeit. ♠

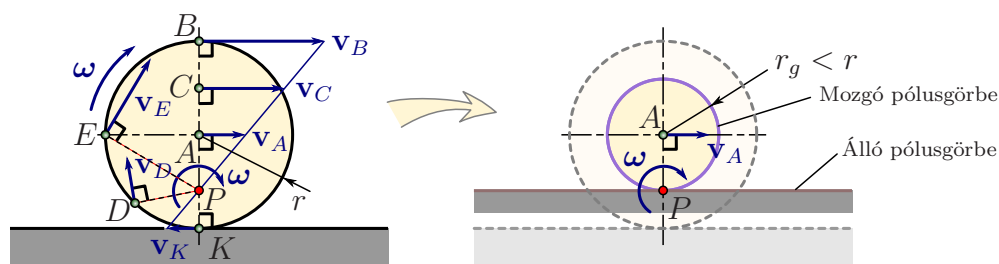
A fenti két példa sokkal általánosabb, mint ahogy első pillantásra gondolnánk. Számításaink eredményei abban az esetben is használhatók, ha az álló- és mozgó pólusgörbe nem pontosan kör alakú. Mivel a normális gyorsulást a pálya görbületi sugara határozza meg, a vizsgált pillanatban a görbékét *simulókörökkel* közelíthetjük, így visszakapjuk az 1.66. példában tárgyalt esetet. Természetesen ekkor a mozgó test súlypontja helyett a megfelelő *görbületi középpontra* vonatkoznak a képletek.

Továbbá, az 1.2.8 fejezetben levezettük, hogy minden síkmozgást végző merev test sebességpólusa megkereshető. Következésképpen, az álló és mozgó pólusgörbe tetszőleges síkmozgás esetére is definiálható.²⁰ Tehát azt mondhatjuk, hogy *minden, nem nulla szögsebességű síkmozgást végző merev test mozgása értelmezhető a mozgó pólusgörbének az álló pólusgörbén történő gördüléseként, ahol az aktuális érintkezési pont a P póluspont*. Ebben az értelemben a görbült pályán gördülő korong példája a lehető legbonyolultabb síkmozgást mutatja be.

Például ha egy kerék megcsúszik, a sebességpólus a talaj szintje alá vagy fölé is kerülhet, ahogy az 1.61 ábrán láthatjuk. Matematikailag ezt az esetet is tekinthetjük gördülésnek: ehhez gondolatban toljuk el a talaj szintjét és változtassuk meg a kerék átmérőjét olyan módon, hogy éppen a mindenkor sebességpólusban érintkezzenek. Ekkor a képzeletbeli kerék éppen gördül az eltolt talajon, ahogy az 1.68 ábrán is illusztráltuk. Ez az eljárás a merev testek kiterjesztésének felel meg, az 1.12. megjegyzésben leírtak szerint.

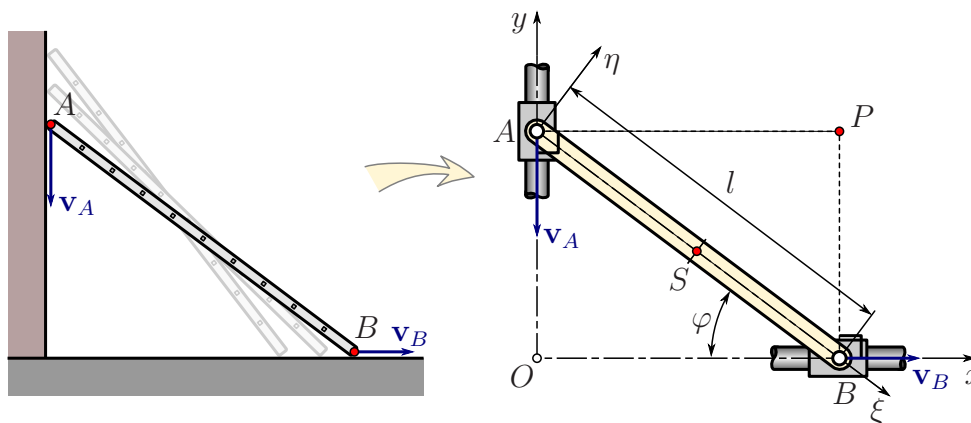
A síkmozgás gördülésként való elképzelése bizonyos mechanizmusok vizsgálatát is megkönnyítheti. Erre a legismertebb példa az alább ismertetett, ún. *Cardano-féle probléma* megoldása.

²⁰Bár matematikailag kiterjeszthető ez a formalizmus a haladó mozgásra, ennek inkább a forgó mozgásoknál van jelentősége.



1.68. ábra. Egy megcsúszó kerék mozgása is értelmezhető gördülésként: ebben az esetben a mozgó pólusgörbe gördül az álló pólusgörbén.

1.67. példa: Egy l hosszúságú rúd két végpontja egymásra merőleges, egyenes kényszerpályákon mozog az 1.69 ábrának megfelelően. Határozzuk meg az álló- és mozgó pólusgörbe egyenletét!



1.69. ábra. Egyenes kényszerpályákon megvezetett rúd (például fal mellett lecsúszó létra).

Megoldás:

A koordinátarendszert célszerű úgy felvenni, hogy a két kényszerpálya az x illetve az y tengellyel essen egybe. Emellett bevezetjük a rúd vízszintessel bezárt φ szögét is ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$) a mozgás jellemzésére.

Az (1.121) egyenlet szerint a sebességpólust kimetszi két sebességvektorra állított merőleges egyenes. Ez azt jelenti, hogy az álló vonatkoztatási rendszerhez kötött (xyz) koordinátarendszerben a póluspont koordinátái

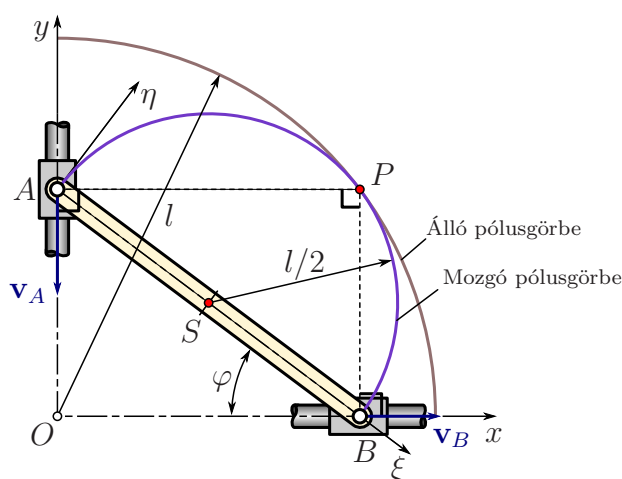
$$\mathbf{r}_{OP} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cos(\varphi) \\ l \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.147)$$

A fenti két koordináta között minden φ szög mellett fennáll az alábbi összefüggés:

$$x_P^2 + y_P^2 = l^2, \quad (1.148)$$

ami egy origó középpontú, l sugarú kör ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$ figyelembevételével negyedkör) egyenlete. Ez az álló pólusgörbe, hiszen az álló vonatkoztatási rendszerben vizsgáltuk a póluspont helyét.

A mozgó pólusgörbe egyenletének levezetéséhez a mozgó rúdhoz képest kell meghatározni a sebességpólus helyét. Vezessünk be egy A origójú $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszert, melynek ξ tengelye a mozgás során végig párhuzamos a rúddal, az 1.70 ábra szerint!



1.70. ábra. Egyenes kényszerpályákon megvezetett rúd pólusgörbéi.

Ebben a koordináta-rendszerben a póluspont ρ_{AP} helyvektora

$$\rho_{AP} = \begin{bmatrix} \xi_P \\ \eta_P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cos(\varphi) \cos(\varphi) \\ l \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.149)$$

Trigonometriai átalakítások után az alábbi eredményt kapjuk:

$$\xi_P = l \cos(\varphi) \cos(\varphi) = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \cos(2\varphi) \quad (1.150)$$

$$\eta_P = l \cos(\varphi) \sin(\varphi) = \frac{l}{2} \sin(2\varphi). \quad (1.151)$$

A két koordináta közötti összefüggés

$$\left(\xi_P - \frac{l}{2}\right)^2 + \eta_P^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2, \quad (1.152)$$

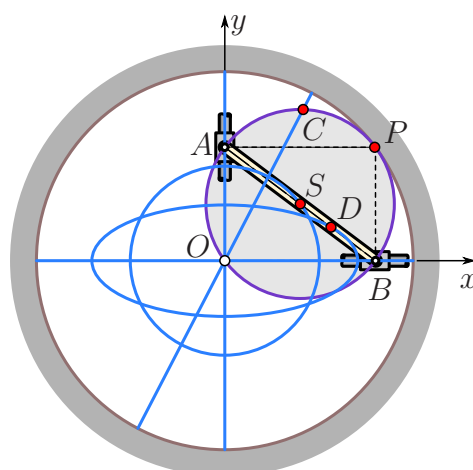
ami egy olyan $l/2$ sugarú kör egyenlete, melynek középpontja a rúd közepén helyezkedik el. Mivel az AP és BP szakaszok minden φ szög mellett merőlegesek egymásra, ezt tekinthetjük az AB szakasz fölé rajzolt Thalesz-körnek is.

Az egyenes kényszerpályán mozgó végpontú rúd mozgása tehát úgy is megvalósítható, hogy egy $l/2$ sugarú kör egy kétszer akkora sugarú kör belsejében csúszás nélkül gördül. Ezt az eredményt a műszaki gyakorlatban is felhasználják. Ha a csúszás nélküli gördülés biztosított (pl. fogazással), akkor egyenesbe vezető mechanizmus készíthető. Ennek megfordításaként, ha egy gördülő kör egyik pontját egyenes pályára kényszerítjük, akkor a kör csúszás – és számottevő kopás – nélkül gördül.

Megjegyezzük, hogy a rúd A és B közötti pontjai ellipsziseken mozognak, a rúd felező-pontjának pályája pedig kör alakú – amint az 1.71 ábra is mutatja [12].

A vizsgált rúd mozgása teljesen megfeleltethető egy kör alakú kényszerpályán gördülő korong mozgásának, ezért értelemszerűen alkalmazhatók az 1.66. példa eredményei a rúd sebesség- és gyorsulásállapotának meghatározása során. ♠

Mivel az 1.66. példáról beláttuk, hogy az a síkmozgás legáltalánosabb esetének felel meg, érdemes további, általános érvényű összefüggéseket keresni a kiszámított eredmények között. Mind az 1.65., mind az 1.66. példában azt tapasztalhattuk, hogy a pólusvándorlás



1.71. ábra. Egyenes kényszerpályákon megvezetett rúd mozgása egyenértékű egy $l/2$ sugarú korongnak l sugarú körpályán történő gördülésével. Az ábrán látható, hogy az A , B és C pontok pályája egyenes, az S ponté kör, a D ponté pedig ellipszis.

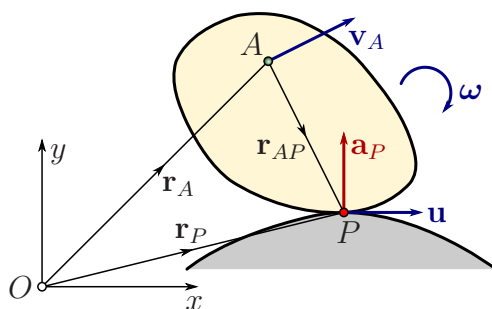
\mathbf{u} sebessége a kényszerpálya (álló pólusgörbe) érintőjével párhuzamos, a sebességpólus \mathbf{a}_P gyorsulása pedig arra merőleges. Emellett e két mennyiség nagysága között is egyszerű összefüggés található: mindkét példában ellenőrizhető, hogy $a_P = u\omega$. Az alábbi tételben részletesebben is megvizsgáljuk e két vektor közötti kapcsolatot.

1.68. tétel. A PÓLUSVÁNDORLÁS \mathbf{u} SEBESSÉGE:

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_P}{\omega^2}, \quad (1.153)$$

ahol \mathbf{a}_P a sebességpólus gyorsulása. A vektoriális szorzás tulajdonságai miatt

$$\mathbf{u} \perp \boldsymbol{\omega} \quad \text{és} \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{a}_P. \quad (1.154)$$



1.72. ábra. A nulla sebességű P sebességpólus \mathbf{u} vándorlási sebessége merőleges a sebességpólus \mathbf{a}_P gyorsulására.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy ismert a merev test szögsebessége és A pontjának sebessége. A sebességpólus helyvektora ekkor az 1.72 ábra szerint $\mathbf{r}_P(t) = \mathbf{r}_A(t) + \mathbf{r}_{AP}(t)$, a pólusvándorlás sebessége pedig ennek a vektornak az idő szerinti deriváltja:

$$\mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{r}}_P(t) = \dot{\mathbf{r}}_A(t) + \dot{\mathbf{r}}_{AP}(t).$$

Az (1.78) képlet szerint $\mathbf{r}_{AP} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A)/\omega^2$. Felhasználva, hogy $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}$ és $\dot{\mathbf{v}}_A = \mathbf{a}_A$, a hányados deriválására vonatkozó szabály szerint

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_A + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{v}_A)}{\omega^2} + \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_A)}{\omega^2} - 2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\varepsilon} \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A)}{\omega^4}.$$

Ha kifejezzük az A pont sebességét és gyorsulását $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA}$ illetve $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{PA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA})$ alakban, akkor behelyettesítés után a következő képletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA})}{\omega^2} + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_P}{\omega^2} + \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{PA})}{\omega^2} + \\ + \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA}))}{\omega^2} - 2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\varepsilon} \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA})}{\omega^4}. \end{aligned} \quad (1.155)$$

Tudjuk, hogy $\mathbf{r}_{PA} \perp \boldsymbol{\omega}$, azaz $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_{PA} = 0$, mert kikötöttük az \mathbf{r}_{AP} vektort megadó (1.78) egyenlet levezetése során, hogy a P pont az A ponton átmenő, $\boldsymbol{\omega}$ -ra merőleges síkban van. Ezt az összefüggést ki tudjuk használni, ha az 5.5. kifejtési tétel alkalmazásával a hármas és négyes vektoriális szorzatokat az alábbi kifejezésekké alakítjuk át:

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA})}{\omega^2} &= \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}_{PA})}{\omega^2} - \frac{\mathbf{r}_{PA}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\omega})}{\omega^2}, \\ \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{PA})}{\omega^2} &= \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_{PA})}{\omega^2} - \frac{\mathbf{r}_{PA}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\omega})}{\omega^2} = -\frac{\mathbf{r}_{PA}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\omega})}{\omega^2}, \\ \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA}))}{\omega^2} &= \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^2} \times \left(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_{PA}) - \mathbf{r}_{PA}\omega^2 \right) = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA}, \\ -2(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PA})}{\omega^4} &= -2(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\varepsilon}) \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_{PA}) - \mathbf{r}_{PA}\omega^2}{\omega^4} = 2 \frac{\mathbf{r}_{PA}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\omega})}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve az (1.155) egyenletbe, egyszerűsítések után csak két tag marad, melyek közül az egyik a szögsebességgel párhuzamos, a másik pedig a szögsebességre merőleges:

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}_{PA})}{\omega^2} + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_P}{\omega^2}. \quad (1.156)$$

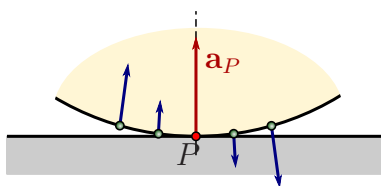
Síkmozgás során $\boldsymbol{\varepsilon} \perp \mathbf{r}_{PA}$, tehát a képlet első tagja nulla, így visszakapjuk a tétel állításában szereplő kifejezést. ♠

Az 1.2.8 fejezetben megállapítottuk, hogy a sebességpólus \mathbf{a}_P gyorsulása általában nem nulla, azaz a sebességpólus általában nem esik egybe a gyorsuláspólussal. Az \mathbf{a}_P gyorsulás elképzelését segíti az 1.73 ábra: a P sebességpólus közelében közel függőlegesek a gördülő korong kerületi pontjainak sebességvektorai és a két oldalon ellentétes irányúak. Ebből arra következtethetünk, hogy a sebességpólus gyorsulása függőleges. Mivel az \mathbf{u} pólusvándorlási sebesség párhuzamos a testek közös érintőjével, az (1.153) képletből is az következik, hogy az \mathbf{a}_P vektor merőleges a kényszerpályára.

A pólusvándorlási sebesség gyakorlati jelentőségét éppen az adja, hogy kapcsolatba hozható a sebességpólus \mathbf{a}_P gyorsulásával. Amint a korábbi példákban láttuk, az \mathbf{a}_P vektor a sebességredukciós képlet segítségével is kiszámítható, azonban segíthet a gyorsulásállapot elképzelésében, ha \mathbf{a}_P irányát szemlélet alapján is meghatározhatjuk. A következő tétel egy újabb alakban fejezi ki a pólusvándorlási sebesség és a sebességpólus gyorsulása közti kapcsolatot.

1.69. tétel. A SEBESSÉGPÓLUS GYORSULÁSA

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.157)$$



1.73. ábra. Póluspont gyorsulásának szemléltetése. A póluspont közelében a sebességvektorok jó közelítéssel függőlegesek és a P pont két oldalán ellentétes irányúak.

Ez az összefüggés gömbi mozgás (lásd 1.47. definíció) esetében is teljesül. Természetesen a pillanatnyi forgástengely minden pontjának más lehet a gyorsulása és a vándorlási sebessége, ezért az (1.157) képletet úgy kell értelmezni, hogy a forgástengely egy kiválasztott P pontjának gyorsulása és ugyanezen pont vándorlási sebessége között adja meg a kapcsolatot.

Bizonyítás:

Az (1.156) egyenlet mindkét oldalát $\boldsymbol{\omega}$ -val balról vektoriálisan szorozva, a jobb oldal első tagja kiesik, mert az $\boldsymbol{\omega}$ -val párhuzamos. Így a következő egyenletre jutunk:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_P)}{\omega^2}.$$

A jobb oldal átírható a kifejtési tétel alapján:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \mathbf{a}_P \right) - \mathbf{a}_P.$$

Mivel a jobb oldal első tagja az \mathbf{a}_P vektor $\boldsymbol{\omega}$ -val párhuzamos komponense, $\mathbf{a}_{P\parallel}$, ezért

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{a}_P - \mathbf{a}_{P\parallel}. \quad (1.158)$$

Síkmozgás esetén a sebességpólus gyorsulása (mint minden pont gyorsulása) merőleges a szögsebességre, ezért $\mathbf{a}_P = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$.

A térbeli mozgások vizsgálatához hasonlítsuk össze a pillanatnyi forgástengely két különböző, P_1 és P_2 pontjának gyorsulását! A gyorsulásredukciós képlet alapján

$$\mathbf{a}_{P_2} - \mathbf{a}_{P_1} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{P_1P_2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P_1P_2}), \quad (1.159)$$

ahol $\mathbf{r}_{P_1P_2} \parallel \boldsymbol{\omega}$, ezért a jobb oldal első tagja merőleges a szögsebességre, a második tagja pedig $\mathbf{0}$. Ebből következik, hogy \mathbf{a}_{P_2} és \mathbf{a}_{P_1} csak a szögsebességre merőleges komponensben különbözhetnek, ezért a pillanatnyi forgástengely minden pontjának ugyanakkora a szögsebességgel párhuzamos gyorsuláskomponense. Tehát ha a pillanatnyi forgástengelynek van egy tartósan álló pontja – mint gömbi mozgás esetében –, akkor $\mathbf{a}_{P\parallel} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{a}_P = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$. ♠

1.2.10. Kitekintés térbeli gördülési problémákra

A pólusvándorlási sebességre kapott (1.156) összefüggés levezetése során általános, minden pillanatnyi forgó mozgásra érvényes összefüggéseket használtunk, ami lehetővé teszi, hogy térbeli mozgásokra is általánosítsuk a pólusvándorlási sebesség fogalmát.

A térbeli mozgások esetében az okoz nehézséget, hogy a választott A referenciapont helyétől is függ, hogy a pillanatnyi forgástengely melyik pontjába mutat az \mathbf{r}_{AP} vektor (lásd 1.47 ábra). Mivel térbeli mozgás során az A pont akár a szögsebességgel párhuzamosan is

elmozdulhat, ezért a pillanatnyi forgástengelyre vetett merőleges vetülete is elmozdul. Ez az oka annak, hogy az (1.156) képletben megjelent egy A pont helyétől függő tag is:

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r}_{PA})}{\omega^2} + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_P}{\omega^2}.$$

Azonban a pólusvándorlási sebesség fogalma csak akkor használható térbeli gördülések leírására, ha a pillanatnyi forgástengely adott P pontjához *egyértelműen* hozzárendelhető a megfelelő vándorlási sebességvektor. Egyértelművé tehetjük a pólusvándorlási sebesség fogalmát, ha úgy tekintjük, hogy magát a pillanatnyi forgástengely P pontját választjuk referenciapontnak, azaz $A \equiv P$. Így $\mathbf{r}_{PP} = \mathbf{0}$ miatt azt kapjuk, hogy térbeli mozgásokra is érvényes az

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_P}{\omega^2} \quad (1.160)$$

összefüggés. Tehát a pólusvándorlási sebesség merőleges a szögsebességre és a P pont gyorsulására, ahogy az 1.74 ábra mutatja.

Természetesen térbeli mozgások esetében nem pólusgörbékről, hanem *pólusfelületekről* vagy *gördülő felületekről* kell beszélnünk – ezek azok a pontok a testen (mozgó felület) és a vonatkoztatási rendszerben (álló felület), melyek a gördülés során a pillanatnyi forgástengelyben érintkeznek. Mivel a két felület a forgástengely mentén érintkezik, ezeknek *vonalfelületeknek* kell lenniük. Az érintkezés környezetében a vonalfelületek *másodrendű felületekkel* helyettesíthetők, ugyanúgy, mint ahogy a síkbeli esetben simulóköriekkel helyettesíthetjük az egymáson gördülő pólusgörbéket.

A következő másodrendű vonalfelületek léteznek: *henger, kúp, egyköpenyű hiperboloid és hiperbolikus paraboloid*. A fentiek szerint a térbeli forgó mozgások a felsorolt felületek egymáson (vagy egy síkon) történő legördüléseként foghatók fel.

A felületek adott P pontbeli közös érintősíkját a pillanatnyi forgástengellyel párhuzamos $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor és a pólusvándorlás \mathbf{u} sebességvektora jelöli ki. A vektoriális szorzás tulajdonságai miatt az $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ vektor erre a közös érintősíkra merőleges. Az (1.158) egyenlet alapján

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{a}_{P\parallel}. \quad (1.161)$$

Ez az összefüggés azt fejezi ki, hogy a pillanatnyi forgástengelyen lévő P pont gyorsulása két komponensből tehető össze: egy érintősíkra merőleges komponensből és egy $\boldsymbol{\omega}$ -val párhuzamos komponensből. A fenti gondolatmenet alapján kimondható a következő tétel:

1.70. tétel. *Térbeli forgó mozgások esetében nem lehet az \mathbf{a}_P gyorsulásvektornak $\boldsymbol{\omega}$ -ra merőleges komponense a P pontbeli érintősíkban.* ♠

Hiperboloid és hiperbolikus paraboloid esetén általában változik az alkotó (azaz a forgástengely) mentén az alkotó pontjaiba rajzolható érintősík normálvektora – ezért kellett kiemelni a fenti tételben, hogy az a P pontbeli érintősíkra vonatkozik.

A továbbiakban csak két speciális esetre szorítkozunk, ezekben az esetekben ugyanis a forgástengely minden pontjához ugyanaz az érintősík tartozik:

1.71. tétel. *Ha két test egymáson való elgördülése során a pillanatnyi forgástengely pontjainak közös érintősíkja van, akkor a mozgás síkmozgás vagy gömbi mozgás.*

Bizonyítás:

A közös érintősík létezéséből következik, hogy az \mathbf{u} pólusvándorlási sebesség *iránya* a pillanatnyi forgástengely minden pontjában azonos: az érintősíkba esik és a forgástengelyre (a

szögsebességre) merőleges. Azonban – mivel a pillanatnyi forgástengely különböző pontjainak eltérő lehet az \mathbf{a}_P gyorsulásuk, az \mathbf{u} pólusvándorlási sebességük *nagysága* eltérhet.

A gyorsulásredukciós képletből következik, hogy a merev test pontjainak gyorsulása – és így pólusvándorlási sebessége is – lineárisan változik a pillanatnyi forgástengely mentén. Következésképpen, pillanatnyi forgó mozgás esetén csak két eltérő eset lehetséges:

- A pillanatnyi forgástengely mentén minden pontban azonos a pólusvándorlási sebesség és a pontok gyorsulása. Ez henger gördülésének felel meg. Ha véges ideig tart ez a mozgás, akkor ez *síkmozgás*.
- A pillanatnyi forgástengely mentén lineárisan változik a pólusvándorlás sebességének nagysága. Ekkor található egy nulla vándorlási sebességű – azaz nulla gyorsulású – pont is a pillanatnyi forgástengelyen. Ez a kúp gördülésének felel meg, ahol a kúp csúcsa a nulla sebességű és nulla gyorsulású pont. Ha nem csak egy pillanattig tart ez a mozgás, az *gömbi mozgás* (lásd 1.74 ábra). ♠

Kúp gördüléssel feladatokkal találkoztunk az 1.40. és 1.41. példák kapcsán. A két kúp a pillanatnyi forgástengely mentén érintkezik. Ha a mozgó kúpon kijelölünk egy A pontot, akkor ahhoz megkereshetjük a forgástengely megfelelő P pontját, mely az \mathbf{u} pólusvándorlási sebességgel mozog az álló kúp palástján. Az 1.74 ábrán azt az esetet ábrázoltuk, amikor az álló kúp kúpszöge 180° -os, azaz a kúp síkká torzul.

Az 1.69. tételben azt is beláttuk, hogy gömbi mozgások esetén – ilyen mozgást végez az 1.41. példában vizsgált körbe gördülő kúp – a pillanatnyi forgástengely pontjainak gyorsulása merőleges az érintősíkra, tehát az 1.46 ábra szerint a forgástengely A pontjában $\mathbf{a}_A = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$. Ezt az eredményt felhasználva folytathatjuk az 1.41. példa megoldását a gyorsulásállapot tisztázásával.

1.72. példa: (Az 1.41. példa folytatása.) r sugarú és h magasságú, egyenes körkúp alakú merev test gördül az xy síkon úgy, hogy O pontja a mozgás során végig a koordináta-rendszer origójában marad. A B pont sebessége és gyorsulásának x komponense adott. A vizsgált pillanatban a kúp egyik alkotója párhuzamos az y tengellyel. Határozzuk meg a kúp gyorsulásállapotát! Adatok: $r = 0.14$ m, $h = 0.48$ m, $v_{Bx} = 1.92$ m/s, $a_{Bx} = 1$ m/s².

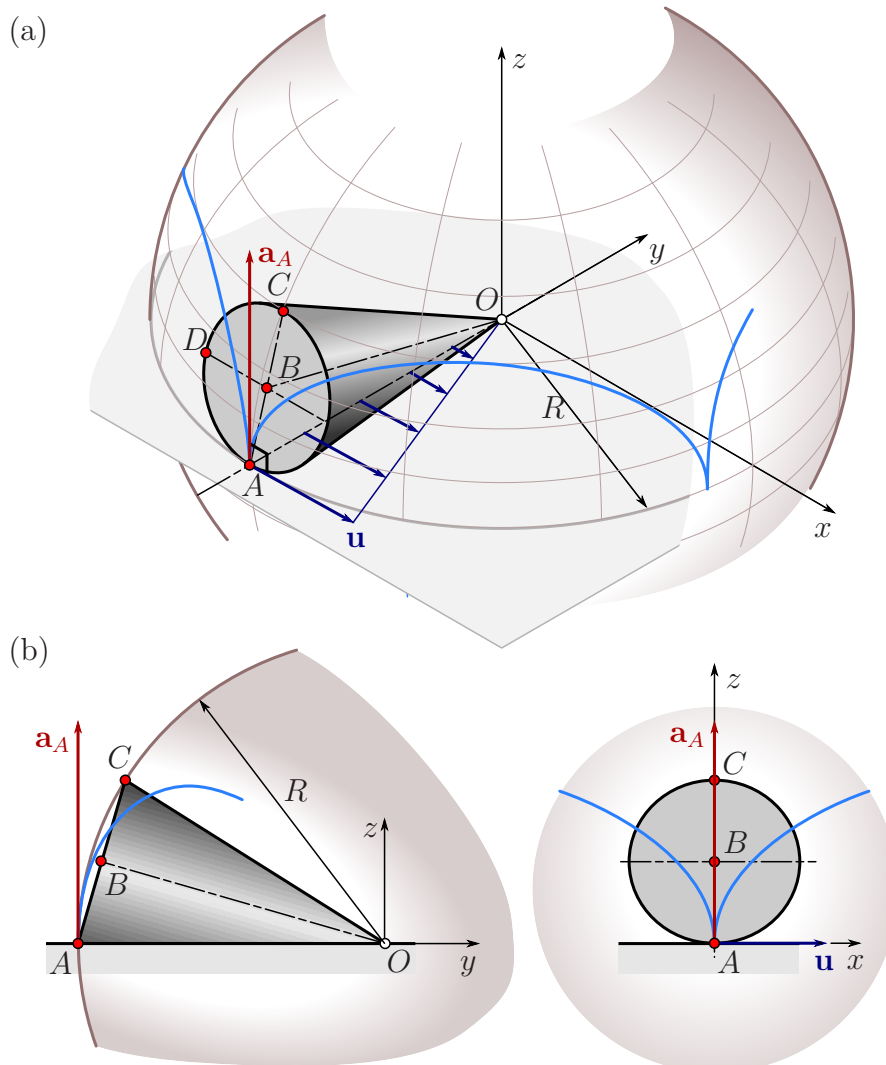
Megoldás:

A gyorsulásállapotot egy pont gyorsulása, a szögsebesség és a szöggyorsulás segítségével adhatjuk meg. Az $\boldsymbol{\omega}_2$ szögsebesség az 1.41. példából ismert:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 14.2857 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.162)$$

Továbbá azt is tudjuk a feladat megfogalmazásából, hogy az O pont gyorsulása $\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$. Az ismeretlen $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = [\varepsilon_{2x} \ \varepsilon_{2y} \ \varepsilon_{2z}]^T$ szöggyorsulás kiszámításához használjuk ki, hogy a B pont gyorsulása az anyagi pontok kinematikája alapján meghatározható. Mivel a B pont b sugarú körpályán mozog a z tengely körül, az ismert a_{Bx} a tangenciális gyorsulásnak, a_{By} pedig a sebesség nagyságából számítható normális gyorsulásnak felel meg:

$$\mathbf{a}_B = \begin{bmatrix} a_{Bx} \\ \frac{v_B^2}{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.163)$$



1.74. ábra. Sík talajon gördülő kúp gömbi mozgást végez, hiszen a kúp O csúcsa rögzített és az alapkör minden pontja a csúcstól R távolságban mozog. Az ábra mutatja az A pont pályáját, az A ponthoz kiszámítható pólusvándorlási sebességet és az A pont gyorsulását is.

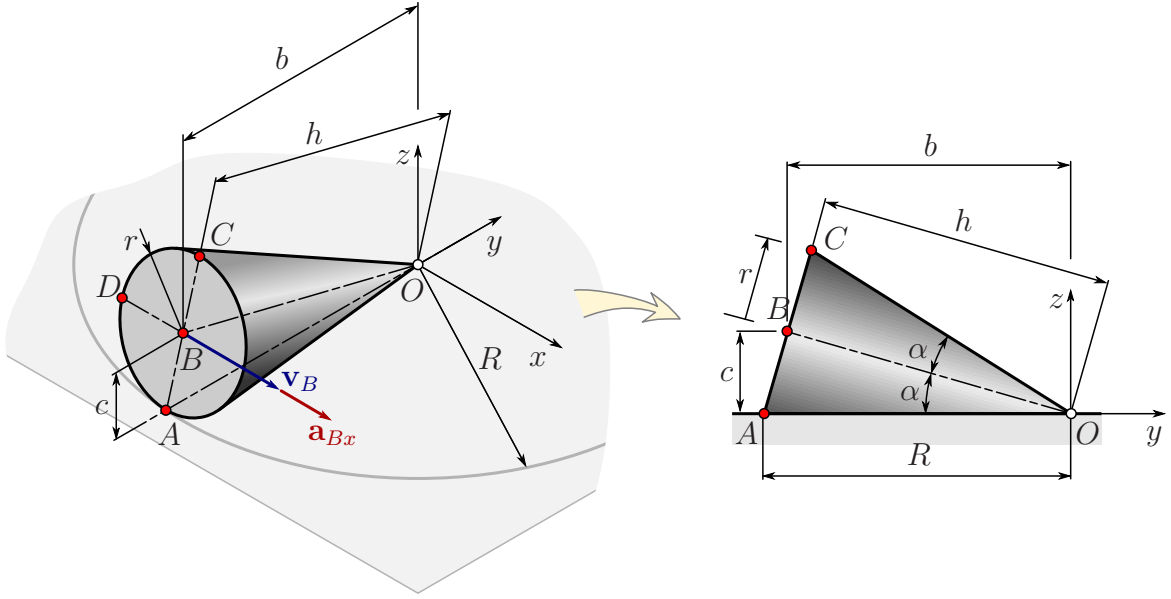
Írjuk fel a gyorsulásredukciós képletet a két ismert gyorsulású pont között:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{OB} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{OB}) = \begin{bmatrix} c\varepsilon_{2y} + b\varepsilon_{2z} \\ -c\varepsilon_{2x} \\ -b\varepsilon_{2x} - c\omega_{2y}^2 \end{bmatrix}. \quad (1.164)$$

A fenti kifejezést összehasonlítva az (1.163) képlettel, mind az y , mind a z irányú komponens egyenletből kifejezhető ε_{2x} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2x} &= -\frac{v_B^2}{cb} = -59.5238 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad \text{és} \\ \varepsilon_{2x} &= -\frac{c\omega_{2y}^2}{b} = -59.5238 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \end{aligned} \quad (1.165)$$

Az egyezésnek az a magyarázata, hogy a gördülés miatt az ω_2 szögsebesség és a v_B sebesség az (1.90) egyenleten keresztül összefügg.



1.75. ábra. Sík talajon gördülő kúp.

ε_{2y} és ε_{2z} meghatározásához azonban csak egyetlen egyenletünk van: $c\varepsilon_{2y} + b\varepsilon_{2z} = a_{Bx}$. Ez azt jelenti, hogy a szöggyorsulás meghatározásához még egy egyenletre van szükség. Használjuk ki, hogy az A pont rajta van a pillanatnyi forgástengelyen és ezért (1.158) szerint gyorsulásának nincs ω_2 -re merőleges komponense az xy síkban. Tehát $\mathbf{a}_A = [0 \ a_{Ay} \ a_{Az}]^T$.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{AB}) = \begin{bmatrix} c\varepsilon_{2y} - r \sin(\alpha)\varepsilon_{2z} \\ a_{Ay} - c\varepsilon_{2x} \\ a_{Az} + r \sin(\alpha)\varepsilon_{2x} - c\omega_{2y}^2 \end{bmatrix}. \quad (1.166)$$

Összehasonlítva az x komponentst (1.164) x komponensével,

$$c\varepsilon_{2y} + b\varepsilon_{2z} = c\varepsilon_{2y} - r \sin(\alpha)\varepsilon_{2z}. \quad (1.167)$$

Mivel $b \neq -r \sin(\alpha)$, ez az egyenlet csak $\varepsilon_{2z} = 0$ esetén teljesülhet.

Tehát

$$\varepsilon_{2y} = \frac{a_{Bx}}{c} = 7.44048 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (1.168)$$

(1.166) és (1.164) összehasonlításából az is kiderül, hogy $a_{Ay} = 0$ és $a_{Az} = 29.7619 \text{ m/s}^2$. Láthatjuk, hogy a pillanatnyi forgástengely A pontjának csak z irányú gyorsuláskomponense van. Ez megfelel az 1.69. tételnek, hiszen a körbe gördülő kúp gömbi mozgást végez, ahogy az 1.74 ábra mutatja.

Kiegészítés: Az 1.41. példában láttuk, hogy mind a C , mind a D ponthoz megtalálható a pillanatnyi forgástengely legközelebbi pontja:

$$\mathbf{r}_{CP1} = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_C}{\omega_2^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2r \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.2688 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad (1.169)$$

és

$$\mathbf{r}_{DP2} = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_D}{\omega_2^2} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ -r \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0 \\ -0.1344 \end{bmatrix} \text{ m}. \quad (1.170)$$

A gyorsulásredukciós képlettel megmutatható, hogy mind a P_1 , mind a P_2 pont gyorsulása z irányú. A két pont (1.153) alapján számolt pólusvándorlási sebessége :

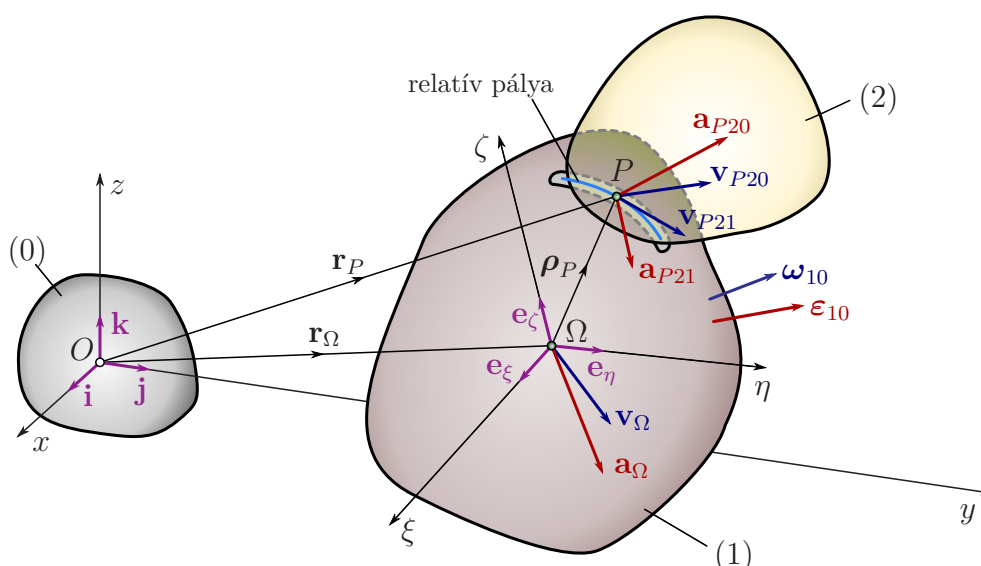
$$\mathbf{u}_{P_1} = \begin{bmatrix} 1.75\hat{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.171)$$

és

$$\mathbf{u}_{P_2} = \begin{bmatrix} 1.92 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.172)$$

1.2.11. „Relatív kinematika” – merev testek mozgásának leírása egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerekben

Az eddigiekben a merev testek mozgását hallgatólagosan egy *állónak tekintett* vonatkoztatási rendszerben írtuk le. Bizonyos esetekben azonban könnyebb a vizsgált test mozgásának leírása egy alkalmasan választott *mozgó* vonatkoztatási rendszerhez (azaz egy másik merev testhez) képest. Ha továbbra is az álló rendszerhez szeretnénk viszonyítani a mozgást, akkor célszerű két lépésre bontani a sebesség- és gyorsulásállapot kiszámítását. Ehhez azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen kapcsolat van a vizsgált test mozgó vonatkoztatási rendszerhez és álló vonatkoztatási rendszerhez viszonyított mozgása között.²¹



1.76. ábra. A (2) test mozgásának leírása a (0) álló és (1) mozgó vonatkoztatási rendszerekhez képest.

²¹Emlékeztetünk arra, hogy a vonatkoztatási rendszer mindig egy merev test, amihez a mozgást viszonyítjuk.

Bevezető gondolatok, jelölések

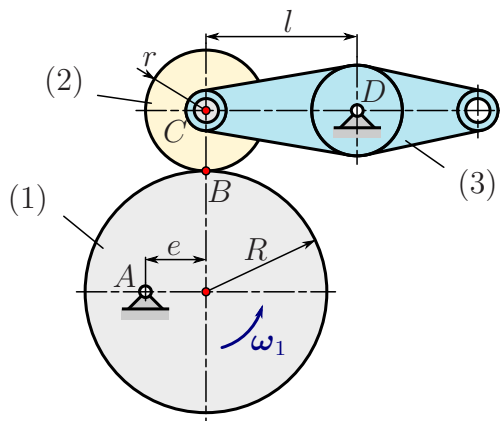
Nincs olyan természeti törvény, amely alapján megállapítható lenne egy önmagában vizsgált testről, hogy az adott pillanatban mennyi a sebessége, azaz hogy áll-e vagy mozog. Ugyanakkor a kinetika törvényei alapján (lásd 2. fejezet) kiválaszthatóak a zérus gyorsulású testek (melyek minden pontja nulla gyorsulású). Ezekhez a testekhez kitüntetett vonatkoztatási rendszereket, ún. inerciarendszereket lehet rögzíteni. Ezért az általunk „állónak” nevezett vonatkoztatási rendszer megválasztása a *kinematikai* vizsgálatok szempontjából teljesen ön-kényes, a *kinetikai* jelenségek szempontjából viszont „álló” vonatkoztatási rendszer alatt inerciarendszert kell érteni.

A továbbiakban az 1.76 ábra jelöléseit használjuk, azaz

- (0) jelöli az álló vonatkoztatási rendszert, amihez az $O(xyz)$ koordináta-rendszert rögzítjük.
- (1) jelöli a mozgó vonatkoztatási rendszert. Ehhez a rendszerhez az $\Omega(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszert rögzítjük.
- (2) jelöli a vizsgált testet.

A relatív mozgások problémakörének vizsgálata először a csillagászati megfigyelésekhez kapcsolódóan merült fel, hiszen a csillagászoknak a mozgó Földről kellett leírniuk a többi bolygó mozgását. A gépészmérnöki gyakorlatban azonban általában egészen más okból van szükség relatív kinematikai számításokra: leggyakrabban olyankor, amikor van valamilyen ismert kapcsolat – kényszerfeltétel – az (1) és (2) testek mozgása között. A korábbi fejezetekben láttuk, hogy a kényszerfeltételek korlátozásokat jelentenek a mozgásra nézve, tehát azok figyelembevétele elengedhetetlen.

A figyelembe veendő kényszerfeltételek sokfélék lehetnek. Például az 1.76 ábrán a két test kapcsolata úgy jelenik meg, hogy a (2) test P pontja az (1) testhez rögzített vezetékben mozog. Az 1.77 ábrán – mely egy szelepemelő modelljét mutatja – gördülési kényszerre látunk példát: az r sugarú (2) korong gördül az R sugarú (1) excenteren. Mindkét példában könnyebb lenne a kényszerfeltétel alkalmazása, ha nem mozogna az (1) test – például a szelepemelő vizsgálatára közvetlenül alkalmazhatóak lennének az 1.66. példában leírt eredmények.



1.77. ábra. Szelepemelő mechanikai modellje.

Hogy könnyebb legyen a kényszerkapcsolatok figyelembevétele, két lépésre bontjuk a vizsgált test mozgásának leírását: külön vizsgáljuk a (0) álló és (1) mozgó vonatkoztatási rendszerek mozgásának kapcsolatát és a (2) vizsgált testnek az (1) mozgó rendszerhez viszonyított mozgását. Ez utóbbi éppen annak felel meg, hogy gondolatban „megállítjuk” az (1) mozgó vonatkoztatási rendszert.

Úgy is képzelhetjük, hogy két – a mechanikában jártas – megfigyelő van a (0) és (1) rendszerekben. Ha a vektorokat irányított szakaszoknak képzeljük, akkor ezek a megfigyelők ugyanolyannak (ugyanolyan nagyságúnak és irányúnak) látják a mozgó rendszer pontjai között megadható helyvektorokat. Ennek megfelelően, például az 1.78 ábrán látható \mathbf{r}_{AB} és $\boldsymbol{\rho}_{AB}$ vektorok nagysága és iránya is megegyezik. Azért vezetünk be mégis két eltérő jelölést, mert a szóban forgó helyvektort a (0) vonatkoztatási rendszerben lévő megfigyelő az (xyz) , az (1)-beli megfigyelő pedig a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben tudja legegyszerűbben megadni, azaz a vektorok skalár komponensei mások:²²

$$\mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{bmatrix}_{(xyz)}, \quad \boldsymbol{\rho}_{AB} = \begin{bmatrix} \xi_{AB} \\ \eta_{AB} \\ \zeta_{AB} \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)}. \quad (1.173)$$

Bár magukat a helyvektorokat ugyanolyannak látja a két megfigyelő, a helyvektorok *változását*, tehát a sebesség- és gyorsulásvektorokat irány és nagyság szempontjából is másképp észlelhetik – erre már az 1.2 ábra kapcsán is láttunk példát. Úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az idő szerinti deriválás ad más eredményt, ha másik vonatkoztatási rendszerből szemlélve hajtjuk végre. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a kétféle derivált (azaz a megfigyelt sebesség és gyorsulásvektorok) közötti különbség hogyan fejezhető ki az (1) mozgó rendszer mozgásállapota segítségével.

A bevezetett jelöléseknek megfelelően indexeljük az egyes pontok sebesség- és gyorsulásállapotának vektorait: például \mathbf{v}_{P21} a (2) test P pontjának sebessége az (1) rendszerhez képest, $\boldsymbol{\varepsilon}_{10}$ az (1) test szöggyorsulása a (0)-hoz képest, stb. Általában nem okoz félreértést, ha az álló vonatkoztatási rendszerhez képest felírt vektorok indexéből elhagyjuk a 0 jelölését, azaz például \mathbf{a}_{P20} helyett \mathbf{a}_{P2} -t írunk.

Az (1) mozgó vonatkoztatási rendszer sebességállapotát az $[\boldsymbol{\omega}_{10}; \mathbf{v}_\Omega]_\Omega$ vektorkettőssel adhatjuk meg, ahol az 10 index azt hangsúlyozza ki, hogy az (1) test szögsebességét a (0) álló testhez (vonatkoztatási rendszerhez) képest tekintjük. A rendszer gyorsulásállapotát az \mathbf{a}_Ω , $\boldsymbol{\omega}_{10}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_{10}$ vektorok jellemzik az álló rendszerhez képest.

Sebességállapot

A (2) vizsgált test P pontjának helyvektorát a (0) álló vonatkoztatási rendszerben az $\mathbf{r}_P(t)$ vektor adja meg.

Ugyanakkor az (1) mozgó rendszerhez rögzített $\Omega(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben a P pont helyvektora

$$\boldsymbol{\rho}_P(t) = \xi_P(t)\mathbf{e}_\xi(t) + \eta_P(t)\mathbf{e}_\eta(t) + \zeta_P(t)\mathbf{e}_\zeta(t),$$

ahol \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η és \mathbf{e}_ζ a koordináta-rendszer bázisvektorai.

A $\boldsymbol{\rho}_P$ vektor *skalár komponenseinek* a változását – az ún. relatív sebességet – figyelheti meg a mozgó rendszerben tartózkodó megfigyelő.

²²Elvileg bármelyik koordináta-rendszert használhatnák (lásd 1.22. megjegyzés), de ez a választás a legcélszerűbb a fejezetben közölt levezetések szempontjából.

1.73. definíció. RELATÍV SEBESSÉG: a (2) test P pontjának sebessége az (1) mozgó vonatkoztatási rendszerhez képest.

$$\mathbf{v}_{P21} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_P = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_P(t) \\ \dot{\eta}_P(t) \\ \dot{\zeta}_P(t) \end{bmatrix}.$$

$A \circ$ tehát a mozgó rendszerben értelmezett koordináták idő szerinti deriválását jelöli. ♣

A relatív sebesség vektorának felírása során figyelembe tudjuk venni az (1) és (2) testek közti esetleges kényszerkapcsolatot. Célunk az, hogy az így nyert információ felhasználásával kifejezzük a (2) test P pontjának a (0) vonatkoztatási rendszerhez képest mérhető sebességét, az ún. abszolút sebességet.

1.74. definíció. ABSZOLÚT SEBESSÉG: a (2) test P pontjának sebessége a (0) álló vonatkoztatási rendszerhez képest, tehát a (0) rendszerben felírt \mathbf{r}_P vektor idő szerinti deriváltja:

$$\mathbf{v}_{P20} = \dot{\mathbf{r}}_P. \quad (1.174)$$

♣

Az 1.76 ábrának megfelelően, $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_\Omega + \boldsymbol{\rho}_P$, ezért az abszolút sebesség kifejezhető az alábbi módon:

$$\mathbf{v}_{P20} = \dot{\mathbf{r}}_P = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_\Omega + \boldsymbol{\rho}_P) = \mathbf{v}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\rho}}_P. \quad (1.175)$$

Ebben a képletben $\dot{\boldsymbol{\rho}}_P$ a vektor (0) vonatkoztatási rendszerben vett deriváltját jelenti. Ennek kiszámításához azt használjuk fel, hogy a (0) álló rendszerben lévő szemlélő nemcsak a (2), hanem az (1) test mozgását is észleli. Ha az (1) test elfordul, akkor vele együtt az \mathbf{e}_ξ , \mathbf{e}_η és \mathbf{e}_ζ bázisvektorok *iránnya* is megváltozik.

Ez azt jelenti, hogy $\dot{\boldsymbol{\rho}}_P$ kifejezéséhez most *nemcsak a skalár komponenseket, hanem az $\mathbf{e}_\xi(t)$, $\mathbf{e}_\eta(t)$, $\mathbf{e}_\zeta(t)$ bázisvektorokat is deriválni kell.* A szorzat deriválási szabályát alkalmazva és az időfüggés jelölését mellőzve

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_P = \dot{\xi}_P \mathbf{e}_\xi + \dot{\eta}_P \mathbf{e}_\eta + \dot{\zeta}_P \mathbf{e}_\zeta + \xi_P \dot{\mathbf{e}}_\xi + \eta_P \dot{\mathbf{e}}_\eta + \zeta_P \dot{\mathbf{e}}_\zeta.$$

Mivel az (1) vonatkoztatási rendszer bázisvektorai állandó nagyságú, de a rendszerrel együtt $\boldsymbol{\omega}_{10}$ szögsebességgel forgó vektorok, deriváltjuk az 1.32. következmény alapján számítható, például $\dot{\mathbf{e}}_\xi = \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{e}_\xi$. Így

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_P = \underbrace{\dot{\xi}_P \mathbf{e}_\xi + \dot{\eta}_P \mathbf{e}_\eta + \dot{\zeta}_P \mathbf{e}_\zeta}_{=\mathbf{v}_{P21}} + \underbrace{\xi_P \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{e}_\xi + \eta_P \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{e}_\eta + \zeta_P \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{e}_\zeta}_{=\boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P}.$$

Az összeg első három tagja a relatív sebességgel egyenlő, az utolsó három tagból pedig kiemelhető a szögsebességgel való szorzás, tehát

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_P = \overset{\circ}{\boldsymbol{\rho}}_P + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P \equiv \mathbf{v}_{P21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P. \quad (1.176)$$

1.75. következmény. Gondolatmenetünk során nem használtuk ki, hogy $\boldsymbol{\rho}_P$ milyen vektor, tehát bármilyen \mathbf{b} vektor egymáshoz képest mozgó rendszerekben értelmezett deriváltjai között igaz az alábbi összefüggés:

$$\dot{\mathbf{b}} = \overset{\circ}{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{b}, \quad (1.177)$$

ahol $\overset{\circ}{\square}$ a (0)-beli, \square pedig az (1)-beli deriválást jelöli, $\boldsymbol{\omega}_{10}$ pedig az (1) rendszer szögsebessége (0)-hoz képest. ♠

1.21. megjegyzés: A fenti következményben azt sem használtuk ki, hogy a (0) rendszer áll, az (1) pedig mozog. A fenti egyenletet átrendezve $\overset{\circ}{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega}_{01} \times \mathbf{b}$ is igaz, ahol $\boldsymbol{\omega}_{01} = -\boldsymbol{\omega}_{10}$ a (0) rendszer szögsebessége (1)-hez képest. ♣

Az (1.176) kifejezést behelyettesítve az (1.175) képletbe, átrendezés után a következő alakban fejezhető ki a P pont abszolút sebessége:

$$\mathbf{v}_{P20} = \mathbf{v}_{P21} + \underbrace{\mathbf{v}_{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P}_{\equiv \mathbf{v}_{P10}}. \quad (1.178)$$

A képletben megjelent a $\mathbf{v}_{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P$ kifejezés, ami csak az (1) rendszert jellemzi. Ez a kifejezés a sebességredukciós tétel alapján értelmezhető, az alábbi definícióval összhangban:

1.76. definíció. $\mathbf{v}_{P10} = \mathbf{v}_{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P$ a mozgó vonatkoztatási rendszer P -vel egybe eső pontjának sebessége, az ún. SZÁLLÍTÓ SEBESSÉG. ♣

A fenti levezetés alapján tehát kimondható az alábbi tétel:

1.77. tétel. A P pont abszolút sebessége a relatív sebesség és a szállító sebesség összegeként számítható, azaz

$$\mathbf{v}_{P20} = \mathbf{v}_{P21} + \mathbf{v}_{P10}. \quad (1.179)$$



Az abszolút, relatív és szállító sebességgel analóg módon értelmezzük az $\boldsymbol{\omega}_{20}$ abszolút, $\boldsymbol{\omega}_{21}$ relatív és $\boldsymbol{\omega}_{10}$ szállító szögsebességet. Ezek között az alábbi tétel teremt kapcsolatot.

1.78. tétel. A (2) merev test álló rendszerből észlelt $\boldsymbol{\omega}_{20}$ ABSZOLÚT SZÖGSEBESSÉGE, az (1) mozgó rendszerből észlelt $\boldsymbol{\omega}_{21}$ RELATÍV SZÖGSEBESSÉGE, valamint az (1) mozgó vonatkoztatási rendszer forgásának $\boldsymbol{\omega}_{10}$ szögsebessége (SZÁLLÍTÓ SZÖGSEBESSÉG) között a következő összefüggés teljesül:

$$\boldsymbol{\omega}_{20} = \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{10}, \quad (1.180)$$

tehát a szögsebességek vektorként adhatók össze.

Bizonyítás:

Legyen a (2) merev test A pontjából B pontjába mutató vektor a (0) rendszerben \mathbf{r}_{AB} , az (1) rendszerben pedig $\boldsymbol{\rho}_{AB}$, az 1.78 ábra szerint. Ez a két vektor természetesen megegyezik és mindkettő állandó nagyságú. Az 1.75. következmény alapján

$$\dot{\mathbf{r}}_{AB} = \overset{\circ}{\dot{\mathbf{r}}}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{AB}.$$

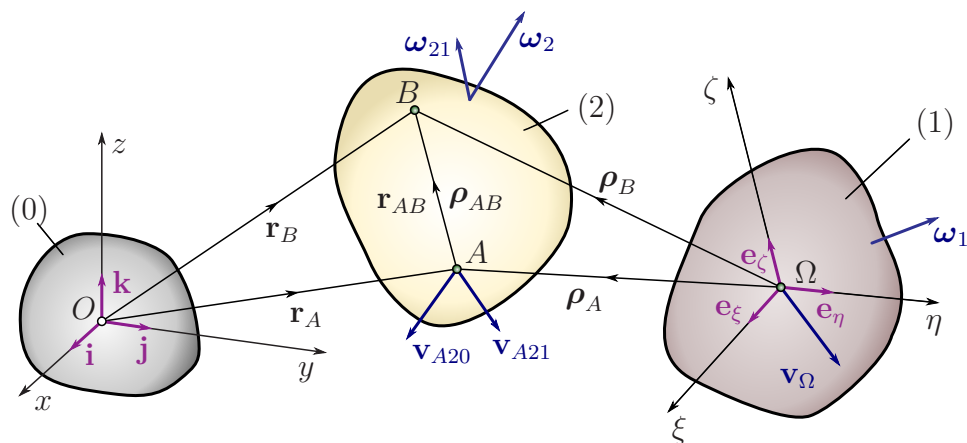
Mivel $\mathbf{r}_{AB} = \boldsymbol{\rho}_{AB}$, ezért ezeknek a vektoroknak az ugyanabban a rendszerben vett deriváltjai is megegyeznek, azaz $\dot{\mathbf{r}}_{AB} = \dot{\boldsymbol{\rho}}_{AB}$ és $\overset{\circ}{\dot{\mathbf{r}}}_{AB} = \overset{\circ}{\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{AB}$ is igaz. Az utóbbi összefüggés felhasználásával

$$\dot{\mathbf{r}}_{AB} = \overset{\circ}{\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{AB}.$$

Az AB távolság állandó, ezért a (0) rendszerben $\dot{\mathbf{r}}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{r}_{AB}$, míg az (1) rendszerben $\overset{\circ}{\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{AB} = \boldsymbol{\omega}_{21} \times \boldsymbol{\rho}_{AB}$. Ezeket behelyettesítve a fenti képletbe azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\omega}_{20} \times \mathbf{r}_{AB} = (\boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{10}) \times \mathbf{r}_{AB}.$$

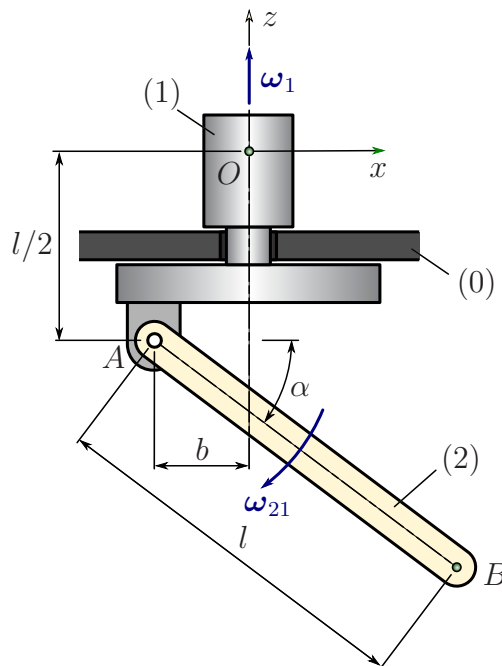
Ennek az összefüggésnek a merev test bármely két pontjára igaznak kell lennie, amiből következik a tétel állítása. ♠



1.78. ábra. A szögsebességek összeadása.

A fenti két tétel eredménye magától értetődőnek tűnik, de alkalmazásuk során mindig figyelni kell arra, hogy a szállító sebesség is függ attól, hogy a vizsgált test melyik pontjának sebességét akarjuk kiszámítani. Ennek illusztrálására térjünk vissza az 1.33. példára!

1.79. példa: Az 1.79 ábrán vázolt, l hosszúságú, (2) jelű rúd az A csuklón keresztül kapcsolódik a függőleges z tengely körül ω_1 szögsebességgel forgó (1) testhez. A vázolt helyzetben a rúd az (1) testhez képest ω_{21} pillanatnyi szögsebességgel mozog. Határozzuk meg az A és B pont abszolút sebességét, valamint a (2) rúd ω_2 szögsebességét, ha $l = 0.5$ m, $b = 0.125$ m, $\omega_{1z} = 10$ rad/s, $\omega_{21y} = 5$ rad/s, továbbá $\sin(\alpha) = 0.6$ és $\cos(\alpha) = 0.8$!



1.79. ábra. Példa a relatív és szállító sebességek összeadására.

Megoldás:

Az 1.33. példa megoldásából ismert az (1) test A pontjának abszolút sebessége:

$$\mathbf{v}_{A10} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ -l/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b\omega_{1z} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.25 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.181)$$

Az (1.179) egyenlet szerint a (2) test A pontjának abszolút sebessége

$$\mathbf{v}_{A20} = \mathbf{v}_{A10} + \mathbf{v}_{A21}, \quad (1.182)$$

tehát az előbb kiszámolt \mathbf{v}_{A10} az A pont szállító sebessége. A csuklós kapcsolat miatt az A pont relatív sebessége $\mathbf{v}_{A21} = \mathbf{0}$, ezért

$$\mathbf{v}_{A20} = \mathbf{v}_{A10} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.25 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.183)$$

Ha a (2) test B pontjának az abszolút sebességére vagyunk kíváncsiak, akkor a számítás összetettebb. Az (1) test B pontjának sebességét – a B pont szállító sebességét – úgy számítjuk ki, mintha az A csukló merev lenne és nem tudna mozogni a (2) test az (1)-hez képest.

$$\mathbf{v}_{B10} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \cos(\alpha) - b \\ 0 \\ -l/2 - l \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (l \cos(\alpha) - b)\omega_{1z} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.75 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.184)$$

A (2) test B pontjának (1)-hez képest vett relatív sebességét úgy számítjuk, mintha állna az (1)-es test, ezért csak az $\boldsymbol{\omega}_{21}$ szögsebességet vesszük számításba.

$$\mathbf{v}_{B21} = \mathbf{v}_{A21} + \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{21y} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \cos(\alpha) \\ 0 \\ -l \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \sin(\alpha)\omega_{21y} \\ 0 \\ -l \cos(\alpha)\omega_{21y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.185)$$

A fenti egyenletből látható, hogy a relatív sebességállapotra vonatkozó egyenletben csak relatív mennyiségek szerepelhetnek. A fentiek szerint a B pont abszolút sebessége:

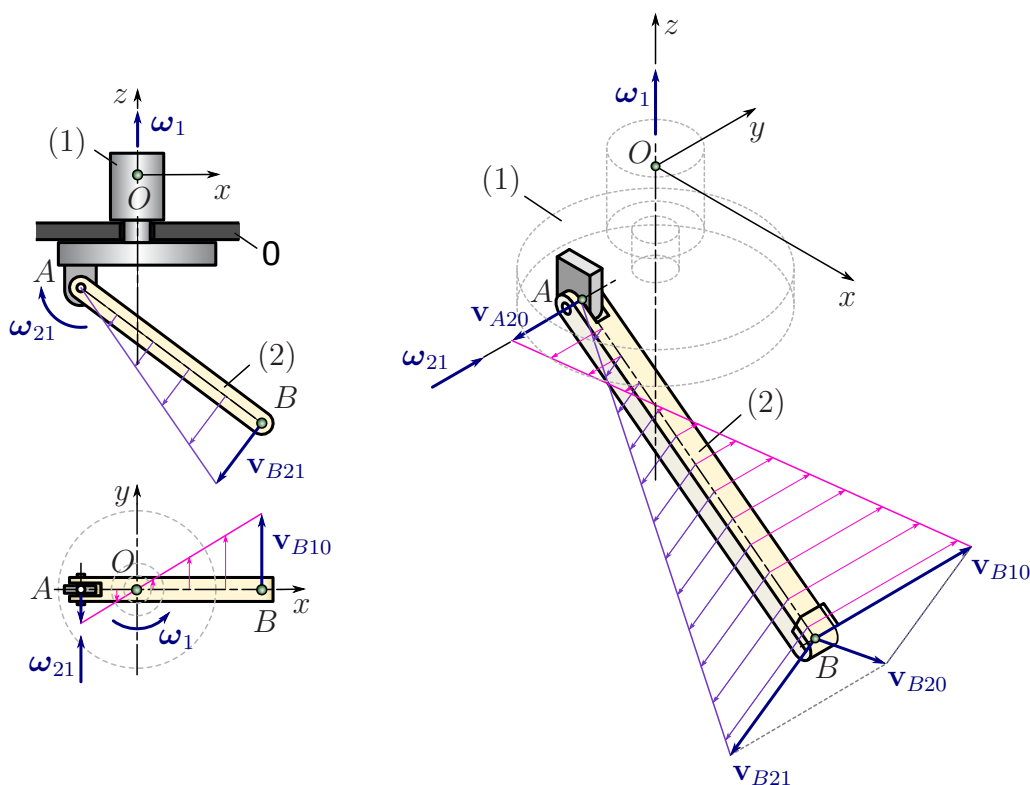
$$\mathbf{v}_{B20} = \mathbf{v}_{B10} + \mathbf{v}_{B21} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2.75 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (1.186)$$

ahogy az 1.33. megoldásában is láttuk.

A szögsebességeket (1.180) szerint vektorként összegezhettük. Ezt már alkalmaztuk az 1.33. példában, ezért az ott közölt megoldást megismételhetjük:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{21y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{21y} \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.187) \spadesuit$$

A (2) test pontjainak relatív és szállító sebességeinek eloszlását az 1.80 ábra mutatja.



1.80. ábra. Példa a relatív és szállító sebességek összeadására. A (2) rúd pontjainak (1)-hez viszonyított \mathbf{v}_{21} relatív sebessége lineárisan nő az A csuklótól távolodva. A rúd pontjaihoz rendelhető \mathbf{v}_{10} szállító sebesség is lineárisan változik a rúd mentén; nulla értéket a z tengelybe eső pont esetében vesz fel.

Gyorsulásállapot

A gyorsulásállapot vizsgálatához bevezetjük a relatív- és abszolút gyorsulás fogalmát.

1.80. definíció. RELATÍV GYORSULÁS: a (2) test P pontjának gyorsulása az (1) mozgó vonatkoztatási rendszerhez képest.

$$\mathbf{a}_{P21} = \overset{\circ}{\rho}_P = \overset{\circ}{\mathbf{v}}_{P21} = \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_P(t) \\ \ddot{\eta}_P(t) \\ \ddot{\zeta}_P(t) \end{bmatrix}.$$

$A \circ$ a mozgó rendszerben értelmezett koordináták idő szerinti deriválását jelöli. ♣

1.81. definíció. ABSZOLÚT GYORSULÁS: a (2) test P pontjának gyorsulása a (0) álló vonatkoztatási rendszerhez képest.

$$\mathbf{a}_{P20} = \ddot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{v}}_{P20}. \quad (1.188)$$

♣

Az abszolút gyorsulást a relatív gyorsulással szeretnénk kifejezni, mert – az előzőekben kifejtett okok miatt – a relatív gyorsulás vektora tartalmazza az (1) és (2) testek (kényszer)kapcsolatára vonatkozó információt. (1.178) alapján $\mathbf{v}_{P20} = \mathbf{v}_{P21} + \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P$, tehát ennek deriváltja az abszolút gyorsulás:

$$\mathbf{a}_{P20} = \dot{\mathbf{v}}_{P21} + \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P). \quad (1.189)$$

Az 1.75. következmény szerint az itt szereplő \mathbf{v}_{P21} relatív sebesség vektor deriváltja a (0) álló rendszerből nézve

$$\dot{\mathbf{v}}_{P21} = \overset{\circ}{\mathbf{v}}_{P21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21} = \mathbf{a}_{P21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21}.$$

Ezt behelyettesítve az abszolút gyorsulás (1.189) képletébe és az ott kijelölt deriválást elvégezve,

$$\mathbf{a}_{P20} = \mathbf{a}_{P21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21} + \dot{\mathbf{v}}_{P21} = \mathbf{a}_{P21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21} + \mathbf{a}_{P21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21}.$$

Felhasználva, hogy definíció szerint $\dot{\mathbf{v}}_{\Omega} = \mathbf{a}_{\Omega}$ és $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{10} = \boldsymbol{\varepsilon}_{10}$, továbbá (1.176) alapján $\dot{\boldsymbol{\rho}}_P = \mathbf{v}_{P21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P$, a következő végeredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{P20} &= \mathbf{a}_{P21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21} + \mathbf{a}_{\Omega} + \boldsymbol{\varepsilon}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P + \boldsymbol{\omega}_{10} \times (\mathbf{v}_{P21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P) = \\ &= \mathbf{a}_{P21} + \underbrace{\mathbf{a}_{\Omega} + \boldsymbol{\varepsilon}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P + \boldsymbol{\omega}_{10} \times (\boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P)}_{\equiv \mathbf{a}_{P10}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21}}_{\equiv \mathbf{a}_{PCor}}. \end{aligned} \quad (1.190)$$

A fenti képletben megjelent egy olyan kifejezés, ami csak az (1) test gyorsulásállapotától függ és egy olyan tag, ami a sebességállapot alapján számítható:

1.82. definíció. Az $\mathbf{a}_{P10} = \mathbf{a}_{\Omega} + \boldsymbol{\varepsilon}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P + \boldsymbol{\omega}_{10} \times (\boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P)$ SZÁLLÍTÓ GYORSULÁS az (1) vonatkoztatási rendszer P -vel fedésben levő pontjának gyorsulása, $\mathbf{a}_{PCor} = 2\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21}$ pedig az ún. CORIOLIS-GYORSULÁS, mely a sebességállapot alapján meghatározható. ♣

A fentiekből következik az alábbi tétel:

1.83. tétel. A P pont abszolút gyorsulása a relatív gyorsulás, a szállító gyorsulás és a Coriolis-gyorsulás összegeként számítható:

$$\mathbf{a}_{P20} = \mathbf{a}_{P21} + \mathbf{a}_{P10} + \mathbf{a}_{PCor}. \quad (1.191)$$



Míg a relatív és szállító sebesség összeadására vonatkozó (1.179) képlet teljesen megfelel az intuíciónak, az abszolút gyorsulás fenti képletében megjelenik a szemléletesen nehezen magyarázható Coriolis-gyorsulás. Ez az oka annak, hogy bizonyos feladatokban feltétlenül szükség van a gyorsulásállapot számításához a relatív kinematika összefüggéseire.

Azért segíti a feladatok megoldását az (1.191) formula, mert három egyszerűbb lépésre bontja a gyorsulás kiszámítását:

- Általában az \mathbf{a}_{P21} relatív gyorsulás iránya (néha nagysága is) ismert, hiszen éppen azért alkalmazzuk a relatív kinematika összefüggéseit, hogy az (1) és (2) testek mozgása közti kapcsolatot könnyen figyelembe tudjuk venni. A két test közötti kényszerfeltétellel kihasználása szempontjából matematikailag mindegy, hogy melyik testet tekintjük mozgó vonatkoztatási rendszernek és melyiket vizsgált testnek, azaz a két test szerepe felcserélhető. Azonban a két lehetséges megoldás közül gyakran szemléletesebb az egyik, ilyenkor azt érdemes választani.
- Az \mathbf{a}_{P10} szállító gyorsulás csak az (1), mozgó vonatkoztatási rendszer gyorsulásállapotától függ.
- Az \mathbf{a}_{PCor} Coriolis-gyorsulás meghatározáshoz csak a sebességállapotot kell ismerni, tehát általában nehézségek nélkül kiszámítható.

A tipikus feladatokban az (1.191) képlet jobb oldalán csak egy ismeretlen marad, a relatív gyorsulás nagysága, ami a P pont gyorsulására felírt (1.104) gyorsulásredukciós képlettel kiegészítve már megoldhatóvá teszi a problémát.

A szöggyorsulás számításához is be kell vezetnünk az abszolút, relatív és szállító szöggyorsulás fogalmát, az alábbi tétel szerint:

1.84. tétel. *A (2) merev test álló rendszerből észlelt ε_{20} ABSZOLÚT SZÖGGYORSULÁSA, az (1) mozgó rendszerből észlelt ε_{21} RELATÍV SZÖGGYORSULÁSA, valamint az (1) mozgó vonatkoztatási rendszer forgásának ε_{10} szöggyorsulása (ún. SZÁLLÍTÓ SZÖGGYORSULÁS) között a következő összefüggés teljesül:*

$$\varepsilon_{20} = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{10} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\omega}_{21},$$

ahol $\varepsilon_{21} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ és $\varepsilon_{10} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{10}$.

Bizonyítás:

Definíció szerint $\varepsilon_{20} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{20}$, (1.180) alapján pedig $\boldsymbol{\omega}_{20} = \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{10}$, tehát

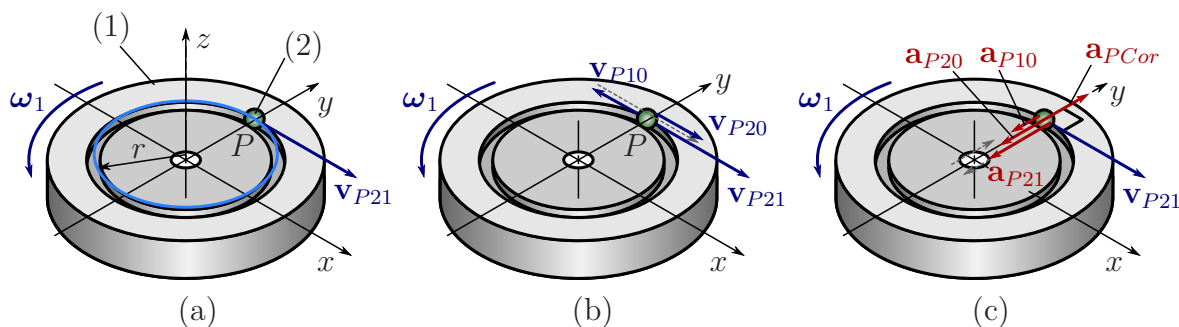
$$\varepsilon_{20} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{20} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{10}.$$

Alkalmazva az 1.75. következményt az $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ vektorra:

$$\varepsilon_{20} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\omega}_{21} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{10},$$

amiből már adódik a tétel állítása. ♠

1.85. példa: *Az 1.81 ábrán vázolt, állandó $\boldsymbol{\omega}_1$ szögsebességgel forgó korong P pontjában, r sugarú körpályán halad egy anyagi pont, állandó nagyságú \mathbf{v}_{P21} relatív sebességgel. Határozzuk meg az anyagi pont abszolút sebességét és gyorsulását!*



1.81. ábra. (a) Forgó korongon körpályán mozgó anyagi pont. (b) A pont sebességének összetevői. (c) A pont gyorsulásának összetevői.

Megoldás:

Mivel a korong szállító sebessége az ábrán látható koordináta-rendszerben $v_{P10x} = -r\omega_1$, ezért az anyagi pont abszolút sebessége

$$\mathbf{v}_{P20} = \mathbf{v}_{P10} + \mathbf{v}_{P21} = \begin{bmatrix} v_{P21} - r\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az abszolút gyorsulás

$$\mathbf{a}_{P20} = \mathbf{a}_{P10} + \mathbf{a}_{P21} + 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{P21},$$

amiből a szállító gyorsulás álló tengely körül állandó szögsebességgel forgó korong esetében

$$\mathbf{a}_{P10} = -\omega_1^2 \mathbf{r}_{OP} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\omega_1^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a relatív gyorsulás pedig

$$\mathbf{a}_{P21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v_{P21}^2}{r} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A Coriolis-gyorsulás a relatív sebességállapot alapján egyszerű behelyettesítéssel számítható:

$$\mathbf{a}_{Cor} = 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{P21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega_1 v_{P21} \\ 0 \end{bmatrix},$$

tehát az abszolút gyorsulás

$$\mathbf{a}_{P20} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\omega_1^2 - \frac{v_{P21}^2}{r} + 2\omega_1 v_{P21} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ez az eredmény úgy is kijön, ha figyelembe vesszük, hogy az anyagi pont állandó $v_{P20} = v_{P21} - r\omega_1$ nagyságú abszolút sebességgel mozog az r sugarú körpályán. Ebből ugyanis az következik, hogy

$$\mathbf{a}_{P20} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v_{P20}^2}{r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(r\omega_1)^2 + v_{P21}^2 - 2v_{P21}(r\omega_1)}{r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\omega_1^2 - \frac{v_{P21}^2}{r} + 2\omega_1 v_{P21} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebben a feladatban tehát a Coriolis-gyorsulásban szereplő 2-es szorzó megjelenését a $(v_{P21} - r\omega_1)$ különbség négyzetre emelése kapcsán magyarázhatjuk meg. ♠

1.86. példa: Az 1.82 ábrán vázolt, állandó $\boldsymbol{\omega}_1$ szögsebességgel forgó korong P pontjában sugárirányban kifelé halad egy anyagi pont, állandó \mathbf{v}_{P21} relatív sebességgel. Határozzuk meg abszolút sebességét és gyorsulását!

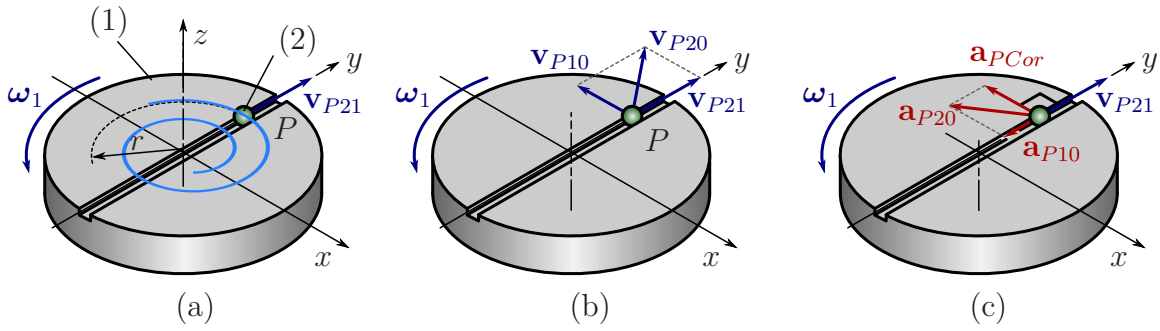
Megoldás:

A korong szállító sebessége az ábrán látható koordináta-rendszerben $v_{P10x} = -r\omega_1$, ezért az anyagi pont abszolút sebessége

$$\mathbf{v}_{P20} = \mathbf{v}_{P10} + \mathbf{v}_{P21} = \begin{bmatrix} -r\omega_1 \\ v_{P21} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.192)$$

Mivel a relatív sebességvektor állandó, a relatív gyorsulás nulla: $\mathbf{a}_{P21} = \mathbf{0}$. A szállító gyorsulás a forgástengelytől r távolságban található P pontban

$$\mathbf{a}_{P10} = -\omega_1^2 \mathbf{r}_{OP} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r\omega_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.193)$$



1.82. ábra. (a) A forgó korongon sugárirányban kifelé mozgó anyagi pont relatív pályája egyenes, valódi pályája spirál. (b) A pont sebességének összetevői. (c) A pont gyorsulásának összetevői.

a Coriolis-gyorsulás pedig

$$\mathbf{a}_{Cor} = 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{P21} = \begin{bmatrix} -2\omega_1 v_{P21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.194)$$

ezért az abszolút gyorsulás

$$\mathbf{a}_{P20} = \mathbf{a}_{P10} + \mathbf{a}_{Cor} = \begin{bmatrix} -2\omega_1 v_{P21} \\ -r\omega_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.195)$$

1.22. megjegyzés: Az abszolút sebesség és gyorsulás képleteinek levezetése során úgy tekintettük, hogy az álló vonatkoztatási rendszerben érvényes vektorokat az álló rendszerhez rögzített (xyz) koordináta-rendszerben írjuk fel, a mozgó vonatkoztatási rendszer vektorait pedig az ahhoz rögzített $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben. Ennek nem feltétlenül kell így lennie, elvileg felírhatók az abszolút és relatív mennyiségek is mindkét koordináta-rendszerben.

Ha egy adott pillanatban érdekel minket a sebesség- vagy gyorsulásállapot, akkor célszerű a két koordináta-rendszert párhuzamos tengelyekkel felvenni, mert így ugyanazokkal a számhármassokkal adható meg egy vektor mindkét koordináta-rendszerben. Vektorok deriválása során viszont már figyelembe kell vennünk, hogy a mozgó koordináta-rendszer elmozdul vagy elfordul. Az ilyenkor alkalmazható megoldási módszert az alábbiakban illusztráljuk az 1.86. példában vizsgált pont abszolút gyorsulásának kiszámítása kapcsán.

Az anyagi pont állandó nagyságú relatív sebességgel, egyenletesen növeli a forgástengelytől mérhető távolságát: $r(t) = r_0 + v_{P21} \cdot t$, ezért egy adott t pillanatban az abszolút sebessége

$$\tilde{\mathbf{v}}_{P20} = \begin{bmatrix} -r(t)\omega_1 \\ v_{P21} \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} = \begin{bmatrix} -(r_0 + v_{P21}t)\omega_1 \\ v_{P21} \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)}. \quad (1.196)$$

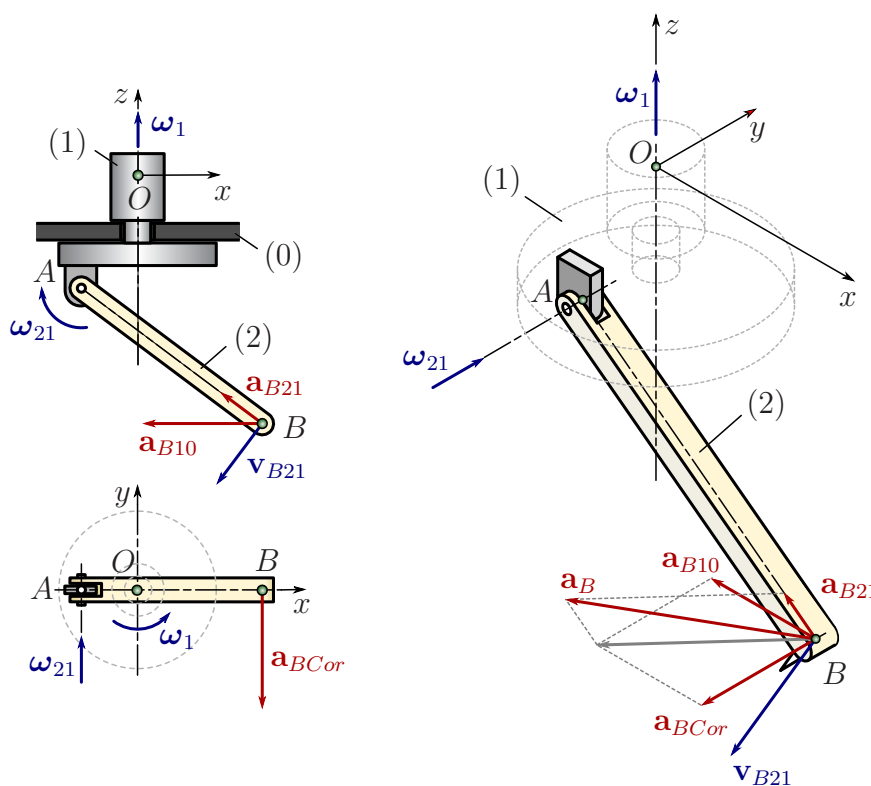
Ha az $\mathbf{a}_{P20} = \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_{P20}$ összefüggésből kiindulva idő szerint deriválnánk a fenti vektor komponenteit, akkor az eredmény csak $[-v_{P21}\omega_1, 0, 0]^T$ lenne. Azt is figyelembe kell vennünk, hogy az (1.196) képletben a tárcsával együtt forgó koordináta-rendszerben írtuk fel az abszolút sebességet – erre utal az indexbe tett $(\xi\eta\zeta)$ jel. Ezért nem elegendő csak az $r(t)$ függvényt

deriválni, a vektor irányának megváltozását is figyelembe kell vennünk az $\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{P20}$ taggal:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{P20} = \dot{\mathbf{v}}_{P20} &= \overset{\circ}{\mathbf{v}}_{P20} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{P20} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -(r_0 + v_{P21}t)\omega_1 \\ v_{P21} \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} \times \begin{bmatrix} -r\omega_1 \\ v_{P21} \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} \\ &= \begin{bmatrix} -v_{P21}\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} + \begin{bmatrix} -v_{P21}\omega_1 \\ -r\omega_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)}. \end{aligned} \quad (1.197)$$

Természetesen az abszolút gyorsulás fenti kifejezése is a koronggal együtt forgó koordináta-rendszerben van felírva. A megoldásból látszik, hogy a Coriolis-gyorsulás két különböző ok miatt jelenik meg: az első tag azt mutatja meg, hogy nagyobb sugáron nagyobb kerületi sebességgel kell mozognia a testnek, a második tag pedig a sebesség irányának változásával kapcsolatos. ♣

1.87. példa: Oldjuk meg az 1.53. példát a relatív kinematika összefüggéseit felhasználva! Az 1.58 ábrán vázolt, l hosszúságú, (2) jelű rúd az A csuklón keresztül kapcsolódik a függőleges z tengely körül állandó $\boldsymbol{\omega}_1$ szögsebességgel forgó (1) testhez. A vázolt helyzetben a rúd az (1) testhez képest állandó nagyságú $\boldsymbol{\omega}_{21}$ szögsebességgel mozog. Határozzuk meg a B pont gyorsulását, valamint a (2) rúd $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ szöggyorsulását, ha $l = 0.5$ m, $b = 0.125$ m, $\omega_{1z} = 10$ rad/s és $\omega_{21y} = 5$ rad/s, továbbá $\sin(\alpha) = 0.6$ és $\cos(\alpha) = 0.8$!



1.83. ábra. Példa a gyorsulásállapot számítására relatív kinematikai összefüggések alapján.

Megoldás:

Első lépésként számítsuk ki a B pont szállító gyorsulását, azaz az (1) test B -vel egybeeső pontjának gyorsulását! $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$ miatt

$$\mathbf{a}_{B10} = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{OB}) = \begin{bmatrix} -(l \cos(\alpha) - b)\omega_{1z}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.198)$$

A B pont relatív gyorsulását úgy számolhatjuk, mintha az (1) testet megállítottuk volna. $\mathbf{a}_{A21} = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_{21} = \mathbf{0}$ miatt

$$\mathbf{a}_{B21} = \mathbf{a}_{A21} + \boldsymbol{\varepsilon}_{21} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_{21} \times (\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}_{AB}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{21y} \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{21y} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \cos(\alpha) \\ 0 \\ -l \sin(\alpha) \end{bmatrix} \right). \quad (1.199)$$

A vektoriális szorzatot kifejtve

$$\mathbf{a}_{B21} = \begin{bmatrix} -l \cos(\alpha)\omega_{21y}^2 \\ 0 \\ l \sin(\alpha)\omega_{21y}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 7.5 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.200)$$

Az 1.79. példából ismert a B pont relatív sebessége:

$$\mathbf{v}_{B21} = \mathbf{v}_{A21} + \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} -l \sin(\alpha)\omega_{21y} \\ 0 \\ -l \cos(\alpha)\omega_{21y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1.201)$$

Ezzel a Coriolis-gyorsulás

$$\mathbf{a}_{Cor} = 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{B21} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l \sin(\alpha)\omega_{21y} \\ 0 \\ -l \cos(\alpha)\omega_{21y} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -l \sin(\alpha)\omega_{21y}\omega_{1z} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (1.202)$$

A fentiek szerint a B pont abszolút gyorsulása

$$\mathbf{a}_{B20} = \mathbf{a}_{B21} + \mathbf{a}_{B10} + \mathbf{a}_{Cor} = \begin{bmatrix} -37.5 \\ -30 \\ 7.5 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (1.203)$$

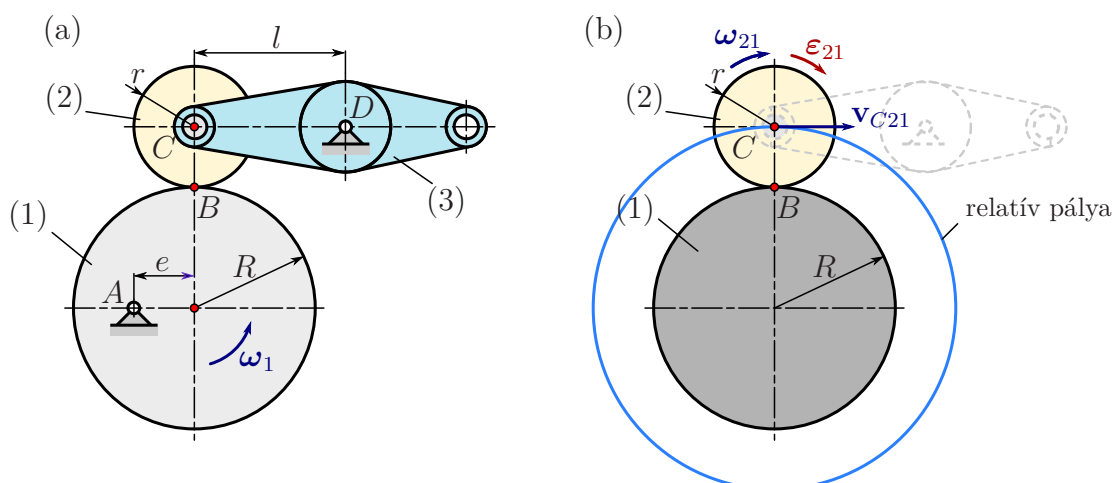
ami megegyezik az 1.53. példában kiszámolt eredménnyel.

A (2) test abszolút szöggyorsulását is meghatároztuk már az 1.53. példában. Most a relatív kinematika 1.84. tételét alkalmazzuk:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{20} = \boldsymbol{\varepsilon}_{21} + \boldsymbol{\varepsilon}_{10} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{21}. \quad (1.204)$$

Mivel mind az $\boldsymbol{\omega}_{21}$ relatív szögsebesség, mind a $\boldsymbol{\omega}_{10}$ szállító szögsebesség állandó, $\boldsymbol{\varepsilon}_{21} = \boldsymbol{\varepsilon}_{10} = \mathbf{0}$, tehát

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} -\omega_{1z}\omega_{21y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (1.205)$$



1.84. ábra. (a) Szelepemelő mechanikai modellje. (b) A (2) test körpályán mozog az (1) testhez képest – ezt a kényszerfeltételt használjuk fel a feladat megoldása során.

1.88. példa: Az 1.84 ábrán látható mechanizmus (szelepemelő) egy R sugarú, e excentricitással csapágyazott (1) jelű excenterből és egy rajta gördülő r sugarú, (2) jelű korongból áll. Ez utóbbi test C középpontja csuklósan kapcsolódik a (3) jelű rúdhoz. Az (1) test szögsebessége $\omega_1 = \text{állandó}$. Mekkora a (2) test szöggyorsulása és a C pont gyorsulása?

Megoldás:

A (2) test gördül a mozgó (1) testen. Egy hasonló gördülési feladatot tárgyaltunk az 1.66. példában, csak ott az egyik test nyugalomban volt. A gördülési kényszerrel kapcsolatos, korábban kapott eredményeket úgy tudjuk most is felhasználni, ha az (1) testet választjuk mozgó vonatkoztatási rendszernek. Ez azt jelenti, hogy felbontjuk a feladat megoldását két lépésre. Az egyik lépésben mintegy „megállítjuk” az (1) testet és a (2) test C pontjának relatív sebességét illetve gyorsulását számítjuk ki. A másik lépésben pedig eltekintünk az (1) és (2) testek egymáshoz képest történő elmozdulásától és a szállító sebességet/gyorsulást számítjuk ki. A gyorsulásállapot vizsgálatához a Coriolis-gyorsulás számítására is szükség van – ez azonban nem jelent nehézséget a sebességállapot ismeretében.

Kezdjük a feladat megoldását a *sebességállapot tisztázásával!* A C pont abszolút sebessége

$$\mathbf{v}_{C20} = \mathbf{v}_{C10} + \mathbf{v}_{C21}, \quad \text{ahol a szállító sebesség}$$

$$\mathbf{v}_{C10} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{AC} = \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{AC}.$$

A gördülési kényszerből következik, hogy $\mathbf{v}_{B21} = \mathbf{0}$, így a C pont relatív sebessége

$$\mathbf{v}_{C21} = \mathbf{v}_{B21} + \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}_{BC} = \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}_{BC}.$$

Tehát

$$\mathbf{v}_{C20} = \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r}_{AC} + \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}_{BC}. \quad (1)$$

Síkmozgás esetében ez két használható skalár egyenletet ad, viszont a \mathbf{v}_C vektor két komponensén kívül ismeretlen az $\boldsymbol{\omega}_{21}$ relatív szögsebesség z komponense is. Tehát további egyenletekre van szükség. A C pont mozgását még egy kényszer korlátozza: mivel egyúttal a (3) testnek is pontja, ezért

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_{DC} = \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_{DC}. \quad (2)$$

A C és D pontok sebessége közti kapcsolat leírásához nem volt szükség relatív kinematikai egyenletekre, ezért nem használtuk a relatív kinematikában használatos indexeket sem. A

kapott összefüggés két újabb skalár egyenletet jelent és csak egy új ismeretlen, az ω_3 vektor z komponense jelenik meg. Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldható és kiszámítható v_{Cx} , v_{Cy} , ω_{21z} és ω_{2z} .

Megjegyezzük, hogy a sebességállapot általában relatív kinematikai összefüggések nélkül is tisztázható. A C pontnak – mint a (2) test pontjának – a sebességvektora $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ miatt

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{BC} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{BC} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{BC}.$$

Figyelembe véve, hogy $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}$, ez az egyenlet megfelel (1)-nek.

A gyorsulásállapotot jellemző vektorok kiszámításához induljunk ki abból, hogy ismert az (1)-es test B pontjának a gyorsulása. $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{0}$ miatt

$$\mathbf{a}_{B1} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} - \omega_1^2 \mathbf{r}_{AB} = -\omega_1^2 \mathbf{r}_{AB}. \quad (1.206)$$

Az (1) és (2) testek B pontjai ugyanolyan sebességgel mozognak – ezt használtuk ki a sebességállapot felírása során, mikor figyelembe vettük, hogy a \mathbf{v}_{B21} relatív sebesség nulla. Azonban e két pont gyorsulása nem egyezik meg! Gondoljunk egy sík talajon gördülő kerekre. A sebességpólus (mint a test pontja) gyorsulása a talajra merőleges, de a talaj P -vel egybeeső pontja nyugalomban van. Minden gördülés esetében igaz, hogy a két érintkező test érintkezési pontjainak érintő irányú gyorsulásai megegyeznek, az arra merőleges gyorsuláskomponensek azonban különböznek, tehát $a_{B1x} = a_{B2x}$, de $a_{B1y} \neq a_{B2y}$. Ez azért jelent problémát, mert ha felírjuk a C pont gyorsulását az alábbi két egyenlettel:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{B2} + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{BC} - \omega_2^2 \mathbf{r}_{BC} \quad \text{és} \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \boldsymbol{\varepsilon}_3 \times \mathbf{r}_{DC} - \omega_3^2 \mathbf{r}_{DC} = \boldsymbol{\varepsilon}_3 \times \mathbf{r}_{DC} - \omega_3^2 \mathbf{r}_{DC}, \quad (4)$$

akkor az eredményül kapott négy skaláregyenletből álló egyenletrendszer nem oldható meg. Itt az \mathbf{a}_C vektor x és y komponensei két ismeretlent jelentenek. További két ismeretlen az $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ vektorok z komponense. Ebben az esetben azonban egy ötödik ismeretlent jelent a (2) test B pontjának a gyorsulása, az \mathbf{a}_{B2} vektor y irányú komponense.

Ennek meghatározásához relatív kinematikai összefüggéseket írunk fel. A C pont abszolút gyorsulása – melyet az előző képletekben \mathbf{a}_C jelölt:

$$\mathbf{a}_{C20} = \mathbf{a}_{C21} + \mathbf{a}_{C10} + 2\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{C21}. \quad (5)$$

Az (1) test gyorsulásállapota ismert, ezért a szállító gyorsulás az alapján számítható:

$$\mathbf{a}_{C10} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \mathbf{r}_{AC} - \omega_1^2 \mathbf{r}_{AC} = -\omega_1^2 \mathbf{r}_{AC}.$$

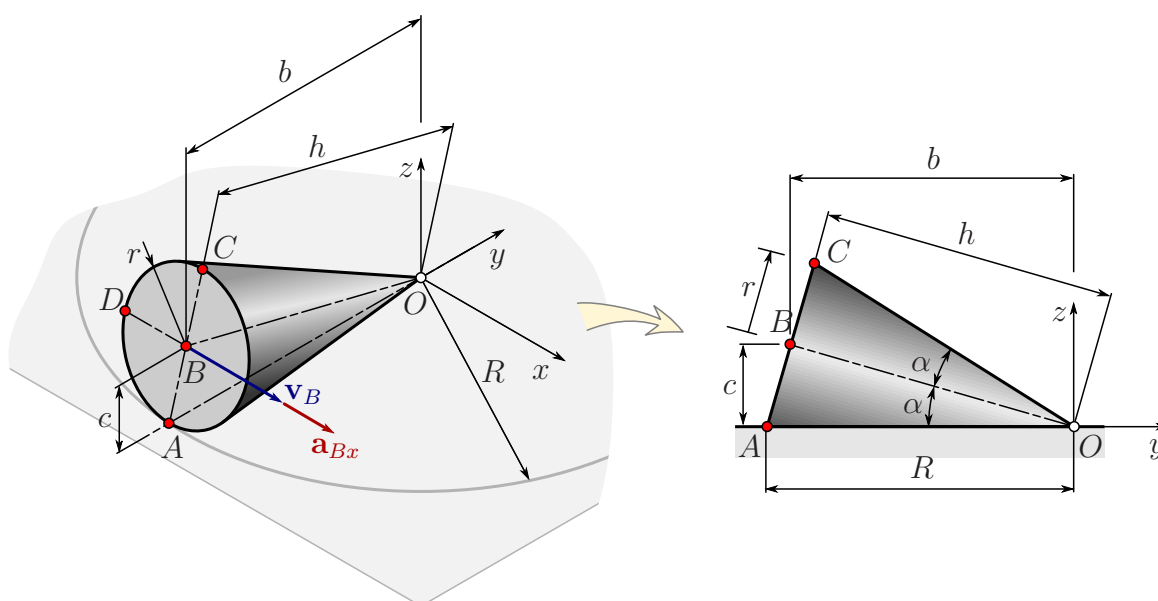
A Coriolis-gyorsulás csak a sebességállapottól függ, ami már szintén ismert:

$$2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_{C21} = 2\boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{r}_{BC}).$$

A relatív gyorsulás kifejezése az (1.66.) példa alapján határozható meg:

$$\mathbf{a}_{C21} = \begin{bmatrix} -r\varepsilon_{21z} \\ -\frac{v_{C21}^2}{r+R} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebben egyetlen ismeretlen van, az ε_{21z} relatív szöggyorsulás. Következésképpen, a (4) és (5) egyenletek együtt már csak négy ismeretlent tartalmaznak, melyek: a_{Cx} , a_{Cy} , ε_{21z} és ε_{3z} . Így az egyenletrendszer megoldható. ♠



1.85. ábra. Sík talajon gördülő kúp.

Térjünk vissza ismét a gördülő kúppal kapcsolatos 1.41. és 1.72. példákra! A bemutatott megoldásban a szöggyorsulás meghatározásához felhasználtuk, hogy a pillanatnyi forgástengely pontjainak nincs a kényszerpálya érintőjébe eső, szögsebességre merőleges komponense.

A következőben megmutatjuk, hogy relatív kinematikai összefüggések segítségével sokkal egyszerűbben is megoldható ez a feladat.

1.89. példa: r sugarú és h magasságú, egyenes körkúp alakú merev test gördül az xy síkon úgy, hogy O pontja a mozgás során végig a koordináta-rendszer origójában marad. A B pont sebessége és gyorsulásának x komponense adott. A vizsgált pillanatban a kúp egyik alkotója párhuzamos az x tengellyel. Határozzuk meg a kúp szöggyorsulását! Adatok: $r = 0.14$ m, $h = 0.48$ m, $v_{Bx} = 1.92$ m/s, $a_{Bx} = 1$ m/s².

Megoldás:

Az 1.41. példában láttuk, hogy a kúp szögsebessége két komponensre bontható:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}, \quad (1.207)$$

ahol $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_{21} \sin(\alpha)$. Ez a relatív kinematika keretében úgy értelmezhető, hogy egy (1) jelű testet képzelünk a kúp mellé, mely összeköti a z tengelyt és a kúp szimmetriatengelyét, az 1.86 ábrának megfelelően. Így a kúp gördülése felbontható két különböző tengely körüli forgás összegére – ezt illusztrálja az 1.87 ábra.

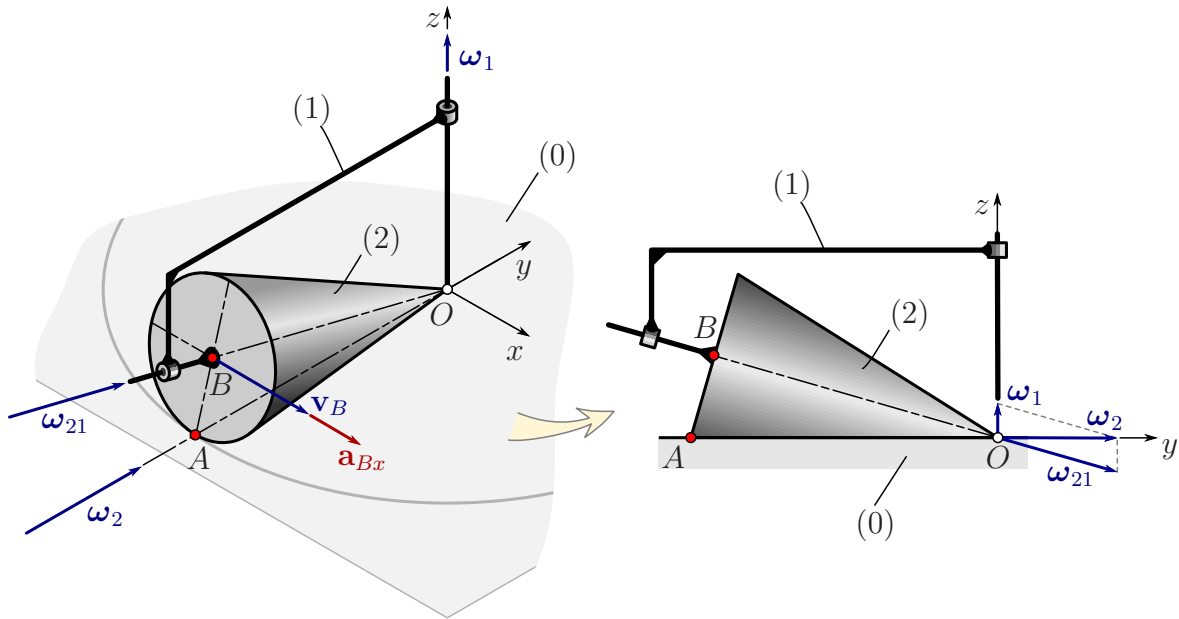
Térjünk át a kúp szimmetriatengelyével együtt $\boldsymbol{\omega}_1$ szögsebességgel forgó (1) vonatkoztatási rendszerre! Itt $\boldsymbol{\omega}_1$ a szállító szögsebesség, $\boldsymbol{\omega}_{21}$ pedig a relatív szögsebesség az $\boldsymbol{\omega}_1$ szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerhez képest.

Az 1.84. tétel szerint, az $\boldsymbol{\omega}_1 \equiv \boldsymbol{\omega}_{10}$ jelöléssel

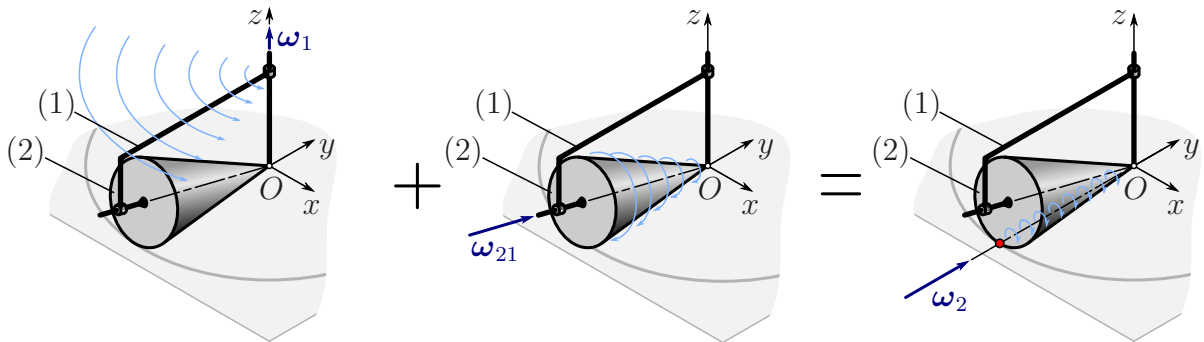
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{20} = \boldsymbol{\varepsilon}_{21} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{21}, \quad (1.208)$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}_{21} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1$.

$\boldsymbol{\omega}_1$ nem változtatja irányát, ezért $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ csak $\boldsymbol{\omega}_1$ nagyságának változásával kapcsolatos és azzal egyező irányú. Ehhez hasonlóan – mivel $\boldsymbol{\varepsilon}_{21} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$, azaz az $\boldsymbol{\omega}_1$ szögsebességgel forgó rendszerhez képest kell számítani a deriváltat – $\boldsymbol{\varepsilon}_{21}$ is csak $\boldsymbol{\omega}_{21}$ nagyságának változásával



1.86. ábra. Gördülő kúp szögsebesség komponenseinek kapcsolata.



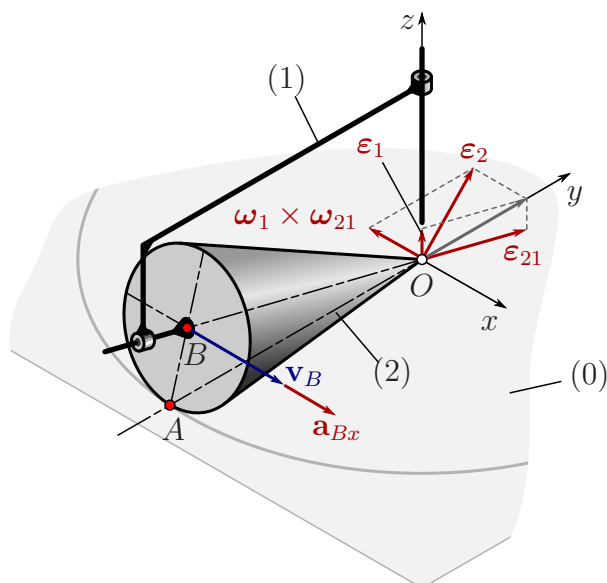
1.87. ábra. A körben gördülő kúp mozgása összetehető egy z tengely körüli forgásból és a kúp szimmetriatengelye körüli forgásból.

kapcsolatos és azzal párhuzamos. Mivel e két szögsebesség nagysága között kapcsolatot teremt a gördülési kényszer, $\omega_1 = \omega_{21} \sin(\alpha)$ miatt $\varepsilon_1 = \varepsilon_{21} \sin(\alpha)$ is teljesül. A szögsebesség irányváltoztatásának ütemét az

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} -\omega_{1z}\omega_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -59.5238 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad (1.209)$$

vektor jellemzi. Láthatóan ennek nincs z irányú komponense. Mivel ε_1 és ε_{21} között ugyanaz a geometriai összefüggés teljesül, mint $\boldsymbol{\omega}_1$ és $\boldsymbol{\omega}_{21}$ között, ε_1 és ε_{21} összege az y tengellyel párhuzamos, ugyanúgy, mint $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}$. Tehát a szöggyorsulásnak nincs z irányú komponense, ahogy az 1.88 ábra is mutatja. Ez azt jelenti, hogy az 1.72. példában felírt (1.164) kifejezés leegyszerűsödik:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{OB} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{OB}) = \begin{bmatrix} c\varepsilon_{2y} \\ -c\varepsilon_{2x} \\ -b\varepsilon_{2x} - c\omega_{2y}^2 \end{bmatrix}. \quad (1.210)$$



1.88. ábra. Gördülő kúp szöggyorsulás komponenseinek kapcsolata.

Mivel az 1.72. példa szerint

$$\mathbf{a}_B = \begin{bmatrix} a_{Bx} \\ \frac{v_B^2}{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (1.211)$$

a szöggyorsulás két ismeretlen komponense kiszámítható:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} -\omega_{1z}\omega_{2y} \\ \frac{a_{Bx}}{c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -59.5238 \\ 7.44048 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (1.212)$$

Ez megfelel a korábban kapott eredménynek. ♠

A relatív kinematikai összefüggések levezetése során tetszőlegesen megválaszthattuk az álló és a mozgó vonatkoztatási rendszert. Felmerül a kérdés, hogy van-e olyan természeti törvény, mely alapján különbséget tehetünk a lehetséges vonatkoztatási rendszerek között. Erre a kérdésre a kinetika adja meg a választ.

2. fejezet

Az anyagi pontok kinetikája

2.1. Alapvető fogalmak, Newton-törvények

A kinematika tárgyalása során nem foglalkoztunk a mozgás okaival, noha mindennapi tapasztalat, hogy bármely test mozgása során rá lehet mutatni más testekre, melyek a mozgást befolyásolják. Következésképpen, a mozgás okait a vizsgált test és környezete közötti *kölcsönhatásoknak* kell tulajdonítanunk. A kinetika célja a testek közti kölcsönhatások és a kialakuló mozgás kapcsolatának vizsgálata, azaz, hogy hogyan lehet megállapítani a testek tulajdonságaiból, kölcsönös helyzetükből, stb., hogy milyen mozgást fognak végezni.

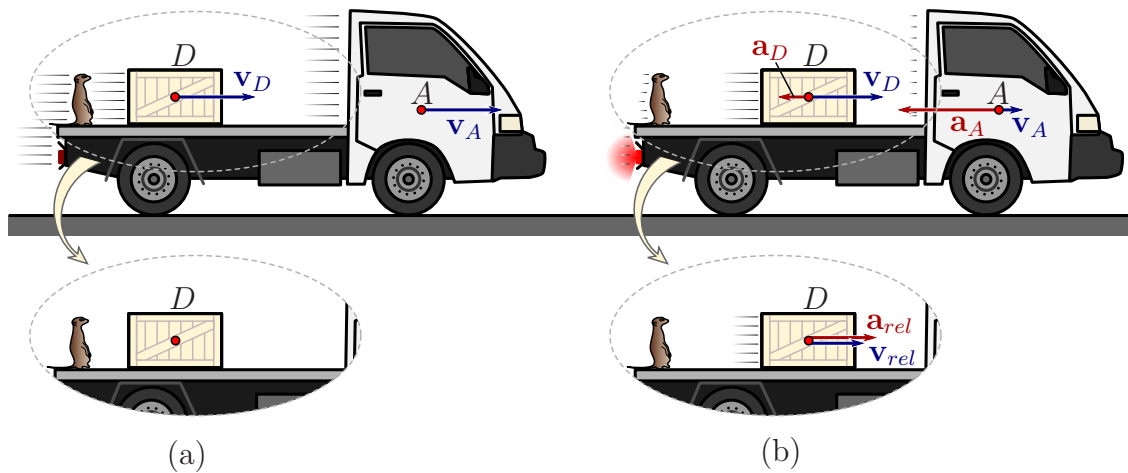
A kinematikához hasonlóan, az anyagi pont modelljéből indulunk ki és a bevezetett fogalmak, tételek alapján építjük fel az – anyagi pontok folytonos rendszereként elképzelhető – merev testek kinetikáját.

A kinetika törvényeinek felismerését évszázadokon át az a felületesen értelmezett tapasztalat akadályozta, hogy a testek általában maguktól nem mozognak. Ebből adódott az a téves következtetés, hogy a mozgás – tehát nullától különböző sebesség – fenntartásához más testek hatására van szükség. Galileo Galilei nyomán Isaac Newton ismerte fel, hogy nem a sebesség fenntartásához, hanem csak annak megváltoztatásához – tehát *gyorsulás* előidézéséhez – szükséges más testek hatása. Ezt a felismerést tükrözi a tehetetlenség törvénye:

2.1. tétel. A TEHETETLENSÉG TÖRVÉNYE. *Minden anyagi pont megmarad a nyugalom vagy az egyenes vonalú egyenletes mozgás állapotában, míg más testek hatásai mozgásállapotának megváltoztatására nem kényszerítik.* ♠

A tehetetlenség a testeknek az a tulajdonsága, hogy maguktól képtelenek megváltoztatni mozgásállapotukat: egy magára hagyott test gyorsulása tehát nulla. Mivel a valóságban csupán csökkenteni tudjuk más testek hatását, teljesen kiküszöbölni nem, ezért a tehetetlenség törvényét kísérletileg csak közelítőleg tudjuk igazolni. Például egy hasábot adott kezdősebességgel sík lapon elindítva, a felület tulajdonságait (érdesség, kenőanyag, stb.) megváltoztatva, befolyásolhatjuk a sebesség csökkenésének ütemét. Ebből arra lehet következtetni, hogy a mozgást a sík lap és a test közötti kölcsönhatás – a súrlódás – befolyásolja, és ha ezt teljesen meg tudnánk szüntetni, akkor a test változatlanul megtartaná kezdeti sebességét.

A tehetetlenség törvénye nem minden esetben teljesül. Például egy teherautó raklapjára tett doboz fékezéskor előrecsúszik, ahogy a 2.1 ábra mutatja. A teherautóhoz rögzített, gyorsuló (csökkenő sebességű) vonatkoztatási rendszerből nézve ez ellentmond a tehetetlenség törvényének, hiszen nem tudunk rámutatni olyan „más testekre”, melyek hirtelen előre húzzák a dobozt. Az út mellől szemlélve ugyanezt a szituációt, nem jutunk ellentmondásra:



2.1. ábra. (a) Állandó sebességgel haladó teherautó minden pontjának azonos a sebessége, ami megegyezik a rajta lévő doboz sebességével, azaz $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_D$. A teherautón lévő megfigyelő azt tapasztalja, hogy a doboz (relatív) sebessége és gyorsulása nulla. (b) A fékező teherautó sebessége lecsökken a talajról átadódó erők miatt, a doboz viszont megtartaná eredeti mozgásállapotát és előre csúszik. A teherautón lévő megfigyelő a doboz $\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{a}_D - \mathbf{a}_A$ relatív gyorsulását látja, de ezt nem tudja egy valódi test hatásaként magyarázni.

a doboz más testek hatása nélkül a tehetetlensége folytán megtartaná eredeti, a teherautó sebességével egyező sebességét. Valójában abszolút gyorsulása nem pontosan nulla, mert a raklap és a doboz közötti súrlódás némileg lassítja mozgását. A teherautó viszont a lassulása miatt (amit a talajról átadódó hatásnak tulajdoníthatunk) „lemarad” a dobozhoz képest.

Az eddigiek alapján arra következtethetünk, hogy nem mindegy, milyen vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk a mozgásokat, azok ugyanis kinetikai szempontból nem egyenértékűek. Kitétetettek azok a vonatkoztatási rendszerek, melyekben teljesül a tehetetlenség törvénye, mert ezekben a mozgásállapot megváltozása mindig kapcsolatba hozható más testek hatásával. A mozgó Földön végzett kísérletek arra utalnak, hogy itt nem teljesül teljesen pontosan a tehetetlenség törvénye (lásd 2.3.3 fejezet), ezért elvi kérdés, hogy vannak-e egyáltalán ilyen vonatkoztatási rendszerek. Erre a kérdésre Newton első törvénye ad választ:

2.2. tétel. Newton I. törvénye. *Léteznek olyan vonatkoztatási rendszerek, melyekben teljesül a tehetetlenség törvénye. Az ilyen rendszereket INERCIARENDSZEREKNEK nevezzük. ♠*

2.23. megjegyzés: A kinetika logikai felépítésének az ebben a fejezetben bevezetett Newton-törvények jelentik az alapját. A matematikában axiómának nevezik azokat az alapigazságokat, melyekből kiindulva egy elmélet minden eredménye levezethető, ezért a Newton-törvényeket gyakran Newton axiómáinak nevezik. Mindkét elnevezés használható.

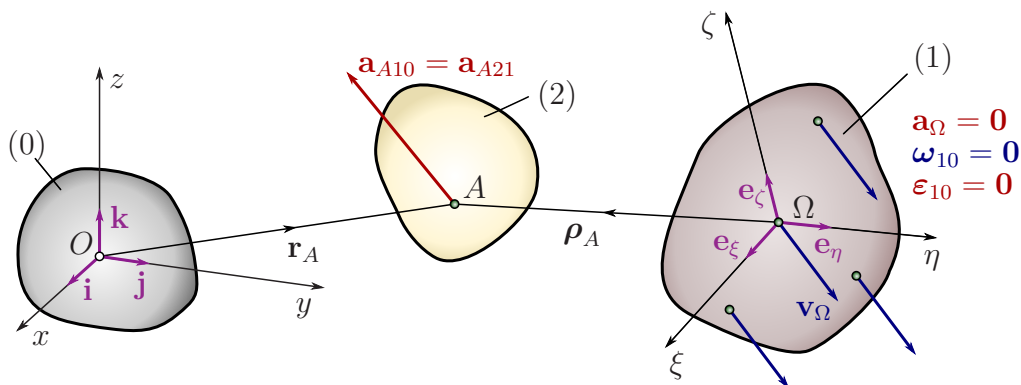
A „törvény” elnevezés azt hangsúlyozza ki, hogy a a természettudományokban nincsenek megkérdőjelezhetetlen alapigazságok: kiindulási állításaink csupán a valóság *modelljeire* igazak. A modellek érvényességi körét azonban lehetetlen egyértelműen körülhatárolni; azok használata során mindig mérlegelni kell, hogy az adott feladatban melyek azok a körülmények amik elhanyagolhatók és melyek fontosak. Ezzel szemben, a matematikában „axiómának” nevezett kijelentésekről sohasem vizsgálják, hogy azok igazak-e. Egy adott axióma helyett akár az ellenkezője is hozzávehető az axiómarendszerhez, az továbbra is érvényes rendszer marad – erre jó példa az Euklideszi és Bolyai-féle geometria axiómarendszere, melyek a párhuzamossági axiómát illetően teljesen ellentétes állítást tartalmaznak. Még ha a fentiekől eltekintünk

és csak azt követeljük meg egy axiómarendszerrel, hogy matematikailag kifogástalanul levezethetőek legyenek belőle a kinetika elméletének eredményei, akkor is további állításokkal kellene egészíteni a Newton-törvényeket (lásd például a 2.25. megjegyzést). Az összes részletkérdés tisztázása azonban feleslegesen bonyolítaná a téma tárgyalását; talán nem is lehet – de gyakorlatilag biztosan nem érdemes – olyan mechanikai axiómarendszert felépíteni, ami minimális számú egymástól független axiómából áll [8]. A dinamikához hasonlóan, a hőtanban a főtételek, az elektromosságban pedig a Maxwell-egyenletek fejezik ki azokat az alapigazságokat, melyekből az elmélet felépíthető – talán nem véletlen, hogy ezeket sem nevezik axiómáknak.

Ugyanakkor jogos az az igény is, hogy a dinamika legalapvetőbb összefüggéseit megadó állításokat megkülönböztessük a többi fizikai törvénytől az „axióma” elnevezéssel. A tudománytörténetben nagyon fontos szerepet játszott az a tény, hogy a mechanikát a geometriához hasonlóan, matematikai úton fel lehetett építeni – ezt is hangsúlyozzuk szóhasználatunkkal, ha Newton-axiómákról beszélünk. ♣

A tehetetlenség törvénye alapján elvileg ellenőrizhetjük, hogy egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszernek tekinthető-e.¹

2.3. tétel. *Ha találtunk egy inerciarendszert, akkor bármely, hozzá képest egyenes vonalú egyenletes haladó mozgást végző (tehát nem gyorsuló, nem forgó) vonatkoztatási rendszer is inerciarendszer.*



2.2. ábra. Két inerciarendszer – a (0) és (1) jelű testek –, melyek egymáshoz képest állandó sebességű haladó mozgást végeznek. A (2) test A pontjának gyorsulása mindkét rendszerből ugyanakkorának látszik.

Bizonyítás:

A tétel bizonyításához azt kell megmutatni, hogy mindkét vonatkoztatási rendszerben ugyanazt a gyorsulást mérhetjük. Tegyük fel például, hogy a (0) vonatkoztatási rendszer inerciarendszer. Ha egy másik, (1) jelű vonatkoztatási rendszer ehhez képest nem gyorsul, azaz $\mathbf{a}_{\Omega 10} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_{10} = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_{10} = \mathbf{0}$, akkor az 1.2.11 fejezet alapján a szállító gyorsulás is és a Coriolis-gyorsulás is nulla, tehát egy (2) jelű vizsgált test bármely kiválasztott A pontjának gyorsulása megegyezik a két rendszerben: $\mathbf{a}_{A20} = \mathbf{a}_{A21}$. ♠

¹A szakirodalomban gyakran a tehetetlenség törvényét nevezik Newton I. törvényének. A szerző álláspontja szerint azonban a tehetetlenség törvényét nem tekinthetjük a kinetika egyik alaptörvényének, a következő két okból: 1) Ekkor Newton II. törvényéből (2.5. tétel) következne az első törvény. 2) A tehetetlenség törvénye nem teljesül minden vonatkoztatási rendszerben és erről a korlátozásról nem is tesz említést.

Mielőtt rátérnénk más testek hatásainak vizsgálatára, tisztázni kell, hogy minden inerciarendszerben ugyanúgy írhatóak-e le a dinamikai jelenségek. Ezzel a kérdéssel a Galilei-féle relativitási elv foglalkozik:

2.4. tétel. GALILEI-FÉLE RELATIVITÁSI ELV. *Egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszerek a dinamika törvényei szempontjából teljesen egyenértékűek.* ♠

Ez az elv nem következik a relatív kinematika eredményeiből: kísérleti tapasztalatok alapján fogadjuk el, a Newton-törvényekhez hasonlóan.²

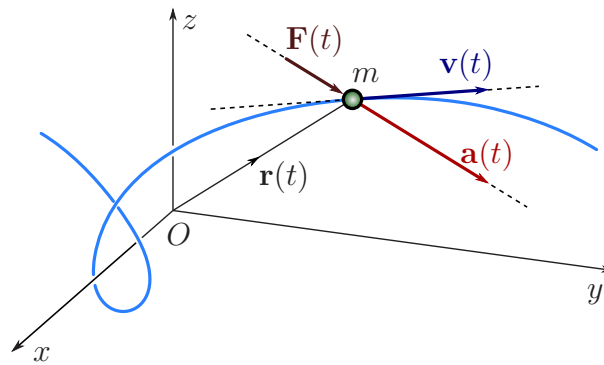
A műszaki gyakorlatban a Földet jó közelítéssel inerciarendszernek tekinthetjük (lásd a 2.3.3 fejezetet). Pontosabb számításokhoz az állócsillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszer használható inerciarendszerként. A további állításaink – hacsak nem jelezzük másként, mint például a 2.3.3 fejezetben – inerciarendszerben érvényesek. Azokat a vonatkoztatási rendszereket, melyek nem inerciarendszerek, *gyorsuló rendszereknek* nevezzük.

A következő lépésben tisztáznunk kell, hogy mit értünk „más testek hatása” alatt a tehetetlenség törvényében és milyen mozgást végez egy más testek hatása alatt álló anyagi pont. Erről szól Newton második törvénye:

2.5. tétel. Newton II. törvénye. *Egy anyagi pont gyorsulása egyenesen arányos a más testek által rá ható \mathbf{F} erő nagyságával, fordítottan arányos az anyagi pont m tömegével, és az erő vektor irányában következik be (2.3 ábra):*

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

♠



2.3. ábra. Newton II. törvényének szemléltetése.

Itt egyszerre két új fogalmat vezettünk be: az erő vektort, melynek mértékegysége N (Newton) és a tömeget, aminek a mértékegysége kg (kilogramm). A (2.1) egyenletben erő és tömeg kölcsönösen definiálják egymást. Az erő a más testekről átadódó hatást jellemzi, a tömeg pedig a vizsgált testet – de egyszerre két tulajdonságát: egyrészt az „anyag” mennyiségét, másrészt pedig azt, hogy a test hogyan viselkedik adott erővel jellemzett hatás során. A tömeg és az erő közül a tömeget választották alapfogalomnak és a kg-ot fizikai alapmennyiségnek. Ez azt jelenti, hogy a tömeg fogalmának definiálása helyett készítettek egy tömeg etalont, azaz definíció szerint 1 kg-os testet.

²Nemcsak a dinamikai jelenségekre, hanem minden fizikai jelenségre teljesül a Galilei-féle relativitási elv. Ez azonban nem triviális: a 19. század végén úgy tűnt, hogy az elektrodinamika törvényei különböznek az egymáshoz képest mozgó inerciarendszerekben. Einstein bizonyította be 1905-ben, hogy a relativitási elv kiterjeszthető az elektrodinamikai jelenségekre is.

2.24. megjegyzés: Az alapfogalmak jelentését mindenki többé-kevésbé érti, szabatos definíciójuk azonban nem lehetséges. A kinematika tárgyalása során is felhasználtunk két alapfogalmat, anélkül, hogy ott külön utaltunk volna rá: a tér és az idő fogalmát. A dinamika – vagy bármilyen más tudományág – felépítése során számos fogalmat, előfeltevést is (ki)használunk, anélkül, hogy ezeket pontosan megfogalmaznánk; gyakran ezeknek az előfeltevéseknek a megkérdőjelezése vezet új tudományágak kialakulásához.

Például magától értetődőnek tűnik, hogy az idő a feladatokban szereplő összes test számára ugyanolyan ütemben telik, ez azonban szigorúan véve nincs így: a speciális relativitáselmélet szerint az idő máshogy telik egymáshoz képest mozgó rendszerekben. Ezért be kell vezetni a sajátidő fogalmát, ami definíció szerint az, amit az adott rendszerrel együtt mozgó órák mutatnak. ♣

A tömeg etalon segítségével *mérési eljárást* lehet megadni az erő és a tömeg mérésére. A tömeg etalont különféle hatásoknak kiteve, a tapasztalt gyorsulások alapján megállapítható, hogy az egyes hatások mekkora erőknek feleltethetők meg. Ezután a már ismert hatásnak más testeket kiteve, meghatározható azok tömege. A kinetikában a tömeg az anyagi pontok egyetlen jellemző paramétere, ezért használatos a *tömegpont* elnevezés is.

2.25. megjegyzés: A fentiekben vázolt eljárás során a tömeg és az erő számos tulajdonságát tisztázni kell, például az alábbiakat:

- Tranzitivitás: ha három test tömegét vizsgáljuk, akkor $m_A = m_B$ és $m_B = m_C$ teljesülése esetén $m_A = m_C$.
- Tömeg megmaradás: zárt rendszer tömege állandó.³
- Additivitás: két test egyesítéseként kapott harmadik test tömege egyenlő a két test tömegének összegével.
- Az erőt alapvetően a kölcsönhatások gyorsító hatása alapján definiáljuk, de származtathatjuk az erő deformáción alapuló mérését is, tehát készíthetünk pl. rugós vagy nyúlásmérő bélyeg használatán alapuló erőmérőt. ♣

A (2.1) egyenlet általánosítható az **I**-vel jelölt *lendület* – vagy más néven *impulzus* – vektor bevezetésével:

2.6. definíció. Egy anyagi pont LENDÜLETE (*impulzusa*⁴) a tömegének és sebességének a szorzata:

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

A *lendület is vektormennyiség, mértékegysége* kg m/s. ♣

Az impulzus fogalmának segítségével felírható Newton második törvényének általánosabb alakja – maga Newton is az alábbihoz hasonló formában fogalmazta meg második törvényét.

³A relativitáselmélet szerint fénysebességhez közeli sebességű mozgások során a testek tömege nem tekinthető állandónak, hanem a sebességtől függően változik.

⁴A megadott elnevezések mellett *mozgásmennyiségnek* is nevezik az $m\mathbf{v}$ szorzatot. A lendület elnevezést Bresztovszky Béla professzor vezette be az 1920-as években, de akkor még a mozgási energia megjelölésére használta ezt a kifejezést [12].

2.7. tétel. *Newton második törvényének általánosabb alakja:*

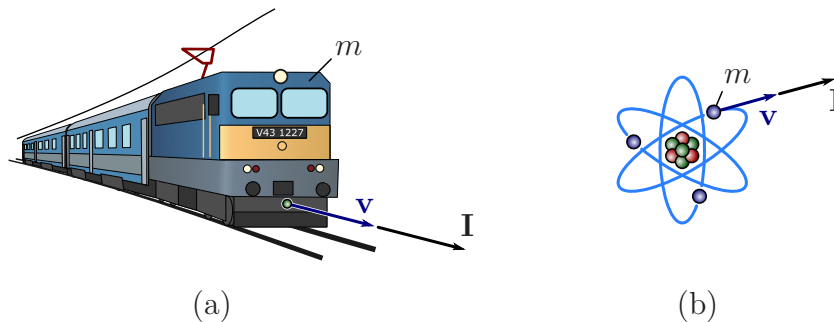
$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}. \quad (2.3)$$

Bizonyítás:

Mivel a Newton-törvényeket nem bizonyítjuk, csak azt kell belátnunk, hogy ez a kifejezés tényleg általánosabb mint az $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ alak. $\dot{\mathbf{I}} = \dot{m}\mathbf{v} + m\dot{\mathbf{v}}$, tehát állandó tömeg esetén $\dot{\mathbf{I}} = m\mathbf{a}$ miatt visszakapjuk a törvény elsőként kimondott (2.1) alakját. ♠

A Dinamika tárgy keretében ritkán foglalkozunk változó tömegű testek mozgásával, mert az ilyen feladatokban mindig szerepel valamilyen kontinuum (pl. folyadék, gáz, deformálható szilárd test), amit más tudományterületek tárgyalnak. A rakéták például a hajtóanyag kiengedésével csökkentik tömegüket. Változó tömegűnek tekinthetők az olyan mechanikai rendszerek is, melyekben egy kötél vagy lánc változó hosszúságú része ér le a talajra és így a mozgó rész tömege folyamatosan változik. A jegyzet további részében felteszük, hogy a vizsgált testek tömege állandó.

A lendület itt bevezetett fogalma a szó hétköznapi jelentésének megfelelően szemléletesen értelmezhető: egy nagy lendülettel rendelkező, azaz nagy tömegű és/vagy nagy sebességű testet (például sínen robogó vonatot, lásd 2.4 ábra) nehéz megállítani.

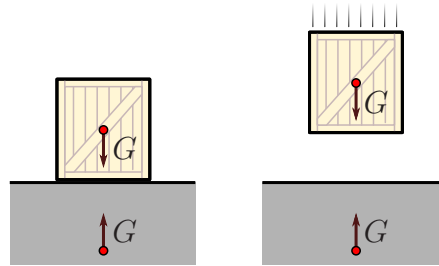


2.4. ábra. (a) Egy vonat lendülete – nagy tömege miatt – akkor is viszonylag nagy, ha lassan gördül. Sebességének rövid idő alatt történő megváltoztatásához nagy erőre van szükség. (b) Az elektron tömege nagyon kicsi, ezért a makrovilágban tapasztalt erőknél sokkal kisebb erővel is gyorsan megváltoztatható az impulzusa, akkor is, ha a sebessége nagyon nagy.

Newton első két törvénye alapján már meg tudjuk mondani, hogy *egy* adott külső hatás következtében hogyan mozog *egy* anyagi pont. A gyakorlati feladatokban azonban általában több test mozgását szükséges egyszerre vizsgálni. A több testből álló mechanikai rendszerekben fellépő *kölcsönhatások* jellegéről szól Newton harmadik törvénye.

2.8. tétel. Newton III. törvénye (*hatás-ellenhatás, akció-reakció törvénye*). *Két anyagi pont kölcsönhatása során a két testre egymásról átadódó erők azonos nagyságúak és ellentétes értelműek.* ♠

Az erők tehát nemcsak egy irányú hatást fejeznek ki, hanem *kölcsönhatást* jellemeznek – úgy is mondhatjuk, hogy mindig „párosával” lépnek fel.



2.5. ábra. Talajra tett dobozra illetve szabadon eső dobozra ható nehézségi erő és annak a Földre ható ellenereje.

2.26. megjegyzés: Newton harmadik törvényéhez gyakran hozzátesszük azt is, hogy a két erőnek azonos hatásvonalúnak is kell lennie (azaz ún. *centrális erők*). A gépészmérnöki gyakorlatban használt modellekben ez általában teljesül is. A szilárd testek részecskéi között ható erők esetén azonban nem mindig van így. Például két egymásra merőlegesen álló, végtelenül kicsi mágneses dipólus (gondolhatunk két mágnesrúdra) kölcsönhatása során az erők ellentétes értelműek ugyan, de különböző hatásvonalúak, tehát erőpárt alkotnak. Ugyanakkor a két mágnes koncentrált nyomatókat is gyakorol egymásra és így a kölcsönhatásban a nyomatók összege nulla. A tapasztalat azt mutatja, hogy egy adott kölcsönhatásban a kialakuló erőrendszerek összegzett nyomatéka mindig nulla. Ezt a tapasztalati törvényt ki fogjuk használni az anyagi pontrendszerek kinetikájának a tárgyalása során (lásd a 2.74. követelményt). ♣

Nagyon fontos megjegyezni, hogy a Newton harmadik törvényében szereplő erők *két különböző testre hatnak*. Nem szabad ezt a szituációt összekeverni két, ugyanazon testre ható erő egyensúlyával!

2.9. példa: A 2.5 ábrákon egy talajon nyugvó és egy szabadon eső doboz látható. Mire hat a dobozra ható G nehézségi erő ellenereje e két esetben?

Megoldás:

A nehézségi erő a Földnek a dobozra kifejtett vonzó hatását jellemzi. Tehát Newton III. törvénye értelmében a dobozra ható nehézségi erő ellenereje a *Földre* ható, ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erő.

A doboz egyensúlyának feltétele, hogy a talajról a nehézségi erővel megegyező nagyságú, de ellentétes irányú F_N normálerő (vagy tartóerő) adódjon át a dobozra; ezt a 2.9 ábrán illusztráljuk. Azonban a normálerő és a nehézségi erő egyaránt a dobozra hat, ezért ezek nem alkothatnak erő-ellenerő párt. Természetesen a normálerőnek is megvan az ellenereje: a *talajra* ható súlyerő⁵.

Szabadon eső test esetében (2.5 ábra) világosan látszik, hogy a nehézségi erő ellenereje csak a Földre hathat. Mivel ebben az esetben a doboz nincs kölcsönhatásban a talajjal, mind a normálerő, mind a súlyerő nulla. Tehát a szabadon eső test a *súlytalanság állapotában* van. ♠

Az eddigiek alapján már az olyan feladatok is tárgyalhatók, melyekben két anyagi pont egy-egy erővel hat a másikra. Mielőtt továbblépnénk tetszőleges számú, egymással kölcsönható anyagi pont viselkedésének vizsgálatára, tisztázni kell a *külső* és *belső* erők, erőrendszerek fogalmát.

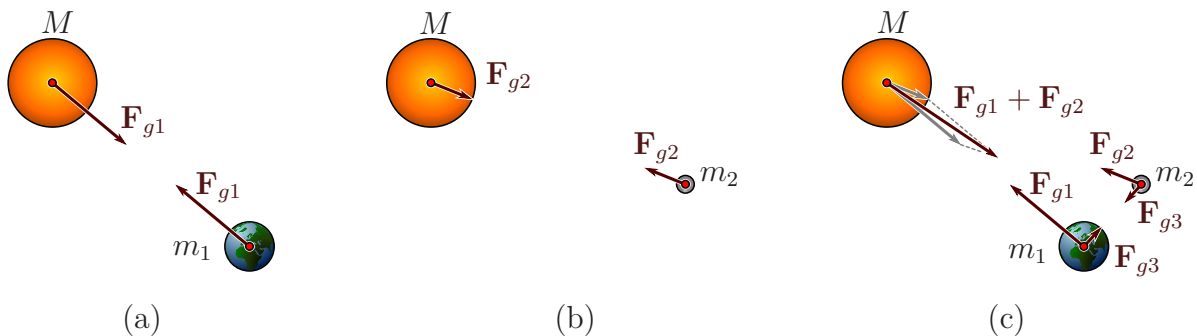
⁵A súly az az erő, amivel egy test az alátámasztására vagy a felfüggesztésére hat. Ezzel kapcsolatban lásd a 2.33. megjegyzést.

A mechanikai modellek felépítése során az adott feladat szempontjából fontos testek mozgásának vizsgálatára korlátozódunk. Ezek a testek alkotják a vizsgált *mechanikai rendszert*, aminek az elemeire alkalmazzuk a Newton-törvényt. A mechanikai rendszer egyes elemei között ható erőket *belső erőknek* nevezzük, ezek a *belső nyomatékokkal* együtt alkotják a *belső erőrendszert*.

A valóságban persze mindig vannak kölcsönhatások a kiválasztott rendszer és a környezet között, de ezek egy része elhanyagolható. A rendszeren kívüli testekre gyakorolt hatásokkal definíció szerint nem foglalkozunk, de az is a modellezés része, hogy a környezet hatásai közül mit veszünk figyelembe. A környezetben található testekről a rendszer elemeire ható erők/nyomatékok alkotják a *külső erőrendszert*. A fentiek szerint tehát Newton harmadik törvénye elsősorban a belső erőkről szól.⁶

Rátérhetünk a legáltalánosabb eset vizsgálatára, amikor tetszőleges számú egymással kölcsönható anyagi pont mozog, tetszőleges számú külső erő hatása alatt. Ennek az esetnek a tárgyalásához azt kell még tisztázni, hogy *egy* anyagi pont *több* adott erő hatására hogyan viselkedik. Ezzel kapcsolatos a – Newton IV. törvényének is nevezett, de nem Newton, hanem Stevin (1548-1620) által felfedezett – szuperpozíció elv.

2.10. tétel. Newton IV. törvénye, szuperpozíció elv. *Egy anyagi pontra ható erők együttes hatása egyenértékű a külön-külön ható erők vektori eredőjének hatásával.* ♠



2.6. ábra. A szuperpozíció elv szemléltetése. (a) Az M tömegű Napra az m_1 tömegű Föld F_{g1} gravitációs erőt fejtene ki, ha semmilyen más test nem lenne a közelben. (b) Az m_2 tömegű Hold egymagában F_{g2} gravitációs erővel hatna a Napra. (c) A Föld és a Hold együttes hatása egyenértékű az $F_{g1} + F_{g2}$ eredő erő hatásával, azaz a Napra gyakorolt hatásukat nem befolyásolja, hogy közöttük is van kölcsönhatás.

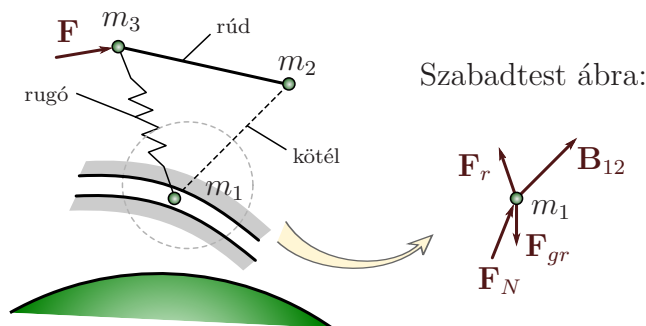
A szuperpozíció elv nem következik abból, hogy az erőt vektorként kezeljük. Newton első és második törvénye szerint mindig lehet találni egy (vagy több) másik testet, ami a vizsgált testre ható erő „forrása”. Ezek a testek egymással is kölcsönhatásba kerülhetnek, ezért logikailag nem zárható ki, hogy más nagyságú vagy irányú impulzusváltozást okoznak, ha nem csak „egyedül” vannak a vizsgált test közelében, hanem a többi testtel együtt. A szuperpozíció elv azt fejezi ki, hogy ha egymás után több test is kölcsönhatásba kerül a vizsgált anyagi ponttal, ezek a testek *egymás hatását nem befolyásolják* (2.6 ábra). Ezért a szuperpozíció elvet az *erőhatások függetlenségének elveként* is szokták emlegetni.

⁶Természetesen kiszámolható a külső erők ellenereje is, például hogy mekkora erővel hat egy rögzített lejtőn lecsúszó test a lejtőre. Bár a kiválasztott mechanikai rendszeren kívüli testek dinamikai viselkedését definíció szerint nem vizsgáljuk, mégis lehet gyakorlati jelentősége egy ilyen számításnak, például a pálya szilárdsági méretezése során.

2.27. megjegyzés: Newton II. törvénye csak inerciarendszerben érvényes, a III. és IV. törvény viszont vonatkoztatási rendszertől független. ♣

2.2. Aktív erők és kényszererők

A különféle kölcsönhatások rendkívül bonyolult fizikai folyamatokon keresztül valósulhatnak meg. A mechanikában azonban nem foglalkozunk a kölcsönhatások természetével; megelégszünk azzal, hogy jellemezhetők – modellezhetők – egy megfelelő erő vektorral. A mechanikai modellekben az erők két különböző szerepben fordulnak elő: lehetnek *aktív erők* vagy *kényszererők* (lásd 2.7 ábra).



2.7. ábra. Példa az erők (erőhatások) csoportosítására. A vizsgált mechanikai rendszer a Föld közelében elhelyezkedő anyagi pontrendszer. Ennek m_1 tömegű tagjára ható \mathbf{F}_{gr} gravitációs erő külső aktív erő, mert a vizsgált mechanikai rendszeren kívüli testről adódik át és erőtvényből származtatható. A test kényszerpályán tartásához szükséges \mathbf{F}_N normálerő külső kényszererő, míg az m_2 testről a feszes kötélen keresztül átadódó \mathbf{B}_{12} erő belső kényszererő, mert a pontrendszeren belüli testről adódik át és azt a kényszert biztosítja, hogy a két test távolsága állandó. Az m_3 testről a rugón keresztül átadódó \mathbf{F}_r rugóerő belső aktív erő, mert erőtvény alapján határozható meg nagysága és iránya. Az m_3 testre ható \mathbf{F} erő külső aktív erő.

Aktív erők. Az aktív erőknek két alapvető típusát különböztetjük meg.

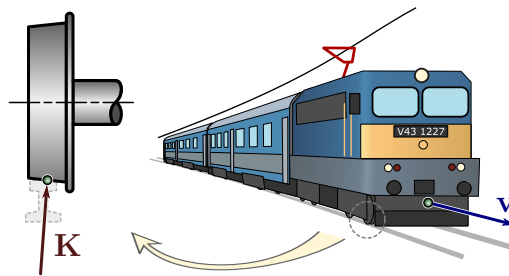
1. Ide tartoznak a vizsgált mechanikai rendszer környezetének hatását jellemző, a rendszer állapotától független – de az időtől akár adott módon függő – *adott külső erők*: $\mathbf{F}(t)$. Az ilyen erő vektorok vagy meg vannak adva a vizsgált problémában, vagy az a feladat, hogy keressük meg azt az aktív erőt, ami a megkívánt mozgásállapot biztosításához szükséges. Ilyen a 2.7 ábrán látható, m_3 tömegű testre ható \mathbf{F} erő, melynek sem erőtvényét, sem „forrását” (hogy milyen másik test hatása) nem ismerjük.
2. Azokat az erőket is az aktív erők közé soroljuk, melyek nagyságát és irányát meg tudjuk adni a kölcsönhatásban részt vevő testek tulajdonságaitól és állapotától – pl. \mathbf{r} relatív helyzetétől vagy \mathbf{v} relatív sebességétől – függő ún. *erőtvény* segítségével. Az erőtvények általában $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ alakúak.

Ilyen például az m_1 tömegű anyagi pont által az m_2 tömegűre ható *gravitációs erő*: $\mathbf{F}_{gr} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ (itt az \mathbf{r} vektor m_1 -től m_2 -hez mutat, γ pedig a gravitációs állandó), és a *nehézségi erő*: $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$. További, a gépészmérnöki gyakorlatban fontos,

erőtörvénnyel megadható erők a *rugóerő*: $F_r = -kx$ (ahol k a rugómerevség, x a rugó deformációját megadó koordináta) és a *viszkózus csillapító erő*: $F_d = -c\dot{x}$ (ahol c a viszkózus csillapítási tényező, \dot{x} pedig az x koordináta deriváltjaként értelmezett sebesség, pl. egy lengéscsillapító két végpontja közti sebességkülönbség).

Természetesen a fenti két eset kombinációja is előfordulhat. Ebben a legáltalánosabb esetben $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ alakban adható meg a ható aktív erő.

Kényszererők. A testekre ható erőknek általában csak egy részét lehet a gyakorlatban erőtvényekből – tehát a testek kölcsönös helyzete és sebessége alapján – kiszámolni. Például egy vonat kerekére a sínről átadódó, az érintkező felületre merőleges irányú erőkomponens elvileg kiszámolható lenne a sín és a kerék deformációja (azaz kölcsönös helyzetük) alapján, de bonyolultsága miatt a gyakorlatban nem célravezető ez a megközelítés (2.8 ábra). Ehelyett azt használják ki az ilyen jellegű feladatokban, hogy a sín bizonyos korlátozásokat ad a mozgásra vonatkozóan, tehát kényszernek tekinthető (lásd az 1.23. definíciót). A sínről átadódó ún. kényszererőt a kényszer által megadott feltételek és az aktív erők figyelembevételével lehet kiszámolni a Newton-törvények alapján.



2.8. ábra. A vonat kerekeinek sínen tartását a **K** kényszererő biztosítja.

2.11. definíció. A KÉNYSZERERŐK azok az erők, melyek a kényszerfeltételek teljesülését biztosítják. Ezek az erők függenek a testre ható aktív erőktől és nem határozhatók meg csupán a vizsgált test állapota (pontjainak helye, sebességállapota, stb.) alapján.

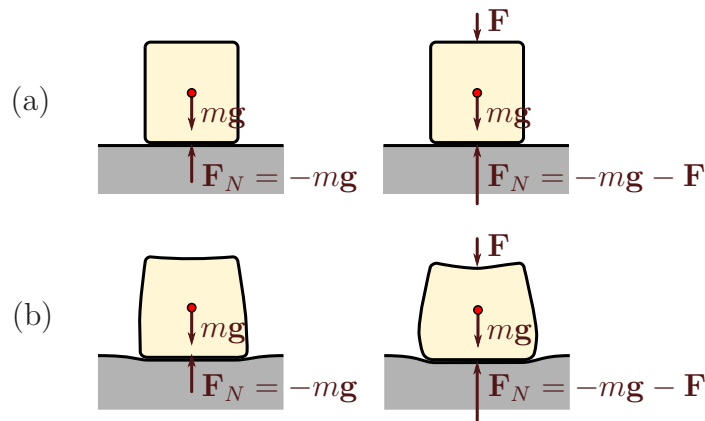


Emlékeztetünk arra, hogy a kényszerek felvétele a modellalkotás része, hiszen a valóságban csak közelítőleg teljesülnek a kényszerfeltételek. Ez a közelítés eredményezi azt, hogy egy adott testre ható kényszererők függenek az aktív erőktől, azaz *nem teljesül rájuk az erőhatások függetlenségének elve*. Aktív erők nélkül ugyanis a kényszererők általában nem is lépnek fel, tehát nem értelmezhető a külön-külön ható kényszererők hatása.

Ez nem érinti az erők vektori összegzését; természetesen kiszámítható az aktív- és kényszererő vektorok vektori eredője, és ezt az eredő vektort használhatjuk Newton II. törvényében. A kényszererők és az aktív erők közötti kapcsolatot ugyanis éppen Newton II. törvénye adja meg. Emögött az az elképzelés áll, hogy a kényszereket helyettesíthetjük olyan aktív erőkkel, melyek a kényszerfeltétellel összeférő mozgást okoznak, Newton II. törvényének megfelelően.

2.28. megjegyzés: A 2.9/a ábrán szereplő, vízszintes, sík talajon nyugvó hasábra mg nehézségi erő és – az egyensúly feltételéből⁷ következően – ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú $\mathbf{F}_N = -mg$ normálerő hat. A normálerő kényszererő: azt a kényszert biztosítja, hogy a hasáb nem hatol be a talajba. Ha a hasábot további \mathbf{F} erő nyomja a talaj felé (például egy másik hasábot teszünk a tetejére), akkor a normálerő megnő, pedig a hasáb és a talaj állapota látszólag nem változik. A normálerő (mint kényszererő) tehát az aktív erőktől függetlenül nem értelmezhető.

A talajról átadódó erőt aktív erőként is modellezhetjük, ha figyelembe vesszük az érintkező testek rugalmas deformációját, a 2.9/b ábrának megfelelően. Ez esetben a talajra szorító erő növekedésével nő a talaj és a test deformációja is, azaz az egyensúly feltételétől függetlenül, a deformációból (azaz a hasáb és a talaj kölcsönös helyzetéből) számítható a talajról átadódó erő. Egy ilyen, pontosabb modell segítségével kapott normálerő már aktív erő és értelmezhető az egyéb erőktől függetlenül. ♣



2.9. ábra. Az aktív erő és a kényszererő fogalma közti eltérés illusztrációja. Az (a) ábrákon ábrázolt esetekben nem modellezzük a talaj és a hasáb deformációját, ezért a talajról átadódó \mathbf{F}_N erőt kényszererőnek tekintjük: annak hatását önmagában nem értelmezzük, nagyságát csak az egyensúly feltételéből határozhatjuk meg. A (b) ábrákon látható esetekben azonban figyelembe vesszük az érintkező testek deformációját, amiből elvileg számítható a (most már aktívnek tekinthető) \mathbf{F}_N erő, a hasábra ható többi erőtől függetlenül.

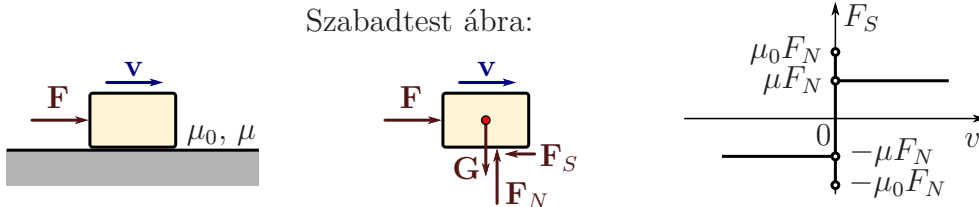
A kényszerek általában a vizsgált testnek egy másik testtel (pl. kényszerfelülettel) való érintkezésével kapcsolatosak. Ilyenkor úgy is tekinthetünk a kényszererőkre, hogy a vizsgált test mozgása szempontjából azok tökéletesen helyettesítik a kényszert biztosító testet. Például egy asztal felületén az \mathbf{F}_A aktív erők hatása alatt mozgó anyagi pont ugyanolyan mozgást végezne akkor is, ha az asztalt az arról átadódó kényszererőkkel helyettesítenénk. Csúszási súrlódásos kapcsolat esetén az így értelmezett kényszererő nemcsak a kényszerfeltételt biztosítja, hanem olyan komponense is van, mely a kényszerfelülettel párhuzamos.

A csúszási súrlódási erő önmagában nem biztosít semmilyen kényszert és értéke megadható képlettel:

$$\mathbf{F}_S = -\mu|\mathbf{F}_N|\frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (2.4)$$

⁷Egyensúlyban $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, ami Newton II. speciális esete, Newton IV. figyelembevételével.

ahol μ a csúszási súrlódási tényező és $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ a vizsgált test relatív sebessége a másik testhez képest, amin csúszik (2.10 ábra). Ennek ellenére a fenti képletet nem tekintjük erőtvénynak, mert a testeket összeszorító \mathbf{F}_N normálerőt nem tudjuk kifejezni a kölcsönhatásban résztvevő testek tulajdonságai alapján. Ebben az esetben nem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy a normálerő és a súrlódási erő egymással szoros kapcsolatban vannak, ezért célszerű ezek *eredőjét* tekinteni kényszererőnek. A kényszererő normális



2.10. ábra. Vízszintes kényszerpályán csúszó hasáb, annak szabadtest ábrája és a súrlódási erő sebességfüggését megadó karakterisztika. Ez utóbbiból látszik, hogy nulla sebesség (azaz tapadás) mellett a súrlódási erő értéke $-\mu_0 F_N$ és $\mu_0 F_N$ közé esik. A tapadási súrlódási erő konkrét értékét csak a hasábra ható többi erő ismeretében lehet meghatározni, Newton II. törvénye alapján.

komponense biztosítja azt a kényszerfeltételt, hogy a két test nem hatol egymásba. A súrlódásos kényszerek különlegesek abból a szempontból, hogy ezek esetében olyan kényszererő komponens – csúszási súrlódási erő – is fellép, ami nem szükséges a kényszerfeltétel fenntartásához. Ezért a csúszási súrlódással járó kényszereket *nem ideális kényszernek* nevezzük. Az ideális kényszerek fogalmát a 2.37. definícióban pontosítjuk.

2.29. megjegyzés: Ha egy kényszer nem ideális, akkor a súrlódási és normálerő kapcsolata miatt a felülettel párhuzamos és arra merőleges gyorsulás- és erőkomponensekre felírt $ma_{\parallel} = F_{\parallel}$ és $ma_{\perp} = F_{\perp}$ alakú egyenletek egymással összefüggővé válnak, ami – különösen sok testből álló mechanikai rendszerek esetében – megnehezítheti a feladatok megoldását, mint például a 2.62. példában. ♣

A *tapadási* súrlódási erővel kapcsolatban nem lépnek fel a fent vázolt problémák, hiszen abban az esetben a két erőkomponens külön-külön kényszererőként kezelhető, melyek közül az \mathbf{F}_N normálerő az érintkezés síkjára merőleges, az \mathbf{F}_S súrlódási erő pedig az azzal párhuzamos mozgást gátolja meg. Ez a két erő egymástól független, hiszen tapadás során a súrlódási erő nagysága az egyensúly feltételétől függően végtelen sokféle értéket vehet fel (ugyanúgy, mint a normálerő). Míg a normálerő értékére általában nem szabunk meg felső határt – bár a valóságos szerkezeteknél nyilván nem lehet minden határon túl növelni – a tapadási súrlódási erővel kapcsolatban kikötjük, hogy

$$|F_S| \leq \mu_0 |F_N|, \quad (2.5)$$

ahol μ_0 a tapadási súrlódási tényező.

2.30. megjegyzés: A kényszererők függenek az aktív erőktől, de ebből nem következik az, hogy az egyes kényszerekhez tartozó kényszererőket külön-külön ki tudjuk számolni a dinamika modelljeit használva. Merev rudakkal összekötött anyagi pontok vagy merev testek esetében jól ismert a *statikai határozatlanság* fogalma. Például egy három támaszú síkbeli tartó esetében az egyes alátámasztásokban ébredő kényszererő komponensek csak a tartó

rugalmas deformációjának figyelembevételével számíthatók ki. Ehhez hasonlóan, „dinamikai határozatlanság” léphet fel több kényszer együttes hatása alatt álló merev testek mozgásának vizsgálata során is. A statikai határozatlanság elkerülése érdekében a csapágyazott tengelyek csapágyait úgy alakítják ki, hogy közülük csak az egyik tud felvenni axiális (tengely irányú) terhelést (lásd 3.5.4 fejezet). ♣

2.3. A dinamika alaptétele anyagi pontra és annak alkalmazása anyagi pontrendszerre

Ebben a fejezetben a Newton-törvények alkalmazásának módszereit mutatjuk be. Ehhez első lépésben kimondjuk a dinamika alaptételét, ami egyetlen anyagi pont mozgására vonatkozóan foglalja össze Newton I., II., és IV. törvényének állításait. Ezt kiegészítve Newton III. törvényével, felírhatók az anyagi pontrendszerek együttes viselkedését leíró egyenletek. Az egyenletrendszer felírása során jelentős segítséget jelent, ha ún. szabadtest ábrákat rajzolunk, így ki fogunk térni ezek felajzolásának alapelveire is. Ezek után általánosítjuk a dinamika alaptételét úgy, hogy gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben is alkalmazható legyen. A fejezet a mozgás folyamatának leírásával kapcsolatos gondolatokkal zárul.

2.3.1. A dinamika alaptétele

Egy anyagi pont mozgásának törvényszerűségeit a dinamika alaptétele foglalja össze.

2.12. tétel. A DINAMIKA ALAPTÉTELE (ALAPTÖRVÉNYE) *anyagi pontra:*
Inerciarendszerben (Newton I.)

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F} \quad (\text{Newton II.}), \quad (2.6)$$

ahol $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j$ a vizsgált anyagi pontra ható erők vektori eredője, mely a környezetében lévő n darab másik testről adódik át (Newton IV.). ♠

Ha a dinamika alaptételét kiegészítjük Newton III. törvényével is, akkor tetszőleges számú anyagi pont (anyagi pontrendszer) együttes viselkedése is vizsgálható. Ebben az esetben célszerű megkülönböztetni az anyagi pontrendszer pontjai között ható *belső* és a rendszeren kívüli testek hatásaként jelentkező *külső* erőket. Ha csak egy darab anyagi pont alkotja a vizsgált mechanikai rendszert, akkor a rá ható erők mind külső erőnek számítanak.

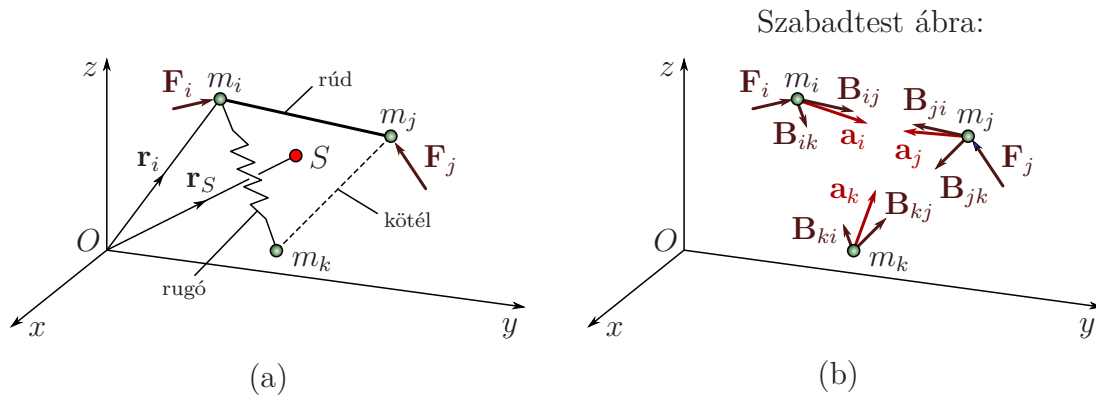
Vizsgáljuk n darab kölcsönható anyagi pont esetét, ahol az i -edik pont tömege m_i , gyorsulása \mathbf{a}_i és a rá ható *külső* (tehát nem a többi tömegpontról átadódó) erők eredője \mathbf{F}_i ! A 2.11 ábrán látható szabadtest ábrák alapján minden egyes anyagi pontra felírható a dinamika alaptétele:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij}, \quad i = 1 \dots n, \quad (2.7)$$

ahol \mathbf{B}_{ij} az i -edik testre a j -edik test által ható *belső* erő. Newton III. miatt

$$\mathbf{B}_{ij} = -\mathbf{B}_{ji}, \quad i, j = 1 \dots n. \quad (2.8)$$

Inerciarendszerben egy magára hagyott test nem gyorsulhat, ezért egyik anyagi pont sem fejthet ki erőt saját magára, azaz $\mathbf{B}_{ii} = \mathbf{0}$, $i = 1 \dots n$. Továbbá, mivel a (2.8) egyenletrendszerben az indexek felcserélése lényegében ugyanarra az egyenletre vezet, ezért nem n^2 , csak



2.11. ábra. (a) $n = 3$ pontból álló anyagi pontrendszer. (b) Az egyes anyagi pontok szabadtest ábrái.

$n(n - 1)/2$ független egyenlet írhatunk fel a belső erőkre. A (2.7) egyenletekkel együtt n anyagi pont esetén ez maximum $(n^2 + n)/2$ független vektoregyenletet jelent; például 3 tömegpont esetében 6, 4 tömegpont esetében pedig 10 egyenletet. A gyakorlati problémák nagy részében rendkívül bonyolulttá válhat az egyenletek felírása, ezért javasolunk egy szisztematikus eljárást, mely az ún. szabadtest ábrák felrajzolásán alapul.

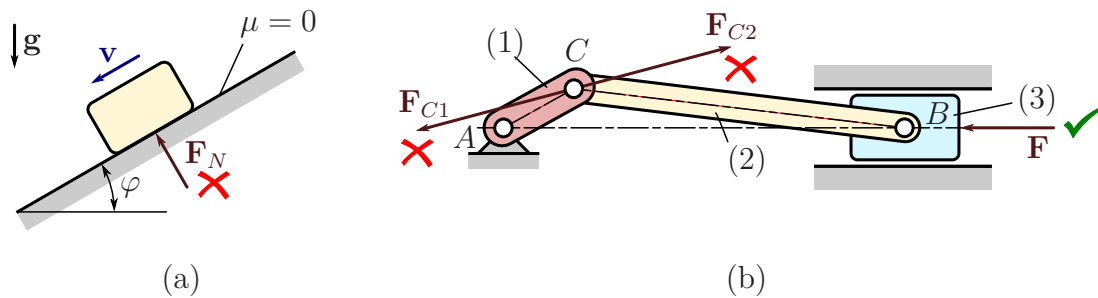
2.3.2. Szabadtest ábrák

A dinamika alaptételének felírását és a feladatok megoldását megkönnyíti, ha a vizsgált testeket lerajzoljuk és feltüntetjük a dinamika alaptételében szereplő mennyiségeket: az erőket és a koncentrált erőpárokat (merev test esetén; lásd 3.2 fejezet), valamint a gyorsulásállapot jellemzőit.

Fontos, hogy Newton III. törvénye értelmében a testre ható kényszererővel megegyező nagyságú és hatásvonalú, de ellentétes értelmű erő hat a kényszert biztosító testre – lejtőn lecsúszó test esetében a lejtőre. Tehát ha a kényszert – a lejtőt – is berajzolnánk az ábrába, akkor elvileg nem lehetne eldönteni, hogy a berajzolt erő a testre vagy a lejtőre hat-e (2.12/a ábra). Még hangsúlyosabb ez a probléma, ha anyagi pontok vagy merev testek rendszere szerepel a vizsgált feladatban: az egyes testek között ható, berajzolt belső erőkről nem tudnánk eldönteni, hogy a két test közül melyikre hat. Egy ilyen, félreérthető jelölést mutat a 2.12/b ábra.

A félreértések elkerülése érdekében a szerkezeti ábrákon csak a külső erőket szokás feltüntetni – ilyen a 2.12/b ábrán szereplő, (3)-as testre ható \mathbf{F} erő –, az összes erő komponens megfelelő figyelembevételéhez pedig szabadtest ábrákat szoktak rajzolni (lásd 2.13 és 2.14 ábrák):

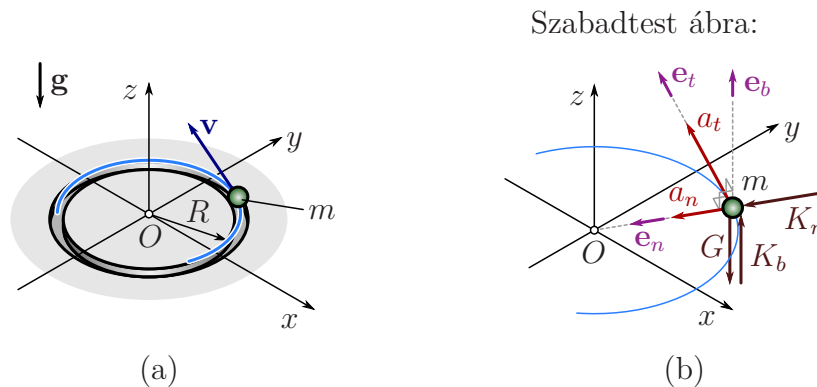
2.13. definíció. SZABADTEST ÁBRÁK. *A feladatban szereplő összes, vizsgált testet a környezetéből kiragadva, különálló ábrákon lerajzoljuk. Egy-egy ilyen ábrába berajzoljuk a külső aktív erőket és nyomatókat. A kényszerkapcsolatok helyett a kényszererőket, az adott ábrán szereplő testen kívüli többi test helyett az azokról átadódó belső erőket rajzoljuk be. Feltüntetjük a dinamika alaptételének felírásához szükséges kinematikai jellemzőket is, melyek anyagi pont esetén a gyorsulás, merev test esetén a súlypont \mathbf{a}_S gyorsulása, az ε szöggyorsulás és az ω szögsebesség (síkmozgás során a szögsebesség feltüntetésétől eltekinthetünk).* ♣



2.12. ábra. Példák a mechanikai rendszer elemei között ható erő FÉLREÉRTHETŐ JELÖLÉSÉRE. Az (a) ábra alapján nem egyértelmű, hogy az \mathbf{F}_N erő a lejtőre vagy a lecsúszó hasábra hat-e. (b) Az \mathbf{F}_{C1} és \mathbf{F}_{C2} erőkről nem derül ki az ábra alapján, hogy külső vagy belső erőkről van-e szó illetve hogy melyik erő melyik testre (az (1)-es testre, a (2)-es testre, esetleg a C csuklóra) hat. Ezért szerkezeti ábrákon csak külső aktív erőket tüntetünk fel – ilyen a (3)-as testre ható \mathbf{F} erő.

A szabadtest ábra rajzolása során alkalmunk adódik annak végiggondolására, hogy a vizsgált test mely más testekkel van kölcsönhatásban. Minden kölcsönhatást megfelelő erőként vagy erőpárként kell feltüntetnünk az ábrán.

2.14. példa: Egy m tömegű anyagi pont R sugarú körpályán mozog egy vályúban a vízszintes síkon, állandó nagyságú v sebességgel (2.13/a ábra). Mekkora a testre ható kényszererő komponensei?



2.13. ábra. (a) Körpályán mozgó anyagi pont. (b) A feladathoz tartozó szabadtest ábra.

Megoldás:

A dinamika alaptétele értelmében tudjuk, hogy a ható erők az anyagi pont gyorsulásával vannak kapcsolatban. Egyrészt, a $v = \text{állandó}$ feltételből következik, hogy a tangenciális gyorsulás nulla: $a_t = 0$. Másrészt pedig a feladat szövegéből egyértelmű, hogy a mozgás egy kényszerfeltételnek megfelelően történik: a test körpályán mozog. Körpályán való mozgás esetén a normális gyorsulás:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (2.9)$$

Ez a kifejezés is kényszerfeltételnek tekinthető, hiszen a körmozgás feltételéből vezethető le (lásd 1.15. példa). Azt is tudjuk, hogy a mozgás a vízszintes síkon történik, ezért a függőleges irányú (azaz a pálya szempontjából binormális irányú) gyorsulás nulla.

A dinamika alaptételének alkalmazásához szabadtest ábrát kell rajzolni (még ilyen egyszerű feladat esetében is!). Az ábra felrajzolása során azt kell figyelembe vennünk, hogy a vizsgált anyagi pont csak a Föld nehézségi erőterével és a kényszerpályával van kölcsönhatásban (lásd 2.13/b ábra).

A feladat megoldásához a dinamika alaptételének komponens egyenleteit írjuk fel. Célszerű a pályához illeszkedő, tangenciális, normális és binormális egységvektor irányában felvenni a koordináta-rendszer tengelyeit.

$$ma_t = 0, \quad (2.10)$$

$$ma_n = K_n \quad (2.11)$$

$$0 = K_b - mg \quad (2.12)$$

A második egyenletből a kényszererő normális komponense $K_n = \frac{mv^2}{R}$, a függőleges (binormális) komponense $K_b = mg$, az első egyenlet szerint pedig ismét azt kapjuk, hogy a tangenciális gyorsulás nulla. ♠

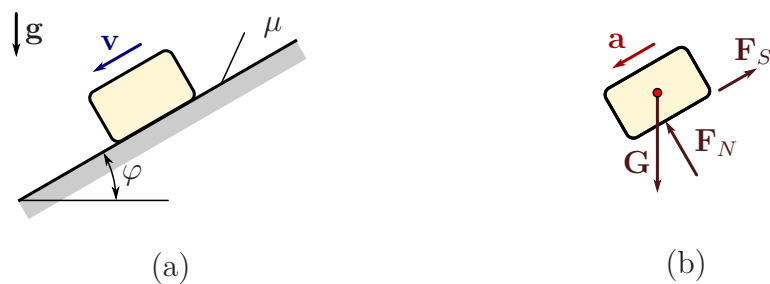
Praktikus tanácsok a szabadtest ábrák rajzolásával kapcsolatban:

- Többféle módja is van a szabadtest ábra rajzolásnak. A cél minden esetben az, hogy az ábra segítsen a dinamika alaptétele komponens egyenleteinek felírásában.
- Egyszerű feladatok esetében, amikor könnyen átlátható az erő- és gyorsulásvektorok iránya, célszerű ezeket a fizikai érzékünknek megfelelő irányú vektorokként berajzolni, ahogy az alábbi példa mutatja.

2.15. példa: *Rajzoljuk meg egy lejtőn lecsúszó hasáb szabadtest ábráját!*

Megoldás:

Az összes, hasábra ható erő (\mathbf{F}_S súrlódási erő, \mathbf{F}_N normálerő és \mathbf{G} nehézségi erő) iránya és a gyorsulás hatásvonala is ismert, ezért a szabadtest ábrát a 2.14/b ábrán látható módon rajzolhatjuk meg. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a 2.14/a szerkezeti ábra sok



2.14. ábra. (a) *Lejtőn lecsúszó test.* (b) *Szabadtest ábra.* Minden vektor iránya (és az erővektorok értelme is) ismert, ezért azokat a fizikai szemléletünknek megfelelő irányban rajzoljuk fel. Ha elég meredek a lejtő és kicsi a súrlódási tényező, akkor a hasáb lefelé gyorsul – ezt feltételezve rajzoltuk be a gyorsulás vektorát.

támpontot ad arra vonatkozóan, hogy milyen erőket tüntessünk fel a szabadtest ábrán. A hasáb az ábrán jelölt testekkel (vagy mezőkkel) lehet kölcsönhatásban.

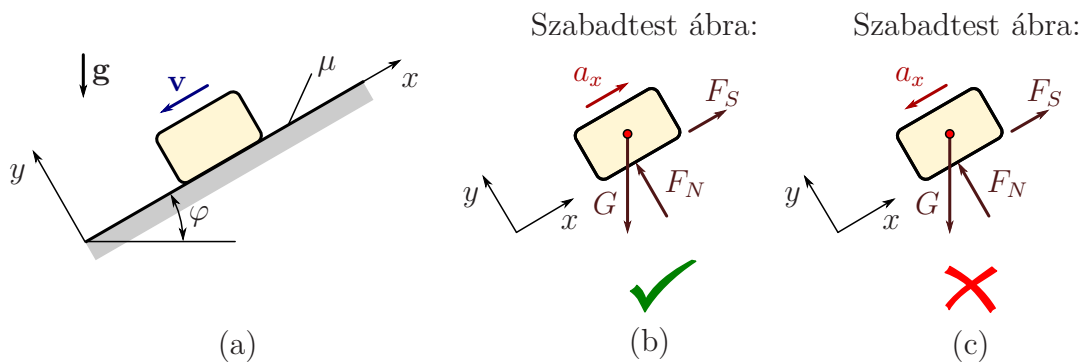
Az egyik test a lejtő, melyről \mathbf{F}_N normálerő és – mivel az ábra szerint μ súrlódási tényező jellemzi a két test érintkezését – \mathbf{F}_S súrlódási erő adódik át. A szerkezeti

ábráról leolvashatjuk a sebesség irányát, tehát csúszási súrlódásról van szó és az F_S erő a hasáb sebességével ellentétes irányú.

A másik test, mellyel kölcsönhatásban van a hasáb, a Föld – pontosabban annak nehézségi erőtere. Ennek hatására a szerkezeti ábrán látható g szimbólum utal.

Az erők iránya pontosan ismert ebben a feladatban, a gyorsulásról viszont nem tudhatjuk biztosan, hogy a lejtőn lefelé vagy felfelé mutat-e. Ez nem jelent problémát a szabadtest-ábra felrajzolása során: a feladat adatai (pl. a lejtő szöge és a súrlódási tényező) ismeretében berajzolhatjuk a gyorsulás valószínű irányát. Ha negatív gyorsulás jön ki a dinamika alaptételének megoldásából, az a berajzolttal ellentétes irányú gyorsulást jelent. ♠

- Ha bonyolultabb a feladat (számítás nélkül nem határozható meg az egyes erők, gyorsulások iránya), akkor javasolt a *skalár komponensek* feltüntetése a következő módon: az egyes testek szabadtest ábráin mindenhol a felvett koordináta rendszernek megfelelően pozitív irányban rajzolt nyilakkal és a nyilak mellé írt pl. a_x , F_y , B_{23x} (szintén a koordináta-rendszer tengelyeinek megfelelően felvett előjelű) szimbólumokkal jelöljük az egyes gyorsulás- illetve erőkomponenseket, mint a 2.15/b és a 2.16 ábrákon.

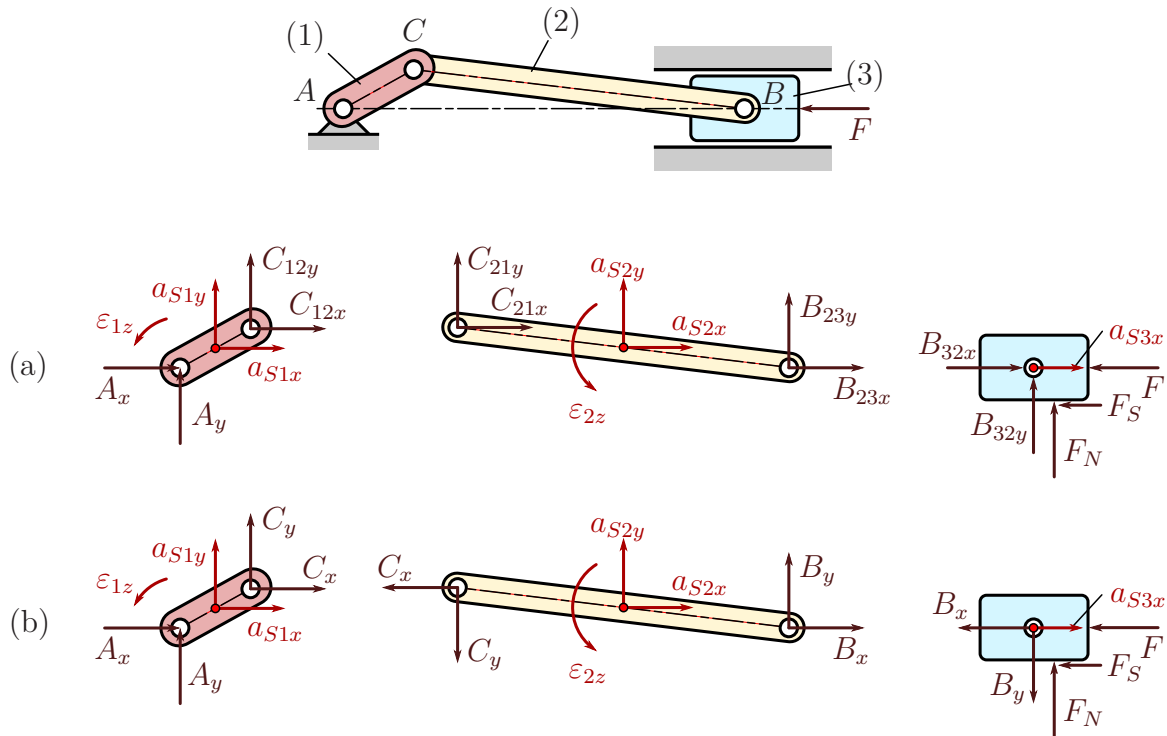


2.15. ábra. (a) Lejtőn lecsúszó hasáb, melynek gyorsulása $a_x < 0$. (b) Jó szabadtest ábra, a koordináta-rendszer pozitív irányának megfelelően felvett gyorsulás komponenssel. (c) Hibás szabadtest ábra, félreérthetően felvett gyorsulás komponenssel.

Ebben az esetben pl. $a_x = -5 \text{ m/s}^2$ azt jelenti, hogy a valóságban a nyíl felvett irányával ellentétes irányú a gyorsulás x komponense.

A szabadtest ábra megrajzolása és az egyenletrendszer felírása során tehát minden komponenst pozitívnak tekintünk, csak a megoldás során helyettesítjük be az ismert (akár pozitív, akár negatív) értékeket és számítjuk ki az ismeretleneket – melyek automatikusan a koordináta-rendszernek megfelelő előjelekkel adódnak. Ez a jelölés egyértelmű és jól alkalmazkodik a – dinamikában gyakran előforduló – nagy méretű egyenletrendszerek számítógépes megoldásához, valamint a kinematikai egyenletek vektori jellegéhez. Természetesen az egyenletrendszer megoldása után nem maradhat el az eredmények elemzése, szemléletünkkel való összevetése.

Félreértést okozhat, ha pl. az x tengely negatív irányába mutató nyíl mellé negatív értékű szimbólumot írunk, pl. $a_x = -5 \text{ m/s}^2$. Ekkor nem lehet egyértelműen eldönteni,



2.16. ábra. Forgattyús-csúszkás mechanizmus és a három test szabadtest ábrái. (a) Szabadtest ábrák a testek között ható erő-ellenelő párok eltérő jelölésével és a komponensek pozitív irányban történő felvételével. (b) A szabadtest ábrák felrajzolásának javasolt módja, az erő-ellenelő párok azonos jelölésével és ellentétes irányú berajzolásával.

hogy a_x előjele a felvett nyíl irányához viszonyítva értendő (azaz a valóságban a nyílhoz képest ellentétes irányú a gyorsulás) vagy a felvett koordináta-rendszerhez képest (azaz a valóságos gyorsulásnak megfelelő irányba mutat a nyíl), ezért ezt a megoldást – amit a 2.15/c ábrán illusztrálunk – kerülni kell.

- Egymásra ható testek esetében Newton III. értelmében az lenne a legkorrektebb eljárás, ha a két testre különböző jelölésű belső erő komponenseket (pl. B_{23x} és B_{32x}) vennénk fel, mindent pozitív irányban és az egyenletrendszerhez hozzávennénk a Newton III.-nak megfelelő $B_{32x} = -B_{23x}$ jellegű egyenleteket. Ilyen módon megrajzolt szabadtest ábrákat láthatunk a 2.16/a ábrán. Ezt a módszert azonban nem javasoljuk, mert feleslegesen növeli az egyenletek számát.

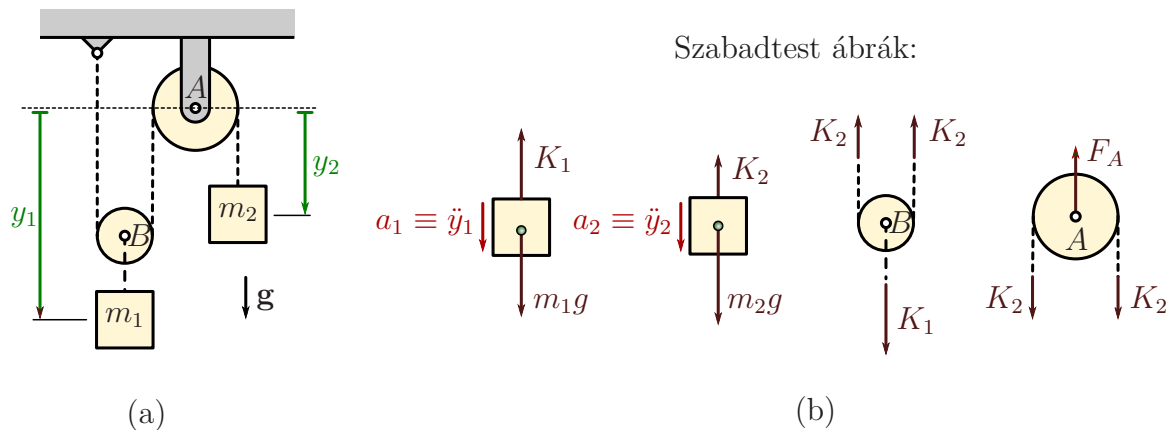
A *javasolt eljárás* az, hogy a szabadtest ábra rajzolás során az elsőként sorakerülő testre berajzoljuk a megfelelő belső erő komponensét (pl. C_x) pozitív irányban, majd a másik testre negatív irányban rajzoljuk be az ellenelőnek megfelelő komponensét, de ugyanazzal a szimbólummal jelöljük (a példában C_x). Ennek megfelelő szabadtest ábrák láthatók a 2.16/b ábrán.

A szabadtest ábrák alapján felírható egyenletrendszer⁸ megoldása során kapott C_x belső erő komponens előjele és a berajzolt nyíl alapján meg tudjuk állapítani, hogy

⁸A példában szereplő, merev testekből álló rendszer mozgását jellemző egyenletrendszerről a 3.2 fejezetben lesz szó.

melyik testre milyen irányú erő hat (pozitív C_x : a berajzolt irányban hat; negatív C_x : a rajzolttal ellenkező irányú, mindkét test esetében).

2.16. példa: A 2.17/a ábrán látható mechanikai rendszer két elhanyagolható tömegű csigából, a rajtuk átvett kötélből, továbbá a kötél szabad végére rögzített m_1 tömegű anyagi pontból, valamint a mozgócsiga B pontjához kötéllal rögzített m_2 tömegű anyagi pontból áll. A rendszer elemei a függőleges síkban, nehézségi erőterben mozognak. A kötél ideális, azaz elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan és nem csúszik meg a csigákon. Mekkora a két tömegpont gyorsulása?



2.17. ábra. (a) Szerkezeti ábra és a használt koordináták. (b) A feladatban szereplő testek szabadtest ábrái. Mivel a csigák tömege elhanyagolható, azokra egyensúlyi egyenletek írhatók fel. Ez az oka annak, hogy nincsenek feltüntetve a csigák gyorsulásállapotának jellemzői.

Megoldás:

Vezessük be az y_1 és y_2 koordinátákat a két anyagi pont mozgásának jellemzéséhez! Mindkét koordinátát az állócsiga A csuklójától függőlegesen lefelé mérjük, a 2.17/a ábra szerint. Az anyagi pontok gyorsulásai $a_1 = \ddot{y}_1$ és $a_2 = \ddot{y}_2$.

A szabadtest ábra megrajzolása segíti a feladatban szereplő erők és mozgások szemléletes elképzelését, ami lehetőséget adhat a felírandó egyenletrendszer egyszerűsítésére. Ebben a feladatban azt használhatjuk ki, hogy a csigák tömege elhanyagolható, ezért azok pontjainak gyorsításához elhanyagolható nagyságú erőre van szükség. Következésképpen, azokra egyensúlyi egyenleteket írhatunk fel. Így az állócsiga szerepe csupán a kötélen ébredő K_2 erő irányának megváltoztatása, ahogy a 2.17/b szabadtest ábrán láthatjuk. Ez azt jelenti, hogy – hacsak nem kell kiszámolni az F_A reakcióerőt – az állócsigára nem szükséges felírni a dinamika alaptételének megfelelő egyenletét.⁹

A két anyagi pont és a mozgócsiga szabadtest ábrája is a 2.17/b ábrán látható, melyek alapján a dinamika alaptételének három alábbi egyenletét kapjuk:

$$m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g - K_1, \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = m_2 g - K_2, \quad (2)$$

$$0 \ddot{y}_1 = K_1 - 2K_2. \quad (3)$$

⁹Az állócsiga szabadtest ábráján a feladatban vázolt körülmények mérlegelése után (elhanyagolható tömegű csiga, ideális kötél) jelöltük ugyanazzal a szimbólummal a két kötélagban ébredő erőt. További megfontolást igényel, hogy szükség van-e az F_A kényszererő meghatározására. Az egyenlet felírásának elhagyását tehát jól meg kell gondolni – az a legbiztosabb, ha fel is írjuk: $0 = F_A - 2K_2$.

A következő lépés annak a kényszerfeltételnek a figyelembevétel, mi szerint a kötéll hossza nem változik, azaz $2y_1 + y_2 = \text{állandó}$. Nekünk a gyorsulások szintjén kell felhasználnunk ezt a feltételt. Kétszeres idő szerinti deriválással¹⁰ az alábbi összefüggést kapjuk a két anyagi pont gyorsulásai között:

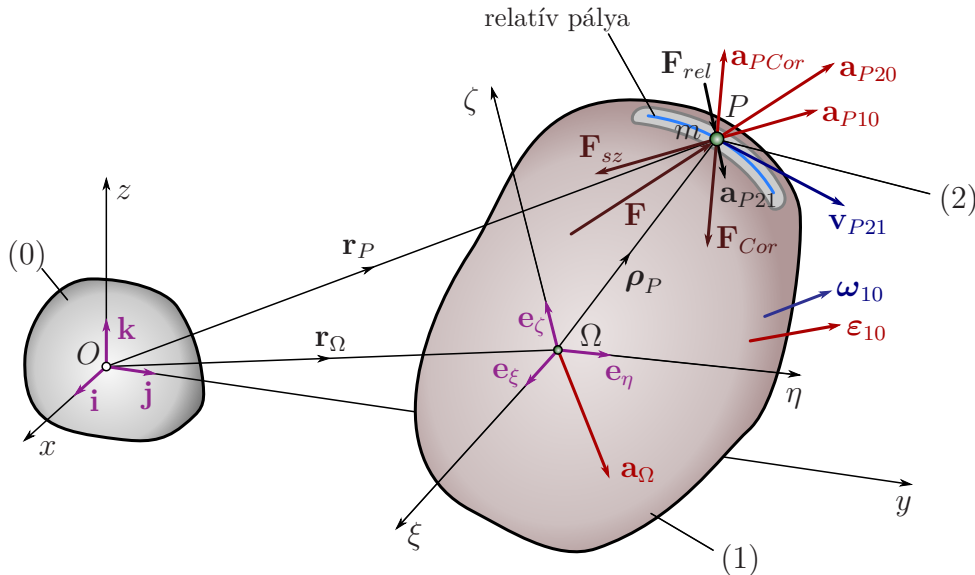
$$2\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0, \quad \text{azaz} \quad a_1 = -\frac{a_2}{2}. \quad (4)$$

Ez azt jelenti, hogy a mozgócsiga gyorsulása ellentétes irányú a kötéll szabad végének gyorsulásával és fele akkora nagyságú. Ez a feltétel a fenti gondolatmenet szerint a sebességekre is igaz. Az (1)-(4) egyenletrendszer megoldásából az is látszik, hogy a kötéll szabad végén ébredő K_2 erő feleakkora, mint az m_1 testre ható K_1 erő:

$$K_1 = \frac{6m_1 m_2}{m_1 + 4m_2}g, \quad K_2 = \frac{K_1}{2}, \quad a_1 \equiv \ddot{y}_1 = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}g, \quad a_2 \equiv \ddot{y}_2 = -2a_1. \quad \spadesuit$$

2.3.3. A dinamika alaptétele gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben

Newton I. törvénye szerint léteznek olyan vonatkoztatási rendszerek, melyekben teljesül a tehetetlenség törvénye – ezek az inerciarendszerek. Tegyük fel, hogy találtunk egy (a 2.18 ábrán (0)-val jelölt) inerciarendszert. Az előző fejezetek szerint ebben a vonatkoztatási rendszerben meg tudjuk vizsgálni egy ((2)-vel jelölt) anyagi pont mozgását a dinamika alaptétele alapján.



2.18. ábra. Inerciarendszer (0), gyorsuló rendszer (1) és vizsgált anyagi pont (2) kinematikai jellemzői és az anyagi pontra ható $\mathbf{F}_{rel} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{sz} + \mathbf{F}_{Cor}$ relatív erő összetevői.

Az inerciarendszereket az különbözteti meg a gyorsuló vonatkoztatási rendszerektől, hogy azokban minden erő valódi erő, azaz létező testek hatásaként értelmezhető. Ez a feladatok nagy részében segíti a testek közti erőhatások áttekintését, a szabadtest ábra felrajzolását és

¹⁰Minden kényszerfeltétel deriváltja is igaz.

a dinamika alaptételének felírását. Mégis, számos gyakorlati és elvi probléma könnyebben tárgyalható olyan (az ábrán (1)-gyel jelölt) vonatkoztatási rendszerben, ami a (0) inercia-rendszerhez képest gyorsul.

A kinetika gyorsuló rendszerekben érvényes összefüggéseinek tárgyalása során a relatív kinematikával kapcsolatos 1.2.11 fejezet jelölésrendszerére és eredményeire támaszkodunk. Az ott közöltek alapján nyilvánvaló, hogy ha az (1) vonatkoztatási rendszer gyorsuló mozgást végez¹¹, akkor az (1)-beli megfigyelők gyorsulónak látják a (2) mozgását akkor is, ha a (2) testre ható erők eredője zérus – gondoljunk például egy házra, amelynek „mozgását” egy gyorsuló vonatból akarjuk leírni. A látszólagos gyorsulást olyan erők megjelenésével magyarázhatjuk, melyek nem valódiak, nincs „forrásuk”. Felmerül a kérdés, hogy ebben az esetben hogyan alkalmazható a dinamika alaptétele.

Galilei relativitási elve (2.4. tétel) szerint a dinamika alaptétele ugyanolyan marad minden inerciarendszerben, tehát állandó tömegű anyagi pont esetén

$$m\mathbf{a}_{P20} = \mathbf{F}. \quad (2.13)$$

Itt \mathbf{a}_{P20} a P geometriai pontban található anyagi pont abszolút gyorsulása, \mathbf{F} pedig a valódi erő, melynek van forrása, tehát rá lehet mutatni azokra a testekre, melyek az erőhatást okozzák. Célunk az, hogy gyorsuló rendszerben is hasonlóan írjuk fel a dinamika alaptételét, azaz

$$m\mathbf{a}_{P21} = \mathbf{F}_{rel} \quad (2.14)$$

alakban, ahol \mathbf{a}_{P21} a relatív gyorsulás, \mathbf{F}_{rel} pedig a *relatív erő*, tehát az az erő, melyet az (1) gyorsuló rendszerben levő megfigyelők tapasztalnak. Az (1.190) képlet alapján az abszolút gyorsulás kifejezhető az alábbi alakban:

$$\mathbf{a}_{P20} = \mathbf{a}_{P21} + \mathbf{a}_{P10} + \mathbf{a}_{Cor}, \quad (2.15)$$

ahol \mathbf{a}_{P10} az (1) vonatkoztatási rendszernek a (2) anyagi ponttal fedésben levő pontjának gyorsulása – a *szállító gyorsulás* –, $\mathbf{a}_{Cor} \equiv 2\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{21}$ pedig a *Coriolis-gyorsulás*. Tehát

$$m\mathbf{a}_{P20} = m\mathbf{a}_{P21} + m\mathbf{a}_{P10} + m\mathbf{a}_{Cor}, \quad (2.16)$$

azaz

$$m\mathbf{a}_{P21} = m\mathbf{a}_{P20} - m\mathbf{a}_{P10} - m\mathbf{a}_{Cor}. \quad (2.17)$$

A (2.14) képlet alapján az egyenlet jobb oldalán szereplő kifejezés a relatív erővel egyenlő. Felhasználva, hogy $m\mathbf{a}_{P20} = \mathbf{F}$, a relatív erő

$$\mathbf{F}_{rel} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{P10} - m\mathbf{a}_{Cor}. \quad (2.18)$$

A fenti képletet úgy értelmezhetjük, hogy az (1) gyorsuló vonatkoztatási rendszerben lévő megfigyelő számára nincs összhangban a tapasztalt \mathbf{a}_{P21} gyorsulás és a valódi \mathbf{F} eredő erő. Ezért feltételezi további erőhatások megjelenését – ezek a tömeg \times gyorsulás jellegű mennyiségek azonban nem egy valódi test hatásaként jelennek meg.

2.17. definíció. Az

$$\mathbf{F}_{sz} \equiv -m\mathbf{a}_{P10} \quad (2.19)$$

SZÁLLÍTÓ ERŐT és az

$$\mathbf{F}_{Cor} \equiv -m\mathbf{a}_{Cor} \equiv 2m\mathbf{v}_{P21} \times \boldsymbol{\omega}_{10} \quad (2.20)$$

CORIOLIS-ERŐT látszólagos, fiktív vagy tehetetlenségi erőknek nevezik. ♣

¹¹Tehát az (1) test súlypontjának gyorsulása vagy a szögsebessége vagy a szöggyorsulása nem nulla.

Ezzel sikerült tisztázni a (2.14) egyenletben szereplő relatív erő fogalmát. Mivel (2.14) formálisan nem különbözik az inerciarendszerekben érvényes $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ egyenlettől, minden inerciarendszerben érvényes definíció és tétel kimondható gyorsuló rendszerben is – annyi különbséggel, hogy az „abszolút” mennyiségeket „relatív” mennyiségekre kell cserélni.

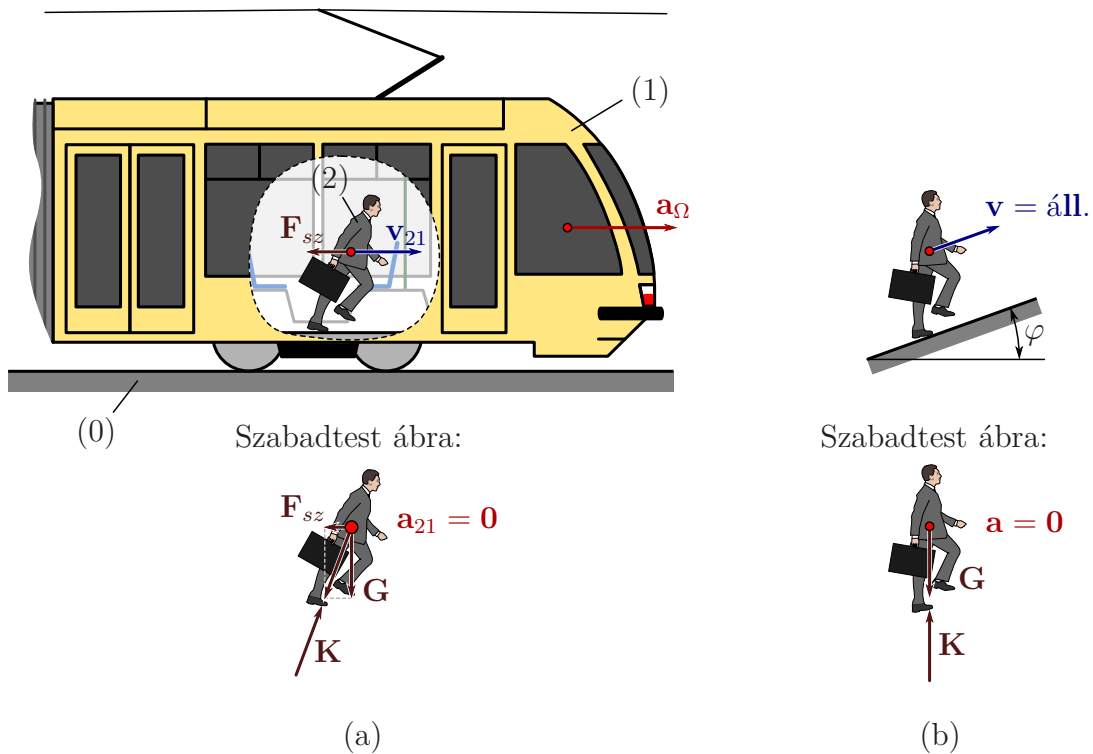
Vizsgáljuk meg a két legegyszerűbb speciális esetet:

1. **Állandó gyorsulású, haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer:** $\boldsymbol{\varepsilon}_{10} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_{10} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_\Omega = \text{állandó}$, ahol Ω az (1) gyorsuló vonatkoztatási rendszerhez rögzített koordináta-rendszer origója. Ekkor az (1) vonatkoztatási rendszer minden pontja azonos gyorsulással mozog, tehát $\mathbf{a}_{P10} = \mathbf{a}_\Omega$ és a szállító erő

$$\mathbf{F}_{sz} = -m\mathbf{a}_\Omega, \quad (2.21)$$

míg a Coriolis-erő zérus, mert $\boldsymbol{\omega}_{10} = \mathbf{0}$ miatt a Coriolis-gyorsulás is nulla.

2.18. példa: Egy \mathbf{a}_Ω gyorsulással induló villamoson állandó relatív sebességgel (tehát a gyorsuló rendszerben egyensúlyban) előre sétálva úgy tapasztaljuk, mintha egy emelkedőn haladnánk felfelé. Mi ennek a magyarázata?



2.19. ábra. (a) Egy gyorsuló villamosban állandó relatív sebességgel mozgó utasra ható $\mathbf{F}_{sz} + \mathbf{G}$ relatív erő ferde hatásvonalú. A gyorsuló rendszerben ezzel az erővel tart egyensúlyt a villamos padlójáról átadódó \mathbf{K} kényszererő. (b) A gyorsuló villamosban történő mozgás megfeleltethető egy $\varphi = \arctan(a_\Omega/g)$ hajlásszögű, álló lejtőn történő mozgásnak. A két eset a \mathbf{K} kényszererő nagyságában tér el.

Megoldás:

A 2.19 ábra alapján a villamoshoz rögzített gyorsuló rendszerben az $m\mathbf{g}$ nehézségi erő mellett az $\mathbf{F}_{sz} = -m\mathbf{a}_\Omega$ szállító erő is hat. Mivel mindkét erő a tömeggel arányos,

eredőjük egy ferde hatásvonalú, $m\sqrt{g^2 + a_\Omega^2}$ nagyságú erő, amivel a villamos padlójáról átadódó kényszererő tart egyensúlyt. Ez dinamikailag (szinte) teljesen megegyezik az emelkedőn történő mozgás során tapasztalható erőviszonyokkal. ♠

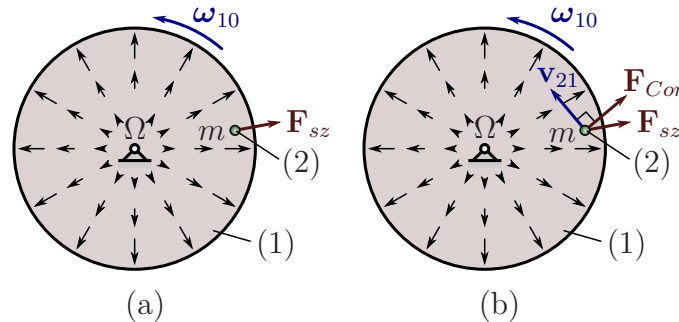
2. **Állandó szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszer:** $\mathbf{a}_\Omega = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_{10} =$ állandó, tehát $\boldsymbol{\varepsilon}_{10} = \mathbf{0}$. Ez az eset az Ω ponton átmenő pillanatnyi forgástengely körüli síkmozgásnak felel meg. Ekkor az Ω pontból a vizsgált testhez mutató $\boldsymbol{\rho}_P \perp \boldsymbol{\omega}$ helyvektorral kifejezhető a szállító gyorsulás:

$$\mathbf{a}_{P10} = \mathbf{a}_\Omega + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_P - \omega_{10}^2 \boldsymbol{\rho}_P = -\omega_{10}^2 \boldsymbol{\rho}_P. \quad (2.22)$$

Következésképpen, a szállító erő nagysága egyenesen arányos a tengelytől mért távolsággal, és sugárirányban kifelé mutat:

$$\mathbf{F}_{sz} = -m\mathbf{a}_{P10} = -m(-\omega_{10}^2 \boldsymbol{\rho}_P) = m\omega_{10}^2 \boldsymbol{\rho}_P. \quad (2.23)$$

Ez az erő az ún. *centrifugális erő*, ami tehát a szállító erő speciális esete. A centrifugális erő egy ún. erőteret (lásd 2.43. definíció) alkot, hiszen a vonatkoztatási rendszer minden pontjához hozzárendelhető egy $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erő, ami az oda helyezett m tömegű testre hatna. Ezt illusztrálja a 2.20 ábra.



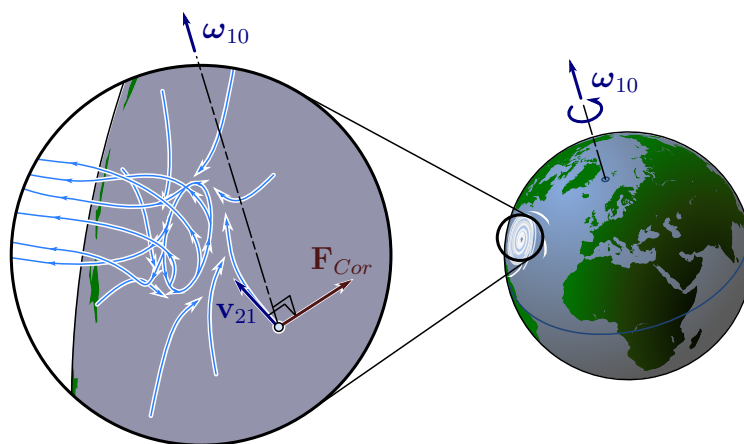
2.20. ábra. (a) Álló tengely körül forgó vonatkoztatási rendszerben lévő m tömegű tömegpontra a tengelytől mért távolsággal arányos nagyságú szállító erő (centrifugális erő) hat. (b) Ha a test \mathbf{v}_{21} relatív sebessége nem nulla és nem is párhuzamos az $\boldsymbol{\omega}_{10}$ szögsebességgel, akkor Coriolis-erő is hat rá.

Forgó ($\boldsymbol{\omega}_{10} \neq \mathbf{0}$) vonatkoztatási rendszerben a forgástengellyel nem párhuzamosan mozgó ($\mathbf{v}_{P21} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{v}_{P21} \nparallel \boldsymbol{\omega}_{10}$) testre Coriolis-erő is hat:

$$\mathbf{F}_{Cor} = -2m\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21} = 2m\mathbf{v}_{P21} \times \boldsymbol{\omega}_{10} \neq \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

2.31. **megjegyzés:** A Föld is forog, tehát a földi vonatkoztatási rendszerben is tapasztalható a szállító- és a Coriolis-erő. A szállító erő befolyásolja a Föld felszíne közelében mérhető nehézségi erőt – ennek kapcsán lásd a 2.33. megjegyzést. A Coriolis-erő úgy értelmezhető, hogy a mozgó test alatt elfordul a Föld, ezért a test nem a várakozásainknak megfelelő pályát írja le. Ez magyarázza az ún. Foucault-inga viselkedését is, mely látszólag folyamatosan változtatja lengési síkját, valójában azonban a Föld fordul el alatta. A Föld északi féltékéjén a mozgó testek jobbra, a déli féltékén pedig balra térülnek el a Coriolis-erő miatt. Lefolyókban elvileg az óramutató járásával ellentétes forgásirányú örvénylést okoz a Coriolis-erő az északi

féltekén, de a valóságban ez nehezen figyelhető meg, mert a mérnöki gyakorlatban előforduló esetekben (és egy szokásos méretű fürdőszoba lefolyójában) általában elhanyagolhatóan kicsi ez az erő, így a legkisebb zavarás is ellentétes irányú örvény létrejöttéhez vezethet. Nagy idő és távolság skálákon azonban számottevő a Coriolis-erő hatása: ennek tulajdonítható a légköri ciklonok és anticiklonok létrejötte (lásd 2.21 ábra), melyek jelentősen befolyásolják az időjárást. ♣



2.21. ábra. A forgó Földön az alacsony nyomású (nedves, meleg) légtömegek felemelkedésekor a környező területekről odaáramlik a levegő. A Coriolis-erő hatására a levegő részecskéi spirális pályán haladnak, az így kialakuló képződmény a ciklon. Az anticiklonok hasonló struktúrájú, magas nyomású képződmények, melyekben a levegő lefelé áramlik és a talaj közelében spirális mozgást végezve terjed szét.

2.3.4. Folyamatok időbeli leírása a dinamika alaptétele alapján

A dinamika alaptétele alapján a tömegpontra ható erők meghatározzák a test gyorsulását – pozícióját és sebességét azonban csak közvetve, a gyorsuláson keresztül befolyásolják. Ugyanakkor az erőtörvények a leggyakoribb esetekben olyan alakúak, hogy csak az anyagi pontok helyétől, sebességétől és az időtől függenek – ebben a jegyzetben mi is erre az esetre korlátozódunk.

2.32. megjegyzés: Olyan modellek is felállíthatók, melyekben más fizikai mennyiségektől függő erőtörvényeket használunk. Logikai úton nem zárható ki olyan természeti erőtörvények létezése, melyek az anyagi pont gyorsulásától lineárisan függenek. A gyakorlatban ilyen modellek sok esetben csupán egy formális átalakításból adódnak, mi szerint a mechanikai rendszer egyes komponenseinek megfelelő ma tagokat erőként veszik figyelembe. Ez a megközelítés például hajók mozgásának vizsgálata során előnyös, mert a hajó közelében lévő víztömeg egy része együtt mozog (gyorsul) a hajóval és ezt erőként lehet figyelembe venni. A gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben fellépő tehetetlenségi erők nem ebbe a körbe tartoznak, hiszen azok nem a vizsgált test, hanem a vonatkoztatási rendszer gyorsulásától függenek, azaz adott külső erőnek tekintendők.

A szabályozástechnikában elvileg bármilyen fizikai mennyiségtől függő szabályozó erő előállítható, azonban nem szabad figyelmen kívül hagynunk azt a tényt, hogy a szabályozáshoz időre van szükség, tehát sohasem az aktuális, hanem mindig egy kicsit korábbi állapot alapján történik a szabályozó erő generálása.

Sok olyan mechanikai modell állítható fel, amelyben az erő nemcsak a pillanatnyi, hanem valamekkora idővel korábbi állapottól, pl. a kitéréstől (is) függ. Ilyen például az esztergálás, ahol a szerszám mozgását befolyásolják a felület egyenetlenségei – melyek a szerszám egy fordulattal korábbi mozgása során alakultak ki.

Elektrodinamikában az ún. sugárzási visszahatási erő (Abraham-Lorentz-erő) a gyorsulás első idő szerinti deriváltjától (jerk) függ. Megmutatható, hogy ez a fajta erőmodell olyan megoldásokhoz is vezethet, melyek sértik az ún. „okság elvét”, például egy test az erő megjelenése előtt elkezdhet gyorsulni. Ez nyilván a modell hiányosságaival van összefüggésben, a természet törvényei nem ilyenek. ♣

Ha egy állandó tömegű anyagi pont mozgásának *folyamatát* akarjuk leírni, akkor a dinamika alaptétele differenciálegyenlet alakjában írható fel.

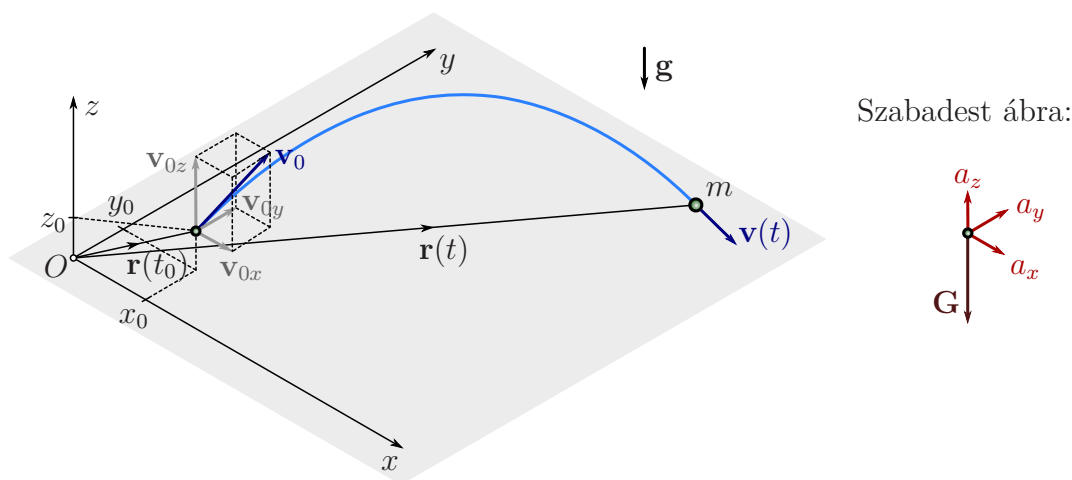
2.19. definíció. Az anyagi pont MOZGÁSEGYENLETE az alábbi másodrendű, közönséges differenciálegyenlet:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \quad (2.25)$$

ahol \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$ és $\ddot{\mathbf{r}}$ az anyagi pont helyvektora, sebessége és gyorsulása. ♣

Mivel az anyagi pontra ható erők közvetlenül csak a gyorsulást határozzák meg, az $\mathbf{r}(t)$ mozgástörvény meghatározásához – azaz az egyenlet megoldásához – ki kell egészíteni a (2.25) egyenletet a megoldásra vonatkozó egyéb feltételek megadásával is. Ilyenek lehetnek az ún. kezdeti feltételek (kezdeti pozíció és kezdeti sebesség), vagy peremfeltételek (pl. kezdeti pozíció és végpozíció).

2.20. példa: Határozzuk meg egy Föld felszíne közelében ferdén elhajított test mozgástörvényét a dinamika alaptétele alapján!



2.22. ábra. Ferde hajítás szemléltetése a háromdimenziós térben és az elhajított test szabadtest ábrája.

Megoldás:

A léghellenállást elhanyagolva és a Földet inerciarendszernek tekintve a testre csak a $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ nehézségi erő hat. Az ennek megfelelően megrajzolt szabadtest ábra a 2.22 ábrán látható. A dinamika alaptétele a következő differenciálegyenlet alakját ölti:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

ahol a koordináta-rendszer z tengelye függőlegesen felfelé mutat. A komponens egyenletekből látszik, hogy az elhajított test gyorsulásának x és y komponense nulla, z komponense pedig $-g$. Tehát a sebesség vízszintes komponensei állandóak, függőleges komponense pedig lineárisan változik. A mozgástörvény két egymás utáni integrálással határozható meg:

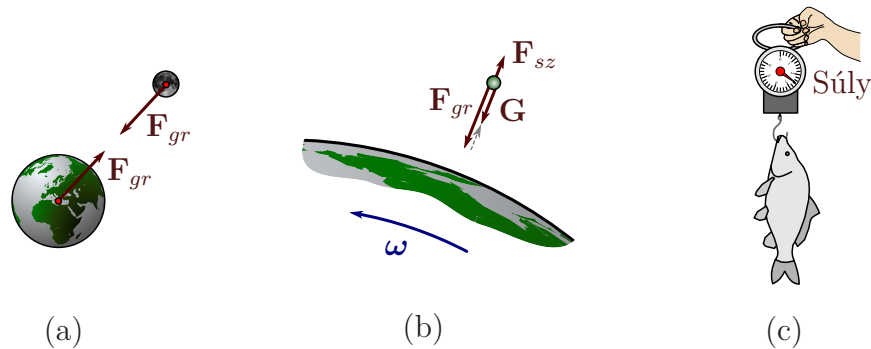
$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x}t + x_0, \\y(t) &= v_{0y}t + y_0, \\z(t) &= \frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0.\end{aligned}\tag{2.27}$$

A képletben szereplő integrálási konstansok a kezdeti pozíciót (x_0, y_0, z_0) és a kezdeti sebességet (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) adják meg. ♠

2.33. megjegyzés: A (2.26) képlet z komponens egyenletében mindkét oldalon megjelenik az anyagi pont tömege, két különböző szerepben: az $m_{teh}\ddot{z} = -m_{súly}g$ egyenlet bal oldalán szereplő m_{teh} , ún. *tehetetlen tömeg* a test tehetetlenségét fejezi ki, tehát azt, hogy mennyire tud ellenállni a rá ható erők gyorsító hatásának.

A jobb oldalon látható $m_{súly}$ *súlyos tömeg* viszont azt fejezi ki, hogy mennyire vonzza a Föld gravitációs mezeje (pontosabban a nehézségi erő, lásd alább) az adott testet. A kísérleti tapasztalatok szerint ez a kétféle tömeg egyenlő nagyságú.¹² A gravitáció és a tehetetlenség azonban a newtoni dinamikában teljesen független egymástól! A tehetetlen és súlyos tömeg kísérletesen tapasztalt egyenlősége mögötti okokra az általános relativitáselmélet derített fényt a huszadik század elején.

A hétköznapi szóhasználatban gyakran – helytelenül – a *súly* szót használják a tömeg elnevezés helyett. A súly fogalmát ugyan többféle módon lehet értelmezni, de minden értelmezésben *erő* jellegű mennyiségről van szó, tehát a súly mértékegysége Newton. A súly értelmezése szorosan kapcsolódik a gravitációs erő és a nehézségi erő fogalmához, ezért az alábbiakban ezeket is definiáljuk.



2.23. ábra. Az \mathbf{F}_{gr} gravitációs erő (a) és a \mathbf{G} nehézségi erő (b) a vizsgált testre hat. A két erő abban különbözik, hogy a nehézségi erő tartalmazza a Föld forgásából származó \mathbf{F}_{sz} szállító (centrifugális) erőt is. A súly (c) nem a vizsgált testre, hanem a környezetre – az alátámasztásra vagy felfüggesztésre – hat.

A gravitációs erő bármely két, tömeggel rendelkező test között ható, vonzó erő. Egy m_1 tömegű tömegpont által egy másik, m_2 tömegű tömegpontra ható gravitációs erő

$$\mathbf{F}_{gr} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},\tag{2.28}$$

¹²Eötvös Loránd a róla elnevezett ingával nagy pontossággal igazolta a súlyos és tehetetlen tömeg egyenlőségét.

ahol az \mathbf{r} vektor m_1 -től m_2 -höz mutat, $\gamma \approx 6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ pedig a gravitációs állandó. A gravitációs erő nagysága tehát a távolság négyzetével fordítottan arányos.

A nehézségi erőt egy forgó égitest felszíne közelében értelmezzük. Az égitest közelében lévő testekre hat a gravitációs erő és – mivel a forgás miatt az égitest nem inerciarendszer – tehetetlenségi erők is fellépnek (lásd 2.3.3 fejezet). A tehetetlenségi erők – a gravitációs erőhöz hasonló módon – a test tömegével arányosak (pontosabban, a gravitációs erőtörvényben $m_{\text{súly}}$, a tehetetlenségi erők kifejezésében pedig m_{teh} szerepel, de ezek egyenlő nagyságúak), ezért mindkét erő kifejezéséből kiemelhető a vizsgált test m tömege. A nehézségi erő az égitest felszínén nyugvó testre ható gravitációs erő és tehetetlenségi erő (centrifugális erő) eredője, amit $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ alakban fejezhetünk ki. \mathbf{g} a nehézségi gyorsulás vektora, ami az égitest számos paraméterétől függ és a felszín különböző pontjaiban különböző irányú és nagyságú. A Földön a gyakorlati feladatok túlnyomó többségében az előforduló magasságok elhanyagolhatóak a (nem pontosan gömb alakú) Föld sugarához ($R \approx 6378 \text{ km}$) képest, ezért a gravitációs erő helytől való függését elhanyagolva, a felszín egy pontja közelében ugyanazzal a \mathbf{g} nehézségi gyorsulással számolhatunk, ami Magyarországon $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ nagyságú.

A súly fogalmát két, teljesen eltérő módon értelmezik a szakirodalomban. A régebbi nézőpont szerint a súly a nehézségi erővel megegyező, tehát a vizsgált testre ható erő.

A modernebb felfogás szerint azonban a súly azt az erőt jelenti, amivel a test az alátámasztását nyomja vagy a felfüggesztését húzza – *tehát nem a vizsgált testre, hanem annak környezetére hat*. A súly ebben az értelmezésben az az erő, amit egy test felemelésekor érzünk. Természetesen „nehezebbnek” érzünk egy testet, ha nagyobb gyorsulással akarjuk megmozdítani, ezért a súly függ a vizsgált test gyorsulásától. A Föld felszínén nyugvó test súlya a talajról átadódó normálerő ellenereje, a *talajra ható mg* erő. Egy szabadon eső, \mathbf{g} gyorsulású test azonban nincs alátámasztva, súlya nulla, azaz a súlytalanság állapotában van (lásd 2.9. példa).

A definíció szemléletes volta mellett meg kell említeni, hogy általános helyzetekben történő értelmezése számos elvi kérdést vet fel, ráadásul mérnöki feladatokban a súly fogalma kevésbé használható. Egy több testből álló mechanikai rendszer esetében ugyanis egy adott test alátámasztását/felfüggesztését vagy nem értelmezzük, vagy a többi test hatásának kell tulajdonítanunk. Ez utóbbi esetben viszont a kiválasztott test súlya a test által a többi testre ható erők eredője, aminek kiszámítására gyakorlati szempontból ritkán van szükség. A továbbiakban mellőzzük a súly fogalmának használatát. ♣

A (2.25) differenciálegyenlet megoldása általában nem olyan könnyű, mint a bemutatott példában, ahol csak két idő szerinti integrálást kellett elvégezni. Az általános esetben ez nem tehető meg, mert az $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t)$ függvény éppen a meghatározandó $\mathbf{r}(t)$ mozgástörvénytől függ. Sok esetben – elsősorban amikor nemlineáris függvény írja le az erőtörvényt és több kölcsönható test mozgását vizsgálva (2.25) alakú egyenletekből álló egyenletrendszert akarunk megoldani – nem is létezik analitikus, képlettel megadható megoldás. Már három, gravitációs erővel kölcsönható anyagi pont esetén megmutatható, hogy a mozgás kaotikus, hosszú távon előre nem jelezhető – ez az ún. *háromtest probléma*.

A mozgásegyenlet megoldásának nehézségei miatt előnyös lehet, ha (2.25) helyett olyan egyenleteket tudunk felírni, melyek csak egyszeres deriválást tartalmaznak – következésképpen, a mozgás sebességére vonatkozóan adnak információt. Többféle ilyen egyenlet is felírható, ezek levezetését összefoglalóan a mozgásegyenlet *integrálásának* nevezik.

2.4. A mozgásegyenlet integrálása, megmaradási tételek

2.4.1. Impulzustétel

Számos gyakorlati feladatban lényegtelenek a mozgás folyamatának részletei és elegendő csak kitüntetett időpontbeli értékeket – például kezdő- vagy végállapotbeli sebességeket – kiszámolni. Ilyen feladatokban hasznos az impulzustétel (lendület tétel):

2.21. tétel. IMPULZUSTÉTEL. *Az impulzus (lendület) t_1 és t_2 időpontok közötti megváltozása egyenlő az ún. ERŐLÖKÉSSEL:*

$$\mathbf{I}(t_2) - \mathbf{I}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt, \quad (2.29)$$

ahol $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$ az erőlökés, vagy más néven ERŐIMPULZUS.

Bizonyítás:

Newton második törvényének idő szerinti integrálása alapján azonnal adódik, kihasználva, hogy $\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{I}} dt = \mathbf{I}(t_2) - \mathbf{I}(t_1)$. ♠

Mivel az impulzustétel és Newton második törvényének általános alakja (2.3) egyenértékűek, ezért gyakran az $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ összefüggést is impulzustételnek nevezik. Ha a szövegkörnyezetből nem derül ki egyértelműen, hogy melyik tételre gondolunk, akkor az $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ képletet az *impulzustétel differenciális alakjának*, a (2.29) kifejezést pedig az *impulzustétel integrál alakjának* fogjuk nevezni.

Az itt bevezetett erőlökés fogalmát elsősorban ütközések vizsgálata kapcsán használjuk. Ütközések során ugyanis nem könnyű leírni a két test között ható erők időbeli változását. Az erő integrálját – az erőlökést – viszont az impulzus megváltozása alapján ki lehet számítani.

Olyan esetekben is jól használható az impulzustétel integrál alakja, amikor valamilyen erő átlagos értékét akarjuk kiszámítani. Az impulzustételt ugyanis a $\Delta t = t_2 - t_1$ időtartammal való osztással

$$\frac{\mathbf{I}(t_2) - \mathbf{I}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (2.30)$$

alakban is felírhatjuk, ahol a jobb oldalon szereplő tag az $\bar{\mathbf{F}}$ átlagos erő. Az impulzus megváltozását $\Delta \mathbf{I}$ -vel jelölve

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\Delta \mathbf{I}}{\Delta t}. \quad (2.31)$$

Az így kapott átlagos érték alkalmas lehet az erő nagyságrendjének becslésére, amire gyakran van szükség a gyakorlatban.

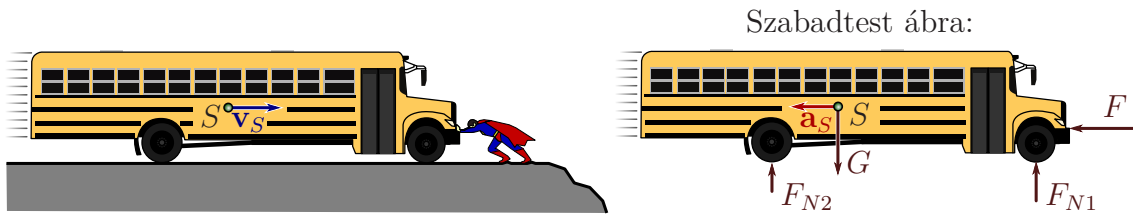
2.22. példa: *Egy $m = 20$ t tömegű autóbusz $v = 0.1$ m/s sebességgel gördül egy vízszintes síkon, a 2.24 ábrának megfelelően. Átlagosan mekkora fékező erőre van szükség ahhoz, hogy 10 s alatt megálljon?*

Megoldás:

Az impulzus megváltozásának nagysága $\Delta I = mv = 2000$ kg m/s, amit $\Delta t = 10$ s alatt akarunk elérni. Tehát az átlagos fékező erő nagysága

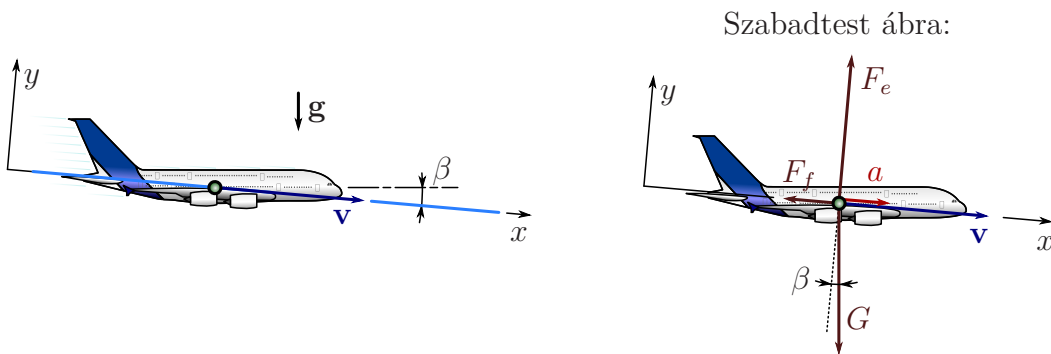
$$\bar{F} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = 200 \text{ N}. \quad (2.32)$$

Ekkora erőt akár egy ember is ki tud fejteni, az ábrának megfelelően megállítva a lassan guruló járművet. ♠



2.24. ábra. Autóbusz megállításához szükséges átlagos erő számítása az impulzustétel alapján.

2.23. példa: Egy 500 t tömegű repülőgép $v_1 = 200 \text{ m/s} = 720 \text{ km/h}$ sebességgel repül. Egy adott $t_1 = 0$ pillanatban a pilóta kikapcsolja a motort és siklórepüléssel halad tovább, a vízszintessel $\beta = 5^\circ$ -os szöget bezáró egyenes pályán. A $t_2 = 100 \text{ s}$ pillanatban a repülőgép sebessége már csak $v_2 = 180 \text{ m/s} = 648 \text{ km/h}$. Határozzuk meg a légellenállással kapcsolatos fékező erő átlagos értékét!



2.25. ábra. Siklórepülésben haladó repülőgép és a hozzá tartozó szabadtest ábra.

Megoldás:

Célszerű a haladási irányban felvenni az x tengelyt. A repülőgépre a $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ nehézségi erő mellett a levegő áramlásával kapcsolatos, a pályára merőleges irányú \mathbf{F}_e emelő erő és a pályával párhuzamos \mathbf{F}_f fékező erő hat. Ezek figyelembevételével felrajzolható a repülőgép szabadtest ábrája (2.25 ábra).

Mivel egyenes pályán mozog a gép, az impulzus iránya nem változik: végig x irányú marad. Nagysága azonban megváltozik a fékező erő és a nehézségi erő x komponense, $G_x = mg \sin(\beta)$ hatására. Tehát az impulzustétel szerint

$$\int_{t_1}^{t_2} (mg \sin(\beta) - F_f) dt = I(t_2) - I(t_1). \quad (2.33)$$

A nehézségi erőnek megfelelő tag állandó, annak integrálása az időtartammal való szorzásnak felel meg. A fékező erő sebességfüggő, tehát változik, azonban mi most az átlagos értékét, azaz az

$$\bar{F}_f = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} F_f dt \quad (2.34)$$

mennyiséget akarjuk kiszámolni. Az impulzustétel ennek megfelelő alakja:

$$(mg \sin(\beta) - \bar{F}_f)(t_2 - t_1) = mv_2 - mv_1, \quad (2.35)$$

amiből a fékező erő átlagos értéke

$$\bar{F}_f = m \left(\frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1} + g \sin(\beta) \right) \approx 527500 \text{ N}. \quad (2.36)$$

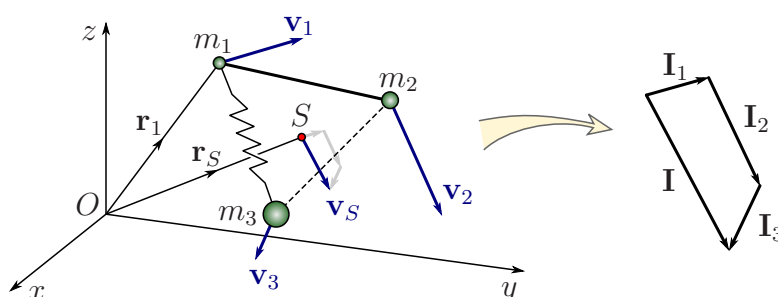


Az impulzustétel könnyen általánosítható több anyagi pont, tehát *anyagi pontrendszer* esetére. Ehhez első lépésben az anyagi pontrendszer impulzusának fogalmát kell tisztázni.

2.24. definíció. *Anyagi pontrendszer lendülete (impulzusa) az egyes anyagi pontok lendület vektorainak vektori eredője, azaz n tömegpont esetén $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$.* ♣

2.25. tétel. *Anyagi pontrendszer lendülete a pontrendszer teljes $m = \sum_{i=1}^n m_i$ tömegének és a SÚLYPONT SEBESSÉGÉNEK a szorzata, azaz*

$$\mathbf{I} = m \mathbf{v}_S. \quad (2.37)$$



2.26. ábra. *Anyagi pontrendszer teljes impulzusa $\mathbf{I} \equiv \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_S$, ahol a súlypont sebessége $\mathbf{v}_S = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \mathbf{v}_i$.*

Bizonyítás:

A súlypont helyvektora definíció szerint $\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m}$, amiből a súlypont sebessége $\mathbf{v}_S \equiv \dot{\mathbf{r}}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \mathbf{v}_i$, ahogy a 2.26 ábra mutatja. Az impulzus definícióját felhasználva

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = m \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{m} = m \frac{d}{dt} \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m} = m \dot{\mathbf{r}}_S = m \mathbf{v}_S. \quad (2.38) \quad \spadesuit$$

Az impulzus fenti kifejezésének idő szerinti deriválásával

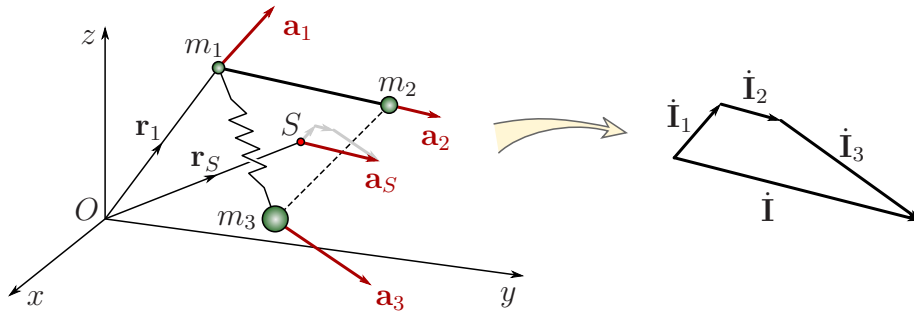
$$\dot{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = m \mathbf{a}_S, \quad (2.39)$$

ahogy a 2.27 ábra mutatja.

2.26. következmény. *Anyagi pontrendszer impulzus deriváltja a pontrendszer teljes $m = \sum_{i=1}^n m_i$ tömegének és a SÚLYPONT GYORSULÁSÁNAK a szorzata, azaz*

$$\dot{\mathbf{I}} = m \mathbf{a}_S. \quad (2.40) \quad \spadesuit$$

Figyelembe véve a 2.33. megjegyzést, helyesebb lenne súlypont helyett *tömegközéppontról* beszélni, hiszen a súlypont definíciójában nem az anyagi pontok súlyai, hanem a tömegeik szerepelnek. Azonban mivel a műszaki mechanikában szinte kizárólagosan a „súlypont” elnevezést használják, mi is megmaradunk ennél a hagyományos elnevezésnél.



2.27. ábra. Anyagi pontrendszer impulzus deriváltja $\dot{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = m \mathbf{a}_S$, ahol a súlypont gyorsulása $\mathbf{a}_S = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \mathbf{a}_i$.

2.27. tétel. IMPULZUSTÉTEL ANYAGI PONTRENDSZERRE.

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}_k \quad (\text{differenciális alak}), \quad \mathbf{I}(t_2) - \mathbf{I}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k dt \quad (\text{integrál alak}), \quad (2.41)$$

ahol $\mathbf{F}_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ az n testből álló anyagi pontrendszerre ható külső erők eredője.

Bizonyítás:

A differenciális alak az anyagi pontrendszerekre vonatkozó

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij}, \quad i = 1 \dots n \quad (2.42)$$

egyenletek (lásd (2.7)) összegzéséből adódik. A bal oldalon álló tagok összege, (2.38) figyelembevételével:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \frac{d}{dt} m \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i}{m} = \dot{\mathbf{I}}. \quad (2.43)$$

A (2.42) egyenlet jobb oldalán elkülönítve láthatók a külső és belső erők. Az összegzés eredménye

$$\sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij}, \quad (2.44)$$

ahol (2.8) miatt a belső erőkre vonatkozó összegzés eredménye nulla. Tehát csak a külső erők eredője marad meg, a tétel állításának megfelelően. Az integrál alak ezután idő szerinti integrálással adódik. ♠

Az anyagi pontrendszerre kimondott impulzustétel jelentőségét mutatja, hogy ebből levezethető Newton II. és III. törvénye is, tehát tömörebb lenne az „alapigazságaink” rendszere, ha ezt a két törvényt kicserélnék a (2.27.) tétellel.

2.34. megjegyzés: A lendület (és a később bevezetendő perdület) fogalma általánosítható: elektrodinamikai feladatokban az *elektromos tér* is rendelkezhet impulzussal és perdülettel. Ez az oka annak, hogy például mozgó töltések kölcsönhatása során Newton harmadik törvénye mechanikai értelemben nem feltétlenül teljesül. ♣

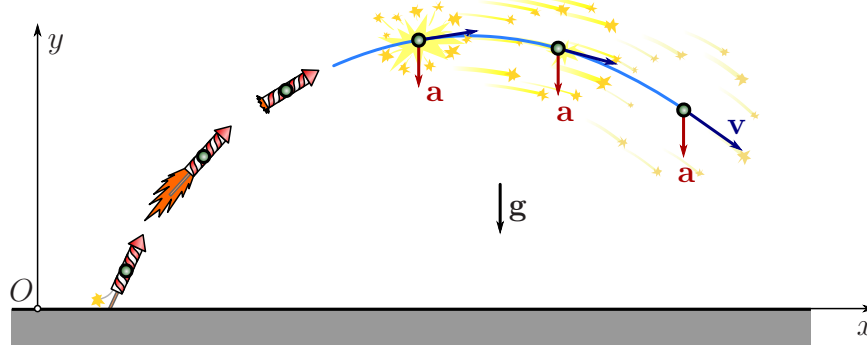
A 2.26. következmény és a 2.27. tétel alapján kimondható az alábbi tétel:

2.28. tétel. SÚLYPONT (TÖMEGKÖZÉPPONT) TÉTEL. *Anyagi pontrendszer pontjai úgy mozognak a rájuk ható erők hatása alatt, hogy a közös súlypont \mathbf{a}_S gyorsulásának és a rendszer teljes m tömegének szorzata a külső erők \mathbf{F}_k eredőjével egyenlő, azaz*

$$m\mathbf{a}_S = \mathbf{F}_k. \quad (2.45)$$



A súlypont tételnek megfelelően, a belső erők nem befolyásolják a súlypont mozgását. Ezért például egy ferdén kilőtt tűzijáték rakéta súlypontja a töltet szétrobbanása után is az eredeti parabola pályát követi, a 2.28 ábrának megfelelően.



2.28. ábra. Szétrobbanó tűzijáték rakéta darabjainak súlypontja a rakéta eredeti parabolapályáját követi.

A súlypont tétel rávilágít arra is, hogy az anyagi pont modellje számos gyakorlati feladatban felhasználható. Ha egy kiterjedt test forgásától eltekinthetünk vagy nem akarjuk meghatározni, akkor a test mozgásának vizsgálata visszavezethető a súlypontjába képzelhető anyagi pont mozgására.

Ugyanakkor a belső erők is komoly hatással lehetnek a *mechanikai rendszer* egyes elemeinek mozgására. Itt csak a forgórészek kiegyensúlyozatlanságának problémáját említjük meg (3.5 fejezet), ami káros rezgésekhez vezethet számos gép működése során.

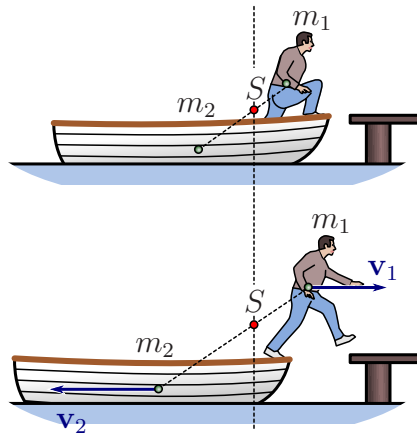
Fontos speciális eset, amikor a külső erők eredője nulla. Ilyenkor a pontrendszer impulzusa megmarad:

2.29. következmény. Az IMPULZUSMEGMARADÁS (LENDÜLETMEGMARADÁS) TÉTELE. *Ha a t_1 és t_2 időpontok között az anyagi pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a pontrendszer impulzusa állandó marad.*

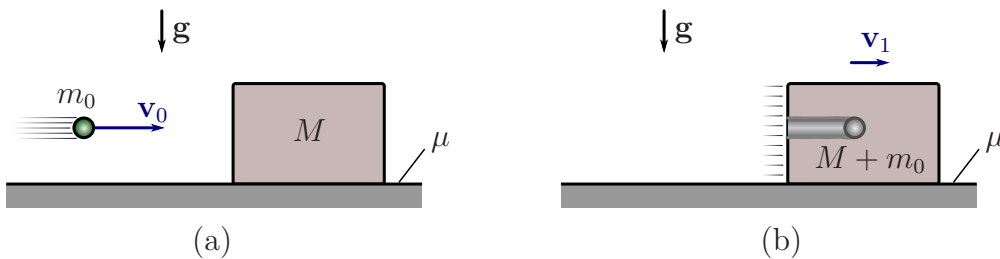


Az impulzusmegmaradás tételét számos feladatban alkalmazhatjuk; segítségével sok jelenségre adhatunk kvalitatív magyarázatot. Például ha valaki kilép egy álló csónakból, akkor a csónak a parttól ellökődik (2.29 ábra), puskalövés leadásakor pedig a puska „visszarúg” – mindkét esetben elhanyagolhatjuk a külső erők hatását, tehát a csónakból és utasából illetve a puskából és a lövedékből álló rendszer súlypontjának helyben kell maradnia.

2.30. példa: *Az $m_0 = 30$ g tömegű lövedék $v_0 = 300$ m/s sebességgel csapódik bele egy $M = 3$ kg tömegű, vízszintes talajra tett dobozba. Az ütközés – melynek időtartama $t = 0.01$ s – tökéletesen rugalmatlan, azaz a lövedék és a doboz az ütközés után együtt mozog. A talaj és a doboz közti súrlódási tényező $\mu = 0.1$. Mekkora sebességgel indul el a dobozból és lövedékből álló test?*



2.29. ábra. Csónakból való kilépéskor a csónak ellökődik a parttól, míg a csónak és utas közös súlypontja helyben marad. Az ábra az $m_2 < m_1$ esetet mutatja.



2.30. ábra. M tömegű dobozba becsapódó m_0 tömegű puskagolyó. Sebességállapot ütközés előtt (a) és után (b).

Megoldás:

Feltesszük, hogy az ütközés során ébredő erő sokkal nagyobb, mint a dobozra ható többi erő, ezért a talaj és a doboz közötti súrlódási erőt elhanyagoljuk az ütközés időtartama alatt. Ebből következik, hogy a rendszer teljes impulzusa nem változik az ütközés során. Az ütközés előtti I_0 és utáni I_1 impulzus nagyságát az alábbi alakban fejezhetjük ki:

$$I_0 = m_0 \cdot v_0 + M \cdot 0 = 9 \frac{\text{kg m}}{\text{s}},$$

$$I_1 = (m_0 + M)v_1. \quad (2.46)$$

Az impulzusmegmaradásból következően $I_1 = I_0$, amiből az ütközés utáni sebesség

$$v_1 = \frac{m_0 v_0}{m_0 + M} \approx 2.97 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (2.47)$$

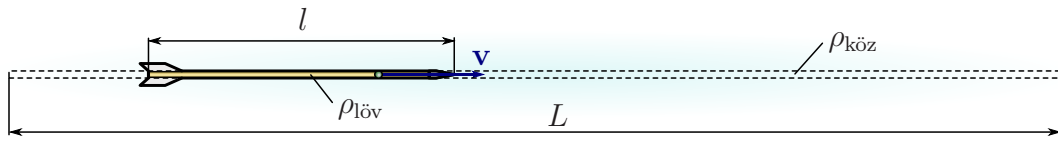
Ellenőrizzük, hogy jogos volt-e a súrlódási erő elhanyagolása! Az ütközési erő nagyságrendjére a doboz impulzusának megváltozásából következtethetünk:

$$\bar{F}_{\text{ütk}} = \frac{Mv_1}{t} \approx 891 \text{ N}, \quad (2.48)$$

ami valóban sokkal nagyobb, mint az $F_S = \mu Mg = 2.943 \text{ N}$ nagyságú súrlódási erő. ♠

2.31. példa: Adjunk becslést arra, hogy egy \mathbf{v} sebességgel a levegőben kilőtt, adott méretű lövedék milyen távolságot tehet meg, mielőtt megáll!¹³

¹³Ezt a problémát maga Newton is megvizsgálta; ebben a feladatban is az ő gondolatmenetét követjük.



2.31. ábra. Egy v sebességgel kilőtt, l hosszúságú nyílvevő repülése során a közeg sűrűségével és a megtett L távolsággal arányos tömegű levegőt lök félre. Repülés közben fokozatosan átadja saját l hosszával és sűrűségével arányos impulzusát a közegnek, ezért a lövés L hatótávolsága közelítőleg egyenesen arányos a lövedék l hosszával.

Megoldás:

Abból indulunk ki, hogy a lövedék akkor áll meg, amikor teljes impulzusát átadta az útjába eső közegnek, amit maga elöl félrelök. Feltéve, hogy a félrelökött közeg sebessége nagyjából megegyezik a lövedék sebességével, a két tömegnek is meg kell egyeznie egymással. Legyen a lövedék keresztmetszete A , hossza l , sűrűsége ρ_{lov} , a közeg sűrűsége pedig $\rho_{\text{köz}}$! Ha a lövedék L hosszúságú utat tesz meg (lásd 2.31 ábra), akkor $AL\rho_{\text{köz}}$ tömegű közeget taszít félre, azaz a két tömeg egyenlősége miatt

$$AL\rho_{\text{köz}} = Al\rho_{\text{lov}}, \quad (2.49)$$

amiből

$$L = \frac{\rho_{\text{lov}}}{\rho_{\text{köz}}} l, \quad (2.50)$$

tehát a közegbe való behatolás L távolsága a lövedék l hosszával arányos!

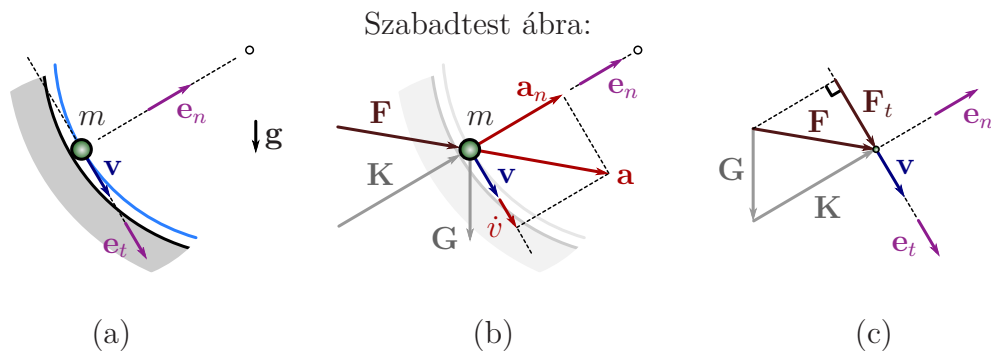
A fa és a levegő sűrűségének aránya körülbelül 500, ezért a fentiek szerint egy 1 m hosszú nyílvevővel nagyjából 500 m-re lehet ellőni. A honfoglalás kori magyarok reflexijainak mai másolatai nagyjából 200 m-re hordanak, modernebb konstrukciókkal elérhető a 600-700 m-es lőtávolság is [19]. Tekintetbe véve, hogy milyen bonyolult áramlás alakul ki a nyílvevő körül, a bemutatott egyszerű számítás jó nagyságrendi becslésnek tekinthető. ♠

Az impulzusmegmaradás tételének további fontos következménye az, hogy külső erők nélkül (amikor ún. zárt rendszert vizsgálunk), a súlypont gyorsulása nulla, tehát a súlypont-hoz inerciarendszert rögzíthetünk, és az itt felvett koordináta-rendszerben számos feladat kezelése lényegesen leegyszerűsödik – ezt az eljárást leginkább csillagászati problémákban alkalmazzák.

2.4.2. Teljesítménytétel

A dinamika alaptételében a vizsgált anyagi pont teljes gyorsulásvektora szerepel, azaz a tangenciális és a normális gyorsulás vektori összege. A gyakorlati feladatok nagy részében a normális gyorsulás azzal hozható kapcsolatba, hogy a test valamilyen adott kényszerfelületen vagy kényszerpályán mozog. Mivel a kényszereket biztosító kényszererők pontos értéke sok esetben lényegtelen, ilyenkor célszerű külön vizsgálni a dinamika alaptételének tangenciális irányú komponens egyenletét.

Ezt nemcsak a vektor alakban felírt egyenletek megfelelő komponensekre bontásával tehetjük meg, hanem – kissé eltérő formában – a skaláris szorzat tulajdonságainak kihasználásával is. Az $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ egyenlet tangenciális (sebességgel párhuzamos) irányú vetületi egyenletét a sebesség irányú tangenciális egységvektorral történő skaláris szorzás segítségével kaphatjuk meg (lásd 1.5 egyenlet és 2.32 ábra).



2.32. ábra. (a) Kényszerpályán mozgó anyagi pont. (b) Az anyagi pont szabadtest ábrája, amin az $\mathbf{F} = \mathbf{K} + \mathbf{G}$ eredő erőt tüntettük fel. (c) A teljesítménytétel az eredő erőnek csak a sebességgel párhuzamos \mathbf{F}_t komponensét veszi figyelembe, ezért olyan egyenletre jutunk, melyben a sebességre merőleges \mathbf{K} kényszererő nem jelenik meg.

Következésképpen,

$$m\mathbf{a} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{F} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (2.51)$$

Mivel a vektorok abszolút értékével való számítás nehézkes, a $|\mathbf{v}|$ -vel való osztástól tekintsünk el:

$$m\mathbf{a}\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{v}. \quad (2.52)$$

A fenti egyenlet jobb oldalán álló kifejezést az \mathbf{F} erő teljesítményének nevezzük.

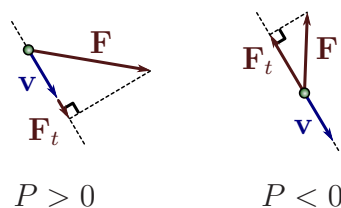
2.32. definíció. Az \mathbf{F} erő TELJESÍTMÉNYE az \mathbf{F} erőnek és az erő támadáspontjában lévő anyagi pont \mathbf{v} sebességének skaláris szorzata:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.53)$$

A teljesítmény mértékegysége W (Watt). $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ Nm/s}$. ♣

Anyagi pont esetében a ható erők támadáspontja ugyanaz a geometriai pont, így az összes teljesítmény számításakor minden erővektort ugyanazzal a sebességvektorral kell megszorozni. Tehát az összegzett teljesítmény egyenlő az eredő erő teljesítményével. A fenti definíció akár merev testekre ható erő teljesítményének számítására is használható (lásd 3.30. tétel).

Nagyon fontos, hogy a teljesítmény előjeles skalár mennyiség! Ha az erő sebesség irányú vetülete a sebességgel egyező irányú (gyorsít), akkor a teljesítmény pozitív, ellenkező esetben negatív, amint a 2.33 ábra mutatja.



2.33. ábra. A P teljesítmény előjele az erő és a sebesség egymáshoz viszonyított irányától függ.

Most térjünk rá a (2.52) egyenlet bal oldalának vizsgálatára. Az 1.9. definíció szerint $m\mathbf{a}\mathbf{v} = ma_t|\mathbf{v}|$, ami – várakozásainknak megfelelően – a tangenciális gyorsulásról hordoz információt.

Az alkalmazások szempontjából előnyös, ha az előjeles v pályasebesség és annak deriváltja, a pályagyorsulás segítségével fejezzük ki (2.52) bal oldalát:

$$m\mathbf{a}\mathbf{v} = m\dot{v}v. \quad (2.54)$$

Arra törekszünk, hogy a dinamika alaptételéhez ($\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$) hasonló alakú differenciálegyenletet kapjunk, azaz kell keresnünk egy megfelelő fizikai mennyiséget, aminek az idő szerinti deriváltja éppen $m\mathbf{a}\mathbf{v}$. Mivel $m\mathbf{a} = \dot{\mathbf{I}}$ és a (2.52) egyenlethez egy sebességgel való szorzással jutottunk, célszerű először a lendület és a sebesség szorzatával, az $\mathbf{I}\mathbf{v} \equiv m\mathbf{v}\mathbf{v} = mv^2$ kifejezés deriváltjával próbálkozni:

$$\frac{d}{dt}m\mathbf{v}\mathbf{v} = m\mathbf{a}\mathbf{v} + m\mathbf{v}\mathbf{a} = 2m\mathbf{a}\mathbf{v} = 2m\dot{v}v. \quad (2.55)$$

Ez a szükséges kifejezés kétszerese, tehát (2.52) bal oldala a *kinetikus energiának* nevezett $1/2 m\mathbf{v}\mathbf{v} \equiv 1/2 mv^2$ kifejezés deriváltjával egyenlő:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\dot{v}v. \quad (2.56)$$

2.33. definíció. *Anyagi pont KINETIKUS (MÁS NÉVEN MOZGÁSI) ENERGIÁJA:*

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.57)$$

A *kinetikus energia mértékegysége* J (*Joule*). $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$. ♣

A fentieket összefoglalva, kimondható a következő tétel:

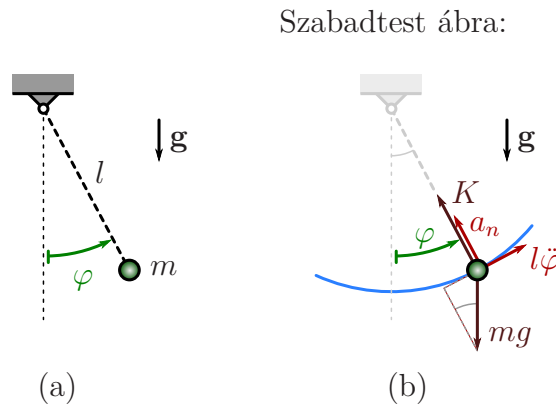
2.34. tétel. TELJESÍTMÉNYTÉTEL. *Egy anyagi pontra ható erők összegzett teljesítménye egyenlő az anyagi pont mozgási energiájának idő szerinti deriváltjával:*

$$\dot{T} = P. \quad (2.58)$$



2.35. megjegyzés: A kinetikus energia nem tartalmaz információt a sebesség irányáról, csak annak nagyságáról. Ennek megfelelően, az idő szerinti deriváltja is a sebesség nagyságának változásával kapcsolatos. Érdekes megfigyelni, hogy a teljesítménytétel nem alkalmazható az anyagi pont indulásának pillanatában, azaz $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sebesség mellett, hiszen akkor a teljesítmény nulla. Ez nem okoz ellentmondást, hiszen a teljesítménytétel a dinamika alaptételének sebességgel való skaláris szorzásából származtatható, így nulla sebességnél értelemszerűen a semmitmondó $0 = 0$ egyenletre vezet. Az indulás pillanatában ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) a kinetikus energia idő szerinti első deriváltja nulla, második deriváltja viszont már bármilyen nem nulla gyorsulás esetében pozitív. ♣

2.35. példa: *Egy l hosszúságú fonál végére erősített m tömegű anyagi pont (matematikai inga) a nehézségi erőterben végez lengő mozgást. Mekkora a test pályagyorsulása adott φ szögnél, ha a légellenállást elhanyagoljuk?*



2.34. ábra. Matematikai inga (a) és a test szabadtest ábrája (b).

Megoldás:

A megoldás első lépésében szabadtest ábrát rajzolunk, mely a 2.34 ábrán látható. A berajzolt φ szög irányának megfelelően értelmezzük a $v = l\dot{\varphi}$ pályasebesség és $\dot{v} = l\ddot{\varphi}$ pályagyorsulás előjelét.

A kötélről átadódó kényszererő merőleges a sebességre, tehát teljesítménye nulla. Az anyagi pontra ható nehézségi erő teljesítménye pedig

$$P = m\mathbf{g}\mathbf{v} = -mgv \sin(\varphi), \quad (2.59)$$

hiszen ha v pozitív, akkor az anyagi pont φ növekedése irányában mozog, így $\mathbf{g}\mathbf{v} < 0$.

A kinetikus energia $T = 1/2 mv^2$, aminek a deriváltja

$$\dot{T} = m\dot{v}v. \quad (2.60)$$

A teljesítménytétel értelmében tehát $m\dot{v}v = -mgv \sin(\varphi)$, azaz a pályagyorsulás

$$\dot{v} = -g \sin(\varphi). \quad (2.61)$$



A fenti példában a kötélerő szerepe a körpályán történő mozgás – mint kényszerfeltétel – biztosítása. Mivel teljesítménye nullának adódott, a kötélerő nem jelent meg a teljesítménytételben. A dinamikában kitüntetett szerepűek az ilyen tulajdonságú, úgynevezett *ideális kényszerek*. Az ideális kényszer definíciójához ki kell terjeszteni a teljesítmény fogalmát anyagi pontrendszer esetére. Ezt a teljesítménytétel alábbi általánosításán keresztül tesszük meg:

2.36. tétel. n darab egymással kölcsönható anyagi pontból álló pontrendszer esetében

$$\dot{T} = P, \quad (2.62)$$

ahol

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \quad (2.63)$$

a pontrendszer mozgási energiája és

$$P = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij} \mathbf{v}_i \quad (2.64)$$

a pontrendszerre ható külső (\mathbf{F}_i) és belső (\mathbf{B}_{ij}) erők összegzett teljesítménye.

Bizonyítás:

Mind a kinetikus energia, mind a teljesítmény esetében csupán összegeztük az egy-egy anyagi pontra vonatkozó, a teljesítménytételt kielégítő mennyiségeket, tehát a tétel állítása igaz marad. Fontos, hogy nemcsak az \mathbf{F}_i -vel jelölt külső, hanem a \mathbf{B}_{ij} belső erőknek is lehet nullától különböző teljesítménye, hiszen két különböző sebességű tömegpont esetében $\mathbf{B}_{12} = -\mathbf{B}_{21}$ ellenére $\mathbf{B}_{12}\mathbf{v}_1 + \mathbf{B}_{21}\mathbf{v}_2 \neq 0$ (az első index utal arra, hogy melyik testre hat az erő). ♠

A teljesítménytétel egyetlen skalár egyenletet szolgáltat, ezért nagyon jól használható összetett, de egy szabadsági fokú mechanikai rendszerek vizsgálata során. Azonban – amint láttuk a 2.2 fejezetben – csúszási súrlódás esetén összefügg a súrlódási erő a normálerővel, ezért hiába egy szabadsági fokú a rendszer, a tangenciális gyorsulás kiszámításához két egyenletet kell felírni. Következésképpen, az ilyen feladatok nem oldhatók meg a teljesítménytétel segítségével (lásd a 2.62. feladatot). Ideális kényszerek esetében nem lép fel ez a probléma.

2.37. definíció. IDEÁLIS KÉNYSZER: *olyan kényszer, amit biztosító kényszererők együttes teljesítménye nulla.*¹⁴ ♣

Ha a kényszert a \mathbf{v}_i támadáspontú \mathbf{F}_k külső erő biztosítja, akkor ideális kényszer esetén

$$P = \mathbf{F}_k \mathbf{v}_i = 0. \quad (2.65)$$

Ha a mechanikai rendszer i és j indexű elemei között a \mathbf{B}_{ij} és \mathbf{B}_{ji} erők biztosítanak kényszerkapcsolatot, akkor pedig

$$\mathbf{B}_{ij}\mathbf{v}_i + \mathbf{B}_{ji}\mathbf{v}_j = 0, \quad (2.66)$$

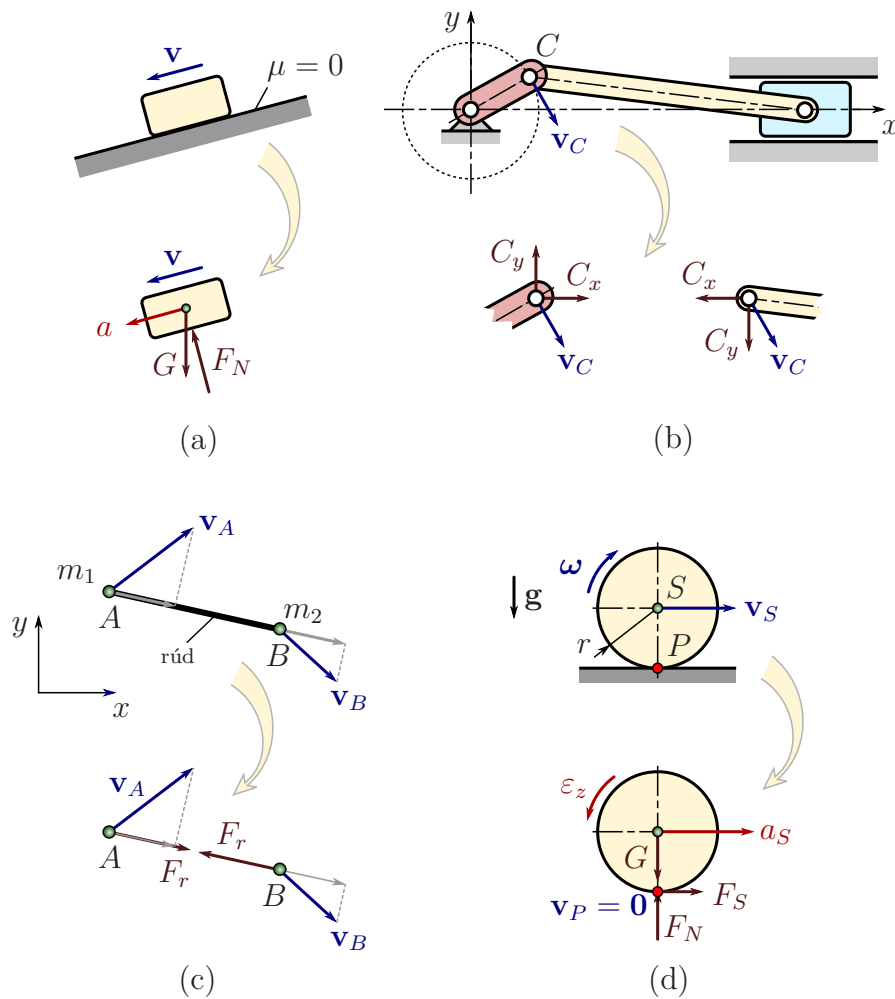
ahol \mathbf{v}_i a \mathbf{B}_{ij} erő, \mathbf{v}_j pedig a \mathbf{B}_{ji} erő támadáspontjának sebessége és $\mathbf{B}_{ij} = -\mathbf{B}_{ji}$.

A fenti definícióból nem következik, hogy ideális kényszerek esetében a \mathbf{B}_{ij} és \mathbf{B}_{ji} kényszererők támadáspontjai azonos sebességűek – elegendő, ha a sebességek kényszererőkkel párhuzamos komponensei egyeznek meg.

Példák ideális kényszerekre:

- Egy rögzített lejtőről a rajta súrlódásmentesen csúszó hasábra ható normálerő merőleges a sebességre, ezért teljesítménye nulla, ideális kényszert biztosít (2.35/a ábra).
- Egy mechanizmus két elemének csuklós kapcsolata esetében a kényszerfeltétel az, hogy a két test csuklóba eső pontjai együtt kell hogy mozogjanak. Ezt a kényszerfeltételt biztosítják a két testre egymásról átadódó belső erők. Ebben az esetben a két test azonos sebességű pontjára ható, ellentétes irányú erőkről van szó, ezek együttes teljesítménye tehát nulla (2.35/b ábra).
- Ha két anyagi pont elhanyagolható tömegű merev rúddal (vagy húzott kötéllel) van összekötve, akkor a kényszerfeltételből következően a két anyagi pont rúdirányú sebességkomponenseinek egyenlőknek kell lenniük az 1.31. következmény miatt. Ugyanakkor a két anyagi pontra ható rúdirányú kényszererők ellentétes értelműek. Így a kényszererők együttes teljesítménye nulla (2.35/c ábra). Ebből következik, hogy *egy merev testen belüli belső erők teljesítménye is mindig nulla.*

¹⁴Az ideális kényszerek köre valójában bővebb, mint amit ebben a definícióban megadtunk. A szakirodalomban azt nevezik ideális kényszernek, amikor a kényszererők ún. virtuális teljesítménye nulla – így az időtől függő kényszerek is tekinthetők ideálisnak (lásd a 2.49. példát).



2.35. ábra. Példák ideális kényszerekre.

- Gördülés során a talajjal érintkező pont sebessége nulla, tehát a talajról átadódó, a gördülést biztosító kényszererő teljesítménye is nulla (2.35/d ábra).

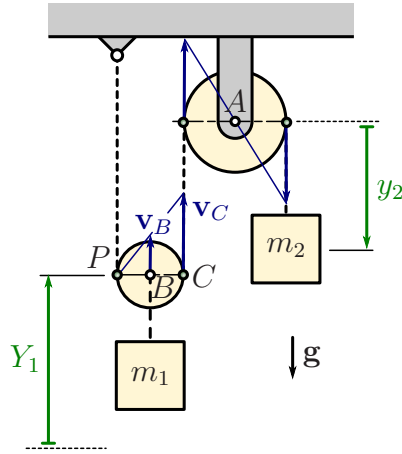
A teljesítménytétel több szabadsági fokú rendszerek esetében is érvényes, de ekkor ritkán használják, hiszen csak egyetlen skalár egyenletet szolgáltat. Leginkább több testből álló, de egy szabadsági fokú mechanikai rendszerekre érdemes alkalmazni. Ehhez ki kell fejezni az összes test koordinátáját egyetlen, alkalmasan választott koordinátával – vagy a koordináták deriváltjai között kell megadni a megfelelő összefüggést.

A választott koordináta lehet elmozdulás vagy (merev testek esetében) szögelfordulás is, a megoldás menete mindkét esetben ugyanolyan. Ezért ezt a koordinátát *általános koordinátának* nevezik.

Ha csak ideális kényszerek korlátozzák a rendszer elemeinek mozgását, akkor a teljesítménytétellel meghatározható az általános koordináta második deriváltja, amiből számítható a többi test gyorsulásállapota is. A következő példában ezt az eljárást mutatjuk be.

2.38. példa: A 2.16. példa megoldása teljesítménytétellel. A 2.36 ábrán látható mechanikai rendszer két elhanyagolható tömegű csigából, a rajtuk átvett kötélből, továbbá a kötélnél szabad végére rögzített m_1 tömegű anyagi pontból, valamint a mozgócsgi B pontjához kötéllel rögzített m_2 tömegű anyagi pontból áll. A rendszer elemei a függőleges síkban, nehézségi erőterben

mozognak. A kötélt ideális, azaz elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan és nem csúszik meg a csigákon. Határozzuk meg a két tömegpont gyorsulását a teljesítménytétel segítségével!



2.36. ábra. A 2.16. példa szerkezeti ábrája, a teljesítménytétel alkalmazásához jobban illeszkedő koordinátákkal. A sebesség eloszlása is látható a csigák vízszintes átmérőjénél.

Megoldás:

A 2.16. példa tapasztalatai – és szemléletünk – alapján tudjuk, hogy az m_1 és m_2 tömegű testek ellentétes irányban mozognak. Vegyük fel a koordinátákat ennek figyelembevételével, azaz mérjük az m_2 tömegű test helyzetét megadó y_2 koordinátát az A csukló vonalától lefelé, a B pont helyét megadó Y_1 koordinátát pedig egy tetszőleges helyzettől felfelé! Y_1 -et választjuk általános koordinátának. Most is hasonlóan lehetne megadni a két koordináta kapcsolatát, mint a 2.16. példában, de ezúttal más megközelítéssel írjuk fel a kötélt állandó hosszának megfelelő kényszerfeltételt.

A mozgócsiga úgy tekinthető, hogy az a kötélt álló szakaszán gördül, ezért P sebességpólusa a csiga és a kötélt érintkezési pontjában található. Mivel egy merev test pontjainak sebessége arányos a sebességpólustól mért távolsággal, a 2.36 ábra szerint $v_C = 2v_B$. A C pont a kötélt mozgó részével azonos nagyságú sebességgel mozog, ezért $v_C = \dot{y}_2$ (ami pozitív, ha lefelé mozog a (2)-es test). Mivel $v_B = \dot{Y}_1$ (ez pozitív, ha felfelé mozog az (1)-es test), ezért

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= 2\dot{Y}_1 \quad \text{és idő szerinti deriválással} \\ \ddot{y}_2 &= 2\ddot{Y}_1, \end{aligned} \quad (2.67)$$

ahol $\dot{Y}_1 \equiv v_1$, $\dot{y}_2 \equiv v_2$, $\ddot{Y}_1 \equiv a_1$ és $\ddot{y}_2 \equiv a_2$ a két test sebessége illetve gyorsulása. Ezeket a feltételeket be tudjuk helyettesíteni a teljesítménytételhez felírandó kifejezésekbe.

A két csiga tömege elhanyagolható, ezért azok nem járulnak hozzá a rendszer kinetikus energiájához, így

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \equiv \frac{1}{2}m_1\dot{Y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 \Rightarrow \dot{T} = m_1\dot{Y}_1 \ddot{Y}_1 + m_2\dot{y}_2 \ddot{y}_2. \quad (2.68)$$

A (2.67) kényszerfeltételeket kihasználva

$$\dot{T} = (m_1 + 4m_2)\dot{Y}_1 \ddot{Y}_1. \quad (2.69)$$

A kényszerek ideálisak, mert nem lép fel súrlódási erő, a kötélpedig nyújthatatlan. Ezért csak az aktív erőknek – a két tömegpontra ható nehézségi erőknek – van nullától különböző teljesítménye. Ha felfelé, Y_1 növekedésének irányban mozog az m_1 tömegű test, akkor a rá ható nehézségi erő teljesítménye negatív. Ugyanakkor a kényszerfeltétel miatt az m_2 tömegű test lefelé mozog, ezért az m_2g erő teljesítménye pozitív. Tehát a teljesítmény

$$P = -m_1g\dot{Y}_1 + m_2g\dot{y}_2 = (2m_2 - m_1)g\dot{Y}_1 \quad (2.70)$$

alakban fejezhető ki. A teljesítménytétel szerint $(m_1 + 4m_2)\dot{Y}_1 \ddot{Y}_1 = (2m_2 - m_1)g\dot{Y}_1$, tehát

$$\ddot{Y}_1 \equiv a_1 = \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2}g, \quad (2.71)$$

ami megegyezik a 2.16. példában kapott eredménnyel, hiszen most ahhoz képest fordítva – a feladathoz jobban illeszkedő módon – vettük fel az Y_1 koordinátát. ♠

2.4.3. Munkatétel

A dinamika alaptételének integrálásával egy gyakorlatban jól használható tételre, az impulzustételre jutottunk. Ehhez hasonlóan, a teljesítménytétel idő szerinti integrálása is egy fontos tételre vezet, a *munkatételre*.

2.39. definíció. Egy P teljesítményű erőrendszer által a t_1 és t_2 (ahol $t_2 > t_1$) időpontok között végzett MECHANIKAI MUNKA (vagy röviden munka):

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P \, dt. \quad (2.72)$$

A munka mértékegysége J (Joule). ♣

2.40. tétel. MUNKATÉTEL. Az anyagi pont vagy pontrendszer mozgási energiájának t_1 és t_2 időpontok közötti megváltozása egyenlő a rá ható erőrendszer által végzett munkával:

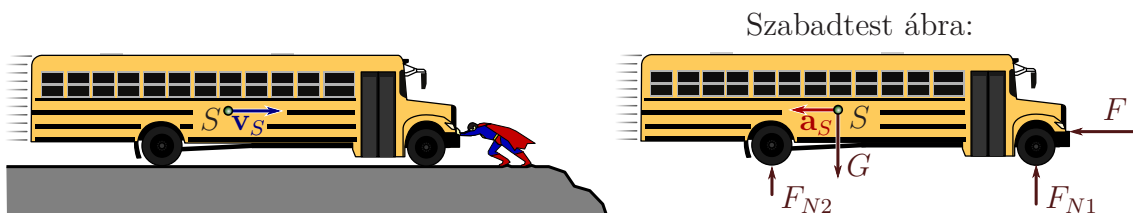
$$T(t_2) - T(t_1) = W_{12} \quad (2.73)$$

♠

Bizonyítás:

Az állítás a teljesítménytétel integrálásával látható be. ♠

2.41. példa: Számítsuk ki, hogy a 2.22. példában mekkora munkát végzett a fékező erő (2.37 ábra)!



2.37. ábra. Autóbusz megállítása.

Megoldás:

A 2.22. példa szerint az autóbusz sebessége 10 s alatt csökken $v(0) = 0.1$ m/s-ról nullára, azaz $v(t) = 0.1 - 0.01t$ m/s. Feltételezve, hogy a fékező erő állandó, annak nagysága $F = 200$ N. Mivel a fékező erő és a sebesség iránya ellentétes, az időben változó teljesítmény

$$P(t) = -v(t)F = -20 + 2t \text{ W}, \quad (2.74)$$

a végzett munka pedig definíció szerint

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_0^{10} -20 + 2t dt = [-20t + t^2]_0^{10} = -200 + 100 = -100 \text{ J}. \quad (2.75)$$

A munkatétel szerint ennyivel kellett csökkennie a 20 t tömegű autóbusz mozgási energiájának. Valóban,

$$T_1 = \frac{1}{2}mv(0)^2 = \frac{1}{2}20000 \cdot 0.01 = 100 \text{ J} \quad \text{és} \quad T_2 = 0, \quad (2.76)$$

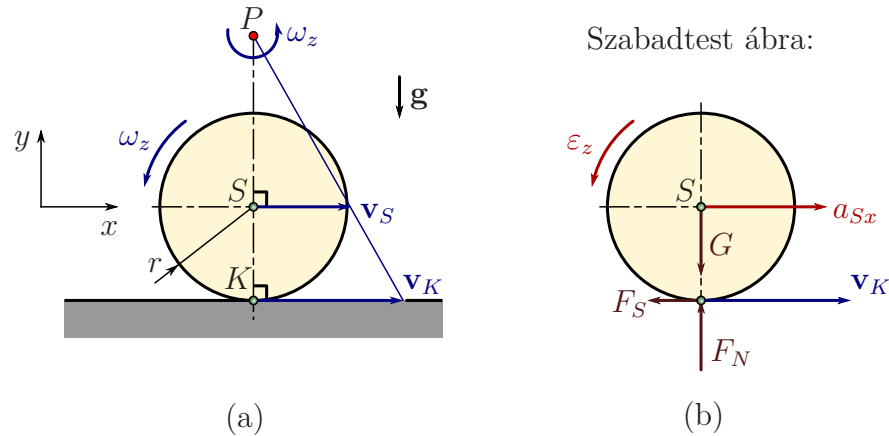
tehát

$$T_2 - T_1 = -100 \text{ J}. \quad (2.77)$$

Ez utóbbi eredmény független attól, hogy pontosan milyen ütemben csökkent az autóbusz sebessége. Következésképpen, nem követtünk el hibát azzal, hogy a fékező erőt állandónak tételeztük fel. ♠

2.42. példa: Határozzuk meg a súrlódási erő munkáját egy csúszva gördülő korong esetében!**Megoldás:**

Úgynevezett csúszva gördülés során (2.38 ábra) a talajjal érintkező K pont (kontakt pont) sebessége nem nulla, ezért a csúszási súrlódási erő munkát tud végezni.



2.38. ábra. Csúszva gördülő kerék sebességállapota (a) és szabadtest ábrája (b). A K kontakt pont sebességvektorát nem szükséges feltüntetni a szabadtest ábrán. Csúszási súrlódásos feladatokban azonban célszerű berajzolni, mert a súrlódási erő iránya azzal ellentétes.

Mivel csúszás közben az \mathbf{F}_S súrlódási erő mindig ellentétes irányú az érintkezési pont \mathbf{v}_K sebességével, a súrlódási erő teljesítménye és munkája negatív, míg az \mathbf{F}_N normálerő teljesítménye nulla. A talajról átadódó $\mathbf{F}_K = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_N$ kényszererő által végzett munka

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_K \mathbf{v}_K dt, \quad (2.78)$$

ahol

$$\mathbf{F}_K = \begin{bmatrix} -\mu F_N \\ F_N \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

A talajjal érintkező pont sebessége

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{SK}, \quad (2.80)$$

ami ellentétes a súrlódási erő irányával. Ha a \mathbf{v}_K sebesség időbeli változása ismert, akkor behelyettesíthető a (2.78) integrálba, ami így kiszámítható. Például ha mind a súlypont gyorsulása, mind a test szöggyorsulása állandó, akkor a kerék súlypontjának sebessége és szögsebessége $v_{Sx} = a_{Sx}(t - t_1) + v_{S1x}$ illetve $\omega_z = \varepsilon_z(t - t_1) + \omega_{1z}$ alakban adható meg, ahol v_{S1x} és ω_{1z} a $t = t_1$ -ben felvett értékeket jelöli. Ezekkel kifejezhető a K pont sebessége:

$$v_{Kx}(t) = a_{Sx}(t - t_1) + v_{S1x} + r(\varepsilon_z(t - t_1) + \omega_{1z}) > 0, \quad (2.81)$$

Tehát a súrlódási erő munkája a t_1 és t_2 időpontok között

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} -\mu F_N v_{Kx}(t) dt = -\frac{\mu F_N}{2} (a_{Sx} + r\varepsilon_z) (t_2 - t_1)^2 - \mu F_N (v_{S0x} + r\omega_{0z}) (t_2 - t_1). \quad (2.82)$$

A feladatban szereplő korong kinetikus energiájának kifejezését csak a 3. fejezetben ismertetjük, ezért azzal most nem foglalkozunk. Azonban előre bocsátjuk, hogy a munkatétel merev testekre is alkalmazható, tehát a fenti képlettel kifejezett munka megadja a korong kinetikus energiájának változását. Egy ezzel kapcsolatos számítás található a 3.37. példában. ♠

A munkatétel jelentőségét az adja, hogy egyes esetekben az erőrendszer által végzett munka – és így a mozgási energia megváltozása – könnyen meghatározható. Ez az oka annak, hogy a fejezet további részében a munka kiszámításának problémájával foglalkozunk.

A munka kiszámítása vonalintegrál segítségével

Egy anyagi pontra ható \mathbf{F} erő munkájának kiszámítása $P = \mathbf{F}\mathbf{v}$ miatt az alábbi képlet alapján végezhető el:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v} dt. \quad (2.83)$$

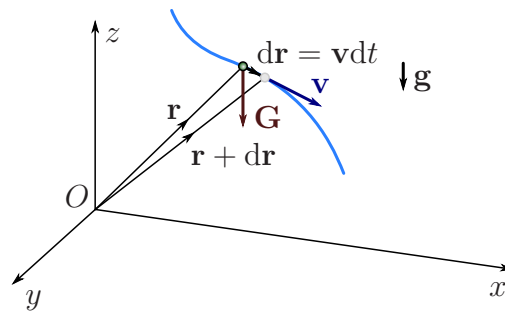
Ha a $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ helyettesítés végrehajtható, akkor a munkát a

$$W_{12} = \int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.84)$$

vonalintegrál alakban is felírhatjuk. Ez a felírási mód alkalmas arra, hogy a munka következő értelmezésére: a pálya mentén kis dt idő alatt $d\mathbf{r}$ -rel elmozduló anyagi pontra ható erőnek és az elmozdulás erővel párhuzamos komponensének a szorzata¹⁵ egy kis elemi dW munkával egyenlő. A kis elemi dW munkákat integrálással összegezve kapjuk meg az erő által az adott pályagörbén végzett munkát (2.39 ábra).

A fenti megközelítés elsősorban akkor használható, ha az anyagi pont valamilyen időben állandó $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőter (lásd 2.20 és 2.41 ábrák) hatása alatt mozog.

¹⁵A vonalintegrálban az \mathbf{F} és $d\mathbf{r}$ vektorok skaláris szorzata szerepel.



2.39. ábra. A \mathbf{G} nehézségi erő által dt idő alatt végzett elemi munka kiszámítása kétféle módon is lehetséges: a teljesítményen alapuló $dW = \mathbf{G}\mathbf{v}dt$ képlettel és az erő irányában történő elmozdulást figyelembe vevő $dW = \mathbf{G}d\mathbf{r}$ formulával.

2.43. definíció. ERŐTÉRNEK nevezzük a térnek azt a tartományát, melyben egy anyagi pontot bármely P pontba helyezve, arra meghatározott, a P pont helyétől és az időtől függő erő hat. Más megfogalmazásban, erőtereknek nevezik azt az $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ alakú vektormezőt, amely a tér minden pontjához erő vektort rendel. Az erőter időben állandó (időtől független), ha minden t pillanatban ugyanazt az erő vektort rendel a tér adott pontjához, azaz kifejezhető $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ alakban. ♣

A műszaki mechanikában a (2.84) képlet helyett a teljesítményen alapuló 2.39. definíciót tekintjük elsődlegesnek. Ennek az az egyik oka, hogy számos feladatban – elsősorban merev testekre ható erők munkájának számításakor – a ható erő nem értelmezhető erőterként és/vagy nem értelmezhető a $d\mathbf{r}$ elmozdulás. Például egy síkmozgást végző test gördülése vagy csúszva gördülése során a talajról átadódó kényszererő csak az érintkezési pontban adódhat át, tehát nem alkot erőteret. Ugyanakkor minden pillanatban más és más anyagi pont érintkezik a talajjal, így a (2.84) képletben szereplő $d\mathbf{r}$ elmozdulás nem értelmezhető.¹⁶ A teljesítményen alapuló (2.83) képlet viszont ekkor is jól használható, ahogy láttuk a csúszva gördülő koronggal kapcsolatos 2.42. példában. „Tiszta” gördülés esetében a munka számítása még egyszerűbb: az érintkezési pont a nulla sebességű sebességpólus (1.65 ábra), tehát egyértelműen látszik, hogy a fellépő tapadási súrlódási erő teljesítménye – és így munkája is – nulla.

A vonalintegrálon alapuló formula alkalmazása azokban az esetekben sem célszerű, amikor az \mathbf{F} erő az anyagi pont sebességétől vagy közvetlenül az időtől is függ: $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$. Ekkor a vonalintegrál kiszámításához be kell vezetni egy s paramétert, amivel kifejezhetők az \mathbf{F} és $d\mathbf{r}$ vektorok. Ezzel a paraméterrel ugyanis a vonalintegrál átalakítható paraméter szerinti integrállá az alábbi módon:

$$\int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s), \dot{\mathbf{r}}(s), t(s)) \cdot \mathbf{r}'(s) ds, \quad (2.85)$$

ahol $\mathbf{r}'(s)$ az $\mathbf{r}(s)$ helyvektor s paraméter szerinti deriváltja. A képletből látható, hogy alkalmazásához a helyvektort, a sebességvektort és az időt is ki kell fejezni az s paraméterrel, ami általában bonyolult feladat. Ugyanakkor (2.85) teljesen megfelel a (2.83) kifejezésnek,

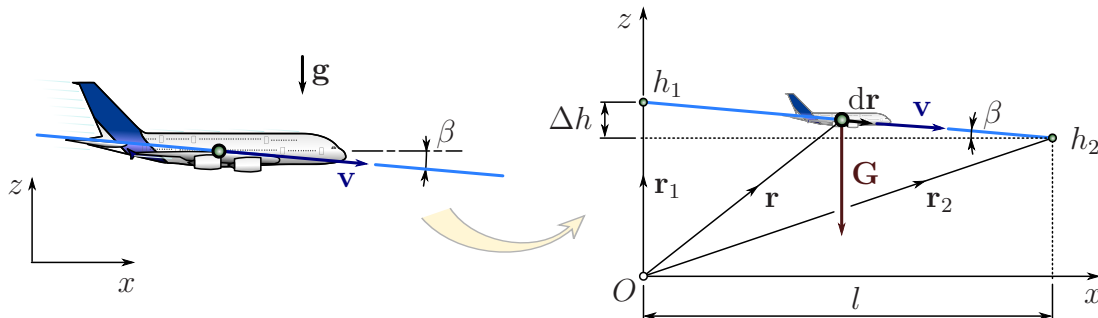
¹⁶További problémát jelent, hogy amikor a sebesség nulla, a dt időtartam nem fejezhető ki az elemi $d\mathbf{r}$ elmozdulással. Ekkor ugyanis az elemi elmozdulás is nulla, a dt idő viszont pozitív, hiszen az idő folyamatosan telik. Ez azt jelenti, hogy a (2.84) képlet felírásához szükséges helyettesítés nem hajtható végre.

ahol a paraméter a t idő. Ha az erő csak a helyvektortól függ, akkor a számítás egyszerűbb:

$$\int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s) ds. \quad (2.86)$$

A vonalintegrál kiszámítását erre az esetre mutatjuk meg a 2.44. példában.

2.44. példa: Számítsuk ki, hogy mekkora munkát végez a nehézségi erőtér, miközben a 2.23. példában vizsgált 500 t tömegű repülőgép a $t_1 = 0$ s pillanatban mért $h_1 = 5000$ m magasságból a vízszintessel $\beta = 5^\circ$ -os szöget bezáró egyenes pályán leereszkedik a $t_2 = 100$ s pillanatban mért $h_2 = 3344$ m magassáig!¹⁷



2.40. ábra. Siklórepülésben haladó repülőgépre ható nehézségi erő munkájának kiszámítása.

Megoldás:

Mivel a repülőgép az állandó nehézségi erőtérben mozog, használható a (2.84) képlet:

$$W_{12} = \int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.87)$$

A vonalintegrál kiszámításához be kell vezetni egy skalár paramétert, ami minden pillanatban jellemzi a repülőgép helyvektorát. A 2.40 ábrán bemutatott koordináta-rendszerben a repülőgép az

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \quad \text{pozícióból az} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

pozícióba kerül, ahol $l = \frac{h_1 - h_2}{\tan(\beta)}$. Ha a z magasságot választjuk paraméternek, akkor a repülőgép helyvektora

$$\mathbf{r}(z) = \begin{bmatrix} \frac{h_1 - z}{h_1 - h_2} l \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

alakban adható meg.

A vonalintegrál z szerinti integrálássá alakítható az alábbi helyettesítéses integrálással:

$$\int_{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{h_1}^{h_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(z)) \cdot \mathbf{r}'(z) dz, \quad (2.90)$$

¹⁷Feltételezve, hogy a repülőgép sebessége egyenletesen (állandó gyorsulással) csökken, átlagsebessége a 2.23. példa adatai alapján 190 m/s. Tehát 100 s alatt 19 km-t tesz meg és mivel a vízszintessel $\beta = 5^\circ$ -os szöget bezáró egyenes pályán halad, magassága $19000 \sin(\beta) \approx 1656$ m-rel csökken.

ahol $\mathbf{r}'(z)$ az $\mathbf{r}(z)$ helyvektor z szerinti deriváltja:

$$\mathbf{r}'(z) \equiv \frac{d\mathbf{r}(z)}{dz} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{h_1-h_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

A nehézségi erő magasságfüggését elhanyagoljuk, azaz

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(z)) \cdot \mathbf{r}'(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mg \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -\frac{l}{h_1-h_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -mg. \quad (2.92)$$

Következésképpen, a nehézségi erő munkája

$$W_{12} = \int_{h_1}^{h_2} -mg \, dz = mg(h_1 - h_2) = 5 \cdot 10^5 \, \text{kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1656 \, \text{m} = 8.12268 \cdot 10^4 \, \text{J}. \quad (2.93)$$

A példa eredménye alapján látható, hogy a vonalintegrállal történő számítás meglehetősen hosszadalmas. A végeredmény azonban azt mutatja, hogy a nehézségi erő munkája csak az erővel párhuzamos elmozdulástól – a magasságkülönbségtől – függ.

Potenciális energia

A (2.72) integrál és a (2.84) vonalintegrál általában függ az anyagi pont pályájától – gondoljunk egy asztallapon csúszó hasábra, melyen a súrlódási erő a megtett úttal arányos (negatív) munkát végez. Ha el kell húznunk a hasábot az A -ból a B pontba, akkor célszerű a kiindulási és végpont között az egyenes pályát választani.

Ezzel szemben, bizonyos erőterekben a végzett munka kifejezhető az ún. potenciálfüggvénynek (más néven potenciális energiának) a pálya végpontjaiban felvett értékeivel, tehát független a pályagörbétől. Ez azzal az előnnyel jár, hogy a (2.83) képletben kijelölt integrálás művelete elkerülhető. Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett könnyíti meg a potenciális energia bevezetése az erőtér által végzett munka kiszámítását.

2.45. definíció. Az \mathbf{F} erőt(eret) POTENCIÁLOSNAK nevezzük, ha kifejezhető egy $U(\mathbf{r}, t)$ skáláris függvény – az ún. POTENCIÁLFÜGGVÉNY vagy POTENCIÁLIS ENERGIA – negatív gradienseként:

$$\mathbf{F} = -\text{grad}_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t), \quad (2.94)$$

ahol

$$\text{grad}_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.95)$$

tehát csak a koordináták szerinti parciális deriválásokat kell elvégezni, az idő szerinti deriválást nem. A potenciális energia mértékegysége J (Joule). ♣

Egy tetszőleges erőtérhez tartozó potenciálfüggvény meghatározásának nincs általános módszere. Azonban számos, a gyakorlatban fontos esetben ismert a potenciális energia függvényalakja.

Példák potenciális erőkre:

- Az $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ nehézségi erőter potenciálfüggvénye $U(\mathbf{r}) = mgz$, hiszen ennek negatív gradiense valóban az \mathbf{F} erővel egyenlő:

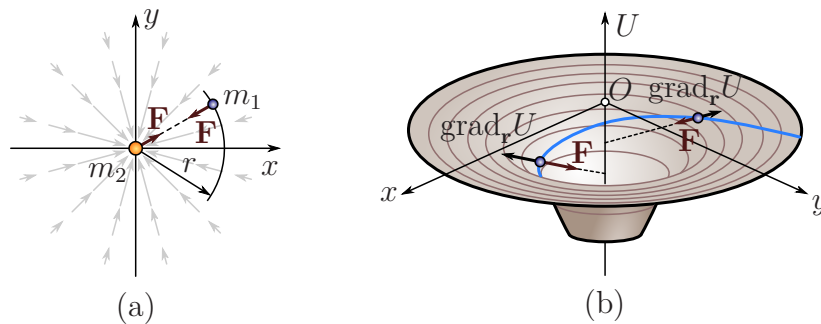
$$-\text{grad } U = - \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

- Az $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$ rugóerő¹⁸ potenciálfüggvénye $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}kx^2$:

$$-\text{grad } U = \begin{bmatrix} -kx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

- Az $\mathbf{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$ gravitációs erőter potenciálfüggvénye (2.41 ábra) $U(\mathbf{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$, ugyanis a gradiens kifejezése az alábbi módon adható meg az (r, θ, ϕ) gömbi koordináta-rendszerben:

$$-\text{grad } U = - \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \phi} \end{bmatrix}_{(r, \theta, \phi)} = \begin{bmatrix} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(r, \theta, \phi)}. \quad (2.98)$$



2.41. ábra. (a) Az m_2 tömegű test gravitációs erőtere, valamint az m_1 és m_2 testekre ható erők egy adott helyzetben. (b) A gravitációs erőter potenciálfüggvényének szemléltetése, ha a két test az xy síkban mozog.

A potenciálfüggvény nem egyértelmű, hiszen ha U_1 egy adott erő potenciálfüggvénye, akkor az U_1 és $U_2 \equiv U_1 + c$ függvények gradiense megegyezik, bármely c konstans esetén. Ezért a potenciális energia *nulla szintjét* bárhol felvehetjük, az éppen vizsgált feladat sajátosságaihoz alkalmazkodva. Sőt, a két potenciálfüggvényből levezethető erők akkor is megegyeznek, ha U_1 és U_2 különbsége csak az idő függvénye, a koordinátáktól pedig nem függ, azaz $U_2 \equiv U_1 + c(t)$. A nulla szint megválasztása után viszont már egyértelműnek (egyértékűnek) kell lennie a potenciálfüggvénynek.

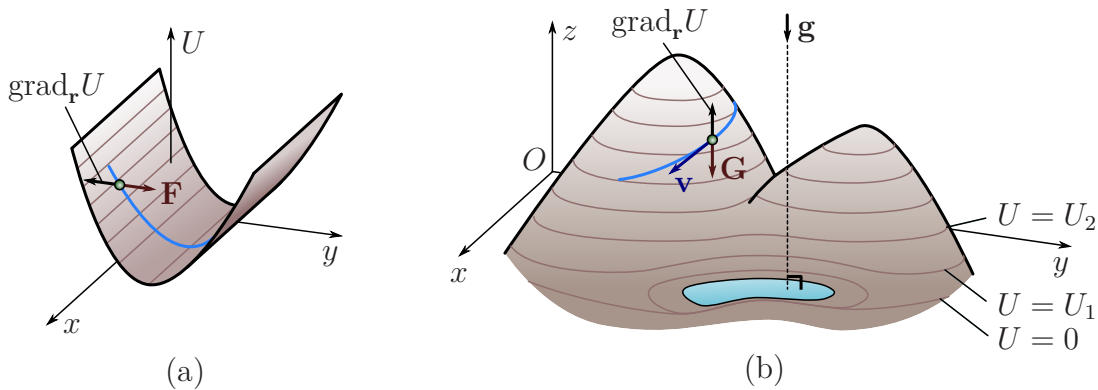
¹⁸A rugóerőt megadó összefüggés is egy erőteret definiál, tehát nevezhetnénk rugó erőternek is.

A 2.44. példában láttuk, hogy a nehézségi erőtér munkája csak az erővel párhuzamos elmozdulástól – a magasságkülönbségtől – függ, tehát egyszerűen kiszámítható a potenciális energia segítségével:

$$W_{12} = mgh_1 - mgh_2 = U(h_1) - U(h_2). \quad (2.99)$$

Ez az eredmény – melyet a 2.51. tételben részletesebben is megvizsgálunk – szintén arra világít rá, hogy a munka kiszámítása során nincs jelentősége a potenciális energia tényleges értékének, csak a kezdeti- és végállapotban felvett értékek *különbségének*. Következésképpen, a feladatokban tetszőlegesen választhatjuk meg a potenciális energia nulla szintjét.

2.46. definíció. Az állandó potenciális energiájú pontokat összekötő, $U(\mathbf{r}) = \text{állandó}$ egyenlettel megadható felületeket SZINTFELÜLETEKNEK nevezzük. ♣



2.42. ábra. (a) Ha a potenciális energia csak az x és y koordinátáktól függ, akkor egy felülettel szemléltethető a potenciális energia értéke. A potenciálfüggvény gradiense az xy síkkal párhuzamos és a szintvonalakra merőleges. (b) A háromdimenziós térben már nem tudjuk minden pontba berajzolni a potenciális energia értékét. Ebben az esetben a szintfelületek alapján következtethetünk a potenciális energia értékére. A nehézségi erő a potenciális energia leggyorsabb csökkenése irányában, a szintfelületekre merőlegesen – függőlegesen – hat. Feladatokban csak a potenciális energia megváltozásának van jelentősége, ezért célszerűen megválasztható a potenciális energia nulla szintje, ahol $U = 0$.

A térképeken látható szintvonalak – melyek az azonos magasságú pontokat kötik össze a felszínen – a nehézségi erőhöz tartozó potenciális energia szintfelületeinek és a domborzatnak a metszéspontjai (2.42 ábra). A nehézségi erő függőlegesen lefelé mutat, tehát merőleges a vízszintes szintfelületekre.

Belátható, hogy a gradiens vektor mindig merőleges a szintfelületekre, tehát általában is igaz, hogy a potenciális erők abban az irányban hatnak, amerre a leggyorsabban csökken a potenciálfüggvény. Ezt támasztja alá az a tapasztalat is, hogy a nyugvó folyadékok felszíne a nehézségi erő szintfelületeivel párhuzamos – azaz vízszintes. Ennek az az oka, hogy ha lenne a nehézségi erőnek a felszínnel párhuzamos komponense, akkor az azonnal elmozdítaná a folyadék részecskéit. A folyadék tehát csak vízszintes felszín mellett lehet egyensúlyban.

2.36. megjegyzés: Elektromosságban a potenciált az egységnyi töltésre jutó potenciális energiaként definiálják. A mechanikában is be lehet vezetni ezt a fogalmat, egységnyi töltés helyett egységnyi tömegre jutó potenciális energiaként. ♣

A potenciális energia fogalmának jelentősége túlmutat a munka kiszámításának matematikáján. Összetett mechanikai rendszerek vizsgálata során ugyanis gyakran egyszerűbb felírni a teljes mechanikai rendszer potenciális energiáját, mint meghatározni az összes erőkomponens kifejezését. Ezekben az esetekben az erőkomponensek a gradiens definíciójának megfelelően, differenciálással számíthatók, ami jól algoritmizálható [4].

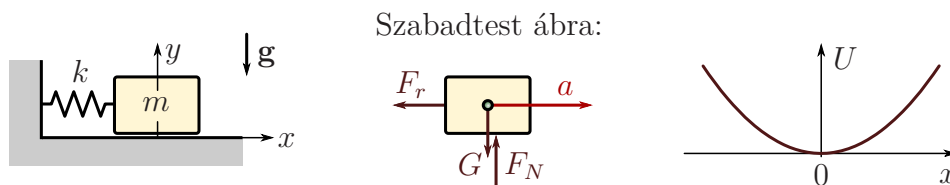
Az erőtér által végzett munka csak akkor számolható ki a potenciális energia végpontokban felvett értékeiből, ha ezek az értékek egyértelműen és az időtől függetlenül meghatározhatók. Azonban sok esetben olyan külső erők is hatnak a vizsgált mechanikai rendszerre, melyek időfüggővé teszik a potenciális energiát. Egy függvénynek az időtől való függése lehet közvetett (implicit), vagy közvetlen (explicit). E két eset közti különbség megértése fontos a téma további tárgyalása szempontjából.

Közvetett és közvetlen időfüggés

2.47. definíció. Ha egy dinamikai mennyiség csak a benne szereplő koordinátákon és sebességeken keresztül függ az időtől, akkor KÖZVETETT (implicit) időfüggésről beszélünk. A KÖZVETLEN (explicit) időfüggés pedig azt jelenti, hogy az argumentumok között szerepel külön az idő is. ♣

Ha a potenciális energia csak közvetetten függ az időtől, az azt jelenti, hogy egy adott \mathbf{r} helyvektorral jellemzett helyen mindig ugyanakkora értéket vesz fel. Azonban a vizsgált anyagi pont vagy merev test koordinátái időben változhatnak a dinamika alaptételével összhangban, ezért a potenciális energia a koordinátákon keresztül, közvetve függ az időtől: $U(\mathbf{r}(t))$. Ebben az esetben az idő szerinti parciális deriváltja nulla: $\partial U/\partial t = 0$. Mivel a koordináták időfüggése triviális, általában *időtől függetlennek* nevezik az $U(\mathbf{r}(t))$ alakú potenciálfüggvényeket.

2.48. példa: Tekintsünk egy k merevségű, egyik végpontjában rögzített rugóhoz kapcsolt m tömegű tömegpontot, mely vízszintes irányú rezgéseket végez. Határozzuk meg, hogy milyen módon függ a potenciális energia az időtől!



2.43. ábra. Példa a potenciális energia közvetett időfüggésére, amikor csak az x koordináta (időben változó) értékétől függ.

Megoldás:

A rugó által kifejtett F_r erő mindig az x kitéréssel arányos és azzal ellentétes irányú. Ehhez az erőhöz megkereshető a rugóban tárolt potenciális energia kifejezése:

$$F_r = -kx \quad \Rightarrow \quad U_1(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (2.100)$$

A dinamika alaptétele alapján

$$ma = F_r \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx. \quad (2.101)$$

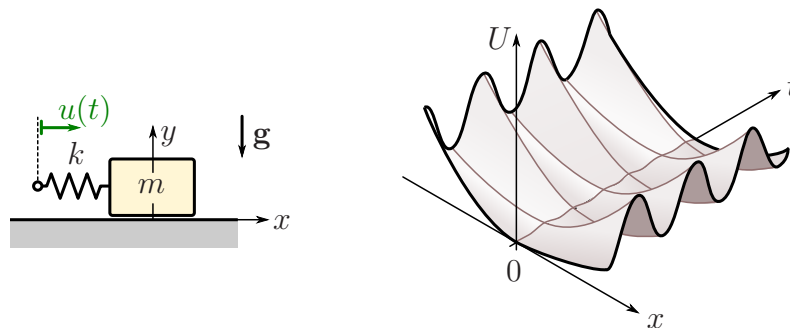
Ezt az egyenletet adott kezdeti feltételek mellett megoldva, bármely időpontban kiszámítható a test x pozíciója és a potenciális energia számértéke, ami pillanatról pillanatra változik. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az egyenlet megoldása $x(t) = A \sin(\sqrt{k/m} t + \varepsilon)$ alakú, ahol A és ε attól függenek, hogy milyen pozícióból és milyen sebességgel indítjuk el a mozgást. Ennek a megoldásnak megfelelő foronómiai görbék láthatók az 1.14 ábrán.

Az x kitérés tehát függ az időtől, de az $x(t)$ függvény – a mozgástörvény – a dinamika alaptételéből számítható ki, nincs előre megadva. Következésképpen, $U_1(x(t))$ csak közvetett (implicit) módon függ az időtől. ♠

Vannak olyan feladatok is, melyekben a potenciális energia időbeli változása bizonyos mértékben elő van írva. Ez a *közvetlen* időfüggés esete. Ilyenkor a potenciális energia alakja $U(\mathbf{r}(t), t)$, tehát egy adott \mathbf{r} térbeli pontban az idő előrehaladásával más és más értékeket vesz fel. Ebben az esetben $\partial U / \partial t \neq 0$.

2.49. példa: Ha az előző példában a rugó végpontja nem lenne rögzített, hanem annak helye az ELŐRE MEGADOTT $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ függvény szerint változna a rugó irányával párhuzamosan (ami egy időtől függő kényszerfeltétel), akkor a potenciális energia a rugó megnyúlásán keresztül nemcsak a test – előre nem ismert módon változó – $x(t)$ koordinátájától, hanem az adott $u(t)$ elmozdulástól is függene:

$$U_2(x, t) = \frac{1}{2} k(x - u(t))^2. \quad (2.102)$$



2.44. ábra. Példa a potenciális energia közvetlen időfüggésére: U értéke nemcsak az időben változó koordinátáktól, hanem egy előre adott, időben változó külső hatástól is függ.

Itt tehát a potenciálfüggvény közvetlenül is függ az időtől, az idő szerinti parciális deriváltja nem nulla: $\partial U_2 / \partial t = k(u(t) - x)\dot{u}(t)$. A közvetlen időfüggés nem befolyásolja azt, hogy a potenciálfüggvényből kiszámítható a rugó által kifejtett erő – de természetesen ez is közvetlenül függ az időtől: $F_r(t) = -\partial U_2 / \partial x = -k(x - u(t))$. ♠

Ha meg szeretnénk határozni, hogy milyen ütemben változik egy többváltozós függvény értéke az időben, akkor az ún. teljes idő szerinti deriváltját kell kiszámolni. Ebben az esetben figyelembe kell vennünk a vizsgált kifejezésben szereplő koordináták, sebességek implicit időfüggését is az összetett függvények deriválási szabálya (a láncszabály) alapján. Az előző két példában az időtől közvetve függő $U_1(x) = kx^2/2$ és az időtől közvetlenül függő $U_2(x, t) = \frac{1}{2}k(x - u(t))^2$ potenciálfüggvények teljes idő szerinti deriváltja:

$$\begin{aligned}\frac{dU_1(x)}{dt} &= \frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = kx\dot{x}, \quad \text{illetve} \\ \frac{dU_2(x, t)}{dt} &= \frac{\partial U_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial t} = k(x - u(t))\dot{x} + k(x - u(t))(-\dot{u}(t)).\end{aligned}\quad (2.103)$$

A közvetlen időfüggés mindig valamilyen külső hatás következménye a vizsgált modellben, ezért ilyenkor a potenciális energiát az időben változó külső erők munkája is befolyásolja. Időtől független potenciális energia (azaz közvetett időfüggés) esetén viszont könnyen számítható az erőter munkája – ezt az esetet vizsgáljuk meg a következő fejezetben.

Konzervatív erőterek

2.50. definíció. KONZERVATÍVNAK nevezzük azt az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőteret¹⁹, melynek egyértékű, időtől független a potenciálfüggvénye: $U(\mathbf{r})$. ♣

2.51. tétel. Az alábbi állítások egyenértékűek:

1. Az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőter KONZERVATÍV.
2. Az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ potenciálos erőter által t_1 és t_2 időpontok között végzett MUNKA – miközben egy anyagi pont az $\mathbf{r}(t_1)$ pontból az $\mathbf{r}(t_2)$ pontba mozdul el – CSAK A POTENCIÁLFÜGGVÉNY VÉGPONTOKBAN FELVETT, tehát $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}(t_1)$ -beli és $\mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}(t_2)$ -beli ÉRTÉKÉTŐL FÜGG, az anyagi pont pályájától (az úttól) nem:

$$W_{12} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) \equiv U_1 - U_2. \quad (2.104)$$

3. Az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőter által tetszőleges ZÁRT GÖRBÉN VÉGZETT MUNKA NULLA.
4. Az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőter ÖRVÉNYMENTES, azaz rotációja zérus:

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.105)$$

Az első három állítás csak közvetetten ellenőrizhető az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőter ismeretében, hiszen 1. és 2. az erőter potenciálfüggvényéről, 3. pedig az erőter által végzett munkáról szól. A negyedik állítás jelentőségét az adja, hogy segítségével közvetlenül, az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektormező differenciálásával megállapítható, hogy konzervatív erőteret alkot-e.

Bizonyítás:

1 \Rightarrow 2:

Konzervatív erőterben a potenciálfüggvény közvetlenül nem függ az időtől, ezért $\text{grad}_{\mathbf{r}} U = \text{grad } U$, tehát

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \text{grad } U \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt. \quad (2.106)$$

¹⁹A konzervatív erő elnevezés is használatos.

Továbbá, $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ miatt a fenti integrál integrandusa a potenciálfüggvény teljes idő szerinti deriváltjával egyenlő, tehát

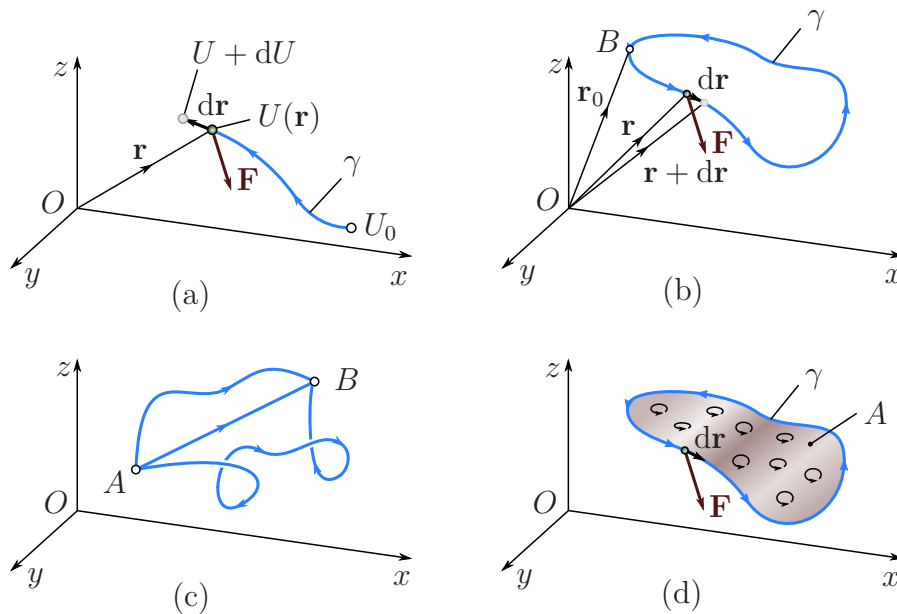
$$W_{12} = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = - \int_{U(\mathbf{r}_1)}^{U(\mathbf{r}_2)} dU = U_1 - U_2. \quad (2.107)$$

2 \Rightarrow 1:

Ha a végzett munka független az úttól, akkor a tér minden \mathbf{r} pontjához egyértelműen hozzárendelhető egy $U(\mathbf{r})$ skalár érték az alábbi vonalintegrál alakjában:

$$U(\mathbf{r}) = U_0 - \int_{(\gamma)} \mathbf{F} d\mathbf{r}, \quad (2.108)$$

ahol γ egy tetszőlegesen választott irányított görbe (2.45/a ábra), valamilyen kezdőpontból az \mathbf{r} végpontba, U_0 pedig egy szintén tetszőlegesen megadható érték – ennek megválasztása a potenciális energia nulla szintjének megválasztásával ekvivalens. Ha az anyagi pont egy kis



2.45. ábra. (a) Konzervatív erőterben a tér bármely pontjához egyértelműen hozzárendelhető egy $U(\mathbf{r})$ potenciálfüggvény. (b) Konzervatív erőter zárt γ görbén végzett munkája nulla. (c) Konzervatív erőter munkája független az úttól. (d) A Stokes-tétel szemléltetése: a rotáció kis, lokális „örvényeknek” feleltethető meg.

$d\mathbf{r}$ vektorral elmozdul, akkor az $U(\mathbf{r})$ függvény megváltozása $dU = -\mathbf{F}d\mathbf{r}$. Ugyanakkor, a gradiens definíciójából következően, $dU = \text{grad } U d\mathbf{r}$. Következésképpen, $\mathbf{F} = -\text{grad } U(\mathbf{r})$, tehát az \mathbf{F} erőter konzervatív.

2 \Rightarrow 3:

Ha az erőter által végzett munka csak a potenciális energia végpontokban felvett értékeinek különbségétől függ, akkor – mivel zárt görbén a kezdő- és végpont egybeesik – a zárt görbén végzett munka nulla (2.45/b ábra).

3 \Rightarrow 2:

Ha minden zárt görbén nulla az erőter munkája, akkor a munkának függetlennek kell lennie az úttól, hiszen adott A pontból végtelen sokféle módon el lehet jutni B pontba és vissza. Ebben az esetben viszont (2.108) szerint konstruálható időtől független potenciálfüggvény, tehát \mathbf{F} konzervatív (2.45/c ábra).

1 \Rightarrow 4:

Konzervatív erőterben az erő kifejezhető $\mathbf{F} = -\text{grad } U$ alakban. A vektoranalízisből ismert, hogy egy skalármező (a helyvektortól függő, skalár értékű függvény) gradienseinek rotációja egyenlő a nullvektorral, tehát

$$\text{rot } \mathbf{F} = -\text{rot grad } U = \mathbf{0}. \quad (2.109)$$

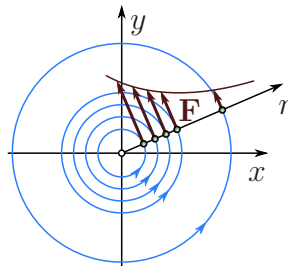
4 \Rightarrow 3:

A Stokes-tétel szerint (lásd 2.45/d ábra) egy \mathbf{F} vektormező zárt γ görbe menti integrálja egyenlő \mathbf{F} rotációjának a görbe által bezárt A felületen vett felületi integráljával. Tehát a munka (2.84) egyenlettel felírt alakját felhasználva:

$$W_{12} = \int_{(\gamma)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_{(A)} \text{rot } \mathbf{F} \, d\mathbf{A}. \quad (2.110)$$

Következésképpen, ha $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, akkor az erőter tetszőleges zárt görbén végzett munkája zérus. ♠

2.37. megjegyzés: Áramlástanban be szokták vezetni a *potenciális örvény* fogalmát. A potenciális örvény esetében a folyadék $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességmezeje származtatható egy úgynevezett sebességi potenciálból, tehát a sebességmező felel meg a dinamikában bevezetett erőternek, a sebességi potenciál pedig a potenciális energiának.



2.46. ábra. Potenciális örvény sebességmezejének megfelelő erőter.

Ez azt jelenti, hogy a potenciális örvényre vonatkozó áramlástanai összefüggéseket a dinamika megfelelő fogalmaira is értelmezhetjük. A potenciális örvény sebességmezőjének megfelelő erőter

$$\mathbf{F} = \frac{c}{r} \mathbf{e}_t. \quad (2.111)$$

Ez egy olyan erő, melynek nagysága az origótól mért r távolsággal fordítottan arányos, iránya pedig az r sugarú kör érintője irányába mutat, a 2.46 ábra szerint. Ha például egy körpályán szabadon elmozdulni képes anyagi pontot teszünk az \mathbf{F} erőterbe, azt az erő állandóan gyorsítja, tehát pozitív a teljesítménye és a munkája.

Deriválással belátható, hogy ehhez az erőhöz az

$$U(\varphi) = -c\varphi, \quad (2.112)$$

potenciálfüggvény tartozik, ugyanis az (r, φ) hengerkoordináta-rendszerben a gradiens az alábbi módon számítható:

$$-\text{grad } U = - \left[\begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{c}{r} \end{array} \right], \quad (2.113)$$

ami megegyezik az \mathbf{F} erővel.

$U(\varphi)$ egy időtől független potenciálfüggvény, de ha a (2.111) képlettel megadott erőter konzervatív lenne, akkor zárt görbén végzett munkájának nullának kellene lennie – pedig láttuk, hogy az \mathbf{F} erő munkája csak pozitív lehet.

Az az ellentmondás feloldása, hogy a 2.51. tételben kikötöttük a potenciálfüggvény *egyértékűségét* is. Azonban itt az $U(\varphi)$ potenciál nem egyértékű, mert adott φ értéknél a $\varphi + i2\pi$, $i = 0, 1, 2, \dots$ szögekhez különböző potenciális energia értékek tartoznak, noha ezek mind ugyanannak a geometriai pontnak a koordinátái. Tehát a potenciálfüggvény többértékűsége miatt nem lehet konzervatív a (2.111) által megadott erőter. ♣

Egy mechanikai rendszerben többféle erő vagy erőter is hathat a rendszert alkotó testekre. A munkatétel alkalmazása szempontjából előnyös, ha a rendszerben ható aktív erők valamennyien konzervatívak.²⁰

A „konzervatív” szó a latin *conservare* szóból ered, aminek a jelentése: megőrizni. A dinamikában ez a jelző a mechanikai energia megmaradására utal.

2.52. definíció. *Egy mechanikai rendszer E MECHANIKAI ENERGIÁJA a rendszer mozgási energiájának és a rendszerre ható aktív erők potenciális energiáinak összege:*

$$E = T + U. \quad (2.114)$$



Ha a rendszer mozgását nem ideális kényszer (csúszási súrlódás) korlátozza, akkor a rendszer kinetikus energiáját a nem nulla teljesítményű kényszererő is meg tudja változtatni.

Az időfüggő kényszerek pedig – mint például a 2.49. példában bemutatott, ún. útgerjesztés esetében – mindig valamilyen külső hatásnak felelnek meg, ami megváltoztatja az aktív erők potenciálfüggvényét és a mechanikai rendszer energiáját.

2.53. definíció. KONZERVATÍVNAK nevezünk egy mechanikai rendszert, ha csak időtől független ideális kényszerek korlátozzák a mozgását és a rendszer elemeire ható aktív erők (erőterek) konzervatívak. ♣

2.54. tétel. A MECHANIKAI ENERGIA MEGMARADÁSÁNAK TÉTELE. *Konzervatív mechanikai rendszerben a mozgási és potenciális energia összege – a MECHANIKAI ENERGIA – állandó, tehát ha egy anyagi pont az $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}(t_1)$ pontból az $\mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}(t_2)$ pontba kerül, akkor*

$$T(t_1) + U(\mathbf{r}_1) = T(t_2) + U(\mathbf{r}_2), \quad (2.115)$$

azaz a szokásos jelölésekkel

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2. \quad (2.116)$$

Bizonyítás:

A munkatétel szerint az anyagi pontra ható erők munkája: $W_{12} = T(t_2) - T(t_1)$, ugyanakkor a 2.51. tétel szerint konzervatív aktív erők vagy erőterek munkáját a $W_{12} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2)$ összefüggéssel számíthatjuk. Mivel időtől független ideális kényszerek teljesítménye és munkája nulla, ebből már következik a tétel állítása. ♠

²⁰A kényszererőkhöz nem lehet potenciálfüggvényt rendelni, mert azok nem a rendszer állapotától (pl. az \mathbf{r} helyvektortól) függenek. Következésképpen, a kényszererők nem potenciálisak és nem is konzervatívak. Hasonlóképpen, nem értelmezhető a konzervativitás fogalma azokra az erőkre, melyek nem alkotnak erőteret – ilyenek az $\mathbf{F}(t)$ alakban megadott külső erők.

2.38. megjegyzés: Ha egy mechanikai rendszerben nem konzervatív aktív erők is fellépnek, akkor a mechanikai energia megmaradása nem teljesül. Ilyenkor két eset lehetséges:

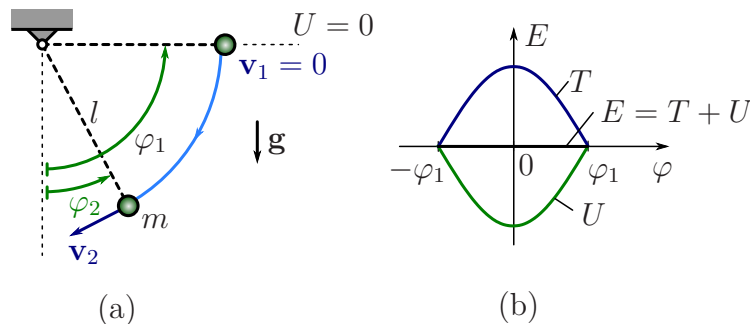
1. Nem zárt a rendszer. Ekkor külső aktív erő hat vagy külső erő által biztosított időfüggő kényszerfeltétel korlátozza a rendszer viselkedését.
2. A mechanikai jelenségeken túlmutató, például termodinamikai folyamatok játszódnak le – ebbe a körbe tartozik a súrlódás és a közegellenállás.

A tapasztalatok szerint a mechanikai energia megmaradásánál általánosabb érvényű, *általános energiatétel* is teljesül, mely szerint zárt rendszerben minden fajta energia, azaz a mechanikai energián kívül a hő, az elektromos energia, stb. összege állandó. ♣

A mechanikai energiamegmaradás tétele $T_2 - T_1 = U_1 - U_2$ alakban is felírható. Ha nő a kinetikus energia (pozitív a ható erők teljesítménye és munkája), akkor $T_2 > T_1$. Mivel konzervatív rendszerben a kinetikus energia csak a potenciális energia *rovására* nőhet, ezért U csökken, azaz $U_1 > U_2$. Ezért szerepelnek az 1 és 2 indexek fordított sorrendben az egyenlet két oldalán. A kétféle energia tehát át tud alakulni egymásba.

Ebben a megközelítésben a mechanikai energia megmaradása a munkatétel egy speciális esetének tekinthető, amikor is a végzett munka kiszámítható a potenciális energia segítségével. Hasonló egyenletek írhatók fel olyan esetekben is, amikor az erőrendszerben nem potenciális illetve nem konzervatív erők lépnek fel, csak ekkor a nem konzervatív erők által végzett munkát (2.83) szerint kell kiszámítani. Ezért feladatokban gyakran „munkatétel” néven hivatkoznak az energiamegmaradás tételére is.

2.55. példa: Egy l hosszúságú fonálra kötött m tömegű testet (matematikai ingát) nyugalmi helyzetből ($v_1 = 0$) indítunk a függőlegestől mért $\varphi_1 = 90^\circ$ -os szöghelyzetből. Mekkora v_2 sebességre gyorsul, mire egy adott φ_2 szöghelyzetbe ér?



2.47. ábra. (a) Fonálra kötött tömegpont sebességének számítása a munkatétel alapján. (b) A mechanikai energia megmaradása. A potenciális energia nulla szintjének megválasztása tetszőleges; ebben a feladatban úgy választottuk meg, hogy a teljes mechanikai energia a mozgás során végig nulla.

Megoldás:

A megoldáshoz a munkatételt használjuk. A kiindulási állapotban ($\varphi_1 = 90^\circ$) a test nyugalomban van, tehát kinetikus energiája

$$T_1 = 0. \quad (2.117)$$

Az adott φ_2 szöghelyzetben

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (2.118)$$

alakban írható fel a kinetikus energia, de az itt szereplő v_2 sebesség ismeretlen.

A testre két erő hat: a kötél-erő – ami ideális kényszer, tehát teljesítménye és munkája nulla – és a nehézségi erő, ami potenciális. A nehézségi erő potenciális energiájának felírása előtt választanunk kell egy nulla szintet, amihez viszonyítjuk. Kézenfekvő választás a kiindulási helyzet, azaz $\varphi = 90^\circ$ választása nulla szintnek. Ekkor

$$U_1 = 0, \quad (2.119)$$

$$U_2 = -mgl \cos(\varphi_2). \quad (2.120)$$

A nehézségi erő munkája $U_1 - U_2$, tehát a munkatétel szerint $T_2 - T_1 = U_1 - U_2$. A feladatban

$$U_1 - U_2 = mgl \cos(\varphi_2), \quad \text{és} \quad (2.121)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}mv_2^2. \quad (2.122)$$

A két kifejezés egyenlőségéből

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgl \cos(\varphi_2), \quad (2.123)$$

amiből a v_2 sebesség nagysága

$$|\mathbf{v}_2| = \sqrt{2gl \cos(\varphi_2)}. \quad (2.124)$$

A munkatétel nem ad információt a sebesség irányáról. Ez megfelel fizikai szemléletünknek, hiszen az inga lengése során az anyagi pont ugyanakkora nagyságú pozitív és negatív pályasebességgel is áthaladhat ugyanazon a szöghelyzeten (lásd 2.47/b ábra). Tehát tetszőleges φ szögnél $v = \pm\sqrt{2gl \cos(\varphi)}$ a pályasebesség.

Megjegyezzük, hogy a potenciális energia nulla szintjének választhatnánk a test $\varphi = 0^\circ$ -hoz tartozó, alsó helyzetét is. Ez esetben a nulla szint mgl -lel történő eltolása miatt

$$\tilde{U}_1 = mgl \quad \text{és} \quad (2.125)$$

$$\tilde{U}_2 = mgl(1 - \cos(\varphi_2)) \quad (2.126)$$

lenne a két potenciális energia kifejezése, tehát különbségük ugyanakkora maradna: $U_1 - U_2 = \tilde{U}_1 - \tilde{U}_2$.

Ellenőrzésképpen megvizsgálhatjuk, hogy idő szerinti deriválással kijön-e a kapott $v = \pm\sqrt{2gl \cos(\varphi)}$ kifejezésből a 2.35. példában kiszámított pályagyorsulás.

$$\dot{v} = \pm \frac{d}{dt} \sqrt{2gl \cos(\varphi)} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2gl \cos(\varphi)}} (-2gl \sin(\varphi)) \dot{\varphi}. \quad (2.127)$$

Figyelembe véve, hogy $\dot{\varphi} = v/l = \pm\sqrt{2gl \cos(\varphi)}/l$, a \pm előjelek kiesnek, így

$$\dot{v} = -g \sin(\varphi), \quad (2.128)$$

ami megegyezik a korábban kapott kifejezéssel, bármilyen irányú is a pályasebesség. ♠

2.39. megjegyzés: A fenti példa az energiamegmaradás (ill. munkatétel) kihasználása nélkül is megoldható, de ez a megoldás meglehetősen bonyolult. A 2.35. példából tudjuk, hogy a vizsgált esetben az anyagi pont pályagyorsulása $\dot{v} = -g \sin(\varphi)$. Elvileg a pályagyorsulás idő szerinti integrálásával kiszámolható a sebesség. A gyorsulás azonban függ a szöghelyzettől, ezért a mozgás során pillanatról pillanatra változik, a φ szöghelyzettel együtt. A pályagyorsulás az $l\varphi$ ívhossz idő szerinti második deriváltjából számítható, azaz $\dot{v} = l\ddot{\varphi}$. Tehát a pályagyorsulás kétféle kifejezéséből

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi). \quad (2.129)$$

Matematikailag a munkatétel alkalmazása azon az ötleten alapul, hogy az egyenlet mindkét oldalát könnyebb idő szerint integrálni $\dot{\varphi}$ -tal történő szorzás után:

$$\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\varphi} \dot{\varphi} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{g}{l} \sin(\varphi) \dot{\varphi} dt. \quad (2.130)$$

A bal oldal parciálisan integrálható, aminek az eredménye $1/2\dot{\varphi}_2^2 - 1/2\dot{\varphi}_1^2$. A jobb oldal pedig a $\dot{\varphi} dt = d\varphi$ helyettesítéssel integrálható, aminek az eredménye $\frac{g}{l}(\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1))$. Tehát

$$1/2\dot{\varphi}_2^2 - 1/2\dot{\varphi}_1^2 = \frac{g}{l}(\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1)), \quad (2.131)$$

ami ml^2 -tel való szorzás, valamint $\varphi_1 = 90^\circ$ és $\dot{\varphi}_1 = 0$ behelyettesítése után megegyezik a 2.55. példában kapott (2.123) képlettel.

Ha nem alkalmazzuk a fent említett ötletet, akkor a v_2 sebesség a mozgásegyenlet megoldásán keresztül határozható meg. A (2.129) másodrendű differenciálegyenletből a $\varphi(t)$ függvény kiszámítható, de sajnos ez az egyenlet csak közelítő módszerekkel oldható meg. Ha numerikusan meg tudjuk határozni a $\varphi(t)$ függvényt és annak inverzét, a $t(\varphi)$ függvényt, akkor helyettesítéses integrálással számítható ki a keresett v_2 sebesség:

$$v_2 = \int_{t_1}^{t_2} \dot{v} dt = - \int_0^{t_2} g \sin(\varphi(t)) dt = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} g \sin(\varphi) \frac{dt}{d\varphi} d\varphi. \quad (2.132)$$

A munkatétel használatának éppen az az előnye, hogy a gyakorlat számára fontos konzervatív erők esetében a (2.130)-ben szereplőhöz hasonló integrálok közvetlen kiszámítására nincs szükség, hiszen a bal oldali integrál a kinetikus energia megváltozásával, a jobb oldal pedig a potenciális energia megváltozásával kapcsolatos. ♣

2.4.4. Teljesítménytétel és munkatétel gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben

A 2.3.3 fejezetben levezettük, hogy gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben

$$m\mathbf{a}_{P21} = \mathbf{F}_{rel} \quad (2.133)$$

alakban írható fel a dinamika alaptétele. Itt (1) jelöli a gyorsuló vonatkoztatási rendszert, (2) jelöli a vizsgált, P pontban elhelyezkedő anyagi pontot, $\mathbf{F}_{rel} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{P10} - 2m\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21}$ a relatív erő, \mathbf{a}_{P21} pedig a (2) anyagi pont relatív gyorsulása az (1) rendszerhez képest.

Tehát a dinamika alaptétele gyorsuló rendszerben is ugyanolyan alakban írható fel, mint inerciarendszerben. Csupán annyi a különbség, hogy az utóbbi esetben a valódi \mathbf{F} erő mellett megjelenik az \mathbf{a}_{P10} szállító gyorsulásból²¹ számítható

$$\mathbf{F}_{sz} = -m\mathbf{a}_{P10} \quad (2.134)$$

szállító erő és az $\mathbf{a}_{Cor} = 2\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21}$ Coriolis-gyorsulásból számítható

$$\mathbf{F}_{Cor} = -m\mathbf{a}_{Cor} \equiv -2m\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21} \equiv 2m\mathbf{v}_{P21} \times \boldsymbol{\omega}_{10} \quad (2.135)$$

Coriolis-erő. Ezért az előző fejezetekben bevezetett tételek és fogalmak értelemszerűen általánosíthatók gyorsuló rendszerek esetére – az abszolút mennyiségeket megfelelő relatív mennyiségekre cserélve.

A kinetikus energia és a teljesítmény az alábbi módon definiálhatók gyorsuló vonatkoztatási rendszerben:

²¹Ez az (1) rendszer P -vel egybeeső pontjának gyorsulása a (0) inerciarendszerhez képest.

2.56. definíció. ANYAGI PONT RELATÍV KINETIKUS (MOZGÁSI) ENERGIÁJA

$$T_{rel} = \frac{1}{2}mv_{P21}^2, \quad (2.136)$$

ahol \mathbf{v}_{P21} a P pontban levő, (2) jelű anyagi pont relatív sebessége az (1) gyorsuló vonatkoztatási rendszerhez képest. ♣

2.57. definíció. RELATÍV ERŐ RELATÍV TELJESÍTMÉNYE

$$P_{rel} = \mathbf{F}_{rel} \cdot \mathbf{v}_{P21}. \quad (2.137)$$

ahol \mathbf{v}_{P21} a relatív erő támadáspontjának relatív sebessége. ♣

A 2.58 tételnek megfelelően látható be a relatív teljesítménytétel és annak idő szerinti integrálásával kapjuk a relatív munkatételt:

2.58. tétel. RELATÍV TELJESÍTMÉNYTÉTEL.²²

$$\dot{T}_{rel} = P_{rel}. \quad (2.138)$$

2.59. tétel. RELATÍV MUNKATÉTEL. Az anyagi pontrendszer relatív mozgási energiájának t_1 és t_2 időpontok közötti megváltozása egyenlő a rá ható erők által végzett relatív munkával:

$$T_{rel}(t_2) - T_{rel}(t_1) = W_{rel12}, \quad (2.139)$$

ahol $W_{rel12} = \int_{t_1}^{t_2} P_{rel} dt$ a relatív munka. ♠

(2.84)-hez hasonlóan látható be, hogy az \mathbf{F}_{rel} relatív erőterben mozgó anyagi ponton végzett relatív munka

$$W_{rel12} = \int_{\mathbf{r}_{rel}(t_1)}^{\mathbf{r}_{rel}(t_2)} \mathbf{F}_{rel} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.140)$$

ahol természetesen az anyagi pont relatív elmozdulását kell figyelembe venni az (1) mozgó rendszerhez képest.

Ha az aktív relatív erőnek időtől független potenciálfüggvénye van, akkor ideális, időtől független kényszerek mellett a relatív energiamegmaradás is igaz:

2.60. tétel. RELATÍV MECHANIKAI ENERGIA MEGMARADÁSÁNAK TÉTELE. Ha egy mechanikai rendszerben az aktív relatív erő felírható egy időtől közvetlenül nem függő, egyértékű relatív potenciálfüggvény (relatív potenciális energia) negatív gradienseként, továbbá a kényszerek ideálisak és időtől függetlenek, akkor a relatív mozgási és relatív potenciális energia összege állandó:

$$T_{rel}(t_1) + U_{rel}(\mathbf{r}(t_1)) = T_{rel}(t_2) + U_{rel}(\mathbf{r}(t_2)). \quad (2.141)$$

Keressük meg a tehetetlenségi erők potenciálfüggvényét a 2.3.3 fejezetben is tárgyalt speciális esetekben!

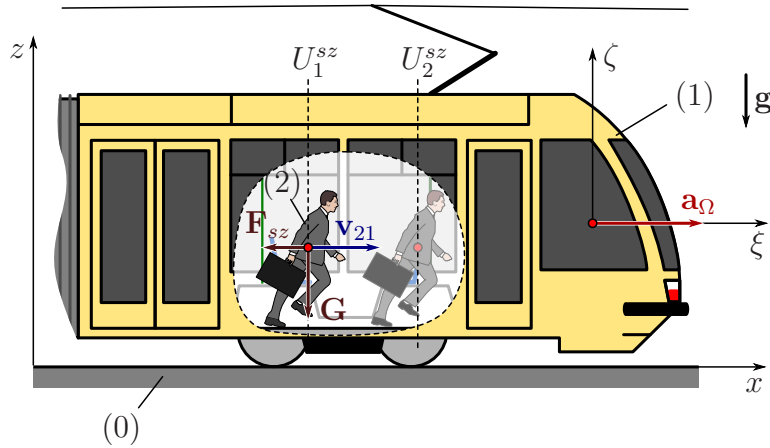
²²A kinetikus energia deriváltját természetesen az (1), mozgó rendszerben értelmezzük, tehát az 1.2.11 fejezetnek megfelelően jelölhetnénk a deriváltat pont helyett körrel is. Erre azért nincs szükség, mert skalár mennyiségek deriváltjai között nincs különbség a két vonatkoztatási rendszerből nézve.

1. **Állandó \mathbf{a}_Ω gyorsulással haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer.** Itt Coriolis-erő nem lép fel, mert a vonatkoztatási rendszer szögsebessége nulla. A szállító erő $\mathbf{F}_{sz} = -m\mathbf{a}_\Omega$. Ez az erő potenciális, hiszen kifejezése hasonlít a nehézségi erő kifejezéséhez: egy adott gyorsuló rendszerben csak az anyagi pont tömegétől függ a nagysága. Következésképpen, a hozzá tartozó potenciálfüggvény is hasonló alakú:

$$\mathbf{F}_{neh} = m\mathbf{g} \Rightarrow U^{neh} = mgz \quad (2.142)$$

$$\mathbf{F}_{sz} = -m\mathbf{a}_\Omega \Rightarrow U^{sz} = ma_\Omega \xi. \quad (2.143)$$

Itt az inerciarendszerben felvett z tengely a nehézségi erővel, a gyorsuló rendszerben felvett ξ tengely pedig a szállító erővel *ellentétes* irányban van felvéve.²³ Tehát – ugyanúgy, mint inerciarendszerekben – *a potenciális erő vektora a potenciális energia csökkenése irányába mutat.*



2.48. ábra. Gyorsító járműben a gyorsítás irányában mozgó utasra olyan szállító erő hat, ami relatív mozgását gátolja. A szállító erővel ellentétes irányú elmozdulás során a szállító erő potenciális energiája nő, azaz $U_1^{sz} < U_2^{sz}$.

Például egy \mathbf{a}_Ω gyorsulással gyorsító villamosban előre haladó utasra a gyorsulással ellentétesen – hátrafelé – ható \mathbf{F}_{sz} szállító erő hat. Mivel a szállító erővel ellentétes irányban halad, relatív potenciális energiája nő. Ez annak felel meg, hogy – amint a 2.18. példában láttuk – ez a feladat dinamikailag egyenértékű azzal, mintha az utas egy hegyre gyalogna felfelé és így nőne a potenciális energiája (2.48 ábra).

2. **Álló²⁴ tengely körül ω_{10} szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszer.** Ebben az esetben a szállító erőt centrifugális erőnek nevezik, ami (2.23) alapján

$$\mathbf{F}_{sz} \equiv \mathbf{F}_{cf} = m\omega_{10}^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (2.144)$$

ahol $\boldsymbol{\rho}$ a forgástengelyre merőlegesen, sugárirányban kifelé mutató vektor. A centrifugális erőhöz a következő potenciálfüggvény található:

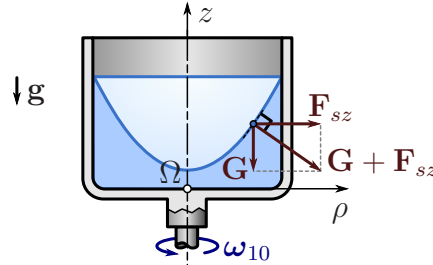
$$U^{cf} = -\frac{1}{2}m\omega_{10}^2 \rho^2. \quad (2.145)$$

²³A nehézségi erő és a szállító erő közötti hasonlóságot az általános relativitáselmélet azzal magyarázza, hogy a gravitációs erő is a tehetetlenségi erők közé sorolható. A tapasztalatnak megfelelő, lefelé irányuló, mg nagyságú nehézségi erőt egy g gyorsulással *felfelé* gyorsuló liftben tapasztalnánk – innen ered a két erő kifejezése közti előjel különbség.

²⁴Álló helyett állandó sebességű haladó mozgást végző tengelyre is igazak a megállapítások.

Ebben az esetben is – mint mindig – az erő irányában csökken a potenciálfüggvény értéke.

2.61. példa: *Határozzuk meg egy forgó edényben lévő folyadék felszínének alakját!*



2.49. ábra. *Az edénnyel együtt forgó folyadék felszíne forgásparaboloid alakú a nehézségi erő és a centrifugális erő eredője hatására. Az eredő erő merőleges a folyadék felszínére, ami egyúttal a relatív potenciális energia egy szintfelülete.*

Megoldás:

A nyugvó folyadékok felszíne jó közelítéssel párhuzamos a nehézségi erő szintfelületeivel – azaz vízszintes. Azonban egy forgó edényben lévő víz átveszi az edény forgását és a centrifugális erő miatt felszíne – ahogy az alábbi számítás mutatja – forgásparaboloid alakú lesz. Az edénnyel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben a folyadék részecskéire a nehézségi erőből és a szállító erőből (centrifugális erőből) álló relatív erő hat (2.49 ábra).

A felszín egyenletét az alapján vezethetjük le, hogy a *relatív erő* potenciális energiájának szintfelületeihez igazodik a víz alakja. A vízfelszín ún. *ekvipotenciális felület*, azaz minden pontjában azonos U_0 a relatív potenciális energia:

$$U^{rel} \equiv U^{neh} + U^{cf} = U_0, \quad (2.146)$$

tehát

$$mgz - \frac{1}{2}m\omega_{10}^2\rho^2 = U_0, \quad (2.147)$$

amiből a $z_0 = U_0/(mg)$ jelöléssel valóban egy forgásparaboloid egyenletét kapjuk:

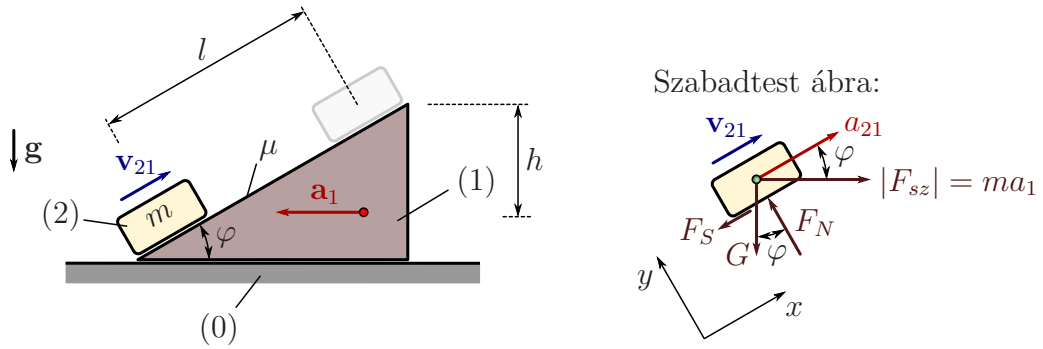
$$z(\rho) = z_0 + \frac{\omega_{10}^2}{2g}\rho^2. \quad (2.148)$$



Forgó vonatkoztatási rendszerben mozgó anyagi pontra Coriolis-erő is hat, azonban *a Coriolis-erő relatív munkája mindig nulla*, mert a vektoriális és skaláris szorzat tulajdonságaiból következően nulla a relatív teljesítménye is:

$$P_{rel}^{Cor} = \mathbf{F}_{Cor} \cdot \mathbf{v}_{P21} = 2m(\mathbf{v}_{P21} \times \boldsymbol{\omega}_{10}) \cdot \mathbf{v}_{P21} = 0. \quad (2.149)$$

2.62. példa: *Vízszintes talajon ék alakú test (lejtő) csúszik \mathbf{a}_1 gyorsulással. Mekkora a_{21} relatív gyorsulással csúszik fel a lejtőre egy m tömegű, pontszerűnek tekinthető test, ha a súrlódási tényező μ ? Mekkora relatív sebességet ér el, ha nyugalomból indult és h magasságba jut fel a lejtőn?*



2.50. ábra. Gyorsuló lejtőre felcsúszó test mozgásának vizsgálata.

Megoldás:

Vizsgáljuk a problémát a lejtőhöz kötött gyorsuló rendszerben! Mivel a lejtő nem forog, Coriolis-erőt nem tapasztalhatunk, viszont fellép egy $|\mathbf{F}_{sz}| = ma_1$ nagyságú szállító erő, a lejtő gyorsulásával ellentétes irányban. Emellett nehézségi erő, normálerő és súrlódási erő hat a vizsgált testre, ahogy a 2.50 ábra mutatja. A szabadtest ábra alapján felírhatjuk a dinamika alaptételének komponens egyenleteit a lejtővel párhuzamos illetve arra merőleges tengelyű koordináta-rendszerben:

$$x : \quad ma_{21} = ma_1 \cos(\varphi) - mg \sin(\varphi) - F_S, \quad (1)$$

$$y : \quad 0 = F_N - ma_1 \sin(\varphi) - mg \cos(\varphi). \quad (2)$$

Az egyenletek felírása során már kihasználtuk azt a kényszerfeltételt, hogy a test relatív gyorsulása a lejtővel párhuzamos irányú. Emellett feltételeztük, hogy a test felfelé csúszik a lejtőn, ezért azzal ellentétes a súrlódási erő iránya. A fenti két egyenlet mellett egy harmadik, kiegészítő egyenletet is felírhatunk, hiszen ismert, hogy a csúszási súrlódási erő nagysága

$$F_S = \mu F_N. \quad (3)$$

A három fenti egyenletből meghatározható a relatív gyorsulás:

$$a_{21} = a_1 (\cos(\varphi) - \mu \sin(\varphi)) - g (\sin(\varphi) - \mu \cos(\varphi)). \quad (4)$$

A feladat a relatív teljesítménytétel segítségével is vizsgálható. A relatív kinetikus energia definíció szerint $T_{rel} = 1/2 mv_{21}^2$, amiből

$$\dot{T}_{rel} = mv_{21}a_{21}.$$

A relatív teljesítmény kifejezésébe a szállító erő, a nehézségi erő és a súrlódási erő teljesítménye kerül be, hiszen a normálerő teljesítménye nulla. Figyelembe véve, hogy a szállító erő lejtővel (és a relatív sebességgel) párhuzamos komponense $F_{sz||} = ma_1 \cos(\varphi)$, a nehézségi erő megfelelő komponense pedig $F_{neh||} = -mg \sin(\varphi)$, a relatív teljesítmény

$$P_{rel} = ma_1 \cos(\varphi)v_{21} - mg \sin(\varphi)v_{21} - \mu F_N v_{21}.$$

A teljesítménytétel szerint $\dot{T}_{rel} = P_{rel}$, amiből

$$a_{21} = a_1 \cos(\varphi) - g \sin(\varphi) - \mu \frac{F_N}{m}.$$

Ebben a képletben szerepel az F_N normálerő is, azt azonban a teljesítménytétel alapján nem tudjuk kifejezni a feladat adataival (lásd 2.4.2 fejezet). A teljesítménytétel felírása során

éppen arra törekszünk, hogy az ideális kényszereket biztosító erők - mint a normálerő is - nulla teljesítményük miatt essenek ki az egyenletből.

Az F_N erőt tartalmazó tag nem a normálerő, hanem az $F_S = \mu F_N$ csúszási súrlódási erő teljesítményével kapcsolatos. A csúszási súrlódási erő negatív teljesítményű, közvetlenül nem is biztosít kényszert, mégis a talajról átadódó nem ideális kényszererő egyik komponensének tekintjük.

A nem ideális kényszer jelenléte miatt a feladat teljes megoldásához szükségünk van a normálerő (2) alapján történő kifejezésére is, amivel már visszkapjuk a (4) eredményt. Súrlódásmentes esetben természetesen nem lép fel a vázolt probléma és megoldható a feladat csak a teljesítménytételt használva.

A h magasságban elért relatív sebesség kiszámításához a relatív munkatételt alkalmazhatjuk. A lejtő alján mind a kinetikus, mind a potenciális energia nulla (a nulla szint megfelelő felvételével), azaz

$$T_{rel1} = 0, \quad U_1^{neh} = 0, \quad U_1^{sz} = 0,$$

ahol U^{neh} a nehézségi erő, U^{sz} pedig a szállító erő potenciális energiája.

A test által elért h magasságban

$$T_{rel2} = \frac{1}{2}mv_{21}^2, \quad U_2^{neh} = mgh, \quad U_2^{sz} = -ma_1l, \quad \text{ahol}$$

$l = \frac{h}{\tan(\varphi)}$ a test relatív elmozdulása a szállító erővel párhuzamosan.

Tudjuk, hogy a megfelelő potenciális erők a potenciális energia csökkenése irányába mutatnak: a nehézségi erő függőlegesen lefelé, a szállító erő pedig az \mathbf{a}_1 gyorsulással ellenkező irányban. Ha az anyagi pont felcsúszik a lejtőn, akkor U^{neh} nő, U^{sz} pedig csökken. A súrlódási erő által végzett relatív munka a lejtőn megtett $\sqrt{l^2 + h^2}$ úton $W_{súrl} = -\mu F_N \sqrt{l^2 + h^2}$, tehát a munkatétel szerint

$$T_{rel2} - T_{rel1} = U_1^{neh} - U_2^{neh} + U_1^{sz} - U_2^{sz} - \mu F_N \sqrt{l^2 + h^2}.$$

Innen kifejezhető a relatív sebesség:

$$v_{21} = \sqrt{2(a_1l - gh - \mu F_N \sqrt{l^2 + h^2}/m)}.$$

Természetesen - mivel a csúszási súrlódásos kényszer nem ideális - önmagában a munkatétel nem elegendő a feladat megoldásához, ugyanúgy, mint a teljesítménytétel esetében. Az F_N normálerő a (2) egyenletből fejezhető ki. ♠

2.4.5. Perdületétel álló referenciapontra

A 2.4.1 fejezet és a 2.4.2-2.4.3 fejezetek eredményei között feltűnő párhuzam mutatható ki az alábbi séma szerint:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}_k \Rightarrow \mathbf{I}(t_2) - \mathbf{I}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k dt \rightarrow \text{Impulzusmegmaradás.}$$

$$\dot{T} = P \Rightarrow T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} P dt \rightarrow \text{A mechanikai energia megmaradása.} \quad (2.150)$$

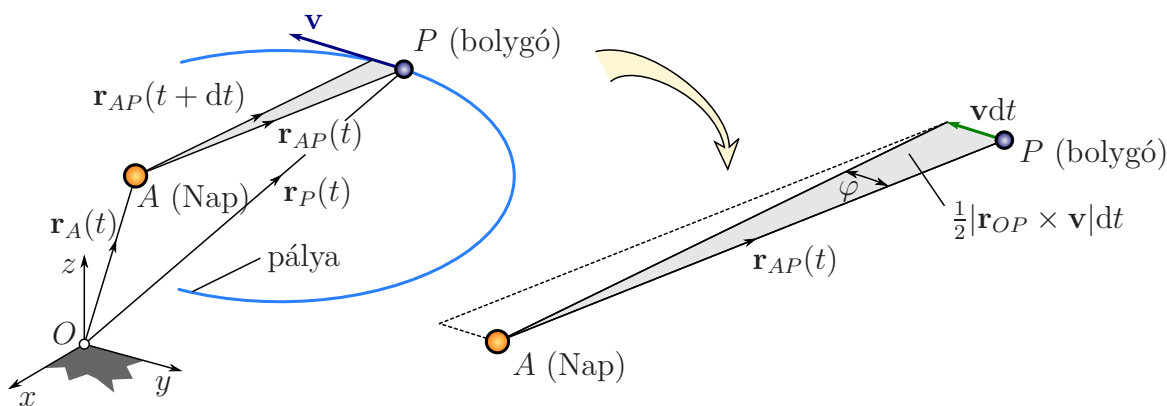
A teljesítménytétel levezetését az motiválta, hogy az erő sebességgel párhuzamos irányú vetületének hatását akartuk vizsgálni. Ebből kiindulva feladatokban jól használható tételekhez és egy megmaradási törvényhez jutottunk úgy, hogy a dinamika alaptételének mindkét oldalát skalárisan szoroztuk a sebességgel.

Akkor is a fentiekhez hasonló sémát kapunk, ha skaláris szorzás helyett vektoriálisan szorozzuk az $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ egyenletet, egy kiválasztott pontból a vizsgált anyagi ponthoz húzott helyvektorral. Az ennek kapcsán bevezetendő *perdületvektor* tulajdonságai alapján magyarázható Kepler második törvénye, ezért a perdület fogalmát a Kepler-törvények ismertetésén keresztül vezetjük be.

2.63. tétel. KEPLER-TÖRVÉNYEK. *A bolygómozgások megfigyelése alapján Johannes Kepler a következő tapasztalati törvényeket állította fel:*

1. *A bolygók ellipszispályákon keringenek, amelyek egyik gyújtópontjában a Nap áll.*
2. *A Naptól a bolygóhoz húzott helyvektor egyenlő időközök alatt egyenlő területeket sűrol.*
3. *A bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellipszispályák nagytengelyeinek köbei.* ♠

Az első és a harmadik Kepler-törvény részletes vizsgálata túllép e jegyzet keretein. A második törvény azonban könnyen átfogalmazható az eddig bevezetett fogalmak segítségével: a 2.51 ábra alapján – a vektoriális szorzat tulajdonságait felhasználva (5.4. definíció) – látható, hogy a Naptól a bolygóig húzott $\mathbf{r}_{AP}(t)$ vektor által egy kicsiny dt időtartam alatt sűrolt terület $\frac{1}{2}|\mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{v}|dt$. Kepler második törvénye szerint azonos dt időközök esetén ugyanekkora területet kapunk a pálya bármelyik pontja közelében. Mivel a pálya síkja, a bolygó keringési iránya és a bolygó tömege sem változik, arra következtethetünk, hogy az $\mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{v}$ szorzat, sőt az $\mathbf{r}_{AP} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{I}$ mennyiség, az ún. *perdület* is állandó.



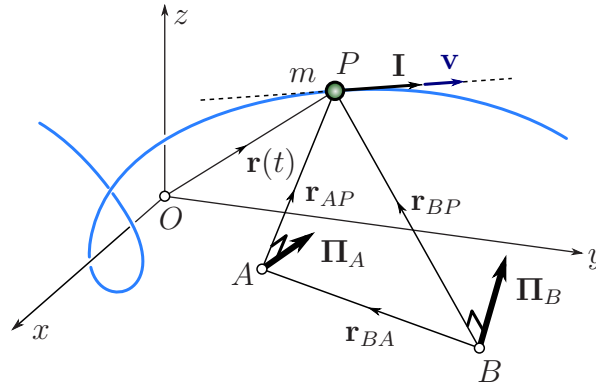
2.51. ábra. Kepler második törvényének szemléltetése.

2.64. definíció. *A P geometriai pontban található, \mathbf{I} impulzusú anyagi pont A pontra számított PERDÜLETE:*

$$\mathbf{\Pi}_A = \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{I}. \quad (2.151)$$

Mivel a perdület az impulzus adott pontra számított nyomatéka, ezért IMPULZUSNYOMATÉKNAK vagy IMPULZUSMOMENTUMNAK is nevezik. ♣

A perdületet mindig valamilyen referenciapontra kell megadni, ugyanúgy, mint a nyomatékot. Ennek megfelelően, az (1.74) nyomaték redukciós képlethez hasonlóan lehet kiszámolni az A pontra számított perdület segítségével a B pontra számított perdületet:



2.52. ábra. A perdület redukciója, figyelembe véve, hogy az impulzus és a perdület vektorkettőst alkot.

2.65. tétel. Anyagi pont impulzusa és perdülete vektorkettőst alkot: $[\mathbf{I}; \mathbf{\Pi}_B]_B$.

Bizonyítás:

A 2.52 ábra szerint $\mathbf{r}_{BP} = \mathbf{r}_{BA} + \mathbf{r}_{AP}$. Felhasználva, hogy $\mathbf{\Pi}_A = \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{I}$,

$$\mathbf{\Pi}_B = \mathbf{r}_{BP} \times \mathbf{I} = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{I} + \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{I} = \mathbf{\Pi}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{I}. \quad (2.152)$$

Tehát az 1.34. definíció alapján tényleg vektorkettőst alkot ez a két vektor. ♠

Vizsgáljuk meg, hogy a bolygómozgás során miért marad állandó a perdület. Ehhez írjuk fel a perdület idő szerinti deriváltját:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \dot{\mathbf{r}}_{AP} \times \mathbf{I} + \mathbf{r}_{AP} \times \dot{\mathbf{I}}, \quad (2.153)$$

ahol $\mathbf{r}_{AP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A$ és $\mathbf{I} = m\mathbf{v}$. Az állónak tekintett inerciarendszerből nézve a P pontban lévő bolygó sebessége $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_P$, az A pont sebessége pedig $\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A$, ezért (2.153) első tagja

$$\dot{\mathbf{r}}_{AP} \times \mathbf{I} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A) \times m\mathbf{v} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_A) \times m\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}}_{=0} - \mathbf{v}_A \times m\mathbf{v} = -\mathbf{v}_A \times \mathbf{I}. \quad (2.154)$$

Tehát a perdület deriváltja az alábbi alakban adható meg:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{r}_{AP} \times \dot{\mathbf{I}} - \mathbf{v}_A \times \mathbf{I}. \quad (2.155)$$

Ebből következik, hogy az anyagi pont *álló pontra* ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$) felírt perdületének deriváltja:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{r}_{AP} \times \dot{\mathbf{I}}. \quad (2.156)$$

A dinamika alaptétele alapján $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$, ezért ez az egyenlet átírható a következőképpen:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{F}. \quad (2.157)$$

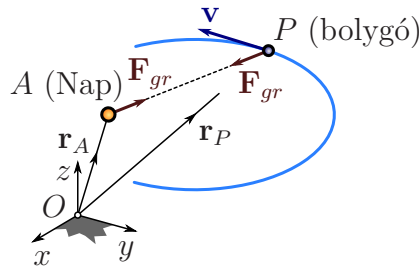
Az egyenlet jobb oldalán felismerhetjük az \mathbf{F} erő A pontra számított nyomatékát. Tehát arra jutottunk, hogy *az anyagi pont A álló pontra számított perdületének deriváltja egyenlő az anyagi pontra ható erők A pontra számított nyomatékával:*

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{M}_A, \quad \text{ha } \mathbf{v}_A = \mathbf{0}. \quad (2.158)$$

Ez alapján könnyen megmagyarázható Kepler 2. törvénye: a gravitációs erőtvényből következik, hogy a bolygókra ható erő mindig a Nap felé mutat (ami álló tömegpontnak tekinthető), tehát párhuzamos a bolygókhoz húzott vektorral. Következésképpen, $\mathbf{M}_A \equiv \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, azaz a perdület deriváltja is nulla, így a perdület állandó marad.

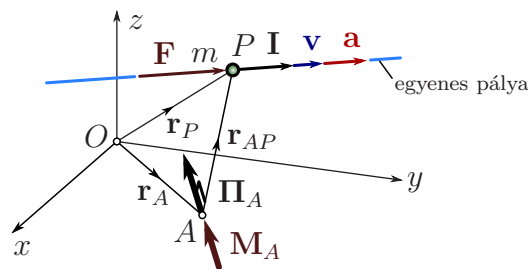
A fenti gondolatmenet nemcsak a gravitációs erő hatása alatt mozgó bolygók esetében, hanem számos más esetben is igaz, ahol a ható erő nyomatéka a mozgás folyamán nulla – ebbe a körbe tartoznak az ún. centrális mozgások.

2.66. definíció. *Anyagi pont CENTRÁLIS MOZGÁSA során az anyagi pontra ható erő hatásvonala mindig ugyanazon A álló ponton megy keresztül. Ha két anyagi pont között ható erők hatásvonala a testeket összekötő vektor hatásvonalába esik, akkor az ilyen erőket CENTRÁLIS ERŐKNEK nevezzük (2.53 ábra).* ♣



2.53. ábra. Példa centrális erőre: a gravitációs erő.

2.40. megjegyzés: A „perdület” szó forgásra vagy keringésre utal, de forgásról csak kiterjedt (pl. merev) testek esetében beszélhetünk, anyagi pontok forgását nem értelmezzük. Továbbá, mivel az anyagi pont perdülete a helyvektor és az impulzus segítségével jellemzi a mozgást, a perdület nagysága független a pálya alakjától, pl. görbületétől. Tehát – amint a 2.54 ábra is mutatja – akkor is nullától különböző a perdület egy pályán kívül eső pontra számítva, ha az anyagi pont egyenes vonalú mozgást végez.



2.54. ábra. Egyenes pályán haladó pont perdülete nem nulla a pálya egyenesén kívül eső A pontra: $\Pi_A = \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{I}$.

A (2.158) egyenlet és Newton második törvénye ($\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$) között világos hasonlóság fedezhető fel: a perdület az impulzussal (lendülettel), a nyomaték pedig az erővel analóg mennyiség. A (2.158) egyenlet integrálásával kapjuk az impulzustétel megfelelőjét, a perdülettételt:

2.67. tétel. PERDÜLETTÉTEL. Az A álló pontra számított perdület t_1 és t_2 időpontok közötti megváltozása egyenlő az ún. nyomatékimpulzussal:

$$\Pi_A(t_2) - \Pi_A(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_A dt, \quad (2.159)$$

ahol $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_A dt$ a NYOMATÉKIMPULZUS. ♠

2.41. megjegyzés: Mivel a perdülettétel és a (2.158) egyenlet egyenértékűek, ezért a $\dot{\Pi}_A = \mathbf{M}_A$ összefüggést is perdülettételnek nevezzük. Ha ki akarjuk hangsúlyozni a két képlet közötti különbséget, akkor az egyiket a perdülettétel differenciális alakjának, a másikat pedig a perdülettétel integrál alakjának nevezhetjük. ♣

2.68. következmény. A PERDÜLETMEGMARADÁS TÉTELE. Ha a t_1 és t_2 időpontok között az anyagi pontra ható erők álló pontra számított nyomatéka nulla, akkor a perdület állandó marad:

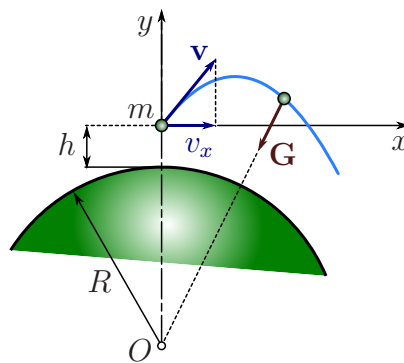
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \Pi_A(t_2) = \Pi_A(t_1). \quad (2.160)$$

♠

Egy anyagi pont vizsgálata során a $\dot{\Pi}_A = \mathbf{M}_A$ egyenlet nem tartalmaz több információt, mint az impulzustétel $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ egyenlete, hiszen abból csak egy vektoriális szorzással származtatható. Természetesen – mint láttuk Kepler 2. törvénye kapcsán – a perdülettétel alkalmazása jelentősen megkönnyítheti egyes feladatok tárgyalását.

2.42. megjegyzés: A perdületmegmaradás tétele lehetővé teszi az 1.1.5 fejezetben tárgyalt, ferde hajítással kapcsolatos eredményeink felülvizsgálatát. Ott feltételeztük, hogy az elhajított test sebességének vízszintes – a Föld felszínének érintőjével párhuzamos – v_x komponense állandó nagyságú.

Pontosabb modellhez jutunk, ha figyelembe vesszük, hogy a pálya különböző pontjaiban más és más lesz a nehézségi erő iránya – jó közelítéssel mindig a Föld középpontja felé mutat, ahogy a 2.55 ábra mutatja. Tehát ha elhanyagoljuk a légellenállást, akkor az elhajított



2.55. ábra. Ferde hajítás tárgyalása a perdületmegmaradás alapján.

testnek a Föld O középpontjára számított *perdülete* lesz állandó nagyságú, a második Kepler-törvénynek megfelelően:

$$\Pi_O = mv_x(R + h) = \text{állandó}. \quad (2.161)$$

Itt $R \approx 6378$ km a Föld sugara és h az elhajított test felszínétől mért magassága. Következésképpen, csak akkor tekinthető v_x is állandónak, ha a h magasság változása elhanyagolható az R sugárhoz képest. ♣

A perdülettétel tipikus alkalmazási területe a merev testek kinetikája, amit a 3. fejezetben tárgyalunk. Merev testek mozgásával kapcsolatos feladatokban azonban sok esetben nem célszerű álló pontra felírni a perdülettételt, ezért az alábbiakban általánosítjuk a tételt tetszőlegesen mozgó referenciapont esetére, majd – mivel a merev testek speciális anyagi pontrendszereknek tekinthetők – további általánosítással áttérünk az anyagi pontrendszerek esetére.

2.4.6. A perdülettétel általánosítása tetszőlegesen mozgó referenciapont esetére

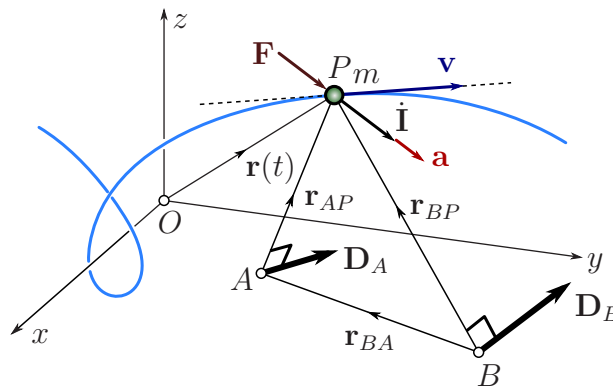
Az $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ egyenlet mindkét oldalát vektoriálisan szorozva egy \mathbf{r}_{BP} vektorral – mely a tetszőleges, tehát nem feltétlenül álló B pontból mutat a tömegponthoz –, az

$$\mathbf{r}_{BP} \times \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{M}_B \quad (2.162)$$

egyenletre jutunk. Az egyenlet bal oldalán álló mennyiséget kinetikai nyomatéknak nevezzük.

2.69. definíció. Anyagi pont B pontra számított KINETIKAI NYOMATÉKA (lásd 2.56 ábra):

$$\mathbf{D}_B = \mathbf{r}_{BP} \times \dot{\mathbf{I}}. \quad (2.163)$$



2.56. ábra. A kinetikai nyomaték redukciója.

A fentiekből következik a perdülettétel általánosítása, mely nem tartalmaz megkötést a referenciapont mozgására vonatkozóan:

2.70. tétel. ÁLTALÁNOSÍTOTT PERDÜLETTÉTEL anyagi pontra:

$$\mathbf{D}_B = \mathbf{M}_B, \quad (2.164)$$

tehát a tetszőlegesen mozgó B pontra számított kinetikai nyomaték egyenlő az anyagi pontra ható erőrendszer B pontra számított nyomatékával. ♠

A kinetikai nyomatékkal történő számításokat könnyíti meg a következő tétel:

2.71. tétel. Anyagi pont impulzus deriváltja és kinetikai nyomatéka vektorkettőst alkot, az ún. KINETIKAI VEKTORKETTŐST: $[\dot{\mathbf{I}}; \mathbf{D}_B]_B$.

Bizonyítás:

Ha a P pontban lévő anyagi pont kinetikai nyomatékát a B pontból egy másik, A pontba akarjuk redukálni (2.56 ábra), akkor $\mathbf{r}_{AP} = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BP}$ miatt

$$\mathbf{D}_A = \mathbf{r}_{AP} \times \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{r}_{AB} \times \dot{\mathbf{I}} + \mathbf{r}_{BP} \times \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{D}_B + \mathbf{r}_{AB} \times \dot{\mathbf{I}}, \quad (2.165)$$

azaz tényleg a vektorkettősökre vonatkozó 1.34. definíció szerint kell számolnunk. ♠

2.72. tétel. KAPCSOLAT A KINETIKAI NYOMATÉK ÉS A PERDÜLET DERIVÁLTJA KÖZÖTT. A (2.153) és (2.155) egyenletek szerint a perdület derivált és a kinetikai nyomaték között az alábbi összefüggés teljesül:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_B = \mathbf{r}_{BP} \times \dot{\mathbf{I}} + \dot{\mathbf{r}}_{BP} \times \mathbf{I} = \mathbf{D}_B - \mathbf{v}_B \times \mathbf{I}, \quad (2.166)$$

azaz

$$\mathbf{D}_B = \dot{\mathbf{\Pi}}_B + \mathbf{v}_B \times \mathbf{I}. \quad (2.167)$$

Ebből következik, hogy az általánosított perdülettétel

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_B + \mathbf{v}_B \times \mathbf{I} = \mathbf{M}_B \quad (2.168)$$

alakban is felírható. ♠

Az előző tétel szerint általában nem egyezik meg az impulzusderivált nyomatéka (azaz a \mathbf{D}_B kinetikai nyomaték) az impulzusnyomaték deriváltjával (a $\mathbf{\Pi}_B$ perdület deriváltjával). Álló pontra ($\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$) vagy a vizsgált anyagi pont sebességével párhuzamos sebességű pontra ($\mathbf{v}_B \parallel \mathbf{v}_P$) azonban e két vektor megegyezik.

2.4.7. Perdülettétel anyagi pontrendszerre

Anyagi pontrendszer esetében a dinamika alaptételének egyenletei az alábbi formában írhatók fel minden egyes pontra:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.169)$$

ahol Newton 3. törvénye értelmében a belső erők páronként egyenlő nagyságúak és ellentétes irányúak:

$$\mathbf{B}_{ij} = -\mathbf{B}_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.170)$$

Válasszunk egy tetszőleges B pontot és onnan vegyünk fel \mathbf{r}_{Bi} helyvektorokat, melyek az egyes anyagi pontokhoz mutatnak. A (2.169) egyenleteket balról vektoriálisan szorozva \mathbf{r}_{Bi} -vel, a következőt kapjuk:

$$\mathbf{r}_{Bi} \times m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{r}_{Bi} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_{Bi} \times \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.171)$$

Ezeket az egyenleteket összegezve:

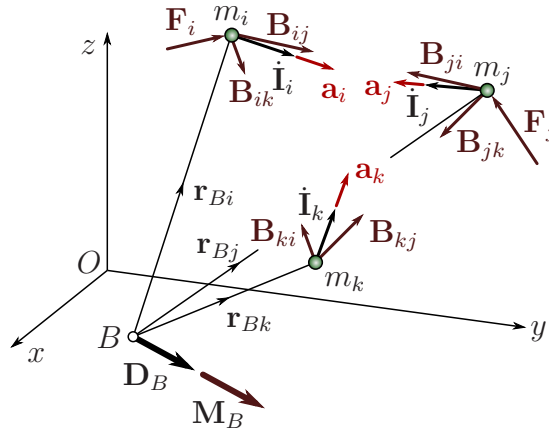
$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Bi} \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Bi} \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{r}_{Bi} \times \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij} \right). \quad (2.172)$$

Az egyenlet bal oldala a korábban megismert kinetikai nyomaték vektor anyagi pontrendszerre általánosított alakja.

2.73. definíció. Egy n anyagi pontból álló pontrendszer B pontra számított KINETIKAI NYOMATÉKA

$$\mathbf{D}_B = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Bi} \times m_i \mathbf{a}_i, \quad (2.173)$$

ahol \mathbf{r}_{Bi} a B pontból az egyes anyagi pontokhoz húzott helyvektor, \mathbf{a}_i pedig az egyes anyagi pontok gyorsulása. ♣



2.57. ábra. Anyagi pontrendszer kinetikai nyomatékának és a ható erőrendszer nyomatékának meghatározása. Centrális belső erők nyomatékainak eredője nulla, ezért ebben az esetben csak a külső erőrendszer járul hozzá az erőrendszer nyomatékához.

Most vizsgáljuk meg a (2.172) egyenlet jobb oldalát! Ha minden belső erő centrális, azaz \mathbf{B}_{ij} párhuzamos az i -edik és j -edik pontot összekötő \mathbf{r}_{ij} vektorral, akkor összegzett nyomatékuk nulla. Ennek belátásához azt használjuk ki, hogy $\mathbf{B}_{ij} = -\mathbf{B}_{ji}$ és $\mathbf{B}_{ii} = \mathbf{0}$, minden i és j indexre. Ez azt jelenti, hogy összepárosíthatjuk a Newton III. törvénye szerinti erő-ellenő párokat a következő módon:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{r}_{Bi} \times \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij} \right) &= \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_{Bi} \times \mathbf{B}_{ij} + \mathbf{r}_{Bj} \times \mathbf{B}_{ji}) \\ &= \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_{Bi} \times \mathbf{B}_{ij} - \mathbf{r}_{Bj} \times \mathbf{B}_{ij}) = \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_{Bi} - \mathbf{r}_{Bj}) \times \mathbf{B}_{ij} \\ &= \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{ji} \times \mathbf{B}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.174)$$

A fenti egyenlet első sorának bal oldalán szereplő $\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_{Bi} \times \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij})$ kifejezés úgy összegzi a nyomatékokat, hogy először a j indexszel összegzi az i -edik testre a többiről átadódó erők nyomatékait, majd ezeket adja össze az i indexre vett szummával.

Ezzel szemben, az első sor jobb oldalán látható $\sum_{j=i+1}^n \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_{Bi} \times \mathbf{B}_{ij} + \mathbf{r}_{Bj} \times \mathbf{B}_{ji})$ kifejezésben először az i és j anyagi pontok között ható két-két belső erő nyomatékai vannak figyelembe véve, de hogy csak egyszer szerepeljen minden erő az összegzésben, a szummában ki van kötve, hogy $j > i$ legyen.

Az utolsó lépésben bevezettük az $\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_{Bi} - \mathbf{r}_{Bj}$ jelölést a j -edik anyagi pontból az i -edik tömegpontba mutató vektorra.

A fenti képletek megértését segíti, ha kifejtjük a kettős összegzést $n = 3$ anyagi pont esetére. Hasonlóan végezhető el ez az átalakítás tetszőleges számú anyagi pontra is:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{r}_{Bi} \times \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{ij} \right) &\equiv \mathbf{r}_{B1} \times (\mathbf{B}_{12} + \mathbf{B}_{13}) + \mathbf{r}_{B2} \times (\mathbf{B}_{21} + \mathbf{B}_{23}) + \mathbf{r}_{B3} \times (\mathbf{B}_{31} + \mathbf{B}_{32}) = \\ &= (\mathbf{r}_{B1} - \mathbf{r}_{B2}) \times \mathbf{B}_{12} + (\mathbf{r}_{B1} - \mathbf{r}_{B3}) \times \mathbf{B}_{13} + (\mathbf{r}_{B2} - \mathbf{r}_{B3}) \times \mathbf{B}_{23}. \end{aligned} \quad (2.175)$$

Centrális erők esetén definíció szerint $\mathbf{B}_{ij} \parallel \mathbf{r}_{ji}$, ezért a vektoriális szorzat tulajdonságai miatt a (2.174) kifejezés nullává válik.

Amint már említettük Newton harmadik törvénye kapcsán, a belső erők mindig esetben centrálisak, de a tapasztalatok szerint ezekben az esetekben mindig megjelennek olyan koncentrált belső nyomatékok, melyekkel a belső erőrendszer összegzett nyomatéka nulla.²⁵ Tehát az eddigi eredményeink további használhatósága érdekében megköveteljük (posztuláljuk), hogy a belső erők nyomatékainak eredője nulla legyen.

2.74. követelmény. POSZTULÁTUM A BELSŐ ERŐK EREDŐ NYOMATÉKÁRÓL. *Anyagi pontrendszer pontjai között ható belső erőrendszer eredő nyomatéka zérus.* ♠

Ez a követelmény Newton III. törvényének kiegészítéseként fogható fel. Teljesülése esetén elhagyható a (2.172) egyenletből a belső erők nyomatékával kapcsolatos tag.

2.75. következmény. *Anyagi pontrendszer esetén az ÁLTALÁNOSÍTOTT PERDÜLETTÉTEL:*

$$\mathbf{D}_B = \mathbf{M}_B, \quad (2.176)$$

ahol $\mathbf{M}_B = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Bi} \times \mathbf{F}_i$ az anyagi pontrendszerre ható KÜLSŐ ERŐK nyomatéka a B pontra. ♠

A fenti egyenlet és a 2.27. impulzustétel alapján anyagi pontrendszerre teljesül az alábbi két egyenlet:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F} \quad \text{és} \quad \mathbf{D}_B = \mathbf{M}_B, \quad (2.177)$$

ahol \mathbf{F} a külső erők eredőjét jelöli. Tömörebb formában

$$[\dot{\mathbf{I}}; \mathbf{D}_B]_B = [\mathbf{F}_k; \mathbf{M}_B]_B. \quad (2.178)$$

Egy tetszőleges anyagi pontrendszernek a pontok számától és a kényszerektől függő szabadsági foka van. Ezzel szemben a fenti egyenletek mindössze hat skalár egyenletet szolgáltatnak. Ez azt jelenti, hogy egy hat szabadsági fokú anyagi pontrendszer (ilyenek a merev testek!) mozgását tökéletesen le lehet írni az impulzustétellel és a perdülettétellel, de több szabadsági fok esetén ez a két vektoregyenlet – noha jellemzi a pontok együttes mozgását – nem elegendő az összes pont viselkedésének kiszámításához.

A gyakorlati feladatokban viszonylag ritkán van szükség a perdülettétel tetszőleges referenciapontra általánosított alakjára. Mozgó referenciapontot bizonyos számítások egyszerűsítése érdekében szoktak választani, de ez mindig kiváltható egy megfelelő pontra felírt perdületvektor – illetve annak deriváltja – használatával. A perdület derivált alkalmazásának előnye, hogy a perdület a lendülettel való analógiája miatt a kinetikai nyomatéknál szemléletesebb fogalom, továbbá a $\dot{\mathbf{I}}_A = \mathbf{M}_A$ alakú egyenlet hasonló sémájú mint az impulzustétel és a teljesítménytétel.

A perdület fogalma értelemszerűen általánosítható anyagi pontrendszer esetére:

²⁵Az elektromágneses tér is rendelkezik impulzussal és perdülettel, amit figyelembevéve teljesül, hogy a belső erők összegzett nyomatéka zérus.

2.76. definíció. ANYAGI PONTRENDSZER PERDÜLETE a B pontra

$$\mathbf{\Pi}_B = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Bi} \times m_i \mathbf{v}_i, \quad (2.179)$$

ahol \mathbf{r}_{Bi} a B pontból az i -edik anyagi ponthoz húzott helyvektor, \mathbf{v}_i pedig az i -edik anyagi pont sebessége. ♣

2.77. tétel. Anyagi pontrendszer impulzusa és perdülete vektorkettőst alkot: $[\mathbf{I}; \mathbf{\Pi}_B]_B$.

Bizonyítás:

Figyelembe véve, hogy $\mathbf{r}_{Bi} = \mathbf{r}_{BA} + \mathbf{r}_{Ai}$,

$$\mathbf{\Pi}_B = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Bi} \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_{BA} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Ai} \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{\Pi}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{I}. \quad (2.180)$$

2.78. következmény. Abban a speciális esetben, mikor a súlypont sebessége nulla, a pontrendszer impulzusa is nulla. Következésképpen, ekkor a pontrendszer perdülete a tér bármely álló vagy mozgó pontjára ugyanakkora. ♠

A perdület definíciója alapján a 2.72. tételhez hasonlóan látható be a következő tétel.

2.79. tétel. Anyagi pontrendszer esetén a KINETIKAI NYOMATÉK ÉS A PERDÜLET DERIVÁLT között az alábbi összefüggés teljesül:

$$\mathbf{D}_B = \dot{\mathbf{\Pi}}_B + \mathbf{v}_B \times \mathbf{I}. \quad (2.181)$$

2.80. következmény. A fenti tételből következik, hogy

- $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{D}_A = \dot{\mathbf{\Pi}}_A$, ezért

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{M}_A, \quad (2.182)$$

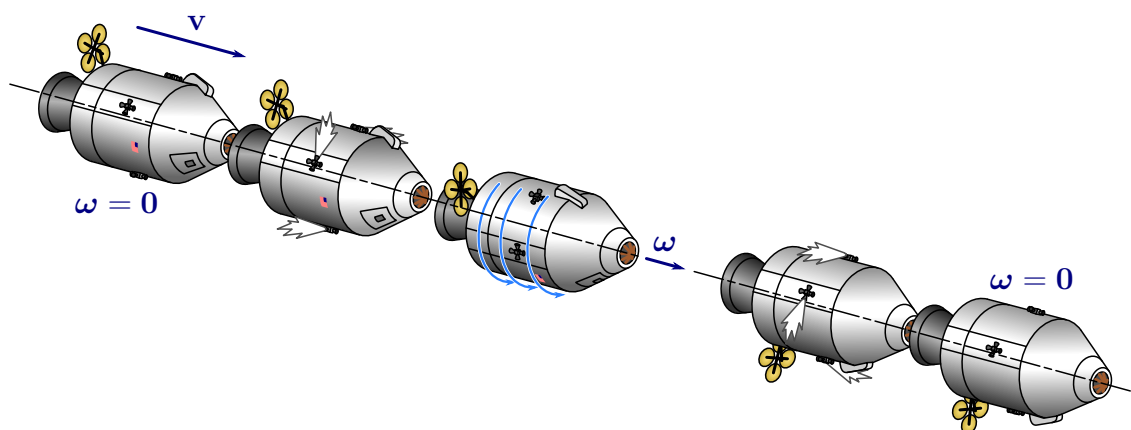
- az anyagi pontrendszer S súlypontjára $\mathbf{v}_S \parallel \mathbf{I}$, ezért $\mathbf{D}_S = \dot{\mathbf{\Pi}}_S$. Következésképpen,

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{M}_S. \quad (2.183)$$

FELADATMEGOLDÁSOK SORÁN JAVASOLJUK A PERDÜLETTÉTEL FENTI KÉT ALAKJÁNAK HASZNÁLATÁT.

Megjegyezzük, hogy a perdület derivált csak speciális referenciapontok választása esetén egyezik meg a kinetikai nyomatékkal, tehát nem alkot vektorkettőst az impulzus deriváltjával. ♠

2.81. példa: A perdülettétel integrál alakja is általánosítható anyagi pontrendszerek esetére – ezt használják ki az úrhajók, műholdak térbeli helyzetének beállítása során. Ha egy adott tengely körül el kell forgatni az úrhajót, akkor rövid ideig működtetik a kormányhajtóműveket, ezért a kifejtett nyomaték hatására forgásba kezd a test (2.58 ábra). A megfelelő szöghelyzet elérése közelében az előzővel ellentétes irányban és (majdnem pontosan) ugyanolyan hosszú ideig működtetve a hajtóműveket, az úrhajó forgása megáll. Ilyen manőverre például azért lehet szükség, mert haladás közben folyamatosan forognia kell az úrhajónak, hogy kiegyenlítsék a Nap felőli oldal és az ellentétes oldal közötti hőmérséklet különbséget. ♠



2.58. ábra. Űrhajó elfordítása a kormányhajtóművek szakaszos működtetésével.

2.43. megjegyzés: Az impulzustétel nem engedi meg, hogy egy anyagi pontrendszer súlypontjának helyét belső erők segítségével meg lehessen változtatni. A perdülettétel azonban nem zárja ki egy anyagi pontrendszer térbeli orientációjának belső erőkkel történő megváltoztatását! Ezt használják ki a macskák: testük különböző részeit megfelelően mozgatva érik el, hogy mindig talpra essenek.

Ehhez hasonlóan, egy elhanyagolható súrlódású forgószéken ülő ember is el tud fordulni a székekkel együtt, a következő módon: a kinyújtott jobb vagy bal karját felemeli oldalra, 90° -kal elforgatja maga elé, majd újra leengedi. Ezt a mozgást ismételve tetszőleges szögű elfordulás elérhető.

Merev testek pontjait nem lehet egymástól függetlenül mozgatni, ezért azok mozgását, térbeli helyzetét nem lehet belső erőkkel befolyásolni. ♣

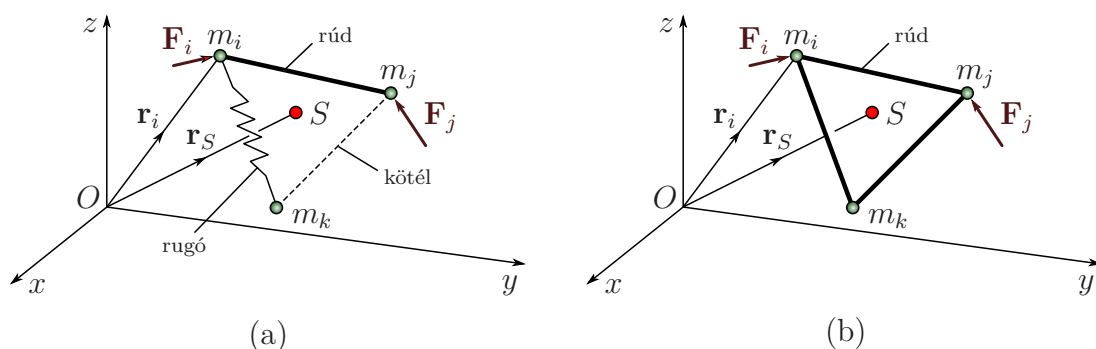
Míg az impulzus a súlypont sebessége és az anyagi pontrendszer teljes tömege alapján számítható, a perdület és a kinetikai nyomaték számítása ennél sokkal bonyolultabb a szükséges összegzések miatt. Mivel az impulzustételt és a perdülettételt fogjuk használni merev testek mozgásának vizsgálatára, erre a problémára a 3. fejezetben térünk vissza.

3. fejezet

A merev testek kinetikája

3.1. A merev test diszkrét modellje

A merev testeket anyagi pontok folytonos rendszerének tekinthetjük, így felhasználhatjuk az anyagi pontrendszerekre korábban levezetett eredmények jelentős részét. Azonban mielőtt rátérnénk a merev testek kinetikájának tárgyalására, vizsgáljunk meg egy olyan modellt, mely véges számú, egymáshoz mereven kapcsolódó anyagi pontból áll. Ezt a *merev test diszkrét modelljének* nevezzük.



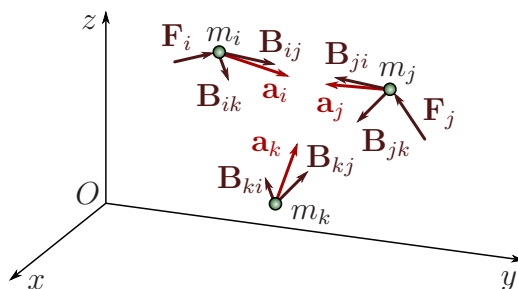
3.1. ábra. Általános anyagi pontrendszer (a) és diszkrét merev test (b).

Ahogy a 3.1/a ábra is mutatja, általános esetben egy anyagi pontrendszer elemei sokféle módon kapcsolódhatnak egymáshoz. A kapcsolat lehet kényszer (pl. rúd, köté, stb.) vagy valamilyen egyéb kölcsönhatás (pl. rugóerő, gravitációs erő). A merev test diszkrét modelljében (3.1/b ábra) merev, elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan rudak kötik össze az egyes anyagi pontokat. Mivel a pontok távolsága állandó, a modellezett testet merevnek tekinthetjük, a szabadsági fokok száma tehát legfeljebb hat.

A 2.3 fejezetben írtakból következően, általános pontrendszer esetében két különböző megoldási módszert lehet alkalmazni a mozgás vizsgálatára:

- 1) Minden anyagi pontra szabadtest ábrát rajzolunk a 3.2 ábrának megfelelően és felírjuk mindegyikre a dinamika alaptételét:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$



3.2. ábra. Diszkrét merev testet alkotó anyagi pontok szabadtest ábrái.

Ebben az esetben kihasználható, hogy Newton III. törvénye értelmében

$$\mathbf{B}_{ij} = \mathbf{B}_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Ez a megoldási módszer általában nagyon sok egyenletből álló egyenletrendszerre vezet.

- 2) Ha nem akarjuk meghatározni a belső erőket, akkor az egész rendszerre összegzett egyenleteket írhatunk fel. A 2.4.1 és 2.4.7 fejezetekben anyagi pontrendszerre is általánosítottuk az impulzustételt és a perdülettételt. Centrális belső erőket feltételezve az alábbi két egyenletre jutottunk:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F} \quad \text{és} \quad \mathbf{D}_B = \mathbf{M}_B, \quad \text{ahol} \quad (3.3)$$

- $\mathbf{I} = m\mathbf{v}_S$ az anyagi pontrendszer impulzusa.
- $\dot{\mathbf{I}} = m\mathbf{a}_S$ az anyagi pontrendszer impulzusának deriváltja.
- \mathbf{F} az anyagi pontrendszerre ható külső erők eredője.
- \mathbf{M}_B a pontrendszerre ható külső erőrendszer B pontra számított nyomatéka.
- $\mathbf{D}_B = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Bi} \times m_i \mathbf{a}_i$ az anyagi pontrendszer B pontra számított kinetikai nyomatéka; \mathbf{r}_{Bi} a B pontból az egyes anyagi pontokhoz húzott helyvektor, \mathbf{a}_i pedig az egyes anyagi pontok gyorsulása.

Azt is beláttuk a korábbi fejezetekben, hogy a perdület deriváltja álló ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$) pontra $\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{M}_A$ illetve súlypontra $\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{M}_S$.

Bármelyik módszert alkalmazzuk is, ezek az egyenletek közvetlenül csak a gyorsulásállapot és a külső erőrendszer kapcsolatáról adnak információt. A sebességállapot és a mozgástörvény meghatározásához differenciálegyenletként kell megoldani a felírt egyenleteket, amihez szükséges a kezdeti feltételek (kezdeti helyvektorok, sebességek) megadása is.

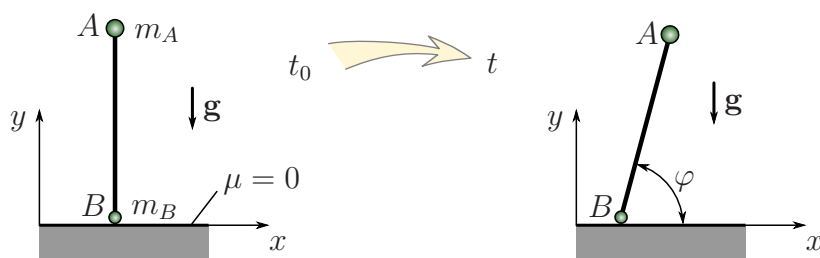
Általános, 6-nál több szabadsági fokú anyagi pontrendszer esetében a (3.3) egyenletek nem elegendőek az összes anyagi pont gyorsulásának meghatározásához. A diszkrét merev test modell azonban legfeljebb hat szabadsági fokú lehet, tehát a kinetikai és statikai vektorkettősök egyenlőségét kifejező

$$[\dot{\mathbf{I}}; \mathbf{D}_B]_B = [\mathbf{F}; \mathbf{M}_B]_B \quad (3.4)$$

egyenletből meghatározható a gyorsulásállapot.

A lehető legegyszerűbb diszkrét merev test modell két darab mereven összekötött anyagi pontból áll. Térben csak öt szabadsági fokú ez a modell, hiszen a két pontot összekötő egyenesre illeszkedő tengely körüli forgást nem értelmezzük. Síkmozgás esetén a szabadsági fokok száma három, függetlenül attól, hogy kettő vagy több anyagi pont alkotja-e a diszkrét merev testet.¹

3.1. példa: Két, m_A illetve m_B tömegű anyagi pontból és a pontokat összekötő, elhanyagolható tömegű merev rúdból álló test B pontja súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon (3.3 ábra). A test nyugalomból indul abból a helyzetből, amikor a rúd φ szöget zár be a függőleges iránnyal. Mekkora a talajról átadódó kényszererő az indulás pillanatában?



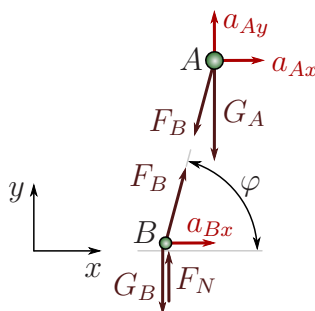
3.3. ábra. Két anyagi pontból álló diszkrét merev test mozgásának vizsgálata.

Megoldás:

A feladatot mindkét, a fejezet elején vázolt módszerrel megoldjuk.

1) Megoldás a belső erők figyelembevételével.

Az ábrák alapján belátható, hogy a testre ható erők hatásvonalai a testen áthaladó függőleges xy síkba esnek. Mivel a test nyugalomból indul, végig ebben a síkban is marad, tehát síkmozgást végez.



3.4. ábra. A diszkrét merev testet alkotó anyagi pontok szabadtest ábrái. A nehézségi erő jelölése: $G_A = m_A g$, $G_B = m_B g$.

A 3.4 szabadtest ábra segítségével felírhatjuk a dinamika alaptételének egyenleteit mindkét anyagi pontra:

$$m_A a_{Ax} = -F_B \sin(\varphi), \quad (1)$$

$$m_A a_{Ay} = -F_B \cos(\varphi) - m_A g, \quad (2)$$

$$m_B a_{Bx} = F_B \sin(\varphi), \quad (3)$$

$$m_B \cdot 0 = F_B \cos(\varphi) + F_N - m_B g. \quad (4)$$

¹További kényszerek természetesen csökkenthetik a szabadsági fokot.

A szabadtest ábra felrajzolása során már kihasználtuk Newton III. törvényét és ennek megfelelően jelent meg az F_B belső erő az egyenletekben. Figyelembe vettük azt is, hogy a B pont az x tengellyel párhuzamos pályán csúszik. Ez utóbbi kényszerfeltétel szerint $y_B = \text{állandó}$, aminek a deriválásából adódik $a_{By} = 0$ a (4) egyenlet bal oldalán.

Azt viszont még nem vettük figyelembe, hogy a két anyagi pont közötti távolság is állandó. A merev testek kinematikájából tudjuk, hogy az $|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó}$ feltételből két idő szerinti deriválás után az (1.104) gyorsulásredukciós képletet kapjuk, azaz síkmozgás esetén

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{BA} - \omega^2 \mathbf{r}_{BA}.$$

Kihasználva, hogy az indulás pillanatában $\omega = 0$ és síkmozgás esetén a szöggyorsulás a z tengellyel párhuzamos, kifejezhetők az A pont gyorsulásának nem nulla komponensei:

$$a_{Ax} = a_{Bx} - \varepsilon_z l \cos(\varphi), \quad (5)$$

$$a_{Ay} = \varepsilon_z l \sin(\varphi). \quad (6)$$

Így összesen hat skalár egyenletet kaptunk, amiből a hat ismeretlen (a_{Ax} , a_{Ay} , a_{Bx} , ε_z , F_B és F_N) meghatározható. Például $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg, $l = 2$ m, $g = 9.81$ m/s² és $\sin(\varphi) = 0.6$ adatokkal $F_N = 124,703$ N.

2) Megoldás a teljes anyagi pontrendszerre felírt impulzus- és perdülettétel alapján.

Az impulzustételnek megfelelő (1) és (3) illetve (2) és (4) egyenleteket összegezve:

$$m_A a_{Ax} + m_B a_{Bx} = 0, \quad (3.5)$$

$$m_A a_{Ay} + 0 = F_N - (m_A + m_B)g. \quad (3.6)$$

Figyelembe véve, hogy a teljes tömeg $m = m_A + m_B$, a közös súlypont gyorsulásának komponensei pedig

$$a_{Sx} = \frac{m_A a_{Ax} + m_B a_{Bx}}{m_A + m_B}, \quad a_{Sy} = \frac{m_A a_{Ay} + 0}{m_A + m_B},$$

e két egyenlet átírható

$$m a_{Sx} = 0, \quad (1^*)$$

$$m a_{Sy} = F_N - mg \quad (2^*)$$

alakba. Látható, hogy az F_B belső erő kiesett az egyenletekből. Mivel a súlypont gyorsulása szerepel ezekben az egyenletekben, a továbbiakban a kényszerfeltételeket a súlypont gyorsulására felírt gyorsulásredukciós képlettel vesszük figyelembe. Az A és B pontokból a súlypontba mutató helyvektorok

$$\mathbf{r}_{AS} = \frac{\mathbf{0} m_A + \mathbf{r}_{AB} m_B}{m} = \begin{bmatrix} -\frac{m_B}{m} l \sin(\varphi) \\ -\frac{m_B}{m} l \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_{BS} = \frac{\mathbf{0} m_B + \mathbf{r}_{BA} m_A}{m} = \begin{bmatrix} \frac{m_A}{m} l \sin(\varphi) \\ \frac{m_A}{m} l \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Ezekből a képletekből látszik, hogy $m_A \mathbf{r}_{AS} + m_B \mathbf{r}_{BS} = \mathbf{0}$. Az $\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{BS} - \omega^2 \mathbf{r}_{BS}$ összefüggést kifejtve, $\omega = 0$ figyelembevételével,

$$a_{Sx} = a_{Bx} - \varepsilon_z \frac{m_A}{m} l \cos(\varphi), \quad (3^*)$$

$$a_{Sy} = \varepsilon_z \frac{m_A}{m} l \sin(\varphi). \quad (4^*)$$

Eddig négy egyenletet írtunk fel, azonban az ismeretlenek száma öt: a_{Sx} , a_{Sy} , ε_z , a_{Bx} és F_N . Szükség van egy további skalár egyenletre is – ami a perdülettételből származtatható. A *súlypontra* számított kinetikai nyomaték (amiről tudjuk, hogy megegyezik a perdület deriváltjával) definíció szerint

$$\mathbf{D}_S = \mathbf{r}_{SA} \times m_A \mathbf{a}_A + \mathbf{r}_{SB} \times m_B \mathbf{a}_B. \quad (3.8)$$

A külső erőrendszer S súlypontra számított nyomatéka pedig

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{r}_{SA} \times m_A \mathbf{g} + \mathbf{r}_{SB} \times m_B \mathbf{g} + \mathbf{r}_{SB} \times \mathbf{F}_N. \quad (3.9)$$

A súlypont definícióját figyelembe véve látható, hogy a nehézségi erő nyomatékát kifejező első két tag összege nulla – annak megfelelően, hogy a nehézségi erő súlypontra számított nyomatéka zérus. A súlypontra felírt $\mathbf{D}_S = \mathbf{M}_S$ perdülettételből így

$$\mathbf{r}_{SA} \times m_A \mathbf{a}_A + \mathbf{r}_{SB} \times m_B \mathbf{a}_B = \mathbf{r}_{SB} \times \mathbf{F}_N. \quad (3.10)$$

Tudjuk, hogy mind \mathbf{a}_A mind \mathbf{a}_B kifejezhető a súlypont gyorsulásával, azaz

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_S + \varepsilon \times \mathbf{r}_{SA} - \omega^2 \mathbf{r}_{SA}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_S + \varepsilon \times \mathbf{r}_{SB} - \omega^2 \mathbf{r}_{SB}. \quad (3.12)$$

A fenti kifejezéseket a (3.10) egyenletbe helyettesítve kihasználhatjuk, hogy $\mathbf{r}_{SA} \times \mathbf{r}_{SA} = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_{SB} \times \mathbf{r}_{SB} = \mathbf{0}$, továbbá $m_A \mathbf{r}_{SA} + m_B \mathbf{r}_{SB} = \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{r}_{SA} \times m_A \mathbf{a}_S + \mathbf{r}_{SB} \times m_B \mathbf{a}_S = \mathbf{0}$, tehát csak a szöggyorsulással kapcsolatos tagok maradnak meg:

$$m_A (\mathbf{r}_{SA} \times \varepsilon \times \mathbf{r}_{SA}) + m_B (\mathbf{r}_{SB} \times \varepsilon \times \mathbf{r}_{SB}) = \mathbf{r}_{SB} \times \mathbf{F}_N. \quad (3.13)$$

A bal oldalon látható kifejezés tovább egyszerűsíthető. Az \mathbf{r}_{SA} és \mathbf{r}_{SB} vektorok behelyettesítése után ugyanis a fenti egyenletnek csak a z komponense hordoz információt, a következő alakban:

$$(m_A \overline{AS}^2 + m_B \overline{BS}^2) \varepsilon_z = -F_N \overline{BS} \sin(\varphi), \quad (5^*)$$

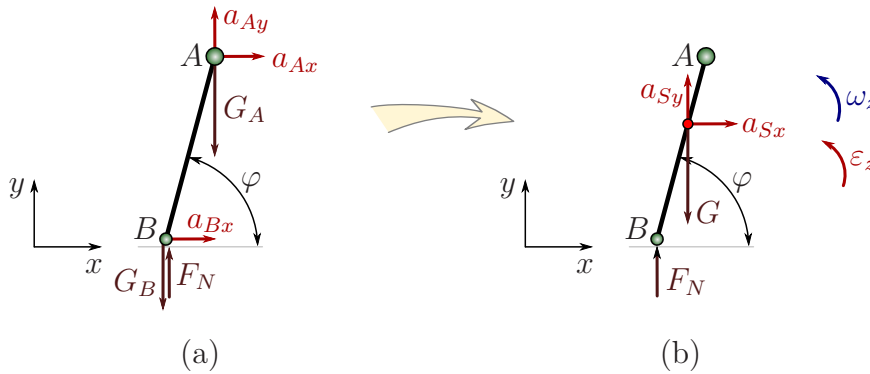
ahol $\overline{AS} = lm_B/m$ illetve $\overline{BS} = lm_A/m$ az A és B pontoknak a súlyponttól mért távolságát adják meg. Ezzel megvan az egyenletrendszer ötödik egyenlete is.

Kétségtelen, hogy az (1*)-(5*) egyenletrendszer valamivel egyszerűbb az elsőként felírt (1)-(6) egyenletrendszerénél. Mégis jogosan merülhet fel az olvasóban, hogy a perdülettétel alkalmazásához szükséges hosszú számításokat megérte-e elvégezni. A perdülettétel alkalmazása melletti legfontosabb érvek a következők:

1. A dinamika alaptételéből és a kényszerfeltételekből levezethető skalár egyenletek száma nagyon gyorsan nő a diszkrét merev testet alkotó anyagi pontok számával. Ez azt jelenti, hogy a perdülettétellel elérhető egyszerűsítés több pontból álló pontrendszer esetében sokkal látványosabb. Továbbá, folytonos merev testek esetében végtelen (kontinuum számosságú) pont együttes mozgását kell vizsgálni, ezért ilyenkor a perdülettétel alkalmazásának nincs alternatívája.
2. A fenti számítás legösszetettebb része a súlypontra számított kinetikai nyomaték vektor kifejezése volt. Az eredményül kapott (5*) egyenletben megjelenő $\Theta_{S_z} = m_A \overline{AS}^2 + m_B \overline{BS}^2$ kifejezésről – melyet a test *súlyponton átmenő z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékának* nevezünk – látszik, hogy az csak a vizsgált test tömegeloszlásától függ. Ez tetszőlegesen sok (n darab) anyagi pont esetében is így van: $\Theta_{S_z} = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$, ahol d_i az i -edik tömegpont távolsága a súlyponton áthaladó, z -vel párhuzamos tengelytől.

Látni fogjuk a következőkben, hogy merev test dinamikai értelemben vett síkmozgása során (lásd 3.4 fejezet) a súlypontra számított perdület derivált vektor z komponense $\Theta_{S_z}\varepsilon_z$. Ennek ismeretében a perdülettétel alkalmazása jelentősen leegyszerűsödik.

Az impulzustétel alkalmazása is egyszerűbb, ha nem az egyes anyagi pontokra felírt $m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$ alakú egyenletek összegzésével írjuk fel, hanem egy olyan szabadtest ábra alapján, ami egyben ábrázolja a teljes diszkrét merev testet.



3.5. ábra. (a) A diszkrét merev testet alkotó anyagi pontok gyorsulásai és a rájuk ható külső erők. (b) A szabadtest ábrán a súlypont gyorsulásának komponensei valamint a test szögsebessége és szöggyorsulása szerepelnek, az eredő $G = (m_A + m_B)g$ nehézségi erő pedig a test súlypontjába van redukálva.

Ezen a 3.5 szabadtest ábrán a belső erők nem szerepelhetnek. A külső erőkön kívül a gyorsulásiállapotot megadó kinematikai mennyiségeket, azaz a súlypont \mathbf{a}_S gyorsulásának, a szöggyorsulásnak és a szögsebességnek a komponenseit tüntetjük fel. ♠

3.2. A dinamika alaptétele merev testre

Ebben a fejezetben rátérünk a folytonos tömegeloszlású merev testek kinetikájának vizsgálatára. Az anyagi pontrendszerekre levezetett tételek továbbra is érvényesek maradnak, hiszen a merev testeket folytonos tömegeloszlású anyagi pontrendszernek tekinthetjük, ahol az egyes anyagi pontok közötti távolság állandó.

Mivel egy merev test szabadsági foka hat, a mozgás vizsgálatához elegendő az impulzustétel és a perdülettétel hat skalár egyenlete. E tételek jelentőségét mutatja, hogy merev testek esetében az alábbi, kiterjesztett értelemben szokták kimondani a dinamika alaptételét.

3.2. tétel. A DINAMIKA ALAPTÉTELE MEREV TESTRE:

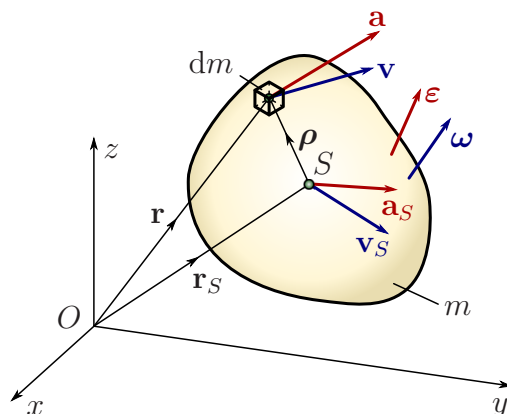
$$[\dot{\mathbf{I}}; \mathbf{D}_B]_B = [\mathbf{F}; \mathbf{M}_B]_B. \quad (3.14)$$

♠

A fenti egyenletben \mathbf{F} a külső erők eredője és \mathbf{M}_B a külső erőrendszer tetszőleges B pontra számított nyomatéka. Az impulzus deriváltjáról tudjuk az anyagi pontrendszerekkel és a diszkrét merev test modellel kapcsolatos eredményekből, hogy $\dot{\mathbf{I}} = m\mathbf{a}_S$, \mathbf{D}_B pedig a merev test B pontra számított kinetikai nyomatéka. Álló ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$) pontra $\mathbf{D}_A = \dot{\mathbf{\Pi}}_A$ és a test súlypontjára $\mathbf{D}_S = \dot{\mathbf{\Pi}}_S$.

A tétel *gyakorlati alkalmazhatóságához* ki kell tudnunk fejezni a súlypont gyorsulását, a kinetikai nyomatékot, a perdületet, a perdület deriváltat, stb. a korábban anyagi pontrendszerekre bevezetett, összegzéseken alapuló képleteknél egyszerűbb formában. Ehhez az összegzéseket *integrálokkal* kell helyettesítenünk, azaz az egyes fizikai mennyiségeket definiáló összefüggések határértékét kell vennünk, amikor az egyes elemi anyag darabok száma végtelenhez, tömege pedig nullához tart.

A levezetések elvégzésének megkönnyítése céljából vezessük be az alábbi jelöléseket, a 3.6 ábrával összhangban:



3.6. ábra. A folytonos merev test kinetika tárgyalásához bevezetett jelölések.

- az \mathbf{r} vektor egy adott térbeli referenciapontból,
- a $\boldsymbol{\rho}$ vektor pedig a test súlypontjából mutat a test többi pontjába.
- A \mathbf{v} és \mathbf{a} vektorok a test egyes pontjainak sebességét illetve gyorsulását adják meg.

A felsorolt vektorok a test pontjain végigfutó változók. Ha egy *adott* pont helyét, sebességét, gyorsulását akarjuk kifejezni, akkor továbbra is alsó indexben jelöljük, hogy melyik pontról van szó: \mathbf{r}_P , $\boldsymbol{\rho}_S$, \mathbf{v}_A , \mathbf{a}_B , stb.

A következő fejezetekben elvégezzük az integrálokra való áttéréseket. Ennek során fő célunk a dinamika alaptételének tömör, a gyakorlatban jól alkalmazható kifejezése.

3.2.1. Az impulzustétel merev testre

A 2.26. következmény alapján tudjuk, hogy anyagi pontrendszer impulzus deriváltját a súlypont gyorsulásával tudjuk kifejezni. Ezért az impulzustétel alkalmazásához meg kell tudnunk határozni a merev test súlypontjának helyét.

3.3. definíció. Egy m tömegű merev test SÚLYPONTJÁNAK HELYVEKTORA

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{(m)} \mathbf{r} \, dm}{m}, \quad (3.15)$$

ahol az \mathbf{r} vektor egy adott térbeli referenciapontból mutat a test többi pontjába. ♣

A koordináta-rendszer origóját a súlypontba tolván azonnal látszik, hogy ezzel egyenértékű az alábbi állítás, melyet sokszor fel fogunk használni levezetéseink során:

3.4. tétel. *A súlypontra számított STATIKAI NYOMATÉK zérus, azaz*

$$\int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \, dm = \mathbf{0}, \quad (3.16)$$

ahol a $\boldsymbol{\rho}$ vektor a test súlypontjából mutat a test többi pontjába. ♠

Minden anyagi pontrendszerre – így merev testekre is – igaz, hogy az impulzus a teljes tömeg és a súlypont sebességének szorzata (lásd 2.25. tétel). Ez könnyen belátható, ha a merev test egyes pontjainak \mathbf{v} sebességét a súlypont sebességével fejezzük ki:

3.5. tétel. MEREV TEST IMPULZUSA (*lendülete*):

$$\mathbf{I} = \int_{(m)} \mathbf{v} \, dm = \int_{(m)} (\mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \, dm = \int_{(m)} \mathbf{v}_S \, dm + \boldsymbol{\omega} \times \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \, dm = m\mathbf{v}_S, \quad (3.17)$$

miel $\int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \, dm = \mathbf{0}$. ♠

Ebből a tételből idő szerinti deriválással következik az impulzus derivált alábbi kifejezése.²

3.6. tétel. *Merev test IMPULZUS DERIVÁLTJA*

$$\dot{\mathbf{I}} = \int_{(m)} \mathbf{a} \, dm = m\mathbf{a}_S. \quad (3.18)$$

Tehát az IMPULZUSTÉTEL MEREV TESTEKRE

$$m\mathbf{a}_S = \mathbf{F} \quad (3.19)$$

alakban írható fel, ahol \mathbf{F} a testre ható külső erők eredője, \mathbf{a}_S pedig a test súlypontjának gyorsulása. ♠

3.2.2. Merev test perdülete és tehetetlenségi nyomatéka

A 2.80. következményben anyagi pontrendszerre levezetett $\mathbf{D}_S = \dot{\boldsymbol{\Pi}}_S$ összefüggés merev testekre is érvényes. Következésképpen, a dinamika alaptételének alkalmazásához érdemes kifejezni a súlypontra számított perdületet a merev test tömegeloszlása és sebességállapota segítségével. Az alábbi levezetés során ismét kihasználjuk, hogy egy merev test pontjainak sebessége megadható a súlypont sebessége és a szögsebesség segítségével:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_S &= \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{I} = \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} \, dm = \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \, dm = \\ &= \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \, dm \times \mathbf{v}_S + \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \, dm. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$\int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \, dm = \mathbf{0}$ miatt az első tag kiesik³, ezért

$$\boldsymbol{\Pi}_S = \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \, dm, \quad (3.21)$$

²Az is belátható, hogy a gyorsulásredukciós képlettel kapható $\int_{(m)} \mathbf{a}_S + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \, dm$ kifejezés integrandusában szereplő második és harmadik tag integrálja nulla, de ez a tétel az anyagi pontokra vonatkozó 2.28. tételből is következik.

³Ez az eredmény úgy is értelmezhető, hogy a súlypontra számított perdületben csak a test pontjainak a súlyponthoz képest számolt $\mathbf{v} - \mathbf{v}_S$ relatív sebességét kell figyelembe venni.

ami az 5.5. kifejtési tétel segítségével átírható az alábbi alakba:

$$\mathbf{\Pi}_S = \int_{(m)} (\boldsymbol{\rho}^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\rho}) dm. \quad (3.22)$$

Az (5.20) diadikus szorzat tulajdonságait felhasználva kiemelhető az integrálból a merev test mozgását jellemző $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor:

$$\mathbf{\Pi}_S = \int_{(m)} (\boldsymbol{\rho}^2 \mathbf{E} - (\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho})) dm \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3.23)$$

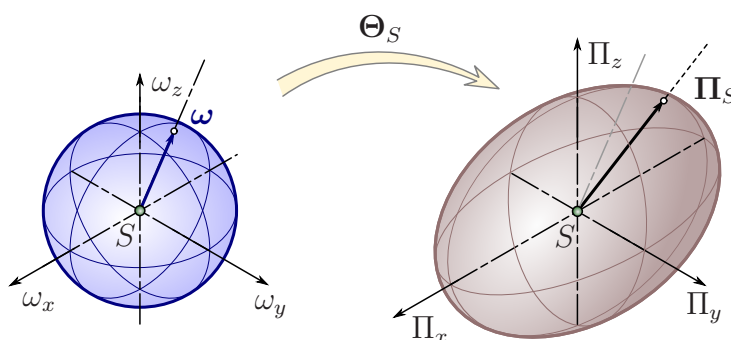
Itt \mathbf{E} a 3×3 -as egységmátrixot jelöli, $\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho}$ pedig a test súlypontjából a test többi pontjába mutató vektornak az önmagával vett diadikus szorzata. A fenti képletben szereplő integrál eredménye egy olyan mátrix, ami a vizsgált merev testet jellemzi, csak annak geometriájától és tömegeloszlásától függ. A további levezetések és számítások egyszerűsítése érdekében célszerű új fizikai mennyiségként definiálni ezt a mátrixot.

3.7. definíció. A merev test S SÚLYPONTRA SZÁMÍTOTT TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKI MÁTRIXA

$$\boldsymbol{\Theta}_S = \int_{(m)} (\boldsymbol{\rho}^2 \mathbf{E} - (\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho})) dm. \quad (3.24)$$

Mértékegysége: kgm^2 . ♣

3.44. megjegyzés: Az itt megadott fizikai mennyiséget súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki tenzornak is nevezhetnénk. A tenzorok lineáris vektor-vektor függvények. Hatásukat szemléletesen úgy képzelhetjük el, hogy egy adott irányú és nagyságú nyíllal megadható vektorhoz – itt a szögsebességvektorhoz – egy másik, szintén valamilyen irányú és nagyságú nyílként megadható vektort – ebben az esetben a perdületvektort – rendelnek, ahogy a 3.7 ábrán látható. A tenzorok értelmezéséhez tehát nem szükséges koordináta-rendszert bevezetni. A tenzorokat adott koordináta-rendszerben mátrixok segítségével lehet reprezentálni. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy a képleteinket valamilyen koordináta-rendszerben értelmezzük, tehát a vektorokat számhármások, a tenzorokat pedig mátrixok segítségével adjuk meg. ♣



3.7. ábra. A tehetetlenségi nyomaték tenzora hozzárendeli az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektorhoz a $\mathbf{\Pi}_S = \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}$ perdületvektort. Ha a tér minden irányában ugyanakkora szögsebességvektorokat veszünk fel, akkor ezek végpontjai egy gömbön helyezkednek el. Az ezekhez hozzárendelt perdületvektorok végpontjai azonban már nem gömböt, hanem ellipszoidot jelölnek ki a térben.

A súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixot a merev test paraméterének tekintjük, ugyanúgy, ahogy a tömegét. Segítségével tömör alakban kifejezhetjük a test perdületét.

3.8. tétel. *Merev test SÚLYPONTRA SZÁMÍTOTT PERDÜLETE a súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix és a szögsebességvektor szorzata:*

$$\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}. \quad (3.25)$$



3.45. megjegyzés: A fenti levezetésből következik, hogy

$$\int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}. \quad (3.26)$$

Mivel a tehetetlenségi nyomaték nem függ a test szögsebességétől, a szögsebességvektor helyett szöggyorsulás vektorral is érvényes marad ez az összefüggés, azaz

$$\int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}) dm = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.27)$$

Érdeemes összevetni ezt az eredményt a diszkrét merev testek kapcsán levezetett (3.13) képlettel, ahol a tehetetlenségi nyomaték fogalmát egy egyszerű példa kapcsán vezettük be. ♣

Vizsgáljuk meg a tehetetlenségi nyomatéki mátrix alakját, ha $\boldsymbol{\rho} = [x \ y \ z]^T$! Ekkor a tehetetlenségi nyomaték definíciójában szereplő integrandus az alábbi módon fejezhető ki:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}^2 \mathbf{E} - (\boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho}) &= (x^2 + y^2 + z^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + y^2 + z^2 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 + z^2 - z^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A tehetetlenségi nyomaték kiszámításához a mátrixban szereplő kifejezéseket kell integrálni a test teljes tömegére, azaz

$$\mathbf{\Theta}_S = \begin{bmatrix} \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm & -\int_{(m)} xy dm & -\int_{(m)} xz dm \\ -\int_{(m)} xy dm & \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm & -\int_{(m)} yz dm \\ -\int_{(m)} xz dm & -\int_{(m)} yz dm & \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

3.9. definíció. *A tehetetlenségi nyomatéki mátrix főátlójában található elemeket TENGELYRE SZÁMÍTOTT TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKOKNAK, a főátlón kívüli tagok (-1)-szeresét pedig DEVIÁCIÓS NYOMATÉKOKNAK nevezzük. Például*

$$\Theta_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm \quad (3.30)$$

az x tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték és

$$D_{xy} = \int_{(m)} xy dm \quad (3.31)$$

az $x - y$ tengelypárra számított deviációs nyomaték. ♣

3.10. definíció. *Ha egy tengelyhez tartozó deviációs nyomatékok nullák, akkor a szóban forgó tengelyt TEHETETLENSÉGI FŐTENGELENEK, a megfelelő tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékot pedig FŐTEHETETLENSÉGI NYOMATÉKNAK nevezzük.* ♣

Például z tehetetlenségi főtengelel és Θ_z főtehetetlenségi nyomaték, ha a tehetetlenségi nyomaték mátrixának alakja

$$\Theta_S = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & 0 \\ -D_{xy} & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

azaz $D_{xz} = D_{yz} = 0$.

A deviációs nyomatékok elnevezése az „eltérés” jelentésű *deviáció* szóból ered. Az elnevezésnek az a magyarázata, hogy ha a főátlón kívüli deviációs nyomatékok nem nullák, akkor a perdületvektor általában nem párhuzamos a szögsebességvektorral. Például $\boldsymbol{\omega} = [0 \ 0 \ \omega_z]^T$ szögsebességű forgás esetében

$$\mathbf{\Pi}_S = \Theta_S \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{xz} \omega_z \\ -D_{yz} \omega_z \\ \Theta_z \omega_z \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

tehát ha $D_{xz} \neq 0$ vagy $D_{yz} \neq 0$, akkor $\mathbf{\Pi}_S \nparallel \boldsymbol{\omega}$. Ez azzal jár, hogy a perdületvektor iránya állandó szögsebességű forgás mellett is változik, azaz deriváltja nem nulla. Következésképpen, a $\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{M}_S$ perdülettel szerint az ilyen mozgás fenntartásához – a tengely irányának megtartásához – nyomatéokra van szükség. Nyomaték hiányában a tengely „eltérül”.

Ebből következik, hogy a tehetetlenségi főtengelel a test ún. *szabad tengelyei*, mert a test külső nyomaték nélkül is foroghat bármelyik főtengelel körül – hiszen főtengelel irányú szögsebesség esetén a perdület párhuzamos marad a szögsebességgel.

A deviációs nyomaték szerepének megvilágítása céljából a következő példában megvizsgáljuk egy álló tengely körül forgó test – a számítások egyszerűsítése érdekében egy diszkrét merev test – perdületvektorát és a perdület deriváltját.

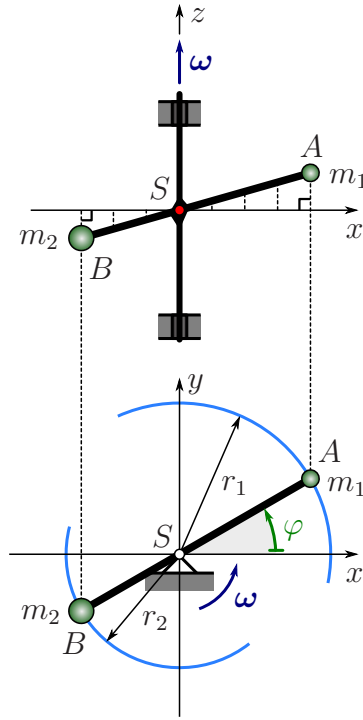
3.11. példa: *Egy két tömegpontból álló diszkrét merev test az S súlypontjában ferdén hozzá van rögzítve egy állandó*

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

szögsebességgel forgó tengelyhez, a 3.8 és a 3.9 ábráknak megfelelően. Az S súlypontból az m_1 és m_2 tömegű tömegpontokba mutató vektorok

$$\mathbf{r}_{SA} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \cos(\varphi) \\ r_1 \sin(\varphi) \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{illetve} \quad \mathbf{r}_{SB} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2 \cos(\varphi) \\ -r_2 \sin(\varphi) \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

a test φ szögkoordináta segítségével leírható helyzetében. z_1 és z_2 , valamint $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ és $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ is állandó értékűek a forgás során. Határozzuk meg a súlypontra számított perdületet, annak idő szerinti deriváltját és a mozgás fenntartásához szükséges nyomatékot!



3.8. ábra. Két tömegpontból álló diszkrét merev test, ferdén felszerelve a tengelyre – vetületi ábrák.

Megoldás:

Diszkrét merev test esetében a (3.61) egyenletnek megfelelően, összegzésekkel kell kiszámítani a tehetetlenségi nyomaték mátrixának elemeit. Ez alapján a test súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixa

$$\Theta_S = \begin{bmatrix} m_1(y_1^2 + z_1^2) + m_2(y_2^2 + z_2^2) & -(m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2) & -(m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2) \\ -(m_1x_1y_1 + m_2x_2y_2) & m_1(x_1^2 + z_1^2) + m_2(x_2^2 + z_2^2) & -(m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2) \\ -(m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2) & -(m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2) & m_1(y_1^2 + x_1^2) + m_2(y_2^2 + x_2^2) \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

a test súlypontra számított perdülete pedig

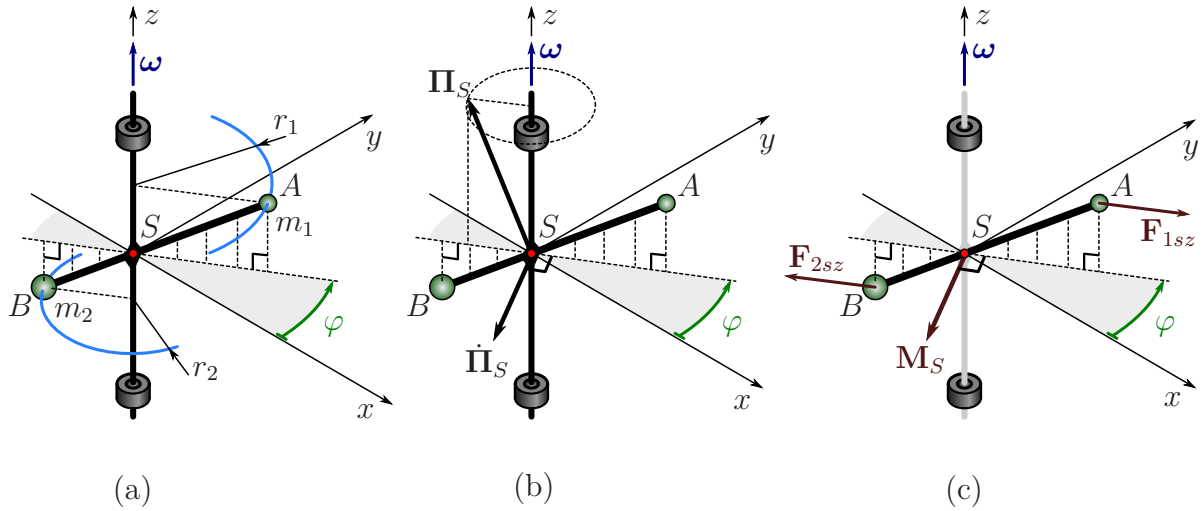
$$\begin{aligned} \Pi_S &= \Theta_S \omega = \begin{bmatrix} -(m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2) \omega_z \\ -(m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2) \omega_z \\ (m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2)) \omega_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(m_1r_1z_1 - m_2r_2z_2) \cos(\varphi) \omega_z \\ -(m_1r_1z_1 - m_2r_2z_2) \sin(\varphi) \omega_z \\ (m_1r_1^2 + m_2r_2^2) \omega_z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -D_{xz} \omega_z \\ -D_{yz} \omega_z \\ \Theta_z \omega_z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

a (3.33) egyenletnek megfelelően. Az eredmény alapján azonosíthatjuk a tengelypárra számított deviációs nyomatékokat:

$$D_{xz} = (m_1r_1z_1 - m_2r_2z_2) \cos(\varphi), \quad (3.38)$$

$$D_{yz} = (m_1r_1z_1 - m_2r_2z_2) \sin(\varphi). \quad (3.39)$$

Mivel az (xyz) koordináta-rendszert az álló inerciarendszerhez rögzítettük, mind a tehetetlenségi nyomaték, mind a perdület komponensei változhatnak a test forgása során. A (3.37) képlet és a 3.9/b ábra alapján látható, hogy a perdületvektor egy állandó nagyságú, a z tengely körül forgó vektor.



3.9. ábra. (a) A két tömegpontból álló diszkrét merev test térbeli ábrája. (b) A perdületvektor a z tengely körül forog állandó ω szögsebességgel, ezért a perdület deriváltja merőleges a Π_S és ω vektorok által kifeszített síkra. (c) A testtel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben mindkét tömegpont egyensúlyban van. A rájuk ható szállító erő (centrifugális erő) nyomatékával a valódi \mathbf{M}_S nyomaték tart egyensúlyt.

A perdület derivált kifejezéséhez azt használjuk ki, hogy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \sin(\varphi(t)) &= \dot{\varphi} \cos(\varphi(t)) \quad \text{és} \\ \frac{d}{dt} \cos(\varphi(t)) &= -\dot{\varphi} \sin(\varphi(t)),\end{aligned}$$

ahol $\dot{\varphi} = \omega_z$. Figyelembe véve, hogy $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{r}_1 = \dot{r}_2 = 0$, továbbá $\dot{\omega}_z = 0$,

$$\dot{\Pi}_S = \begin{bmatrix} -(m_1 \dot{x}_1 z_1 + m_2 \dot{x}_2 z_2) \omega_z \\ -(m_1 \dot{y}_1 z_1 + m_2 \dot{y}_2 z_2) \omega_z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 r_1 z_1 - m_2 r_2 z_2) \sin(\varphi) \omega_z^2 \\ -(m_1 r_1 z_1 - m_2 r_2 z_2) \cos(\varphi) \omega_z^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{yz} \omega_z^2 \\ -D_{xz} \omega_z^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Ezt az eredményt egyszerűen úgy magyarázhatjuk, hogy ha a D_{xz} vagy D_{yz} deviációs nyomatékok nem nullák, akkor a perdületvektor deriváltja sem nulla.

Másrészt viszont úgy tekinthetjük, hogy a perdület megváltozása az adott, álló koordináta-rendszerben felírt tehetetlenségi nyomatéki mátrix elemeinek megváltozásával hozható kapcsolatba, hiszen a $\Pi_S = \Theta_S \omega$ szorzat deriváltja $\omega = \text{állandó}$ miatt

$$\dot{\Pi}_S = \frac{d}{dt} (\Theta_S \omega) = \dot{\Theta}_S \omega. \quad (3.41)$$

Valóban, a Θ_S mátrix (3.36) kifejezéséből látszik, hogy csak a Θ_z komponens marad állandó a test forgása közben.⁴ Természetesen maga a perdület derivált vektor is körbe forog a testtel együtt. Összehasonlítva Π_S és $\dot{\Pi}_S$ fenti kifejezéseit, az is belátható, hogy $\dot{\Pi}_S \perp \Pi_S$.

Érdeemes összevetni a fenti eredményeket azzal a kinematikából ismert tétellel (lásd 1.32. következmény), ami szerint egy állandó nagyságú forgó vektor deriváltja a szögsebességgel

⁴Forgás közben az x_1, x_2, y_1 és y_2 koordináták változnak, a φ szöggel összhangban.

való vektoriális szorzással számítható, azaz

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -D_{xz} \omega_z \\ -D_{yz} \omega_z \\ \Theta_z \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{yz} \omega_z^2 \\ -D_{xz} \omega_z^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

A vektoriális szorzat tulajdonságaiból is látszik, hogy ez a vektor merőleges a perdületvektorra.

A perdülettétel szerint $\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{M}_S$, ezért a feladatban előírt mozgás biztosításához olyan erőrendszernek kell hatnia a testre, aminek a súlypontba redukált nyomatéka éppen a kiszámolt perdület deriválttal egyezik meg.

Ennek a nyomatéknak a szükségessége belátható, ha a testtel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk a problémát. A vizsgált pillanatban a forgó rendszerben mindkét anyagi pontra a tengelytől kifelé mutató, $m_1 r_1 \omega_z^2$ illetve $m_2 r_2 \omega_z^2$ nagyságú centrifugális erő hat, melyek erőkarja z_1 illetve z_2 , ahogy a 3.9/c ábra mutatja. A centrifugális erőből származó nyomaték vektora merőleges a test vonala és a z tengely által kijelölt síkra.

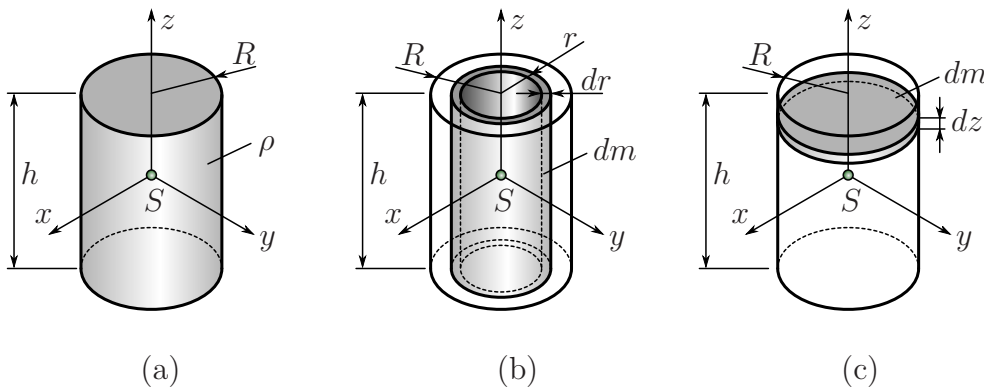
Mivel a merev test pontjai a testhez képest nem mozognak (relatív gyorsulásuk nulla), a forgó rendszerben a relatív erőrendszer egyensúlyát tapasztaljuk. Következésképpen, a centrifugális erők nyomatékával ellentétes irányú valódi nyomatéknak kell fellépnie, a tengely csapágyaiban ébredő valódi erők nyomatéka formájában. Ha r_1 és r_2 nulla lenne, akkor nulla lenne a centrifugális erő is, $z_1 = z_2 = 0$ esetben pedig a centrifugális erők erőkarja lenne nulla. A D_{xz} és D_{yz} deviációs nyomatékok mindkét esetben eltűnnének. ♠

3.2.3. A tehetetlenségi nyomaték tulajdonságai

A tehetetlenségi nyomatéki mátrix elemeinek kiszámítása

A tehetetlenségi nyomaték mátrixának számítása néhány egyszerű alakú, homogén tömegeloszlású test esetén analitikusan elvégezhető, ahogy a következő példa is mutatja:

3.12. példa: Számítsuk ki egy R sugarú, h magasságú, homogén, ρ sűrűségű henger súlypontjára számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixának elemeit!



3.10. ábra. Henger tehetetlenségi nyomatékainak számítása. (a) A test adatai. (b) Tömegelem a Θ_z tehetetlenségi nyomaték számításához. (c) Tömegelem Θ_x és Θ_y számításához.

Megoldás:

A 3.10/a ábra alapján a henger szimmetriatengelyét választottuk a koordináta-rendszer z tengelyének. Definíció szerint

$$\Theta_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm, \quad (3.43)$$

tehát az integrandusban a tömegelemek z tengelytől mért távolságának négyzete szerepel. Az integrál kiszámítását megkönnyítheti, ha a dm tömegelemet megfelelően meg tudjuk választani. A legáltalánosabb esetben is áttérhetünk térfogati integrálra, az alábbi helyettesítéssel:

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz. \quad (3.44)$$

Ha ezt a kifejezést használjuk, akkor egy hármas (x , y és z szerinti) integrál segítségével lehet kiszámítani a tehetetlenségi nyomatékot.

Mivel sem a ρ sűrűség, sem (3.43) integrandusa nem függ z -től, a z szerinti integrálás csupán a h magassággal való szorzásnak felel meg. Tehát célszerű olyan tömegelemet választani, amivel a tehetetlenségi nyomatékot már csak kettős, felület szerinti integrálra vezethetjük vissza:

$$dm = \rho dV = \rho h dA. \quad (3.45)$$

Még tovább egyszerűsíthetjük az integrál kiszámítását, ha kihasználjuk, hogy az integrandus kifejezhető a z tengelytől mért r távolság segítségével: $r^2 = x^2 + y^2$. A $dA = 2\pi r dr$ helyettesítés segítségével ugyanis a felületi integrálást r szerinti integrálásra vezethetjük vissza, ezért a tömegelem így fejezhető ki:

$$dm = \rho h 2\pi r dr. \quad (3.46)$$

Ez egy h magasságú, r belső sugarú és dr falvastagságú „csőnek” felel meg, amit a 3.10/b ábra illusztrál. A fentiek szerint

$$\Theta_z = \int_{(m)} r^2 \rho h 2\pi r dr = \rho h 2\pi \int_0^R r^3 dr = \rho h 2\pi \frac{R^4}{4} = \rho h \pi \frac{R^4}{2}. \quad (3.47)$$

Mivel a henger tömege

$$m = \rho h R^2 \pi, \quad (3.48)$$

ezért a z tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_z = \frac{1}{2} m R^2. \quad (3.49)$$

Ezt az eredményt felhasználhatjuk a Θ_x és Θ_y tehetetlenségi nyomatékok kiszámítása során is. Tudjuk, hogy

$$\Theta_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm \quad \text{és} \quad \Theta_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm. \quad (3.50)$$

A henger forgásszimmetriájából következik, hogy a fenti két kifejezésnek meg kell egyeznie: $\Theta_x = \Theta_y$, amiből

$$\int_{(m)} y^2 dm = \int_{(m)} x^2 dm = \frac{\Theta_z}{2}. \quad (3.51)$$

A (3.49) egyenlet szerint tehát

$$\int_{(m)} y^2 dm = \int_{(m)} x^2 dm = \frac{1}{4} m R^2. \quad (3.52)$$

Θ_x és Θ_y kiszámításához még meg kell határozni az

$$\int_{(m)} z^2 dm \quad (3.53)$$

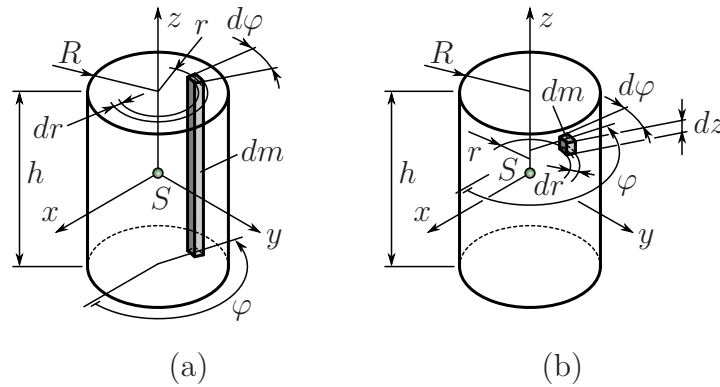
integrált. Ezúttal is célszerűen választjuk meg a tömegelemet: dz vastagságú, R sugarú körlapok alakjában (3.10/c ábra). Ebben az esetben a tömegelem $dm = \rho R^2 \pi dz$, ezért (3.48) felhasználásával

$$\int_{(m)} z^2 dm = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \rho R^2 \pi dz = \frac{1}{12} \rho h^3 R^2 \pi = \frac{1}{12} m h^2. \quad (3.54)$$

A fentiekből következően tehát a tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékok:

$$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2 \quad \text{és} \quad \Theta_z = \frac{1}{2} m R^2. \quad (3.55)$$

A továbbiakban a deviációs nyomatékok számításával folytatjuk a feladat megoldását. D_{xy} meghatározásához kihasználhatjuk, hogy az integrandus nem függ z -től, ezért a tö-



3.11. ábra. (a) Tömegelem a D_{xy} deviációs nyomaték számításához. (b) Tömegelem a D_{xz} deviációs nyomaték számításához.

megelemet választhatjuk h magasságú és $r d\varphi dr$ alapterületű oszlopnak (3.11/a ábra). Az $x = r \cos(\varphi)$ és $y = r \sin(\varphi)$ helyettesítéssel

$$D_{xy} = \int_{(m)} xy dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \underbrace{\rho h r d\varphi dr}_{=dm} = 0. \quad (3.56)$$

Itt már a φ szerinti integrálás eredménye zérus, tehát az r szerinti integrálást nem is kell elvégezni.

A forgásszimmetria miatt az x és y tengelyek 90° -os elforgatása nem befolyásolhatja a tehetetlenségi nyomaték mátrixának elemeit, ezért $D_{xz} = D_{yz}$. Ha a tömegelemet egy $dz \times r d\varphi \times dr$ méretű hasábnak választjuk (3.11/b ábra), akkor az $x = r \cos(\varphi)$ helyettesítéssel

$$D_{xz} = \int_{(m)} xz dm = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r \cos(\varphi) z \underbrace{\rho dz r d\varphi dr}_{=dm} = 0. \quad (3.57)$$

Ez az eredmény már a z szerinti integrálás után adódik, így a φ és r szerinti integrálásokat már el sem kell végezni.

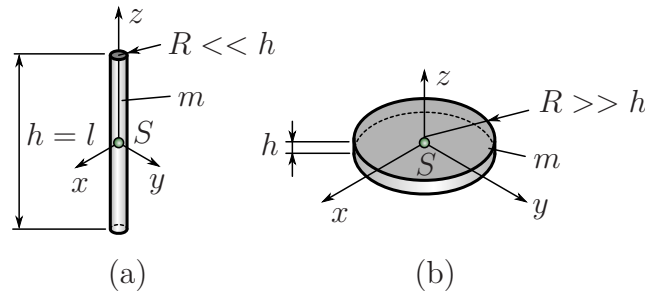
Tehát a körhenger súlyponti tehetetlenségi nyomatéki mátrixa:

$$\Theta_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

azaz a kiszámított, tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékok egyúttal főtehetlenségi nyomatékok is. ♠

3.13. következmény. Egy vékony, l hosszúságú rúd esetében is alkalmazhatjuk a körhengerre levezetett (3.55) eredményeket (3.12/a ábra). Az $l \leftrightarrow h$ cserével és az $R \rightarrow 0$ határértéket véve a súlypontra számított főtehetlenségi nyomatékok

$$\Theta_x = \Theta_y \approx \frac{1}{12}ml^2 \quad \text{és} \quad \Theta_z \approx 0. \quad (3.59)$$



3.12. ábra. A henger főtehetlenségi nyomatékainak képletei alapján meghatározhatjuk (a) vékony rúd főtehetlenségi nyomatékait ($R \rightarrow 0$) és (b) vékony korong főtehetlenségi nyomatékait ($h \rightarrow 0$) is.

3.14. következmény. Egy vékony, R sugarú korongra alkalmazva a (3.55) képleteket (3.12/b ábra), a $h \rightarrow 0$ határértéket véve a súlypontra számított főtehetlenségi nyomatékok

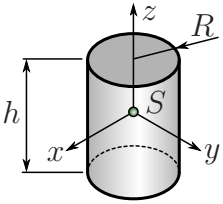
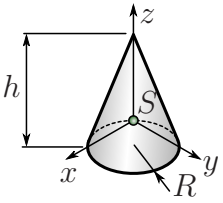
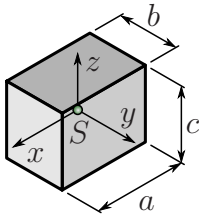
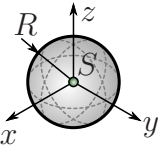
$$\Theta_x = \Theta_y \approx \frac{1}{4}mR^2 \quad \text{és} \quad \Theta_z = \frac{1}{2}mR^2. \quad (3.60)$$

A 3.1 táblázatban összefoglaltuk néhány egyszerű homogén test tehetlenségi nyomatékainak képleteit, melyeket a 3.12. példában bemutatott számításhoz hasonlóan lehet meghatározni.

Természetesen numerikus módszerek is alkalmazhatók a tehetlenségi nyomaték definíciója alapján. Ez azt jelenti, hogy a testet véges sok kis elemre bontjuk és a definícióban szereplő integrálokat megfelelő összegzésekkel helyettesítjük. Például a z tengelyre számított tehetlenségi nyomaték esetében

$$\Theta_z = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i. \quad (3.61)$$

Ha nem ismert pontosan egy alkatrész alakja és tömegeloszlása, akkor a tehetlenségi nyomatéki mátrix elemei mérésrel is meghatározhatók [4].

Test	Főtehetetlenségi nyomatékok	Megjegyzés
Körhenger 	$\Theta_z = \frac{1}{2}mR^2$ $\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2$	z szimmetriatengely
Körkúp 	$\Theta_z = \frac{3}{10}mR^2$ $\Theta_x = \Theta_y = \frac{3}{80}m(4R^2 + h^2)$	A súlypont az alaptól $h/4$ magasságban található.
Téglatest 	$\Theta_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $\Theta_y = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$ $\Theta_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	
Gömb 	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = \frac{2}{5}mR^2$	Minden súlyponton átmenő tengely egyenértékű.

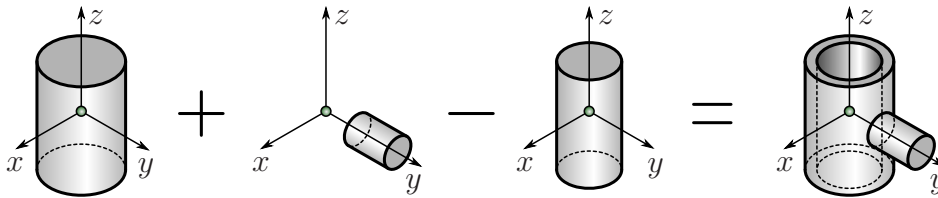
3.1. táblázat. Néhány homogén test súlypontra számított főtehetetlenségi nyomatékai.

Tételek a tehetetlenségi nyomatékkal kapcsolatban

A 3.12. példa eredményei arra utalnak, hogy ha a koordinátatengelyeket a test szimmetriatulajdonságainak megfelelően vesszük fel, akkor a deviációs nyomatékok eltűnnek. A számítások során nagy segítséget jelenthet, ha tisztában vagyunk ezzel és az ehhez hasonló egyszerűsítési lehetőségekkel, ezért a következő tételben összegyűjtjük a tehetetlenségi nyomatéki mátrix legfontosabb tulajdonságait.

3.15. tétel. *Tételek a tehetetlenségi nyomatékkal kapcsolatban.*

1. *Az integrálás tulajdonságaiból következik, hogy AZONOS PONTRA SZÁMÍTOTT TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKOK ÖSSZEGEZHEŐK, ezért egy merev test tehetetlenségi nyomatéka egyenlő a test részeinek ugyanarra a pontra számított tehetetlenségi nyomatékainak összegével, ahogy a 3.13 ábrán láthatjuk. Ehhez hasonlóan, üreges testek tehetetlenségi nyomatékát úgy is ki tudjuk számítani, hogy a befogadó test tehetetlenségi nyomatékából kivonjuk az üreg tehetetlenségi nyomatékát.*



3.13. ábra. Az ugyanarra a pontra számított tehetetlenségi nyomatékok összegezhethők.

2. *Ha egy homogén testnek van szimmetriasíkja, akkor a súlypontja is a szimmetriasíkba esik. Ebben az esetben célszerű lehet a koordinátarendszer egyik tengelyét (pl. a z tengelyt) erre merőlegesen felvenni, mert A SZIMMETRIASÍKRA MERŐLEGES TENGELYHEZ TARTOZÓ SÚLYPONTI DEVIÁCIÓS NYOMATÉKOK NULLÁK: $D_{nm} = 0$, ha az \mathbf{e}_n vagy az \mathbf{e}_m bázisvektor merőleges a szimmetriasíkra.*

Például ha a z tengely merőleges a szimmetriasíkra, akkor

$$D_{xz} = \int_{(m)} xz \, dm = 0 \quad \text{és}$$

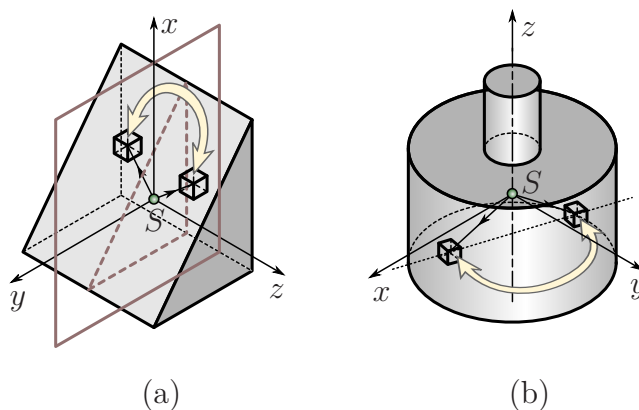
$$D_{yz} = \int_{(m)} yz \, dm = 0,$$

tehát ekkor a z tengely az egyik tehetetlenségi fő tengely.

Ennek az a magyarázata, hogy – amint a 3.14/a ábrán is látható – a szimmetriasík két oldalán minden dm tömegelemnek megvan a párja, azonos x és y , de ellentétes z koordinátával.

3. *Ha egy homogén testnek van szimmetriatengelye, akkor az ahhoz a tengelyhez tartozó súlyponti deviációs nyomatékok mind nullák, ezért A SZIMMETRIATENGELY EGYÚTTAL TEHETETLENSÉGI FŐTENGELY IS.*

Például ha z szimmetriatengely, akkor $D_{xz} = D_{yz} = 0$. Ez abból látható be, hogy ekkor a szimmetria miatt minden (x, y, z) pontban lévő tömegelemnek megtalálható a párja a $(-x, -y, z)$ pontban, a 3.14/b ábrának megfelelően.



3.14. ábra. Homogén, szimmetrikus testek esetében minden tömegelemnek megtalálható a „párja” a szimmetriasík két oldalán (a) vagy a szimmetriatengelyhez képest szimmetrikus pozíciókban (b). Ennek következtében, több deviációs nyomaték is nulla.

4. A Θ_S tehetetlenségi nyomatéki mátrix POZITÍV DEFINIT ÉS SZIMMETRIKUS, ezért a sajátértékei mindig valósak és pozitívak, sajátvektorai pedig merőlegesek egymásra.

A mátrix definíciójából következik, hogy szimmetrikus. Pozitív definitnek akkor nevezünk egy \mathbf{A} mátrixot, ha minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorral $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$. A bizonyításhoz a tehetetlenségi nyomatéki mátrix esetében azt tudjuk kihasználni, hogy

$$\Theta_S \boldsymbol{\omega} = \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \, dm, \quad (3.62)$$

ezért azt kell belátni, hogy

$$\boldsymbol{\omega}^T \Theta_S \boldsymbol{\omega} = \int_{(m)} \boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})) \, dm \quad (3.63)$$

minden nem nulla $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor esetén pozitív. Az $\boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}))$ szorzatot úgy tekinthetjük, mint egy $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ alakú hármasszorzatot, ahol $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\rho}$ és $\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$. A hármasszorzat ciklikus permutációjával azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})) = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}|^2. \quad (3.64)$$

Egy kiterjedt merev test esetében a $\boldsymbol{\rho}$ vektor végigfut a test pontjain, tehát biztosan van végtelen sok olyan pont, melynek a $\boldsymbol{\rho}$ helyvektora nem párhuzamos a szögsebességgel. Következésképpen, $\boldsymbol{\omega}^T \Theta_S \boldsymbol{\omega}$ minden nem nulla $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség esetén pozitív, azaz a mátrix pozitív definit. Ebből már következnek a sajátértékekre és sajátvektorokra vonatkozó állítások. ♠

3.46. megjegyzés: Egy két anyagi pontból álló diszkrét merev test vagy egy végtelenül vékonynak tekintett rúd esetében nem teljesül a pozitív definitás, mert az anyagi pontokat összekötő egyenessel párhuzamos tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték nulla (lásd 3.13. következmény). Ez annak felel meg, hogy a modell nem veszi figyelembe az egyik tengely körüli elfordulásokat, azaz egy ilyen test csak 5 szabadsági fokú. ♣

Ha a deviációs tehetetlenségi nyomatékok nem nullák, akkor szükség lehet a tehetetlenségi nyomatéki mátrix diagonalizálására, azaz a sajátérték-sajátvektor feladat megoldására:

$$(\Theta_S - \lambda_k \mathbf{E}) \mathbf{s}_k = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.65)$$

Ennek az egyenletnek a nem triviális \mathbf{s}_k megoldásait keressük, azaz a nem nulla sajátvektorokat. A nem triviális megoldás létezésének feltétele az, hogy teljesüljön a

$$\det(\Theta_S - \lambda_k \mathbf{E}) = 0 \quad (3.66)$$

egyenlet. A determináns kifejtése után kapott egyenlet λ_k gyökei a 3.15. tétel szerint pozitívak.

Ezt a három gyököt nagyság szerint sorba rendezve a $\Theta_1 \geq \Theta_2 \geq \Theta_3$ szimbólumokkal jelöljük, ezek a 3.10. definíciónak megfelelő *főtehetetlenségi nyomatékok*. A főtehetetlenségi nyomatékokat visszahelyettesítve a (3.65) egyenletbe, kiszámíthatjuk az \mathbf{s}_k egységvektorokat, melyek a *tehetetlenségi főtengelek* irányait adják meg. A főtehetetlenségi tengelyek által megadott koordináta-rendszerben a tehetetlenségi nyomatéki mátrix diagonális, tehát a deviációs nyomatékok nullák.

3.47. megjegyzés: A 3.15. tételek teljesülését ellenőrizhetjük a 3.12. példa eredményei alapján. A körhenger esetében a koordináta-rendszer mindhárom tengelye merőleges egy-egy szimmetriasíkra, továbbá a z tengely szimmetriatengely. Következésképpen, $D_{xy} = D_{yz} = D_{xz} = 0$. A tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékok kifejezéséből az is látszik, hogy mindhárom pozitív, tehát a tehetetlenségi nyomaték mátrixa pozitív definit. ♣

A tehetetlenségi nyomaték mátrixa tetszőleges referenciapontra

Az előző példában csak a perdülettétel felírása kapcsán használtuk ki, hogy a tengelyen bejelölt S pont a test súlypontja. A perdülettétel azonban egy álló A pontra is $\dot{\mathbf{H}}_A = \mathbf{M}_A$ alakban írható fel, ezért a közölt számítás akkor is helyes marad, ha nem az ábrán S -sel jelölt pontba esik a test súlypontja. Ennek kapcsán merül fel, hogy terjesszük ki a tehetetlenségi nyomatéki mátrix definícióját tetszőleges referenciapontok esetére. Ezt a 3.7. definíció értelemszerű általánosításával tehetjük meg:

3.16. definíció. *A merev test A PONTRA SZÁMÍTOTT TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKI MÁTRIXA*

$$\Theta_A = \int_{(m)} (\mathbf{r}^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r} \circ \mathbf{r})) \, dm, \quad (3.67)$$

ahol az \mathbf{r} vektor az A pontból mutat a test egyes pontjaiba. ♣

Egy szabályos részekből összetehető test esetében csak akkor összegezhethetjük a részek tehetetlenségi nyomatékait, ha azok mind ugyanarra a pontra vannak kiszámolva (3.15. tétel 1. pontja). Ehhez nyújt segítséget a párhuzamos tengelyek tétele:

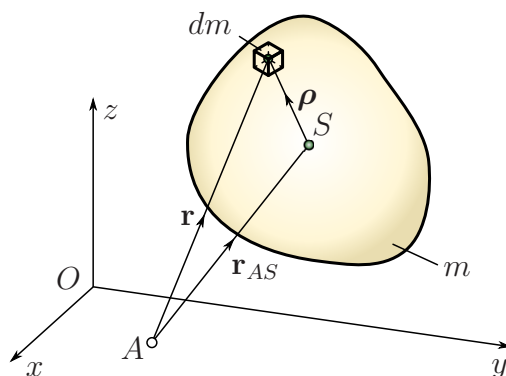
3.17. tétel. STEINER-TÉTEL (PÁRHUZAMOS TENGELEK TÉTELE). *Egy merev test S súlypontjára és egy tetszőleges másik, A pontra számított tehetetlenségi nyomatékai között az alábbi összefüggés teljesül:*

$$\Theta_A = \Theta_S + \Theta_{AS}. \quad (3.68)$$

A (3.28) kifejtéshez hasonlóan, az $\mathbf{r}_{AS} = [x_{AS} \ y_{AS} \ z_{AS}]^T$ vektor komponenseivel kifejezhető Θ_{AS} az alábbi alakban:

$$\Theta_{AS} = m \begin{bmatrix} y_{AS}^2 + z_{AS}^2 & -x_{AS}y_{AS} & -x_{AS}z_{AS} \\ -x_{AS}y_{AS} & x_{AS}^2 + z_{AS}^2 & -y_{AS}z_{AS} \\ -x_{AS}z_{AS} & -y_{AS}z_{AS} & x_{AS}^2 + y_{AS}^2 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

A Θ_{AS} mátrix kifejezésében szereplő szimbólumok az \mathbf{r}_{AS} vektor (előjeles!) komponensei. A másodfokú kifejezések miatt a végeredmény nem változik akkor sem, ha az \mathbf{r}_{AS} vektor helyett az $\mathbf{r}_{SA} = -\mathbf{r}_{AS}$ vektor komponenseit írjuk a (3.69) képletbe.



3.15. ábra. Ábra a Steiner-tétel bizonyításához.

Bizonyítás:

A 3.15 ábra szerint az A pontból a test pontjaiba mutató \mathbf{r} vektorok kifejezhetők a súlypontból kiinduló megfelelő $\boldsymbol{\rho}$ vektorokkal: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{AS} + \boldsymbol{\rho}$. Tehát

$$\begin{aligned} \Theta_A &= \int_{(m)} (\mathbf{r}^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \circ \mathbf{r}) \, dm = \int_{(m)} ((\mathbf{r}_{AS} + \boldsymbol{\rho})^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r}_{AS} + \boldsymbol{\rho}) \circ (\mathbf{r}_{AS} + \boldsymbol{\rho})) \, dm \\ &= \int_{(m)} (\mathbf{r}_{AS}^2 \mathbf{E} + \boldsymbol{\rho}^2 \mathbf{E} + 2(\mathbf{r}_{AS} \cdot \boldsymbol{\rho}) \mathbf{E} - \mathbf{r}_{AS} \circ \mathbf{r}_{AS} - \mathbf{r}_{AS} \circ \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho} \circ \mathbf{r}_{AS} - \boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho}) \, dm \\ &= \int_{(m)} (\boldsymbol{\rho}^2 \mathbf{E} - \boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho}) \, dm + \int_{(m)} (\mathbf{r}_{AS}^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_{AS} \circ \mathbf{r}_{AS}) \, dm, \end{aligned} \quad (3.70)$$

ahol kihasználtuk, hogy a súlypontra számított statikai nyomaték nulla, tehát

$$\left(\mathbf{r}_{AS} \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \, dm \right) \mathbf{E} = \mathbf{r}_{AS} \circ \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \, dm = \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \, dm \circ \mathbf{r}_{AS} = \mathbf{0}. \quad (3.71)$$

Fontos, hogy ezek a tagok csak akkor esnek ki, ha a $\boldsymbol{\rho}$ vektor a test súlypontjából a többi pontba mutat. Ezért a tétel nem használható tetszőleges két pont között, csak a súlypont és egy másik pont között. Definíció szerint (3.70) végeredményének első tagja

$$\Theta_S = \int_{(m)} (\boldsymbol{\rho}^2 \mathbf{E} - \boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho}) \, dm, \quad (3.72)$$

továbbá – mivel \mathbf{r}_{AS} állandó –

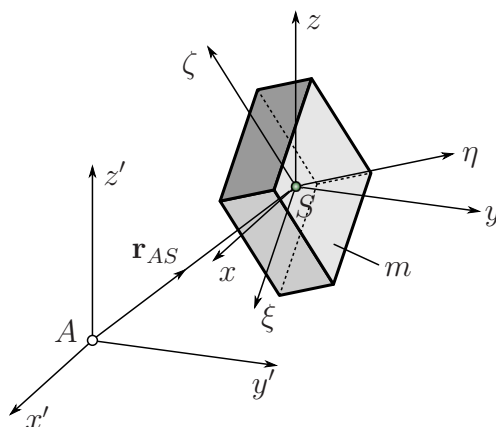
$$\int_{(m)} (\mathbf{r}_{AS}^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_{AS} \circ \mathbf{r}_{AS}) \, dm = \underbrace{\int_{(m)} dm}_{=m} (\mathbf{r}_{AS}^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_{AS} \circ \mathbf{r}_{AS}) = \Theta_{AS}. \quad (3.73)$$

Vektorokkal – mint számhármassokkal – és mátrixokkal csak úgy lehet matematikai műveleteket végezni, ha a képletekben szereplő összes vektor és mátrix komponenseit ugyanabban a koordináta-rendszerben értelmezzük. Ezért pl. $r_x = \rho_x + x_{AS}$, így visszacapjuk a tételben szereplő képletet. ♠

3.18. következmény. *Ha egy súlyponti főtengely mentén történik az eltolás – tehát az $\mathbf{r}_{AS} = [x_{AS} \ y_{AS} \ z_{AS}]^T$ vektornak csak egyetlen komponense nem nulla – akkor a tehetetlenségi nyomatéki mátrixnak csak a főátlójában lévő elemek változhatnak, így a tehetetlenségi főirányok párhuzamosak maradnak a súlypontiakkal.* ♠

A tehetetlenségi nyomaték mátrixa elforgatott tengelyű koordináta-rendszerben

Számos feladatban előfordul, hogy a vizsgált test több szabályos alakú részből tehető össze, azonban ezeknek a részeknek eltérő irányúak a tehetetlenségi főtengelyei. Mivel kézikönyvekben, táblázatokban általában a főtehetlenségi nyomatékokat adják meg, ezekben az esetekben át kell transzformálni az ismert tehetetlenségi nyomatéki mátrixokat egy közös koordináta-rendszerbe (lásd 3.16 ábra). Csak ezután alkalmazható a 3.17. Steiner-tétel és a tehetetlenségi nyomatékok összeadására vonatkozó 3.15. tétel.



3.16. ábra. Szabályos alakú testek tehetetlenségi nyomatéki mátrixa általában a főirányokkal párhuzamos tengelyű koordináta-rendszerben ($\xi\eta\zeta$) van megadva. Feladatokban gyakran szükség van koordináta transzformáció végrehajtására és a mátrix elforgatott tengelyű (xyz) koordináta-rendszerben történő kifejezésére.

Matematikából ismert, hogy egy ($\xi\eta\zeta$) koordináta-rendszerben kifejezett mátrix *forgatási transzformáció* segítségével adható meg az (xyz) koordináta-rendszerben, a \mathbf{T} ortogonális⁵ transzformációs mátrix segítségével. Ezt a tehetetlenségi nyomatékra alkalmazva:

$$\Theta_S = \mathbf{T}^T \Theta_S \mathbf{T}. \quad (3.74)$$

(xyz) (xieta)

A transzformáció alaposabb megértése érdekében vezessük ezt vissza vektorok transzformációira! A tehetetlenségi nyomaték mátrixát elsősorban a perdület kiszámítása során használjuk, ezért a következőkben a súlypontra számított perdület esetében vizsgáljuk meg

⁵Ortogonalis mátrix transzponáltja egyenlő az inverzával.

a transzformáció alkalmazását. Ha a szögsebesség vektora az (xyz) koordináta-rendszerben adott, akkor

$$\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}^T \mathbf{\Theta}_S \mathbf{T} \boldsymbol{\omega} . \quad (3.75)$$

(xyz) $(xyz)(xyz)$ $(\xi\eta\zeta)$ (xyz)

A $\mathbf{\Theta}_S(\xi\eta\zeta)$ mátrix csak egy $(\xi\eta\zeta)$ rendszerben kifejezett szögsebességvektorra alkalmazható, ezért ez a számítás úgy értelmezhető, hogy első lépésben (jobbról balra haladva) a \mathbf{T} mátrix áttranszformálja az $\boldsymbol{\omega}$ vektort a $(\xi\eta\zeta)$ rendszerbe:

$$\boldsymbol{\omega}_{(\xi\eta\zeta)} = \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}_{(xyz)} . \quad (3.76)$$

Bontsuk fel a szögsebességvektort komponenseire az alábbi módon:

$$\boldsymbol{\omega}_{(\xi\eta\zeta)} = \mathbf{T} \left(\omega_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(xyz)} + \omega_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(xyz)} + \omega_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{(xyz)} \right) \quad (3.77)$$

A szorzás során a szögsebességvektor x irányú összetevőjét a \mathbf{T} mátrix első oszlopában szereplő elemekkel kell szorozni, az y komponenst a második, a z komponenst pedig a harmadik oszlop elemeivel. Tehát ha a transzformációs mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} , \quad (3.78)$$

akkor

$$\boldsymbol{\omega}_{(\xi\eta\zeta)} = \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}_{(xyz)} = \omega_x \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} + \omega_y \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} + \omega_z \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} . \quad (3.79)$$

Következésképpen, a transzformációs mátrix oszlopaiban az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} bázisvektorok vannak kifejezve a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben. Az általános esetben tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \alpha_1 \mathbf{e}_\xi + \alpha_2 \mathbf{e}_\eta + \alpha_3 \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{j} &= \beta_1 \mathbf{e}_\xi + \beta_2 \mathbf{e}_\eta + \beta_3 \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{k} &= \gamma_1 \mathbf{e}_\xi + \gamma_2 \mathbf{e}_\eta + \gamma_3 \mathbf{e}_\zeta \end{aligned} . \quad (3.80)$$

Az alábbi példában három speciális esetet részletesebben is megvizsgálunk.

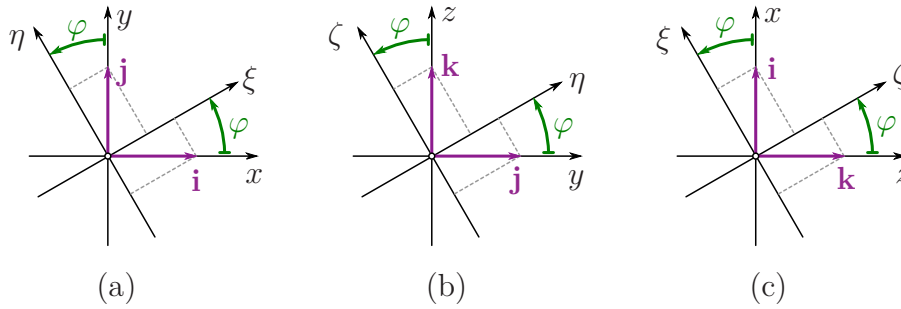
3.19. példa: *Ha a z és ζ tengelyek azonos irányúak, de az x tengely és a ξ tengely által bezárt szög φ (ahol a φ szöveget az x tengelytől a ξ tengely felé, a z tengely pozitív irányának megfelelően vesszük fel), akkor a transzformációs mátrixa*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.81)$$

Az \mathbf{i} és \mathbf{j} vektorok komponensei a 3.17/a ábráról olvashatók le.

Ehhez hasonlóan, ha az x és ξ tengelyek iránya azonos, akkor a transzformációs mátrix:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} , \quad (3.82)$$



3.17. ábra. Koordináta-transzformációk. A transzformáció mátrixának oszlopokban az \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} bázisvektorok komponensei szerepelnek a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben. (a) Azonos irányú z és ζ tengely. (b) Azonos irányú x és ξ tengely. (c) Azonos irányú y és η tengely.

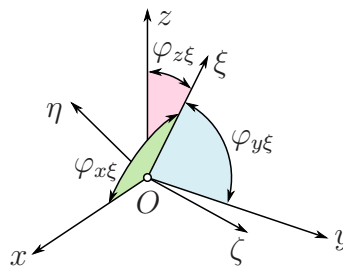
ahol az y és η tengelyek közötti φ szöget az x tengely körül pozitív irányban mérjük fel (3.17/b ábra). Az y és η tengelyek párhuzamossága esetében pedig a 3.17/c ábra alapján

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

3.48. megjegyzés: A transzformációs mátrix elemeit a szakirodalomban gyakran *iránykoszinuszoknak* nevezik. Az elnevezésnek az az oka, hogy a mátrix elemei a tengelyek egymással bezárt szögeinek (lásd 3.18 ábra) koszinuszai, az alábbi alakban:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{x\xi}) & \cos(\varphi_{y\xi}) & \cos(\varphi_{z\xi}) \\ \cos(\varphi_{x\eta}) & \cos(\varphi_{y\eta}) & \cos(\varphi_{z\eta}) \\ \cos(\varphi_{x\zeta}) & \cos(\varphi_{y\zeta}) & \cos(\varphi_{z\zeta}) \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

Például $\cos(\varphi_{y\xi})$ az y és ξ tengelyek által bezárt szög koszinusza.



3.18. ábra. A ξ tengely irányszögei, melyek koszinuszai a transzformációs mátrix első oszlopában megtalálható iránykoszinuszok.

A \mathbf{T} mátrix elemei nem függetlenek egymástól. Például $\mathbf{i}^2 = 1$ miatt $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ és $\mathbf{ij} = 0$ miatt $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$, ami a fenti példában megadott mátrixokon is ellenőrizhető. Összesen hat hasonló összefüggés írható fel, ezért a transzformációs mátrixok 9 eleme legfeljebb 3 független adattal adható meg.

Az $\boldsymbol{\omega}_{(\xi\eta\zeta)} = \mathbf{T}\boldsymbol{\omega}_{(xyz)}$ vektort már meg lehet szorozni az ugyanebben a rendszerben kifejezett $\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{S}(\xi\eta\zeta)}$ mátrixszal, így kiszámíthatjuk a perdületet $(\xi\eta\zeta)$ -ban:

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{S}(\xi\eta\zeta)} = \boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{S}(\xi\eta\zeta)} \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}_{(xyz)}. \quad (3.85)$$

A \mathbf{T} transzformáció ortogonalitása miatt a (3.75) képletben szereplő \mathbf{T}^T mátrix a fordított transzformációt hajtja végre, azaz visszatranszformálja az eredményt (xyz) -be. Tehát megkapjuk a perdület (xyz) koordináta-rendszerben kifejezett alakját:

$$\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{T}^T \mathbf{\Theta}_S \mathbf{T} \boldsymbol{\omega} \quad (3.86)$$

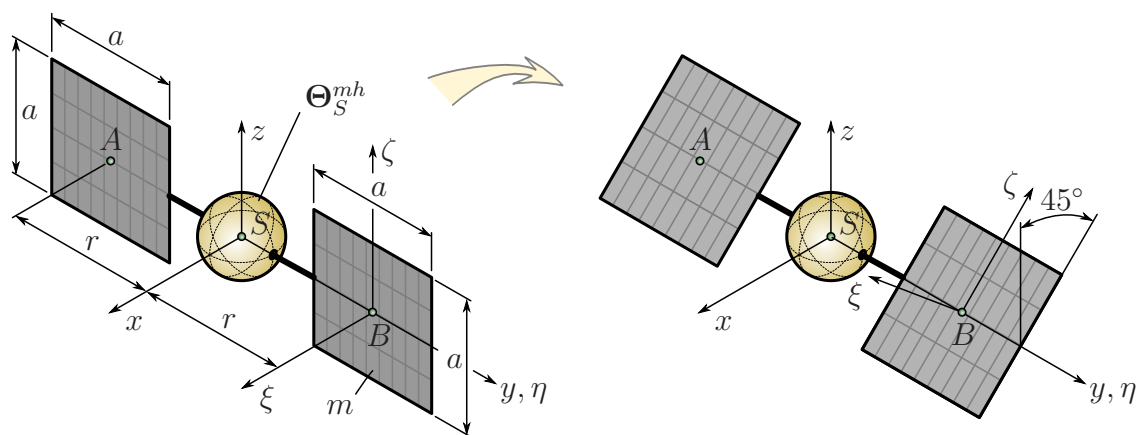
$(xyz) \qquad (\xi\eta\zeta) \qquad (xyz)$

Ebből a gondolatmenetből következik, hogy bizonyos feladatokban előnyösebb lehet a tehetetlenségi nyomaték transzformációja helyett a szögsebességet transzformálni – ezt az eljárást főleg kiegyensúlyozatlan forgórészekkel kapcsolatos számításokban lehet jól használni (lásd 3.40. példa).

3.49. megjegyzés: A (3.74) egyenlettel megadott *mátrix transzformáció* szempontjából – ahol a tehetetlenségi nyomaték mátrixát a $(\xi\eta\zeta)$ rendszerből transzformáljuk az (xyz) rendszerbe – úgy tekinthetjük, hogy a \mathbf{T} mátrix oszlopaiban annak a rendszernek a bázisvektorai vannak kifejezve a másik rendszerben, *amelyikbe át akarunk térni*.

Vektorok transzformációja – lásd például (3.76) – során viszont az az alapelv, hogy a \mathbf{T} mátrix oszlopaiban annak a rendszernek a bázisvektorai szerepelnek, *amelyikből át akarunk térni* a másikba. A bemutatott számításban a szögsebességet (xyz) -ből transzformáltuk $(\xi\eta\zeta)$ -ba, ezért használhattuk ugyanazt a \mathbf{T} mátrixot, mint a mátrix transzformációnál. ♣

3.20. példa: A 3.19 ábrán látható, homogén tömegeloszlásúnak tekinthető, gömb alakú mesterséges hold S súlypontra számított főtetheatlenségi nyomatékai napelemtáblák nélkül $\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = 40 \text{ kgm}^2$. Az elhanyagolható vastagságú, négyzetlap alakú napelemtáblák tömege egyenként $m = 10 \text{ kg}$, oldalaik $a = 1.8 \text{ m}$ hosszúak. Egy-egy napelemtábla súlypontja (A és B pontok) $r = 2 \text{ m}$ távolságra van a műhold súlypontjától. A napelemek síkja elforgatható az y tengely körül, azonos φ szöggel. Határozzuk meg a műhold tehetetlenségi nyomatéki mátrixát a napelemtáblák $\varphi = 0$ és $\varphi = 45^\circ$ -os helyzetében!



3.19. ábra. Műhold a napelemek elforgatása előtt és után.

Megoldás:

A napelemtáblák nélküli műhold tehetetlenségi nyomatéki mátrixa az (xyz) koordináta-rendszerben adott:

$$\mathbf{\Theta}_S^{mh} = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2. \quad (3.87)$$

(xyz)

A napelemtáblákat olyan téglatesteknek tekinthetjük, melyek egyik oldala elhanyagolható méretű. A táblák főtehetetlenségi tengelyei legyenek ξ , η és ζ ! A 3.1 táblázat alapján a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben az alábbi alakban fejezhető ki a két tábla tehetetlenségi nyomatéki mátrixa:

$$\Theta_A = \Theta_B = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(a^2 + a^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.4 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7 & 0 \\ 0 & 0 & 2.7 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2. \quad (3.88)$$

A feladatban megadott esetben az η tengely párhuzamos az y tengellyel. Ha e tengelyek pozitív irányának megfelelően mérjük fel a φ szöget, akkor a transzformációs mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

amivel a napelemtáblák tehetetlenségi nyomatékai

$$\Theta_A = \Theta_B = \mathbf{T}^T \Theta_A \mathbf{T} = \frac{ma^2}{12} \begin{bmatrix} 1 + \cos^2(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 & 1 + \sin^2(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.90)$$

A továbbiakban már minden vektort és mátrixot az (xyz) koordináta-rendszerben adunk meg, annak jelölését elhagyva.

A teljes műhold súlypontra számított tehetetlenségi nyomatékának meghatározásához alkalmazni kell a 3.17. Steiner-tételt. A feladat adataival

$$\mathbf{r}_{AS} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{r}_{BS} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

E két vektor komponenseit behelyettesítve a (3.69) képletben megadott mátrixba:

$$\Theta_{AS} = \Theta_{BS} = m \begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2. \quad (3.92)$$

A teljes műhold S súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixa

$$\begin{aligned} \Theta_S(\varphi) &= \Theta_S^{mh} + \Theta_A(\varphi) + \Theta_{AS} + \Theta_B(\varphi) + \Theta_{BS} \\ &= \begin{bmatrix} \Theta_x + 2mr^2 + \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y + \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z + 2mr^2 + \frac{ma^2}{6} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{ma^2}{12} \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 & \sin^2(\varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 125.4 & 0 & 0 \\ 0 & 45.4 & 0 \\ 0 & 0 & 125.4 \end{bmatrix} + 5.4 \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 & \sin^2(\varphi) \end{bmatrix} \text{ kgm}^2. \quad (3.93) \end{aligned}$$

A $\varphi = 0$ szöghöz tartozó mátrix

$$\Theta_S(0) = \begin{bmatrix} 130.8 & 0 & 0 \\ 0 & 45.4 & 0 \\ 0 & 0 & 125.4 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2. \quad (3.94)$$

Az ábrán vázolt esetben az elforgatás szöge negatív, tehát a napelemtáblák $\varphi = -45^\circ$ -os helyzetében

$$\Theta_S(-45^\circ) = \begin{bmatrix} 128.1 & 0 & 2.7 \\ 0 & 45.4 & 0 \\ 2.7 & 0 & 128.1 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2. \quad (3.95)$$

Mindkét mátrix a műholdhoz rögzített, a térben nem feltétlenül állandó irányú koordináta-rendszerben van megadva. ♠

Tetszőleges irányú tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték

A tehetetlenségi nyomaték mátrixának ismeretében tetszőleges irányú tengelyre is ki lehet számítani a tehetetlenségi nyomaték értékét. Például legyen a mátrix az (xyz) koordináta-rendszerben adott és keressük a ξ tengelyre számított Θ_ξ tehetetlenségi nyomatékot. Ezt megtehetjük úgy, hogy a (3.74) transzformáció inverzét hajtjuk végre, azaz

$$\Theta_S \underset{(\xi\eta\zeta)}{\equiv} \tilde{\mathbf{T}}^T \Theta_S \underset{(xyz)}{\equiv} \tilde{\mathbf{T}}. \quad (3.96)$$

Itt $\tilde{\mathbf{T}}$ a korábban vizsgált \mathbf{T} mátrix inverze, ami a mátrix ortogonalitása miatt egyúttal a mátrix transzponáltja is. Tehát (3.80) jelöléseivel

$$\tilde{\mathbf{T}} \equiv \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= \alpha_1 \mathbf{i} + \beta_1 \mathbf{j} + \gamma_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\eta &= \alpha_2 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \gamma_2 \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\zeta &= \alpha_3 \mathbf{i} + \beta_3 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k} \end{aligned}. \quad (3.97)$$

Nekünk azonban most csak a $\Theta_{S(\xi\eta\zeta)}$ mátrix egyetlen elemére, a Θ_ξ -re van szükségünk, ezért egyszerűbben is célt érhetünk. Jelöljük az \mathbf{e}_ξ egységvektort az alábbi módon:

$$\mathbf{e}_\xi = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

ahol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ezzel az \mathbf{e}_ξ irányvektorú tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_\xi = \mathbf{e}_\xi^T \Theta_S \mathbf{e}_\xi = \Theta_x x^2 + \Theta_y y^2 + \Theta_z z^2 - 2D_{xy}xy - 2D_{xz}xz - 2D_{yz}yz. \quad (3.99)$$

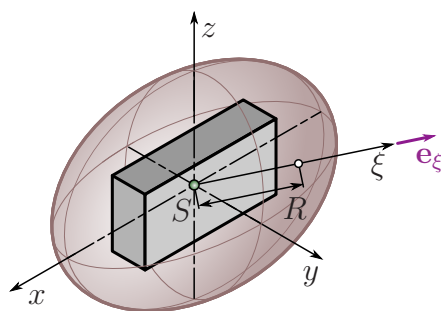
3.50. megjegyzés: A fenti eredmény felhasználható a tehetetlenségi nyomaték geometriai szemléltetésére, az alábbi megmondolás szerint.

Mérjük fel a tér minden \mathbf{e}_ξ irányában a megfelelő tehetetlenségi nyomatékból számított

$$R = \frac{c}{\sqrt{\Theta_\xi}} \quad (3.100)$$

távolságokat, ahol a c együttható nagysága tetszőleges, mértékegységét pedig úgy választjuk, hogy R távolság dimenziójú legyen. Az így kapott vektorok

$$\mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \equiv R \mathbf{e}_\xi = c \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{\Theta_\xi}} \\ \frac{y}{\sqrt{\Theta_\xi}} \\ \frac{z}{\sqrt{\Theta_\xi}} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$



3.20. ábra. Egy téglatest tehetetlenségi ellipszoidjának szemléltetése és a ξ tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték értelmezése. A ξ tengely és az ellipszoid metszéspontjának az ellipszoid középpontjától mért R távolsága fordítottan arányos a Θ_ξ tehetetlenségi nyomaték gyökével.

alakban írhatók fel, azaz

$$x = X \frac{\sqrt{\Theta_\xi}}{c}, \quad y = Y \frac{\sqrt{\Theta_\xi}}{c}, \quad z = Z \frac{\sqrt{\Theta_\xi}}{c}.$$

Ezeket visszahelyettesítve a (3.99) képletbe, egyszerűsítés után a

$$c^2 = \Theta_x X^2 + \Theta_y Y^2 + \Theta_z Z^2 - 2D_{xy}XY - 2D_{xz}XZ - 2D_{yz}YZ \quad (3.102)$$



összefüggésre jutunk, amiről a tehetetlenségi nyomaték pozitív definitásából következően belátható, hogy egy ellipszoid – az ún. *tehetetlenségi ellipszoid* egyenlete.

Ennek az ellipszoidnak a főtengelyei a főtehetetlenségi tengelyek, a hozzájuk tartozó tehetetlenségi nyomatékok pedig a főtehetetlenségi nyomatékok.

A 3.53. megjegyzésben látni fogjuk, hogy a c együttható úgy is megválasztható, hogy az R mennyiség mértékegysége rad/s legyen – azaz megegyezzen a szögsebesség mértékegységével. Ezzel a választással egy olyan ellipszoidot kapunk, ami az adott kinetikus energia esetében lehetséges szögsebességvektorokat ábrázolja: az energiaellipszoidot.

Az itt vázolt számítások nemcsak súlyponti, hanem tetszőleges pontra számított tehetetlenségi nyomatékokra esetében is használhatók és így a test különböző pontjaihoz más és más tehetetlenségi ellipszoid rendelhető.

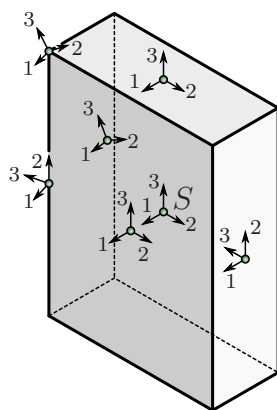
Ahogy a 3.20 ábra is mutatja, a súlyponthoz tartozó tehetetlenségi ellipszoid nagyjából követi a test alakját; legnagyobb főtengelyéhez a legkisebb főtehetetlenségi nyomaték tartozik. Továbbá, mivel Steiner tétele értelmében a súlyponti főtehetetlenségi nyomatékok a legkisebbek, az ehhez a ponthoz tartozó ellipszoid lesz a legnagyobb.

A többi ponthoz tartozó ellipszoidok nemcsak méretben, hanem főtengelyeik irányait illetően is különbözhetnek a súlyponttól. A 3.21 ábrán egy téglatest esetében illusztráljuk, hogy a különböző pontjaiban milyen irányúak a tehetetlenségi főtengelyek. Rögzített tengely körül forgó testek esetében gyakorlati jelentősége lehet annak, hogy a testnek van-e a tengelyen olyan pontja, ahol az egyik főirány párhuzamos a tengellyel. Az ilyen tulajdonságú pontokat *főpontoknak* nevezik (lásd 3.60. megjegyzés).

3.2.4. Az impulzus és a perdület vektorkettőse

Az A pontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix segítségével kifejezhető a merev test A pontra számított perdülete is, mely definíció szerint

$$\mathbf{\Pi}_A = \int_{(m)} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm, \quad (3.103)$$



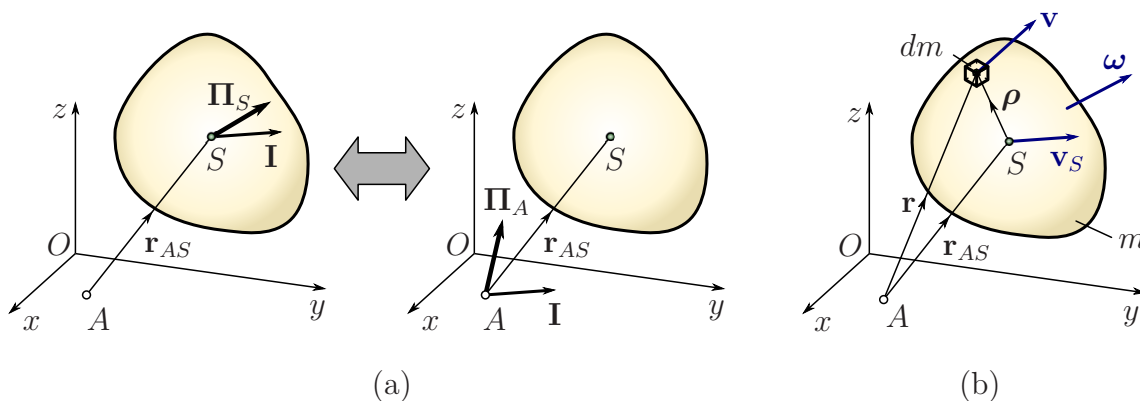
3.21. ábra. Téglatest különböző pontjaiban számított tehetetlenségi főirányok. A nyilak mellé írt számok az adott irányhoz tartozó főtehetlenségi nyomaték nagyságára utalnak: 1-es a legnagyobb, 3-as a legkisebb főtehetlenségi nyomatékhoz tartozó főirány.

ahol az \mathbf{r} vektor az A pontból a test pontjaiba mutat. A 2.65. tételben beláttuk, hogy anyagi pont perdülete és impulzusa vektorkettőst alkot. Ez a tulajdonság belátható merev testek esetére is.

3.21. tétel. MEREV TEST IMPULZUSA ÉS PERDÜLETE VEKTORKETTŐST ALKOT, azaz

$$\mathbf{\Pi}_A = \mathbf{\Pi}_S + \mathbf{r}_{AS} \times \mathbf{I}. \quad (3.104)$$

Az A pontba redukált vektorkettős $[\mathbf{I}; \mathbf{\Pi}_A]_A$ (3.22/a ábra).



3.22. ábra. (a) Merev test impulzusa és perdülete vektorkettőst alkot. (b) A bizonyításban felhasznált vektorok értelmezése.

Bizonyítás:

A (3.103) képlet átalakításával, $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_{AS}$ miatt (lásd 3.22/b ábra)

$$\mathbf{\Pi}_A = \int_{(m)} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm = \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} \, dm + \int_{(m)} \mathbf{r}_{AS} \times \mathbf{v} \, dm = \mathbf{\Pi}_S + \mathbf{r}_{AS} \times \mathbf{I}. \quad (3.105)$$

Itt kihasználtuk, hogy \mathbf{r}_{AS} kiemelhető az integrálfel alól, mert ez a teljes testre ugyanaz a vektor. ♠

A fenti redukciós képlet lehetőséget ad arra, hogy a $\mathbf{\Pi}_A$ vektort a $\mathbf{\Theta}_A$ mátrix segítségével is ki tudjuk fejezni.

A súlypontra számított perdület $\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}$. Ha az A pont a vizsgált merev test pontja, akkor az impulzus az alábbi módon fejezhető ki:

$$\mathbf{I} \equiv m \mathbf{v}_S = m(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AS}). \quad (3.106)$$

$\mathbf{\Pi}_S$ és \mathbf{I} kifejezését behelyettesítve a (3.105) egyenletbe, az A pontra számított perdület alábbi alakját kapjuk:

$$\mathbf{\Pi}_A = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} + m \mathbf{r}_{AS} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AS}) + \mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{v}_A. \quad (3.107)$$

A (3.20-3.23) egyenletekben bemutatott gondolatmenet és (3.73) alapján belátható, hogy

$$m \mathbf{r}_{AS} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AS}) = m \left(\mathbf{r}_{AS}^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_{AS} \circ \mathbf{r}_{AS} \right) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{\Theta}_{AS} \boldsymbol{\omega}, \quad (3.108)$$

amiből a Steiner-tétel alapján az alábbi tétel következik:

3.22. tétel. EGY MEREV TEST A PONTJÁRA SZÁMÍTOTT PERDÜLETE

$$\mathbf{\Pi}_A = \mathbf{\Theta}_A \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{v}_A. \quad (3.109)$$



3.51. megjegyzés: A fenti levezetésben kihasználtuk a sebességredukciós képletet, ezért míg (3.105)-ben az A pont tetszőleges térbeli pont, a (3.109) képlet már csak a merev test A pontjára vagy a merev testtel együtt mozognak képzelte A pontra igaz.

A (3.109) egyenlet azt sugallja, hogy a perdület függ a referenciapont sebességétől. Ez azonban nem igaz, hiszen a (3.103) definícióban nem szerepel a referenciapont sebessége. A (3.109) képletben mesterségesen bontjuk két tagra a perdület kifejezését. A $\mathbf{\Theta}_A \boldsymbol{\omega}$ tag csak a test pontjainak A -hoz képest vett $\mathbf{v} - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AS}$ sebességét – az A körüli forgást – veszi figyelembe. Az impulzusból ily módon „hiányzó” $m \mathbf{v}_A$ részt pótolja ki a kifejezés $\mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{v}_A$ tagja.



3.2.5. A perdület derivált és a kinetikai nyomaték kifejezése a tehetetlenségi nyomaték segítségével

Súlypontra számított perdület derivált

A (2.80.) következmény igaz merev testekre is, azaz $\mathbf{D}_S = \dot{\mathbf{\Pi}}_S$ miatt a dinamika alaptétele felírható a merev test súlypontjára a perdület deriváltja segítségével:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{M}_S. \quad (3.110)$$

Az előző fejezetekben kifejeztük a súlypontra felírt perdületvektort $\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}$ alakban. A perdület deriváltjának meghatározása azonban nem könnyű feladat az általános esetben, ugyanis nemcsak a szögsebesség iránya és nagysága változhat, hanem a tehetetlenségi nyomatéki mátrix is, tehát

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{\Theta}_S \dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{\Theta}}_S \boldsymbol{\omega}. \quad (3.111)$$

Már a 3.11. példában is láttuk, hogy ha a test forog, akkor az inerciarendszerhez rögzített (xyz) koordináta-rendszerben változnak a mátrix elemei. Például az x tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték deriváltja:

$$\dot{\Theta}_x = \frac{d}{dt} \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm = 2 \int_{(m)} (y\dot{y} + z\dot{z}) dm. \quad (3.112)$$

Ez a megközelítés meglehetősen nehezen kezelhető egyenletekre vezet. Sokkal egyszerűbben jutunk célhoz, ha inerciarendszer helyett a *merev testtel együtt mozgó*, ahhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben írjuk fel a dinamika alaptételét. Azt használhatjuk ki, hogy – mivel sem a tömege, sem az alakja nem változik – a merev test tehetetlenségi nyomatéka állandó marad a testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben. Tehát az 1.2.11 fejezetnek megfelelően a $\overset{\circ}{\square}$ szimbólummal jelölve a mozgó rendszerben értelmezett deriválást, $\overset{\circ}{\Theta}_S = \mathbf{0}$.

Az egymáshoz képest mozgó rendszerekben értelmezett deriváltak közti kapcsolatot megadó 1.75. következmény alapján egy $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forgó test perdületének idő szerinti deriváltja

$$\dot{\Pi}_S = \overset{\circ}{\Pi}_S + \boldsymbol{\omega} \times \Pi_S. \quad (3.113)$$

A mozgó rendszerben értelmezett deriválásra is érvényes a szorzat deriválási szabálya, ezért

$$\overset{\circ}{\Pi}_S = \Theta_S \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}} + \overset{\circ}{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}, \quad (3.114)$$

továbbá $\overset{\circ}{\Theta}_S = \mathbf{0}$ következtében

$$\dot{\Pi}_S = \Theta_S \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \Pi_S. \quad (3.115)$$

Ismét alkalmazva az 1.75. következményt: $\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \dot{\boldsymbol{\omega}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$, tehát $\overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}$, így az alábbi eredményt kapjuk:⁶

3.23. tétel. A PERDÜLET DERIVÁLTJÁT MEGADÓ EULER-FORMULA.

$$\dot{\Pi}_S = \Theta_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Pi_S. \quad (3.116)$$



A test tetszőleges pontjára számított perdület derivált

A test tetszőleges A pontjára vonatkozó perdület derivált kiszámításához abból indulunk ki, hogy (3.109) miatt

$$\Pi_A = \Theta_A \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{v}_A. \quad (3.117)$$

Az első tag deriválásánál figyelembe kell vennünk, hogy – mint minden vektorra – a $\Theta_A \boldsymbol{\omega}$ vektorra is igaz az 1.75. következmény, ezért

$$\frac{d}{dt} (\Theta_A \boldsymbol{\omega}) = (\Theta_A \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega} \quad (3.118)$$

⁶Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}$ nem nulla. Igaz ugyan, hogy a merev testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben a test *relatív* szögsebessége és *relatív* szöggyorsulása nulla, azonban ebben az esetben az $\boldsymbol{\omega}$ *abszolút* szögsebesség testhez kötött rendszerben elvégzett deriválásáról van szó. Egy, a merev testhez kötött megfigyelő például azt mérheti meg, hogy a térben valamilyen irányú és nagyságú szögsebességvektor skalár komponensei hogyan változnak egy testtel együtt mozgó koordináta-rendszerben. Ezzel kapcsolatban lásd a 3.65. megjegyzést.

Θ_A nem változik a testtel együtt mozgó vonatkoztatási rendszerben, mert A a test pontja, ezért a (3.114) derivált számításához hasonló módon belátható, hogy

$$(\overset{\circ}{\Theta}_A \boldsymbol{\omega}) = \Theta_A \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.119)$$

Tehát

$$\frac{d}{dt} (\Theta_A \boldsymbol{\omega}) = \Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega}. \quad (3.120)$$

Ezt felhasználva és figyelembe véve, hogy $\mathbf{r}_{AS} = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_A$ miatt $\dot{\mathbf{r}}_{AS} = \mathbf{v}_S - \mathbf{v}_A$:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \frac{d}{dt} (\Theta_A \boldsymbol{\omega}) + \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{v}_A) = \Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v}_S - \mathbf{v}_A) \times m \mathbf{v}_A + \mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{a}_A. \quad (3.121)$$

Kihasználva, hogy $\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, továbbá felcserélve a \mathbf{v}_A és \mathbf{v}_S vektorok sorrendjét a harmadik tagban, az alábbi tételre jutunk:

3.24. tétel. *Egy merev test TETSZŐLEGES A PONTJÁRA SZÁMÍTOTT PERDÜLET DERIVÁLTJA*

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega} - \mathbf{v}_A \times m \mathbf{v}_S + \mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{a}_A. \quad (3.122)$$



A 2.75. általánosított perdülettétel szerint $\mathbf{D}_A = \mathbf{M}_A$, a kinetikai nyomaték pedig a 2.79. tétel szerint kifejezhető $\mathbf{D}_A = \dot{\mathbf{\Pi}}_A + \mathbf{v}_A \times \mathbf{I}$ alakban. Behelyettesítve $\dot{\mathbf{\Pi}}_A$ képletét, a \mathbf{v}_A sebességgel kapcsolatos tag kiesik. A fenti levezetés eredményét tehát az alábbi tételben foglalhatjuk össze.

3.25. tétel. *Merev test TETSZŐLEGES A PONTJÁRA SZÁMÍTOTT KINETIKAI NYOMATÉK:*

$$\mathbf{D}_A = \Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{a}_A. \quad (3.123)$$



3.52. megjegyzés: A kinetikai nyomaték itt megadott kifejezése levezethető a (2.173) képlet általánosításával kapható $\mathbf{D}_A = \int_{(m)} \mathbf{r} \times \mathbf{a} \, dm$ formulából is. Ebből is látszik, hogy a kinetikai nyomaték nem függ a referenciapont gyorsulásától, bár (3.123) alapján úgy tűnik, mintha függene. Ugyanúgy, mint a perdület esetében, a $\Theta_A \boldsymbol{\varepsilon}$ kifejezés használatával a merev test pontjainak csak A -hoz képest vett $\mathbf{a} - \mathbf{a}_A$ gyorsulását vesszük figyelembe, ezért van szükség az $\mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{a}_A$ tagra.



A dinamika alaptételének javasolt felírási módjai

(3.123) szerint a dinamika alaptételének egyenletei az alábbi esetekben jelentősen leegyszerűsödnek, ezért feladatokban ezek használatát javasoljuk:

- Az S súlypontra felírva $\mathbf{r}_{SS} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{\Pi}_S = \Theta_S \boldsymbol{\omega}$ miatt

$$m \mathbf{a}_S = \mathbf{F} \quad (3.124)$$

$$\Theta_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S = \mathbf{M}_S \quad (3.125)$$

- A test nulla gyorsulású A pontjára $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$ következtében

$$m \mathbf{a}_S = \mathbf{F} \quad (3.126)$$

$$\Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_A. \quad (3.127)$$

- Ha az A pont *sebessége* is nulla vagy párhuzamos a súlypont sebességével, akkor $\Theta_A \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Pi}_A$ is igaz (különbön nem!), ezért tartósan álló ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$) pontra

$$m\mathbf{a}_S = \mathbf{F} \quad (3.128)$$

$$\Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_A = \mathbf{M}_A. \quad (3.129)$$

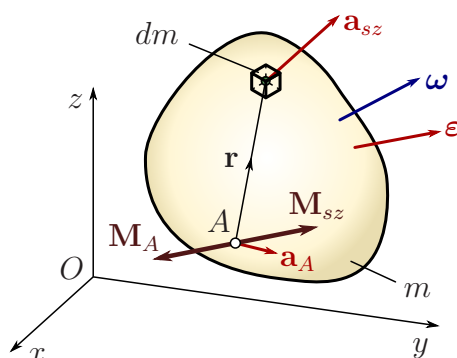
A pörgettyűhatás nyomatéka

A (3.116)-ban megjelenő $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_S$ tag (-1)-szeresét a *pörgettyűhatás nyomatékának* nevezik, ugyanis a perdülettételt átrendezve külön nyomatéknak tekinthető:

$$\Theta_S \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}_S + \boldsymbol{\Pi}_S \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.130)$$

Ez az értelmezés megfelel a 3.11. példában alkalmazott gondolatmenetnek, ahol a centrifugális erő nyomatékát lehetett megfeleltetni az $\boldsymbol{\Pi}_S \times \boldsymbol{\omega}$ tagnak. Ehhez hasonlóan, a relatív kinetika eredményei alapján is levezethető a tetszőleges pontra vonatkozó kinetikai nyomaték kifejezése.

A testhez rögzített, azzal együtt gyorsuló vonatkoztatási rendszerben a vizsgált test és a gyorsuló rendszer egybeesik (3.23 ábra). Ezért a test pontjainak a relatív sebessége és



3.23. ábra. A pörgettyűhatás nyomatéka. Ha a merev testet gyorsuló vonatkoztatási rendszernek tekintjük, akkor a test pontjaira szállító erő hat. Mivel a testtel együtt mozgó rendszerben a test pontjai egyensúlyban vannak, a szállító erő nyomatékának és a valódi nyomatéknak egyensúlyban kell lenniük: $\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_{sz} = \mathbf{0}$.

relatív gyorsulása a testhez képest nulla ($\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{0}$). Következésképpen, a Coriolis-gyorsulás is nulla, az \mathbf{a}_{sz} szállító gyorsulás pedig a merev test egyes pontjainak a gyorsulása. Ha a test tetszőleges A pontját választjuk referenciapontnak, akkor $\mathbf{a}_{sz} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$.

A relatív kinetika eredményei alapján az általánosított perdülettétel is felírható gyorsuló rendszerben

$$\mathbf{D}_{Arel} = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_{sz} \quad (3.131)$$

alakban, ahol a jobb oldalon a relatív nyomaték áll, ami most a valódi nyomaték ($\mathbf{M}_A = \mathbf{D}_A$) és a szállító nyomaték összege. A test egy kis dm tömegű elemére ($-\mathbf{a}_{sz} dm$) szállító erő hat, ezért a teljes testre összegzett szállító nyomaték a test A pontjára

$$\mathbf{M}_{sz} = - \int_{(m)} \mathbf{r} \times \mathbf{a}_{sz} dm. \quad (3.132)$$

Az ugyanerre a pontra számított relatív kinetikai nyomaték

$$\mathbf{D}_{Arel} = \int_{(m)} \mathbf{r} \times \mathbf{a}_{rel} dm = \mathbf{0}, \quad (3.133)$$

mert $\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{0}$. Tehát

$$\mathbf{D}_{Arel} = \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_{sz} = \mathbf{M}_A - \int_{(m)} \mathbf{r} \times (\mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) dm = \mathbf{0}. \quad (3.134)$$

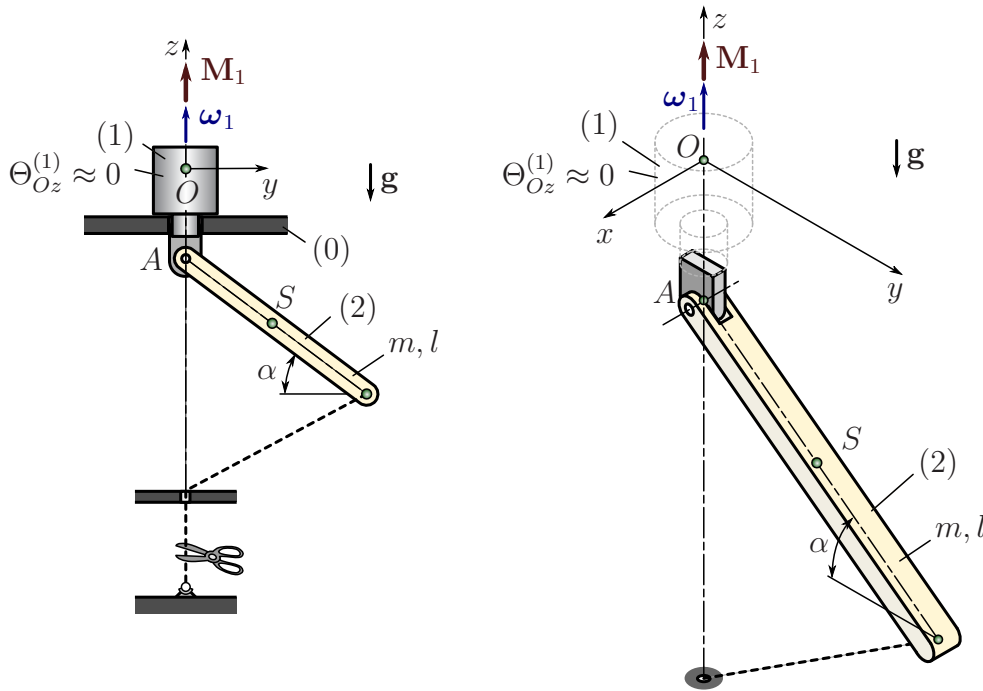
A (3.20) egyenlet kapcsán bemutatott levezetéshez hasonló módon átírható a fenti képlet

$$\mathbf{M}_A - \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{a}_A = \mathbf{0} \quad (3.135)$$

alakba, amiből adódik a kinetikai nyomaték (3.123) kifejezése.

Példák a dinamika alaptételének alkalmazására

3.26. példa: A 3.24 ábrán egy pörgettyűs regulátor egyik karjának mechanikai modellje látható. Az állandó \mathbf{M}_1 nyomatékkal hajtott, elhanyagolható tömegű (1) jelű tengely $\boldsymbol{\omega}_1$ pillanatnyi szögsebességgel forog a függőleges z tengely körül. A (2) jelű rúd olyan csappal kapcsolódik az (1) tengelyhez, mely tetszőleges irányú erőt, valamint y és z irányú nyomatékokot tud átvinni. Az m tömegű és l hosszúságú rudat egy kötél tartja az ábrázolt, α szöggel jellemzett helyzetben. Fejezzük ki a rúd gyorsulásállapotát és a csapreakciókat a kötél elvágásának pillanatában!



3.24. ábra. Pörgettyűs regulátor szerkezeti ábrája.

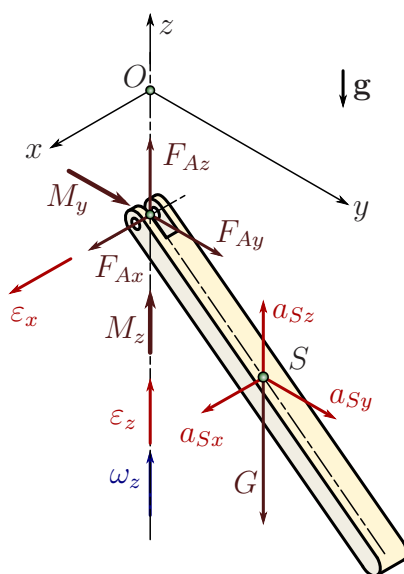
Megoldás:

A 3.25 szabadtest ábra alapján az impulzustétel komponens egyenletei az alábbi alakban írhatók fel:

$$m a_{Sx} = F_{Ax} \quad (3.136)$$

$$m a_{Sy} = F_{Ay} \quad (3.137)$$

$$m a_{Sz} = F_{Az} - mg. \quad (3.138)$$

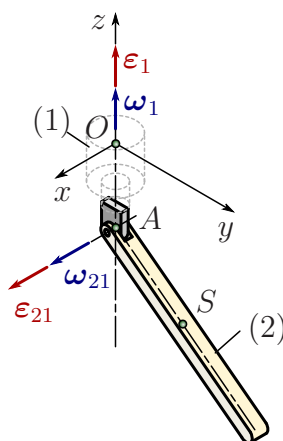


3.25. ábra. A pörgettyűs regulátor szabadtest ábrája.

A rendszer két szabadsági fokú, azaz összesen négy skaláris kényszerfeltétel írható fel, melyek a gyorsulásállapotot megadó \mathbf{a}_S , $\boldsymbol{\omega}_2$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ vektorok komponenseire vonatkozó összefüggéseket adnak meg. A rúd (abszolút) szöggyorsulásának kifejezéséhez a relatív kinematika alábbi összefüggését használjuk:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{20} = \boldsymbol{\varepsilon}_{21} + \boldsymbol{\varepsilon}_{10} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2. \quad (3.139)$$

Itt $\boldsymbol{\varepsilon}_{21}$ a relatív szöggyorsulás, azaz a rúdnak az (1) tengelyhez viszonyított szöggyorsulása. Mivel a két testet összekötő csap csak x tengely körüli elfordulást enged meg, ez a vektor az x tengellyel párhuzamos. $\boldsymbol{\varepsilon}_{10} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_1$ a szállító szöggyorsulása, azaz az (1) tengely szöggyorsulása – ez a vektor a z tengellyel párhuzamos, ahogy a 3.26 ábra mutatja. A kötél elvágásának



3.26. ábra. A regulátor rúd sebesség- és gyorsulásállapota.

pillanatában a rúd szögsebessége megegyezik a tengely szögsebességével, azaz $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$, ezért $\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{0}$. A fentiek szerint a szöggyorsulásnak csak az x és z komponense lehet nullától különböző, azaz

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_{20} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.140)$$

A rúd súlypontjának gyorsulása, $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$ figyelembevételével

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_S &= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{AS} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{AS}) \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{2} \cos(\alpha) \\ -\frac{l}{2} \sin(\alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{2} \cos(\alpha) \\ -\frac{l}{2} \sin(\alpha) \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (3.141)$$

amiből

$$\begin{bmatrix} a_{Sx} \\ a_{Sy} \\ a_{Sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \varepsilon_z \cos(\alpha) \\ \frac{l}{2} \varepsilon_x \sin(\alpha) - \frac{l}{2} \omega_1^2 \cos(\alpha) \\ \frac{l}{2} \varepsilon_x \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (3.142)$$

(3.142) három komponens egyenlete és (3.140)-ből az $\varepsilon_y = 0$ összefüggés négy kényszerfeltételt jelent.

A perdülettételt a tengely A pontjára írjuk fel. Mivel az A pont sebessége és gyorsulása nulla:

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}}_A \equiv \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\Pi}_A = \mathbf{M}_A. \quad (3.143)$$

A perdület kiszámításához írjuk fel a tehetetlenségi nyomaték mátrixát az A pontra! Ehhez a 3.17. Steiner-tételt használjuk. Egy vékony rúd tehetetlenségi nyomatéki mátrixa a főirányok rendszerében (lásd 3.27 ábra):

$$\boldsymbol{\Theta}_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.144)$$

Mivel az \mathbf{r}_{SA} vektor

$$\mathbf{r}_{SA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.145)$$

az A pontra számított tehetetlenségi nyomaték kiszámításához csak $m\zeta^2 = ml^2/4$ -et kell hozzáadni a súlypontra számolt mátrix $\Theta_{S\xi}$ és $\Theta_{S\eta}$ elemeihez, tehát

$$\boldsymbol{\Theta}_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.146)$$

A további számításokhoz átranzformáljuk ezt a mátrixot az (xyz) koordináta-rendszerbe. A megfelelő transzformációs mátrix az \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} bázisvektorok $(\xi\eta\zeta)$ -beli komponenseiből állítható össze, a 3.27 ábra alapján:

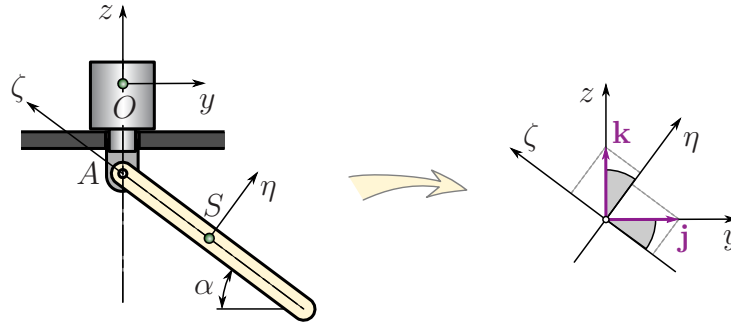
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ 0 & -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (3.147)$$

Az (xyz) -ben kifejezett tehetetlenségi nyomaték

$$\boldsymbol{\Theta}_A = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\Theta}_A \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} ml^2 \sin^2(\alpha) & \frac{1}{3} ml^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ 0 & \frac{1}{3} ml^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) & \frac{1}{3} ml^2 \cos^2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (3.148)$$

a perdület pedig

$$\boldsymbol{\Pi}_A = \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} ml^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \omega_{1z} \\ \frac{1}{3} ml^2 \cos^2(\alpha) \omega_{1z} \end{bmatrix}. \quad (3.149)$$



3.27. ábra. Forgatási transzformáció.

Megjegyezzük, hogy a köté elvágását követően a rúd súlypontja emelkedni kezd, tehát $\omega_{2x} \neq 0$ szögsebesség alakul ki, így a perdület x komponense is nullától különböző lesz.

A perdület deriváltja

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A \equiv \mathbf{\Theta}_A \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{\Pi}_A = \frac{1}{3} ml^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \sin(\alpha) \cos(\alpha) \omega_1^2 \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) \varepsilon_z \\ \cos^2(\alpha) \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.150)$$

Ez az eredmény a szögsebesség és szöggyorsulás transzformációjával is levezethető. A $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{1z} \cos(\alpha) \\ \omega_{1z} \sin(\alpha) \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \cos(\alpha) \\ \varepsilon_z \sin(\alpha) \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)}. \quad (3.151)$$

A perdület és a perdület deriváltja pedig

$$\mathbf{\Pi}_A = \mathbf{\Theta}_A \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} ml^2 \omega_{1z} \cos(\alpha) \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)}, \quad (3.152)$$

illetve

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \frac{1}{3} ml^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \sin(\alpha) \cos(\alpha) \omega_1^2 \\ \cos(\alpha) \varepsilon_z \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)}. \quad (3.153)$$

Ha a perdület deriváltat visszatranszformáljuk az (xyz) rendszerbe, akkor a ξ és x tengelyek párhuzamossága miatt az első komponens változatlan marad, az η komponens felbontásával pedig visszakapjuk a (3.150) kifejezést.

A perdülettétel alkalmazásához még az A pontra számított nyomatékot kell kifejezni. A (2) rúdra a nehézségi erő nyomatéka mellett a csapnál átadódó, y és z irányú komponensekből álló nyomaték hat.

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}^{\text{csap}} + \mathbf{r}_{AS} \times m\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -mg \frac{l}{2} \cos(\alpha) \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (3.154)$$

Mivel az (1) tengely tömege elhanyagolható, arra egyensúlyi egyenleteket lehetne felírni, amiből $M_z = M_1$.

A fenti számítások eredményeit összefoglalva

$$-m\frac{l}{2}\varepsilon_z \cos(\alpha) = F_{Ax} \quad (1)$$

$$m\left(\frac{l}{2}\varepsilon_x \sin(\alpha) - \frac{l}{2}\omega_1^2 \cos(\alpha)\right) = F_{Ay} \quad (2)$$

$$m\frac{l}{2}\varepsilon_x \cos(\alpha) = F_{Az} - mg \quad (3)$$

$$\frac{1}{3}ml^2\varepsilon_x - \frac{1}{3}ml^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)\omega_1^2 = -mg\frac{l}{2} \cos(\alpha) \quad (4)$$

$$\frac{1}{3}ml^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)\varepsilon_z = M_y \quad (5)$$

$$\frac{1}{3}ml^2 \cos^2(\alpha)\varepsilon_z = M_z. \quad (6)$$

$M_z = M_1$ ismert, ezért a (6) egyenletből kifejezhető ε_z , így az (5) egyenlet felhasználásával kiszámítható M_y és (1) alapján F_{Ax} is. A (4) egyenletből kiszámolható ε_x , amit (3)-ba és (4)-be helyettesítve megkapjuk az F_{Ay} és F_{Az} erőkomponenseket is. A szöggyorsulás és szögsebesség ismeretében a súlypont gyorsulása is meghatározható.

Fontos speciális eset, amikor $\varepsilon_x = 0$. Ez ugyanis annak felel meg, hogy az ω_1 szögsebesség és az α szög megfelelő megválasztása esetén az α szög állandó marad a köté elvágása után is. A (4) egyenlet szerint ennek az a feltétele⁷, hogy

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2l \sin(\alpha)}}. \quad (3.155)$$

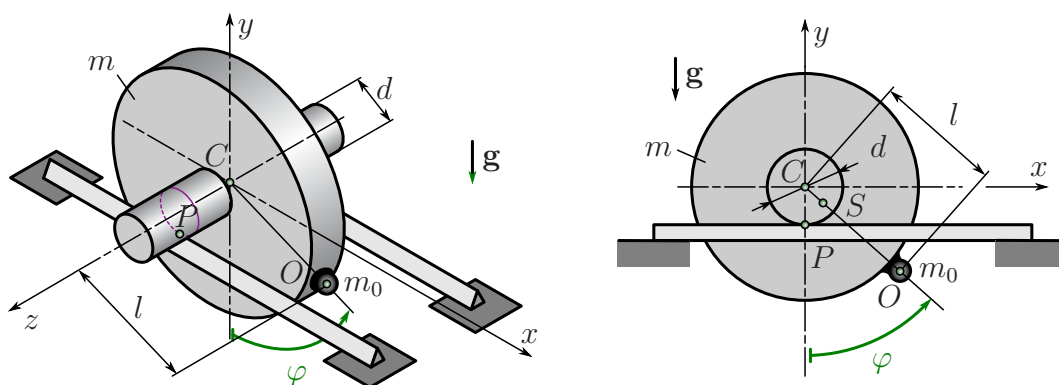
3.27. példa: Egy m tömegű, C súlypontú homogén forgórész $d = 2r$ átmérőjű csapjait vízszintes prizmákra helyezzük, majd a C ponttól l távolságban lévő O pontban m_0 tömegű póttömeget szerelünk a testre, a 3.28 ábra szerint [10]. Kis mértékben kitérítve, majd elengedve a testet, az ingaszerűen ide-oda gördül. (Ennek a kísérletnek az a gyakorlati jelentősége, hogy a mozgás periódusidejéből következtetni lehet a test tehetetlenségi nyomatékára [4].) A z tengely a forgórész egyik tehetetlenségi főirányával párhuzamos, az erre a tengelyre számolt tehetetlenségi nyomaték a póttömeg nélkül Θ_{Cz} . Írjuk fel a perdülettételt a prizmákon gördülő, síkmozgást végző testre!

Megoldás:

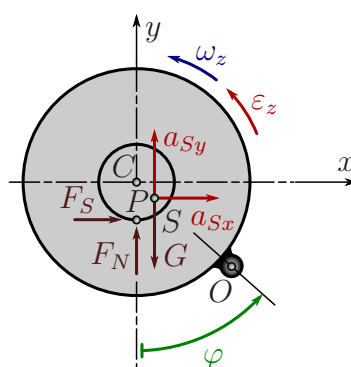
A z tengely a forgórész tehetetlenségi főiránya. Ha feltesszük, hogy az O pont is a C ponton átmenő, xy síkban van, akkor a póttömeg nem változtatja meg a tehetetlenségi főirányt. Ebből következik, hogy a kinetikai nyomatéknak csak a z komponense különbözik nullától, tehát elegendő lesz az egyenleteknek ezt a komponensét vizsgálni (lásd 3.4 fejezet).

A 3.29 szabadtest ábra alapján látjuk, hogy a testre az $(m + m_0)\mathbf{g}$ nehézségi erő, a talajról átadódó \mathbf{F}_N normálerő és az \mathbf{F}_S súrlódási erő hat. Ha a forgórészből és póttömegeből álló teljes test S súlypontjára írjuk fel a perdülettételt, akkor az ismeretlen nagyságú \mathbf{F}_S és \mathbf{F}_N erők nyomatékát is ki kell számolnunk. Ezeknek az erőknek a kiszámításához fel kell írni az impulzustétel x és y irányú komponens egyenletét, figyelembe véve, hogy a súlypontnak sem a vízszintes, sem a függőleges irányú gyorsulása nem nulla.

⁷Ez csak $\alpha \neq 90^\circ$ esetén igaz.



3.28. ábra. Prizmákon gördülő forgórész.



3.29. ábra. Prizmákon gördülő forgórész szabadtest ábrája.

Egyszerűbben érünk célt, ha az ábrán bejelölt P pontot használjuk referenciapontnak, hiszen erre a pontra az \mathbf{F}_N és \mathbf{F}_S erők z irányú nyomatéka nulla, a nehézségi erő nyomatéka pedig

$$\mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_0 g l \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.156)$$

Az alábbiakban két megoldást is bemutatunk.

- 1) Válasszuk referenciapontnak a *test* talajjal érintkező P póluspontját! Ennek a pontnak a sebessége nulla ($\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$), gyorsulása pedig az 1.65. példa szerint $\mathbf{a}_P = [0 \ r\omega^2 \ 0]^T$. A teljes test S súlypontja a C és O pontok között helyezkedik el. Helyvektora – mely a φ szögtől függ – a pólusponthoz és az m_0 póttömeg helyéhez képest az alábbi vektorokkal adható meg:

$$\mathbf{r}_{PS} = \begin{bmatrix} \frac{lm_0 \sin(\varphi)}{m+m_0} \\ r - \frac{lm_0 \cos(\varphi)}{m+m_0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{OS} = \begin{bmatrix} -l \sin(\varphi) + \frac{lm_0 \sin(\varphi)}{m+m_0} \\ l \cos(\varphi) - \frac{lm_0 \cos(\varphi)}{m+m_0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.157)$$

Elhanyagolva a póttömeg méretét (a saját súlypontjára vett tehetetlenségi nyomatékát) és figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{r}_{PO} \equiv \mathbf{r}_{PS} - \mathbf{r}_{OS} = \begin{bmatrix} l \sin(\varphi) \\ r - l \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.158)$$

alkalmazható a Steiner-tétel:

$$\Theta_{Pz} = \Theta_{Cz} + mr^2 + m_0 \mathbf{r}_{PO}^2 = \Theta_{Cz} + m_0(l^2 + r^2) + mr^2 - 2m_0lr \cos(\varphi). \quad (3.159)$$

Mivel a z tengely tehetetlenségi főirány, $\boldsymbol{\omega} \times \Theta_P \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, ezért (3.123) alapján a P pontra számított kinetikai nyomaték

$$\mathbf{D}_P = \Theta_P \boldsymbol{\varepsilon} + (m + m_0)(\mathbf{r}_{PS} \times \mathbf{a}_P), \quad (3.160)$$

aminek csak a z komponense nem nulla. Behelyettesítve \mathbf{r}_{PS} és \mathbf{a}_P kifejezését,

$$D_{Pz} = \Theta_{Pz} \varepsilon_z + lm_0 r \sin(\varphi) \omega_z^2. \quad (3.161)$$

Tehát $D_{Pz} = M_{Pz}$ miatt a perdülettétel egyenlete

$$\left(\Theta_{Cz} + m_0(l^2 + r^2) + mr^2 - 2lm_0r \cos(\varphi) \right) \varepsilon_z + lm_0r \sin(\varphi) \omega_z^2 = -m_0gl \sin(\varphi). \quad (3.162)$$

- 2) Nemcsak a test valamely pontjára, hanem bármely más pontra is felírható a perdülettétel, ennek alkalmazása azonban nagyobb körültekintést igényel. Válasszuk referenciapontnak azt a \tilde{P} geometriai pontot, mely a mindenkori P pólusponttal egybeesik, viszont sebessége nem nulla, hanem \mathbf{u} pólusvándorlási sebességgel mozog a talaj menti egyenes pályán, az x tengely mentén! A vizsgált test \tilde{P} pontra számított perdülete (3.105) szerint

$$\mathbf{\Pi}_{\tilde{P}} = \mathbf{\Pi}_S + \mathbf{r}_{PS} \times \mathbf{I}. \quad (3.163)$$

A test impulzusa

$$\mathbf{I} = (m + m_0) \mathbf{v}_S = (m + m_0) (\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CS}) = (m + m_0) \begin{bmatrix} -r\omega_z + \frac{lm_0 \cos(\varphi)}{m+m_0} \omega_z \\ \frac{lm_0 \sin(\varphi)}{m+m_0} \omega_z \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol kihasználtuk, hogy a forgórész C középpontjának sebessége

$$\mathbf{v}_C = \begin{bmatrix} -r\omega_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

Ez a kifejezés egyúttal megadja a \tilde{P} pont \mathbf{u} sebességét (a pólusvándorlási sebességet) is, hiszen az minden pillanatban a talaj és a forgórész érintkezési pontjában, a C pont alatt helyezkedik el. A súlypontra számított perdület vektorának csak a z komponense nem nulla. A Steiner-tétel alapján

$$\Pi_{Sz} = \Theta_{Sz} \omega_z = \left(\Theta_{Cz} + m \mathbf{r}_{CS}^2 + m_0 \mathbf{r}_{OS}^2 \right) \omega_z = \left(\Theta_{Cz} + \frac{mm_0 l^2}{m + m_0} \right) \omega_z. \quad (3.165)$$

Itt kihasználtuk, hogy $\mathbf{r}_{CS} = \mathbf{r}_{PS} - [0 \ r \ 0]^T$. A fenti eredmények alapján, a (3.163) képletbe történő behelyettesítés után arra jutunk, hogy a \tilde{P} pontra számított perdület z komponense

$$\Pi_{\tilde{P}z} = \left(\Theta_{Cz} + m_0(l^2 + r^2) + mr^2 - 2m_0lr \cos(\varphi) \right) \omega_z. \quad (3.166)$$

Az \mathbf{u} sebességgel mozgó \tilde{P} pontra számított kinetikai nyomaték a 2.72. tételnek megfelelően

$$\mathbf{D}_{\tilde{P}} = \dot{\mathbf{\Pi}}_{\tilde{P}} + \mathbf{u} \times \mathbf{I} = \dot{\mathbf{\Pi}}_{\tilde{P}} + \mathbf{u} \times (m + m_0) \mathbf{v}_S. \quad (3.167)$$

Ennek a vektornak is csak a z irányú komponense nem nulla. Mivel most a \tilde{P} pont nem a test pontja, a \tilde{P} -re számított $\Theta_{\tilde{P}z} = \Theta_{Cz} + m_0(l^2 + r^2) + mr^2 - 2m_0lr \cos(\varphi(t))$ tehetetlenségi nyomaték változik az időben. Figyelembe véve, hogy $\dot{\varphi} = \omega_z$ és $\dot{\omega}_z = \varepsilon_z$, a (3.166) kifejezést deriválva, $\mathbf{D}_{\tilde{P}}$ képletébe való behelyettesítés után arra az eredményre jutunk, hogy

$$D_{\tilde{P}z} = \left(\Theta_{Cz} + m_0(l^2 + r^2) + mr^2 - 2lm_0r \cos(\varphi) \right) \varepsilon_z + lm_0r \sin(\varphi) \omega_z^2. \quad (3.168)$$

Tehát $D_{\tilde{P}z} = D_{Pz}$, azaz pontosan ugyanazt az eredményt kaptuk mint az első módszerrel, pedig a két pontnak a sebessége is, gyorsulása is eltérő. A \tilde{P} pont gyorsulása a test ide-oda gördülése során az x tengellyel párhuzamos. Ennek kiszámítására azonban nem volt szükség, mert a (3.167) képletben nem szerepel. ♠

3.3. Kinetikus energia, teljesítmény, munka

Anyagi pontok mozgásának vizsgálata során jól használhatónak bizonyultak a dinamika alaptételének integrálásával kapcsolatban bevezetett, a fejezet címében szereplő fogalmak. A továbbiakban levezetjük a megfelelő fizikai mennyiségek képleteit a merev test jellemzőivel kifejezve.

3.3.1. Merev test kinetikus energiája

Egy merev test kinetikus energiája a pontrendszerekre vonatkozó (2.63) definíció általánosításával a

$$T = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm \quad (3.169)$$

alakban adható meg. Ez az alak azonban nehezen használható, ezért olyan kifejezéseket keresünk, melyek egyszerűbben alkalmazhatók merev testek esetében.

3.28. tétel. *Egy merev test MOZGÁSI (KINETIKUS) ENERGIÁJA az alábbi alakokban írható fel:*

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{v}_S^T \mathbf{I} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Pi}_S, \quad (3.170)$$

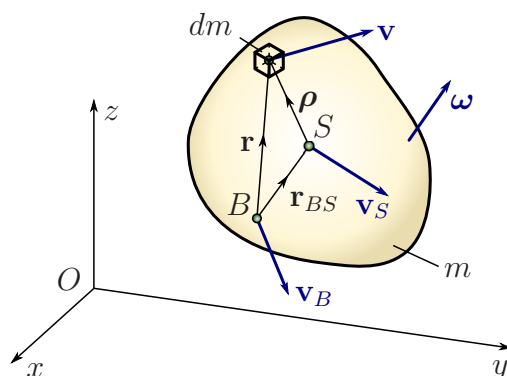
ahol S a test súlypontja, illetve

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Pi}_A, \quad (3.171)$$

ahol A a test álló (nulla sebességű, de tetszőleges gyorsulású) pontja.

Általános esetben, a test tetszőlegesen mozgó B pontját használva referencia pontnak

$$T = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}_B \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{v}_B \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BS}). \quad (3.172)$$



3.30. ábra. Ábra a kinetikus energia képleteinek levezetéséhez.

Bizonyítás:

Elegendő a (3.172) kifejezést bizonyítani, hiszen abból következik a mozgási energia másik két alakja: a $B \equiv S$ súlypontra $\mathbf{r}_{SS} = \mathbf{0}$ miatt az általános képlet harmadik tagja nulla, álló pontra pedig $v_B = 0$ miatt kiesik az első és a harmadik tag is.

A (3.169) képletet kifejtve

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(m)} (\mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{(m)} \mathbf{v}_B^2 dm + 2 \frac{1}{2} \mathbf{v}_B \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_{(m)} \mathbf{r} dm \right) + \frac{1}{2} \int_{(m)} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Ennek a kifejezésnek az első tagjából kiemelhető \mathbf{v}_B^2 . A második tag is egyszerűsíthető, mert $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{BS} + \boldsymbol{\rho}$ és $\int_{(m)} \boldsymbol{\rho} dm = \mathbf{0}$ miatt

$$\int_{(m)} \mathbf{r} dm = \int_{(m)} \mathbf{r}_{BS} dm + \int_{(m)} \boldsymbol{\rho} dm = \int_{(m)} \mathbf{r}_{BS} dm = m \mathbf{r}_{BS}.$$

A harmadik tagban szereplő $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ kifejezés átalakítható a hármasszorzat tulajdonságai alapján. $\mathbf{a} \equiv \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{r}$, $\mathbf{c} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ jelölésekkel, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}^T(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ miatt:

$$\frac{1}{2} \int_{(m)} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \frac{1}{2} \int_{(m)} \boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) dm = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}_B \boldsymbol{\omega}. \quad (3.174)$$

Itt külön jelöltük, hogy a skaláris szorzat első tényezőjét a mátrixszorzás szabályainak megfelelően transzponálni kell. Emellett, (3.21) alapján $\int_{(m)} (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) dm = \boldsymbol{\Theta}_B \boldsymbol{\omega}$.

Tehát a kinetikus energia kifejezése, a test tetszőleges B pontját referenciapontnak választva

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_B^2 + m \mathbf{v}_B (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BS}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}_B \boldsymbol{\omega}. \quad (3.175)$$



Természetesen bármelyik fenti képlettel számoljuk ki a mozgási energiát, mindig ugyanazt a számértéket kell kapnunk. A (3.169) képletnek megfelelően, egy mozgó merev test kinetikus energiája mindig pozitív, összhangban azzal, hogy a tehetetlenségi nyomaték mátrixa pozitív definit.

3.53. megjegyzés: A kinetikus energia forgással kapcsolatos tagja több, egymással egyenértékű alakban is kifejezhető. Ha a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség az (xyz)

koordináta-rendszerben adott (3.31/a ábra), akkor

$$\begin{aligned} T_{forg} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left(\Theta_x \omega_x^2 + \Theta_y \omega_y^2 + \Theta_z \omega_z^2 - 2D_{xy} \omega_x \omega_y - 2D_{xz} \omega_x \omega_z - 2D_{yz} \omega_y \omega_z \right). \end{aligned} \quad (3.176)$$

A (3.99) képlet alapján, $\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}/\omega$ választással az alábbi alakban fejezhető ki a súlyponton átmenő, $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel párhuzamos tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_e = \frac{\Theta_x \omega_x^2 + \Theta_y \omega_y^2 + \Theta_z \omega_z^2 - 2D_{xy} \omega_x \omega_y - 2D_{xz} \omega_x \omega_z - 2D_{yz} \omega_y \omega_z}{\omega^2}. \quad (3.177)$$

Ez azt jelenti, hogy a forgással kapcsolatos kinetikus energia tag

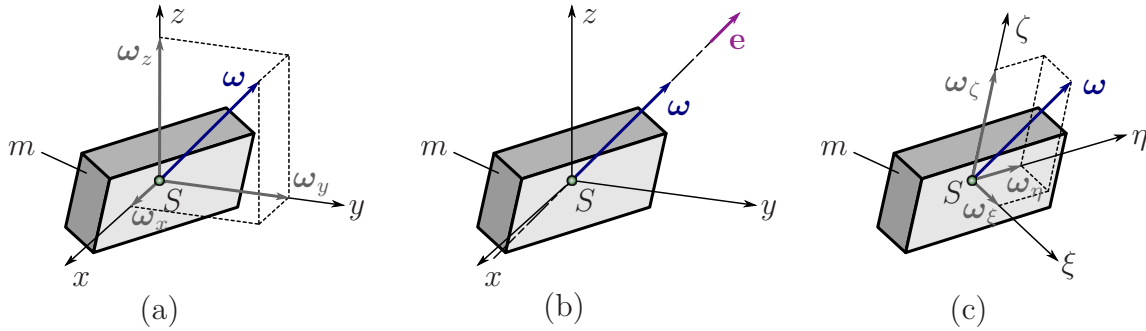
$$T_{forg} = \frac{1}{2} \Theta_e \omega^2 \quad (3.178)$$

alakban is felírható (3.31/b ábra).

Ha a tehetetlenségi nyomaték mátrixa a főirányok koordináta-rendszerében van megadva, akkor a fenti képletek szerint

$$T_{forg} = \frac{1}{2} \left(\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2 \right), \quad (3.179)$$

ahol $\Theta_{1,2,3}$ a főtehetetlenségi nyomatékokat, $\omega_{1,2,3}$ pedig a szögsebesség főirányokba eső komponenseit jelöli (3.31/c ábra).

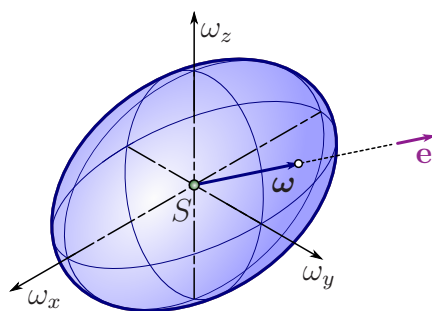


3.31. ábra. A szögsebesség felbontása a kinetikus energia számításának különböző módjaihoz. (a) Tetszőleges (xyz) koordináta-rendszerben. (b) Nem kell komponensekre bontani, ha ismert az ω -val párhuzamos tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték. (c) Komponensek a főirányok koordináta-rendszerében.

Vannak olyan esetek, amikor a test forgással kapcsolatos T_{forg} kinetikus energiája állandó, azaz $\sqrt{2T_{forg}} = \omega \sqrt{\Theta_e}$ is állandó. Ez azt jelenti, hogy ha megváltozik a forgástengely \mathbf{e} iránya a testhez képest, akkor a megfelelő Θ_e tehetetlenségi nyomaték is megváltozik, de azzal összhangban kell változnia az ω szögsebességnek is:

$$\omega = \frac{\sqrt{2T_{forg}}}{\sqrt{\Theta_e}}. \quad (3.180)$$

Ha ezt összevetjük a tehetetlenségi ellipszoidot definiáló (3.100) képlettel, akkor látható, hogy állandó kinetikus energiájú forgás esetében a különböző tengelyek körüli forgások szögsebességvektorai egy olyan ellipszoidot jelölnek ki a testhez képest, melynek főtengelyei egybeesnek



3.32. ábra. Adott T_{forg} forgási kinetikus energiához tartozó energiaellipszoid szemléltetése. Az \mathbf{e} forgástengely és az ellipszoid metszéspontjának az ellipszoid középpontjától mért távolsága megadja az ehhez az energiához tartozó szögsebesség nagyságát.

a tehetetlenségi ellipszoid főtengelyeivel, nagyságát pedig a kinetikus energia határozza meg. Ezt az ellipszoidot – amit *energiaellipszoidnak* vagy *Poinsot-féle ellipszoidnak* nevezünk – a szögsebességek terében tudjuk ábrázolni (3.32 ábra).

Az energiaellipszoid egyenlete

$$2T_{forg} = \Theta_1\omega_1^2 + \Theta_2\omega_2^2 + \Theta_3\omega_3^2 = \text{állandó} \quad (3.181)$$

alakban is felírható. ♣

3.3.2. Teljesítménytétel és munkatétel merev testre

Már beláttuk a 2.4.2 fejezetben, hogy a teljesítménytétel tetszőleges anyagi pontrendszerre teljesül – így merev testekre is.

3.29. tétel. TELJESÍTMÉNYTÉTEL MEREV TESTRE:

$$\dot{T} = P. \quad (3.182)$$



A tétel alkalmazásához célszerű megkeresni a teljesítménynek és a kinetikus energia deriváltjának a feladatokban jól alkalmazható alakját.

3.30. tétel. Egy MEREV TESTRE HATÓ ERŐRENDSZER TELJESÍTMÉNYE

$$P = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i + \mathbf{M}\boldsymbol{\omega}. \quad (3.183)$$

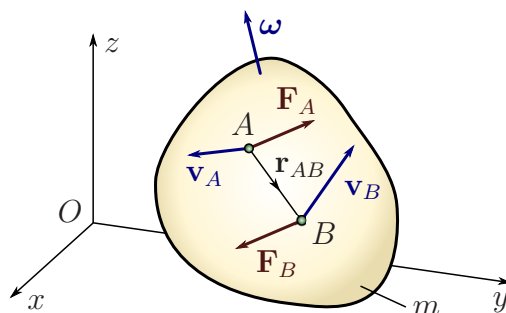
Itt \mathbf{F}_i , $i = 1 \dots n$ a merev testre ható n darab külső erőt jelöli, \mathbf{v}_i az \mathbf{F}_i erő támadáspontjának sebessége⁸, \mathbf{M} a testre ható koncentrált erőpárok eredője, $\boldsymbol{\omega}$ pedig a merev test szögsebessége.

⁸A merev testekre ható koncentrált erők hatásvonalukhoz kötöttek. Mivel merev testek esetében az erő hatásvonalán elhelyezkedő pontoknak a hatásvonallal párhuzamos sebességkomponensei egyenlők, az erő teljesítménye sem változik meg a hatásvonal menti eltolás során. Tehát úgy is kimondhatnánk ezt a tételt, hogy \mathbf{v}_i az \mathbf{F}_i erő hatásvonalán lévő tetszőleges pont sebessége.

Bizonyítás:

Azért elegendő a külső erőket feltüntetni a tételben, mert a belső erők ideális kényszerrel biztosítanak – azt, hogy a merev test pontjainak távolsága állandó.

Még azt kell belátni, hogy egy ω szögsebességgel forgó merev testre ható \mathbf{M} nyomatékú koncentrált erőpár teljesítménye valóban $\mathbf{M}\omega$. Tekintsünk egy olyan merev testet, melyre egy erőpár hat: \mathbf{F}_A az A pontban, $\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_A$ pedig a B pontban. E két támadáspont sebessége \mathbf{v}_A és \mathbf{v}_B .



3.33. ábra. Merev testre ható erőpár teljesítménye.

Láttuk az 1.15. megjegyzésben, hogy a merev test szögsebessége kifejezhető $\omega = \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) / |\mathbf{r}_{AB}|^2$ alakban. Figyelembe véve, hogy a két erőből álló erőpár nyomatéka $\mathbf{M} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B$,

$$\mathbf{M}\omega = (\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B) \cdot \left(\mathbf{r}_{AB} \times \frac{\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A}{r_{AB}^2} \right) = \frac{1}{r_{AB}^2} (\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B) \cdot (\mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)). \quad (3.184)$$

Az $\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B$, \mathbf{r}_{AB} és $(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$ vektorok egy hármas vegyes szorzat tényezői. Mivel ekkor a tényezők ciklikus permutációja nem változtatja meg a szorzat eredményét (lásd 5.7. definíció),

$$\mathbf{M}\omega = \frac{1}{r_{AB}^2} (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \cdot ((\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B) \times \mathbf{r}_{AB}). \quad (3.185)$$

A hármas vektoriális szorzat kifejtési tételét alkalmazva

$$\mathbf{M}\omega = \frac{1}{r_{AB}^2} (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \cdot (\mathbf{F}_B r_{AB}^2 - \mathbf{r}_{AB} (\mathbf{F}_B \mathbf{r}_{AB})). \quad (3.186)$$

Merev testek esetében $(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \perp \mathbf{r}_{AB}$, ezért a zárójelben lévő \mathbf{r}_{AB} -vel párhuzamos tag kiesik, így azt kapjuk, hogy valóban az erőpárnak megfelelő teljesítmény adódik az $\mathbf{M}\omega$ képletből:

$$\mathbf{M}\omega = \mathbf{F}_B \mathbf{v}_B - \mathbf{F}_B \mathbf{v}_A = \mathbf{F}_A \mathbf{v}_A + \mathbf{F}_B \mathbf{v}_B. \quad (3.187)$$



3.31. tétel. Merev test KINETIKUS ENERGIÁJÁNAK IDŐ SZERINTI DERIVÁLTJA

$$\dot{T} = \mathbf{I} \mathbf{a}_S + \mathbf{\Pi}_S \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.188)$$

Bizonyítás:

A kinetikus energia (3.170) képletét használjuk fel. Idő szerinti integrálással

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Pi}_S \right) = m \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{a}_S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\Pi}_S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\Pi}}_S. \quad (3.189)$$

A perdület és a perdület derivált $\boldsymbol{\Pi}_S = \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}$ illetve $\dot{\boldsymbol{\Pi}}_S = \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_S$, ezért

$$\dot{T} = m \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{a}_S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_S). \quad (3.190)$$

A vektoriális szorzat tulajdonságai miatt $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_S \perp \boldsymbol{\omega}$, ezért a fenti képlet utolsó tagja nulla. Mivel a tehetetlenségi nyomatéki mátrix szimmetrikus, $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon})$, így a második és harmadik tag összevonható. $\mathbf{I} = m \mathbf{v}_S$ és $\boldsymbol{\Pi}_S = \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}$ miatt ebből már következik a tétel állítása. ♠

3.54. megjegyzés: Mind a teljesítménytétel, mind a – rezgéstani feladatokban gyakran használt – ún. másodfajú Lagrange-egyenlet [4] alkalmazása során szükség van a kinetikus energia deriválására. Gyakran előfordul, hogy nem a súlypont, hanem egy másik – általában nulla sebességű – referenciapont segítségével írják fel a mozgási energiát. Ezekben az esetekben azonban ügyelni kell arra, hogy – amint a kinetikus energia általános, (3.172) kifejezéséből látszik – idő szerinti deriválás során megjelenik \dot{T} képletében a referenciapont gyorsulása is. ♣

Merev testekre ugyanúgy érvényes a munkatétel mint anyagi pontok vagy pontrendszerek esetében, tehát

$$T(t_2) - T(t_1) = W_{12}. \quad (3.191)$$

A 2.4.3 fejezetben levezetett eredmények tehát értelemszerűen alkalmazhatók az erőterben mozgó merev testek esetében is. A merev testre ható erőrendszer munkájának kiszámítása kapcsán felhasználhatjuk a teljesítmény (3.183) kifejezését:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i + \mathbf{M} \boldsymbol{\omega} \right) dt. \quad (3.192)$$

Abban a gyakorlatban fontos esetben, amikor a merev test rögzített z tengely körül forog egy állandó nagyságú, tengellyel párhuzamos \mathbf{M} nyomaték hatása alatt, a nyomaték által végzett munka

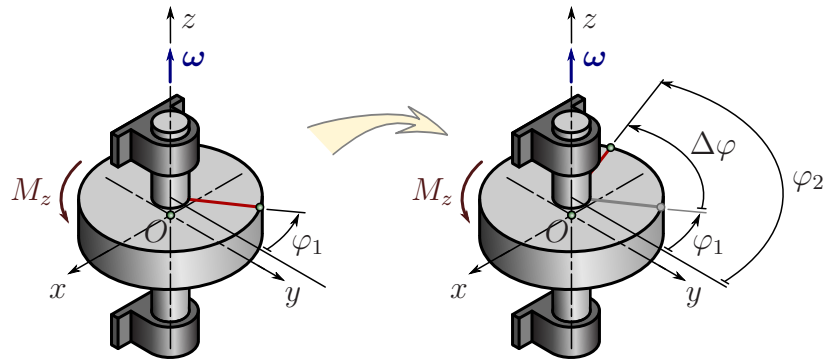
$$W_{12}^M = M_z (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (3.193)$$

miközben a test a z tengely pozitív forgásirányának megfelelően felvett φ_1 szöghelyzetből a φ_2 szöghelyzetbe fordul, a 3.34 ábrának megfelelően.

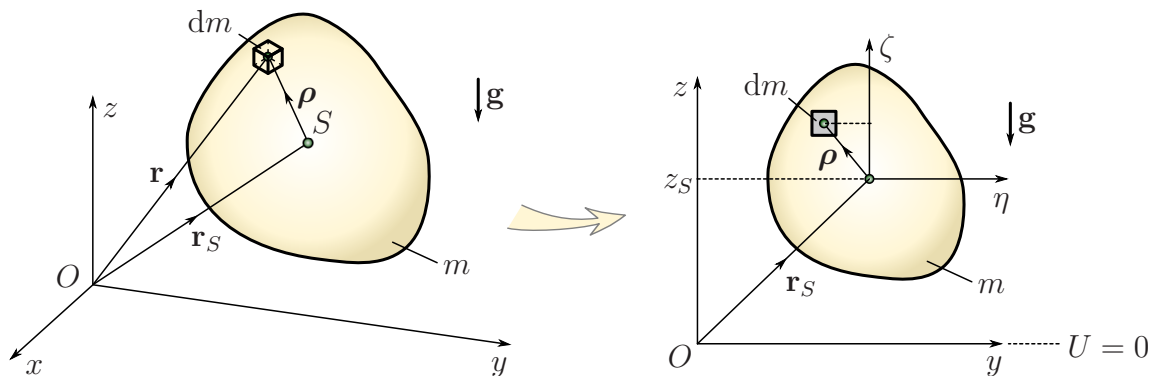
Merev testekre is igaz, hogy konzervatív erőterben a munka kiszámítása lényegesen leegyszerűsödik az általános esethez képest. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy nehézségi erőterben a potenciális energia csak a súlypont helyétől függ.

3.32. tétel. *Egy merev testre ható NEHÉZSÉGI ERŐ(TÉR) POTENCIÁLIS ENERGIÁJA*

$$U = mgz_S. \quad (3.194)$$



3.34. ábra. Rögzített tengely körül elforduló merev testre ható nyomaték munkájának számítása.



3.35. ábra. Nehézségi erőterbe helyezett test esetében a potenciális energia csak a súlypont helyétől függ.

Bizonyítás:

A 3.35 ábra szerint

$$U = \int_{(m)} gz \, dm = g \int_{(m)} (z_S + \zeta) \, dm = gz_S \int_{(m)} dm + g \int_{(m)} \zeta \, dm. \quad (3.195)$$

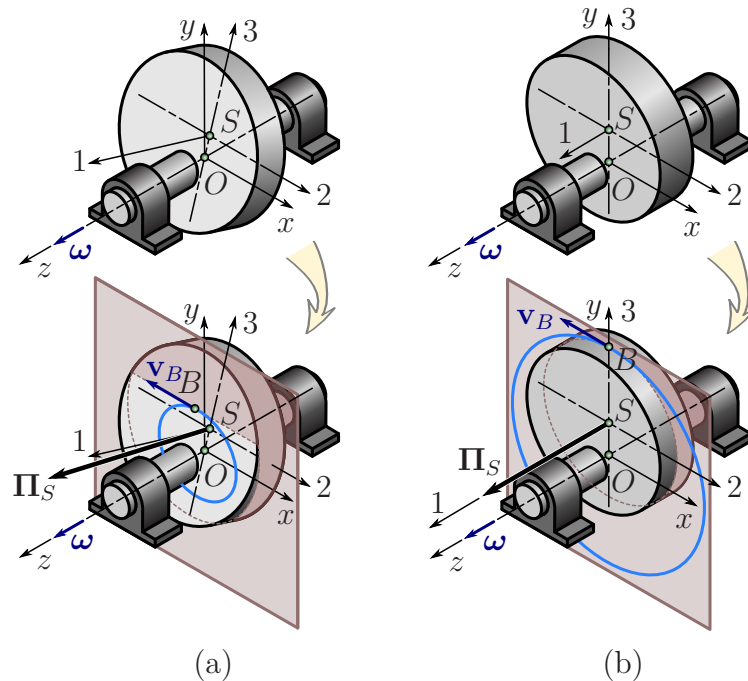
A ζ koordinátát a súlypont z_S koordinátájától mérjük, a potenciális energia nulla szintjét pedig a $z = 0$ koordinátánál vettük fel. Mivel $\int_{(m)} \zeta \, dm$ a statikai nyomaték egyik komponense, ennek értéke nulla. Ebből következik a tétel állítása. ♠

3.4. Síkmozgás dinamikai értelemben

Az 1.2.8 fejezetben láttuk, hogy a kinematika egyenletei leegyszerűsödnek síkmozgás esetén. Ebben az esetben található olyan sík, hogy a rendszert alkotó anyagi pontok sebesség- és gyorsulásvektorai (és így a súlypont gyorsulása is) azzal párhuzamosak, a test szögsebesség- és szöggyorsulásvektora pedig a síkra merőleges. Ha kiválasztottunk egy megfelelő síkot, akkor célszerű abban a síkban felvenni a koordináta-rendszer x és y tengelyeit, így a z tengely a választott síkra merőleges lesz.

A dinamika alaptételének alkalmazását jelentősen megkönnyíti, ha a külső erők és nyomatékok iránya is ehhez a sémához illeszkedik, azaz az erőknek csak x és y irányú, a nyoma-

tékoknak pedig csak z irányú komponense van.⁹ Az ilyen erőrendszer hatása alatt történő síkmozgást *dinamikai értelemben vett síkmozgásnak* nevezzük. Ilyenkor a kinetika egyenletei is egyszerűbb alakot öltenek. Az alábbiakban megvizsgáljuk a dinamikai értelemben vett síkmozgás feltételeit.



3.36. ábra. Az (a) ábrán látható test csak kinematikai értelemben végez síkmozgást: pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak (például a B pont kör alakú pályája be van rajzolva). Dinamikai értelemben azonban ez térbeli mozgás, mert a súlypontra számított perdület vektora nem párhuzamos a szögsebességgel. A (b) ábrán látható test mind kinematikai, mind dinamikai értelemben síkmozgást végez.

3.4.1. A perdülettétel és a kinetikus energia síkmozgásra érvényes alakja

A *kinematikai* értelemben vett síkmozgás során a test pontjai párhuzamos síkokban mozognak, ezekre a síkokra merőleges a szögsebesség vektora is, melynek iránya nem változik a mozgás során. Tegyük fel például, hogy a szögsebesség párhuzamos a z tengely bázisvektorával, azaz $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{k}$! Ekkor a perdületvektor általában nem lesz párhuzamos a z tengellyel, ahogy a deviációs nyomatékok értelmezése kapcsán (lásd (3.33) egyenlet) is megállapítottuk.

Perdülettétel súlypontra számított mennyiségekkel (síkmozgás)

Kinematikai értelemben vett síkmozgás során a súlypontra számított perdület

$$\boldsymbol{\Pi}_S = \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{xz}\omega_z \\ -D_{yz}\omega_z \\ \Theta_z\omega_z \end{bmatrix}. \quad (3.196)$$

⁹Természetesen másképp is felvehetjük a koordináta-rendszert, ez csupán a koordináta-rendszer felvételének egy javasolt – és célszerű – módja.

Ebben az esetben a perdület deriváltja

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{\Pi}}_S &= \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S = \begin{bmatrix} -D_{xz} \varepsilon_z \\ -D_{yz} \varepsilon_z \\ \Theta_z \varepsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -D_{xz} \omega_z \\ -D_{yz} \omega_z \\ \Theta_z \omega_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -D_{xz} \varepsilon_z + D_{yz} \omega_z^2 \\ -D_{yz} \varepsilon_z - D_{xz} \omega_z^2 \\ \Theta_z \varepsilon_z \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (3.197)$$

tehát a $\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{M}_S$ egyenletnek továbbra is három nem triviális komponens egyenlete van. Dinamikai értelemben vett síkmozgás esetében azonban a súlypontra számított nyomaték a z tengellyel párhuzamos, tehát

$$\begin{bmatrix} -D_{xz} \varepsilon_z + D_{yz} \omega_z^2 \\ -D_{yz} \varepsilon_z - D_{xz} \omega_z^2 \\ \Theta_z \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Sz} \end{bmatrix}.\quad (3.198)$$

Ez az egyenlet csak akkor teljesülhet a test tartós (véges ideig tartó) mozgása során, ha a tehetetlenségi nyomatéki mátrix harmadik oszlopában és sorában szereplő deviációs nyomatékok eltűnnek: $D_{xz} = D_{yz} = 0$.

Ez azzal egyenértékű, hogy a z tengely egy tehetetlenségi főiránnyal párhuzamos. Ebben az esetben a perdületvektor párhuzamos a szögsebességgel, ezért vektoriális szorzatuk nulla. Tehát ekkor a perdület *deriváltja* is a szögsebességgel és a szöggyorsulással egyező irányú, azaz nincs pörgettyűhatás.

3.33. definíció. SÍKMOZGÁS KINETIKAI (DINAMIKAI) ÉRTELEMBEN. *Egy test kinetikai értelemben síkmozgást végez, ha pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak és a test egyik súlyponti főtehetetlenségi iránya merőleges erre a síkra. Más szavakkal: a test kinematikai értelemben síkmozgást végez és a súlypontra számított perdületvektora párhuzamos a szögsebességgel.* ♣

A fenti definíció értelmében, dinamikai értelemben vett síkmozgás során a tehetetlenségi nyomatéki mátrix

$$\mathbf{\Theta}_S = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & 0 \\ -D_{xy} & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix}\quad (3.199)$$

alakú. Ekkor a súlypontra számított perdületvektor

$$\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_z \omega_z \end{bmatrix},\quad (3.200)$$

míg a súlypontra számított perdületvektor deriváltja:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_z \varepsilon_z \end{bmatrix}.\quad (3.201)$$

Mivel ekkor az impulzustétel z komponens egyenlete $0 = 0$ alakú, a *dinamika alaptételének* merev testre vonatkozó (3.14) változatában szereplő hat egyenletből csak három hordoz információt:

$$\begin{aligned} ma_{Sx} &= F_x \\ ma_{Sy} &= F_y \\ \Theta_z \varepsilon_z &= M_{Sz}. \end{aligned} \quad (3.202)$$

3.55. megjegyzés: Fontos speciális eset az, amikor kényszerek biztosítják a síkmozgás kinematikai feltételét, de a perdületvektor nem párhuzamos a z irányú szögsebességgel. A fenti három egyenlet ilyen, *dinamikai értelemben térbeli mozgás* esetében is érvényes, hiszen

- a z irányú erők nem befolyásolják az impulzustétel x és y irányú komponens egyenleteit,
- sem az $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_S$ vektornak, sem az z irányú erők nyomatékának nincs z irányú komponense,
- az erőrendszer eredő nyomatékának x és y komponensei nem befolyásolják a perdület-tétel z irányú komponens egyenletét.

Ezt használjuk ki a 3.34. példában is, ahol nem foglalkozunk az z irányú erőkkel és az erőrendszer nyomatékának x és y komponensével – ezek akár nullától különbözők is lehetnek a valódi szerkezetben. Ilyen eset a kiegyensúlyozatlan forgórészek mozgása is, amivel a 3.5 fejezetben foglalkozunk.

Tehát nem szabad elfelejteni, hogy dinamikailag térbeli, de kinematikailag síkbeli mozgások során olyan kényszererőknek kell fellépniük, melyeknek csak az *eredője* jelenik meg a 3.202 egyenletekben és így a különböző térbeli pontokban (például a tengely két csapágánál) ható kényszererők nagyságáról a síkmozgás egyenletei *nem adnak információt*. ♣

Perdülettel a merev test tetszőleges pontjára felírva (síkmozgás)

(3.123) alapján

$$\mathbf{D}_A = \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{AS} \times m \mathbf{a}_A. \quad (3.203)$$

A kinetikai nyomaték egyszerűbb, síkmozgásra érvényes kifejezésének meghatározásához a $\boldsymbol{\Theta}_A$ tehetetlenségi nyomaték alakját vizsgáljuk meg, a Steiner-tétel alapján.

Ha az A pontot az S súlypont síkjában választjuk meg, akkor e két pont z koordinátája megegyezik, ezért a (3.69) mátrixban szereplő z_{AS} tag nulla. Tehát

$$\boldsymbol{\Theta}_{AS} = m \begin{bmatrix} y_{AS}^2 & -x_{AS}y_{AS} & 0 \\ -x_{AS}y_{AS} & x_{AS}^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_{AS}^2 + y_{AS}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.204)$$

Ezt a mátrixot hozzáadva a súlyponti tehetetlenségi nyomatékot megadó (3.199) mátrixhoz, azt kapjuk, hogy az A pontra számított tehetetlenségi nyomaték mátrixa is

$$\boldsymbol{\Theta}_A = \begin{bmatrix} \Theta_{Ax} & -D_{Axy} & 0 \\ -D_{Axy} & \Theta_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{Az} \end{bmatrix} \quad (3.205)$$

alakú. Következésképpen,

$$\Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{Az} \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \Theta_A \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{Az} \omega_z \end{bmatrix}, \quad (3.206)$$

ezért

$$\boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}. \quad (3.207)$$

Ha kifejtjük az $\mathbf{r}_{AS} \times m\mathbf{a}_A$ szorzatot, akkor síkmozgás esetén

$$\mathbf{r}_{AS} \times m\mathbf{a}_A = m \begin{bmatrix} x_{AS} \\ y_{AS} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m(x_{AS}a_{Ay} - y_{AS}a_{Ax}) \end{bmatrix}. \quad (3.208)$$

A fentieket összefoglalva, a merev test tetszőleges (de a súlyponttal egy síkba eső) A pontjára a dinamika alaptételének egyenletei:

$$\begin{aligned} ma_{Sx} &= F_x \\ ma_{Sy} &= F_y \\ \Theta_{Az} \varepsilon_z + m(x_{AS}a_{Ay} - y_{AS}a_{Ax}) &= M_{Az}. \end{aligned} \quad (3.209)$$

Rögzített (nulla gyorsulású) A referenciapont esetében a perdülettétel egyenlete a $\Theta_{Az} \varepsilon_z = M_{Az}$ alakra egyszerűsödik.

A fentiekből következik, hogy síkmozgás esetén a *Steiner-tétel* alkalmazása is jelentősen egyszerűbb, hiszen a tehetetlenségi nyomatéki mátrix egyetlen elemét kell csak transzformálni:

$$\Theta_{Az} = \Theta_{Sz} + m\overline{AS}^2, \quad (3.210)$$

ahol \overline{AS} a két pont távolsága.

Síkfeladatok esetén szokás a z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékot Θ_s -sel vagy Θ_a -val is jelölni. A kis betű arra utal, hogy a referenciaponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékról van szó.

3.56. megjegyzés: A 3.27. példában vizsgált ide-oda gördülő forgórész is dinamikai értelemben vett síkmozgást végzett. A levezetés során kapott nyomatéki egyenletben azért jelent meg a szögsebesség, mert a referenciapont gyorsulását annak segítségével írtuk fel.

A 3.11. példában szereplő, egy tengelyre ferdén felszerelt diszkrét merev testből álló mechanikai rendszer mozgása azonban csak *kinematikai értelemben* tekinthető síkmozgásnak: mivel a perdület nem volt párhuzamos a szögsebességgel, a szögsebesség irányától eltérő, y irányú nyomaték is hatott. Ezért a feladatban szereplő test mozgását *dinamikai értelemben térbeli mozgásnak* nevezzük. ♣

A kinetikus energia kifejezése síkmozgás során

Síkmozgás esetén a *kinetikus energia* kifejezése is leegyszerűsödik:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Pi}_S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_z \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Theta_z \omega_z^2, \quad (3.211)$$

tehát

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_z\omega_z^2. \quad (3.212)$$

A fenti képlet teljesüléséhez elegendő, hogy a test *kinematikai értelemben* végezzen síkmozgást, hiszen a szögsebesség és a perdület skaláris szorzatát nem befolyásolják a perdület szögsebességre merőleges komponensei (ezzel kapcsolatban lásd még a 3.53. megjegyzést).

Ha a merev test A pontja áll – tehát az a sebességpólus –, akkor az $R = \overline{AS}$ jelöléssel $v_S = R\omega$ és a kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\Theta_z\omega^2 = \frac{1}{2}(\Theta_z + mR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\Theta_{Az}\omega^2. \quad (3.213)$$

Itt Θ_{Az} a merev test A pontján átmenő z tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték.

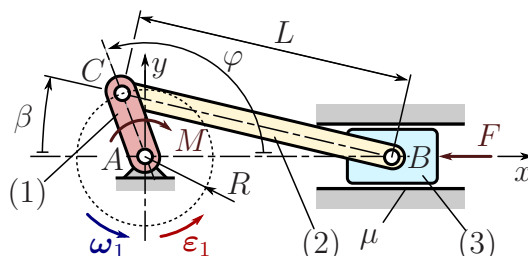
A fenti eredmények alapján a kinetikus energia deriváltja az alábbi alakban fejezhető ki síkmozgás esetén:

$$\dot{T} = m\mathbf{v}_S\mathbf{a}_S + \Theta_z\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\varepsilon} \equiv mv_S a_{St} + \Theta_z\omega_z\varepsilon_z, \quad (3.214)$$

ahol a_{St} a súlypont tangenciális gyorsulása.

3.34. példa: *Dízelmotordony motor forgattyús mechanizmusának dinamikai vizsgálata. Az 1.64 ábrán egy dízelmotor forgattyús mechanizmusának mechanikai modellje látható. A vizsgált pillanatban ismert a mechanizmus sebesség- és gyorsulásállapota, továbbá – a motor többi hengerének hatásaként – a forgattyúra ható M nyomaték. Számítsuk ki, hogy mekkora F erőnek kell hatnia a dugattyúra (a csúszkára), hogy a mechanizmus a megadott módon mozogjon!*

Adatok: $\varphi = 14.5 - 4\pi \text{ rad} \approx 1.9336 \text{ rad}$, $\omega_{1z} = 150 \text{ rad/s}$, $\varepsilon_{1z} = 500 \text{ rad/s}^2$, $R = 0.1 \text{ m}$, $L = 0.4 \text{ m}$, $m_1 = 90 \text{ kg}$, $m_2 = 15 \text{ kg}$, $m_3 = 30 \text{ kg}$, $M = 5000 \text{ Nm}$, $\mu = 0.1$.



3.37. ábra. Dízelmotor mechanikai modellje (lásd 1.28. példa).

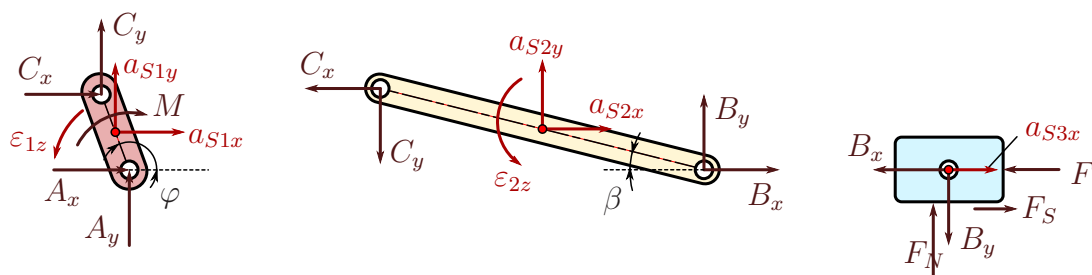
Megoldás:

A mechanizmus sebesség- és gyorsulásállapota ismert az 1.28. és 1.61. példából. A dinamika alaptételének felírásához szükség van mindhárom test súlypontjának gyorsulására és a két rúd szöggyorsulására. Az 1.18. megjegyzés szerint az (1) és (2) jelű rudak súlypontjainak gyorsulása az alábbi módon számítható:

$$\mathbf{a}_{S1} = \frac{\mathbf{a}_C}{2} = \begin{bmatrix} 375.9175 \\ 1060.63 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_{S2} = \frac{\mathbf{a}_C + \mathbf{a}_B}{2} = \begin{bmatrix} 968.7475 \\ 1060.63 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (3.215)$$

A csúszka haladó mozgást végez, gyorsulása

$$\mathbf{a}_B = \begin{bmatrix} 1184.66 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (3.216)$$



3.38. ábra. A forgattyús mechanizmus szabadtest ábrája.

A rudak szöggyorsulásai

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad \text{és} \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5409.17 \end{bmatrix} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (3.217)$$

A szabadtest ábra felrajzolása előtt még egy adatra szükségünk van: a 3.37 ábra szerint a csúszka (dugattyú) és a vezeték (a henger) közti érintkezést a μ csúszási súrlódási tényező jellemzi. A csúszási súrlódási erő ellentétes a relatív sebesség irányával, ezért a vektor megfelelő irányú berajzolásához szükségünk van a B pont sebességének ismeretére is:

$$\mathbf{v}_{Bx} = -12.7437 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (3.218)$$

Mivel a sebesség negatív, a csúszkára pozitív x irányú súrlódási erő hat.

A 3.38 szabadtest ábra alapján felírhatók a dinamika alaptételének komponens egyenletei. A mechanizmus kinematikai értelemben síkmozgást végez. A dinamika alaptételének alkalmazásához feltesszük, hogy a mozgás dinamikai értelemben is síkbeli, ezért használhatjuk a (3.202) egyenleteket (lásd még a 3.55. megjegyzést). Mivel az A tengely rögzített, a síkmozgás egyenleteinek használatával nem követünk el hibát akkor sem, ha a síkmozgás dinamikai feltételei nem teljesülnek – a figyelembe nem vett erő és nyomaték komponenseket a tengely csapágyazása veszi fel.

A dinamika alaptételének komponens egyenletei az (1) testre:

$$m_1 a_{S1x} = A_x + C_x, \quad (1)$$

$$m_1 a_{S1y} = A_y + C_y, \quad (2)$$

$$\Theta_{S1z} \varepsilon_{1z} = (A_x - C_x) \frac{R}{2} \sin(\varphi) + (A_y - C_y) \frac{R}{2} \cos(\pi - \varphi) - M. \quad (3)$$

A dinamika alaptételének komponens egyenletei a (2) testre:

$$m_2 a_{S2x} = B_x - C_x, \quad (4)$$

$$m_2 a_{S2y} = B_y - C_y, \quad (5)$$

$$\Theta_{S2z} \varepsilon_{2z} = (B_x + C_x) \frac{L}{2} \sin(\beta) + (B_y + C_y) \frac{L}{2} \cos(\beta). \quad (6)$$

Mivel a (3) csúszka egyenes vonalú haladó mozgást végez, az alábbi két egyenlet írja le a mozgását:

$$m_3 a_{Bx} = -F - B_x + F_S, \quad (7)$$

$$0 = -F_N - B_y. \quad (8)$$

Az F_S súrlódási erő iránya (és értelme) ismert, tehát annak mindenképpen pozitív értékűnek kell lennie. Az \mathbf{F}_N normálerőről csak azt tudjuk, hogy merőleges a kényszerpályára, értelme viszont nem ismert. Ezért az alábbi egyenletben az abszolút értékét kell feltüntetni:

$$F_S = \mu|F_N|. \quad (9)$$

Az egyenletrendszer megoldásához szükség van a két rúd súlyponton átmenő z tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékára is:

$$\Theta_{S1z} = \frac{1}{12}m_1R^2 = 0.075 \text{ kgm}^2 \quad (3.219)$$

$$\Theta_{S2z} = \frac{1}{12}m_2L^2 = 0.2 \text{ kgm}^2. \quad (3.220)$$

Az (1)-(9) egyenletek alapján meghatározhatók az ismeretlen erő komponensek:

$$\begin{aligned} A_x &= 98206.9 \text{ N}, & B_x &= -49850.7 \text{ N}, & C_x &= -64374.4 \text{ N}, \\ A_y &= -119922 \text{ N}, & B_y &= 8555.7 \text{ N}, & C_y &= 24465.2 \text{ N}, \\ F &= 15166.5 \text{ N}, & F_N &= -8555.7 \text{ N}, & F_S &= 855.57 \text{ N}. \end{aligned}$$

A súrlódás nem ideális kényszer, ezért a feladat nem oldható meg a teljesítménytétellel. Azonban a fenti számértékek ellenőrzésére ebben az esetben is alkalmas a teljesítménytétel, ugyanis a dugattyúra ható F erő és az F_S súrlódási erő *eredőjét* ki lehet vele számolni.

A rendszer kinetikus energiáját az alábbi kifejezés adja meg:

$$T = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{S1}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{S1z}\omega_{1z}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{S2}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{S2z}\omega_{2z}^2 + \frac{1}{2}m_3\mathbf{v}_B^2 = 7226.29 \text{ J}. \quad (3.221)$$

A kinetikus energia számértékét az 1.61. példában meghatározott sebességállapot ismeretében tudtuk kiszámítani, mely szerint

$$\begin{aligned} \omega_{1z} &= 150 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_{2z} &= 13.6888 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & v_{Bx} &= -12.7437 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ \mathbf{v}_{S1} &= \frac{\mathbf{v}_C}{2} = \begin{bmatrix} -7.01171 \\ -2.66193 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}, & \mathbf{v}_{S2} &= \frac{\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_B}{2} = \begin{bmatrix} -13.3835 \\ -2.66193 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (3.222)$$

A teljesítménytétel alkalmazásához azonban nem a kinetikus energia adott pillanatbeli értékére, hanem a kinetikus energia *deriváltjának* kifejezésére van szükség. Itt minden mennyiség ismert:

$$\dot{T} = m_1\mathbf{v}_{S1}\mathbf{a}_{S1} + \Theta_{S1z}\omega_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + m_2\mathbf{v}_{S2}\mathbf{a}_{S2} + \Theta_{S2z}\omega_2\boldsymbol{\epsilon}_2 + m_3\mathbf{v}_B\mathbf{a}_B = -567626 \text{ W}.$$

A mechanizmusra ható aktív erők és a súrlódási erő összegzett teljesítménye¹⁰

$$P = F|v_B| - F_S|v_B| - M\omega_{1z} \equiv (F - F_S)|v_B| - M\omega_{1z} = 12.7437(F - F_S) - 750000 \text{ W}.$$

Itt felhasználtuk, hogy az F erő a csúszka sebességével megegyező irányú, ezért annak teljesítménye pozitív. A súrlódási erő iránya ellentétes a B pont sebességének irányával, az M nyomaték iránya pedig az ω_1 szögsebességgel, ezért ezek teljesítménye negatív. A szabadtest ábrán feltüntetett összes többi erő ideális kényszerhez (lásd 2.37. definíció) tartozik, ezért teljesítményük nulla.

A fenti két kifejezésben ismeretlen az F erő és a súrlódási erő különbsége. A $\dot{T} = P$ egyenlet felhasználásával $F - F_S$ értéke meghatározható:

$$F - F_S = 14310.9 \text{ N}, \quad (3.223)$$

ami megfelel a dinamika alaptételével kapott eredménynek. ♠

¹⁰Az \mathbf{F}_N normálerőt és az \mathbf{F}_S súrlódási erőt ugyanannak a kényszererőnek a két komponensként fogjuk fel, melyek közül az \mathbf{F}_S komponensnek van nullától különböző teljesítménye.

3.4.2. Gördülés

A síkmozgás egyik legfontosabb speciális esete a gördülés síkban. Ennek feltételeit vizsgáljuk meg az alábbiakban.

A gördülés kinematikai feltétele

3.35. definíció. *Kinematikai értelemben akkor beszélünk gördülésről, ha az érintkező pontok sebessége megegyezik – tehát álló talajon gördülő test talajjal érintkező pontja nulla sebességű. Ez a gördülés ún. KINEMATIKAI FELTÉTELE.* ♣

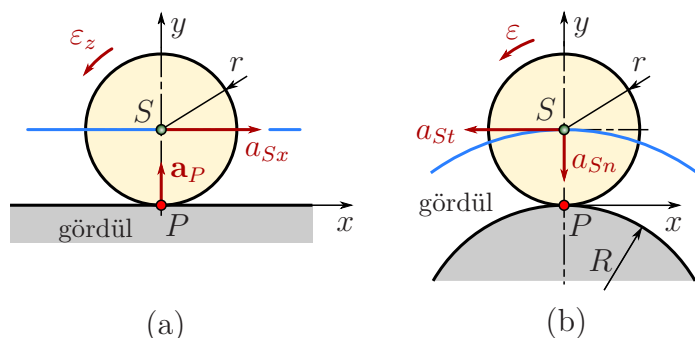
Az 1.8. megjegyzésben már volt arról szó, hogy a síkbeli gördülés geometriai kényszerként fogalmazható meg. Például egy egyenes pályán gördülő, r sugarú korong S középpontjának elmozdulása $x_S = -r\varphi$, ha a φ elfordulási szöveget az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük. Ha nem kör alakú a gördülő test, akkor a megfelelő geometriai összefüggés bonyolultabb lesz, de az továbbra is igaz marad, hogy a test póluspontja az érintkezési pontba esik.¹¹ Tehát a gördülés feltételét a sebességekre vonatkozó összefüggéssel a legkönnyebb megfogalmazni.

A dinamika alaptételének síkmozgásra vonatkozó három egyenletében (3.202) a súlypont gyorsulásának a_{Sx} és a_{Sy} komponense és a szöggyorsulás ε_z komponense szerepel. A síkbeli gördülést végző merev test a kényszerek miatt egy szabadsági fokú, ezért e három komponens nem független egymástól. A köztük felírható összefüggéseket úgy tekinthetjük, hogy azok a kényszerfeltétel idő szerinti deriválásából adódnak, tehát azok gyorsulás szintű kényszerfeltételek (lásd 1.9. megjegyzés).

A két legfontosabb esetet az 1.65. és 1.66. példák tárgyalják. Ezek szerint *egyenes pályán* gördülő r sugarú homogén korong vagy henger esetében (3.39 ábra) a súlypont gyorsulása párhuzamos a pályával, tehát a koordináta-rendszer alkalmas felvételével

$$a_{Sx} = -r\varepsilon_z, \quad \text{és} \\ a_{Sy} = 0.$$

Gördüléskor a a talajjal érintkező pont a póluspont, melynek gyorsulása merőleges a kényszerpályára.



3.39. ábra. Egyenes pályán (a) és görbült kényszerpályán (b) gördülő korong.

¹¹Ha a másik test is mozog, akkor az a gördülés feltétele, hogy az érintkezési pont *relatív* sebessége legyen nulla.

R sugarú görbült pályán gördülő r sugarú test esetében a görbületi középpont tangenciális gyorsulásának nagysága

$$a_{St} = r\varepsilon, \quad \text{a normális gyorsulás pedig}$$

$$a_{Sn} = \frac{v_S^2}{R^2 + r^2}.$$

A gördülés dinamikai feltétele

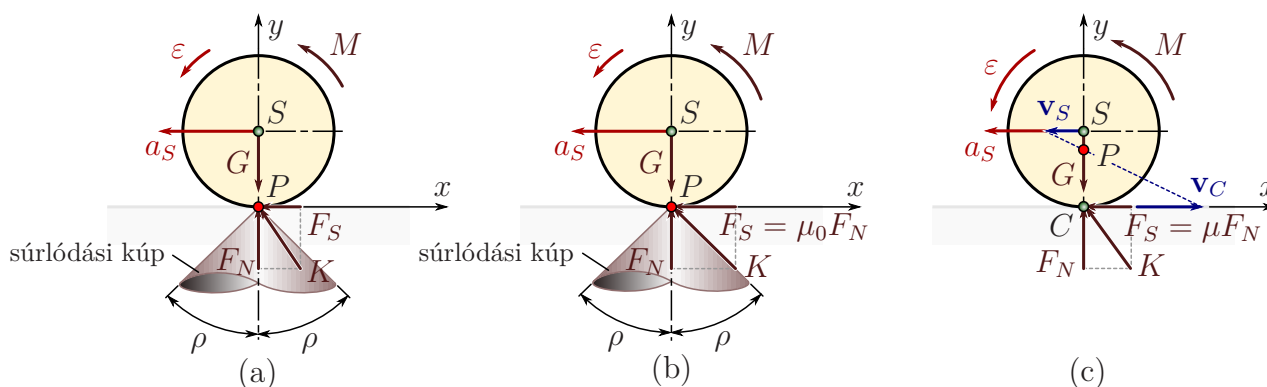
A gördülés kinematikai feltétele csak akkor teljesülhet tartósan, ha a gördülő test és a talaj között ki tud alakulni akkora tapadási súrlódási erő, ami megakadályozza az érintkező pontok relatív elmozdulását. Az \mathbf{F}_S tapadási súrlódási erő nagyságát a μ_0 tapadási súrlódási tényező korlátozza, az

$$|\mathbf{F}_S| \leq \mu_0 |\mathbf{F}_N| \quad (3.224)$$

egyenlőtlenség szerint, ahol \mathbf{F}_N a két test között ható normálerő. Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk az alábbi feltételt:

3.36. definíció. A GÖRDÜLÉS DINAMIKAI FELTÉTELE

$$\frac{|\mathbf{F}_S|}{|\mathbf{F}_N|} \leq \mu_0. \quad (3.225)$$



3.40. ábra. (a) Gördülés során a talajról átadódó $\mathbf{K} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_N$ kényszererő a $\rho = \arctan(\mu_0)$ félkúpszögű súrlódási kúpon belülré esik, azaz $F_S \leq \mu_0 F_N$. (b) A megcsúszás határhelyzetében a kényszererő a súrlódási kúp palástjára esik, $F_S = \mu_0 F_N$. (c) Csúszás során a súrlódási erő nagysága $F_S = \mu F_N$, iránya pedig ellentétes az érintkezési pont sebességének irányával.

Ezt a feltételt csak az erők nagyságának ismeretében, azaz a dinamika alaptétele alapján felírható egyenletrendszer megoldása után ellenőrizhetjük. Gördülés során általában $|\mathbf{F}_S| \neq \mu_0 |\mathbf{F}_N|$, ahogy a 3.40 ábra is mutatja. Ha egy feladatban felmerül annak a lehetősége, hogy egy merev test gördül, akkor a következőképpen járhatunk el:

- Ha a test *nem nyugalomból indul*, akkor ellenőrizni kell, hogy az érintkezési pont sebessége nulla-e. Ha nem nulla, akkor a test *csúszik*. Ez nem azt jelenti, hogy nem forog a test, csak azt, hogy a gördülés kényszere nem érvényes, tehát a test síkbeli mozgása két szabadsági fokú. Az ilyen mozgást *csúszva gördülésnek* is nevezik.

- Ha a test *nyugalomból indul*, akkor célszerű *feltételezni*, hogy a *gördülés* azonnal kialakul. Ekkor felírva a dinamika alaptételének egyenleteit, a kényszerfeltételekből származtatott kinematikai egyenleteket és az egyéb (pl. munkatétel) kiegészítő egyenleteket, kiszámítható a súrlódási erő szükséges értéke. Ekkor a gördülés (3.225) dinamikai feltételével ellenőrizhető, hogy tényleg gördül-e a test.

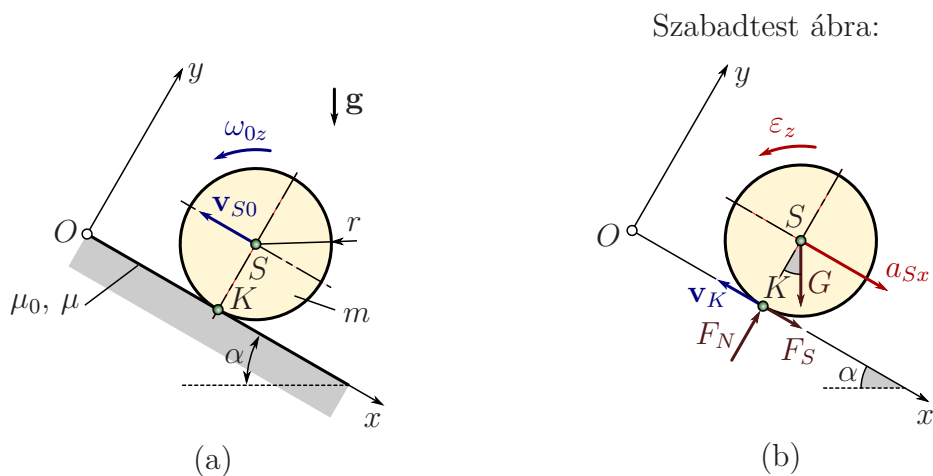
Ha a feltétel nem teljesül, akkor a test *csúszik*. Ebben az esetben a gördülés kinematikai feltétele (pl. az $a_{Sx} = -r\varepsilon_z$ egyenlet) nem használható. Helyette a μ *csúszási súrlódási tényezővel* kifejezhető csúszási súrlódási erőre vonatkozó

$$|\mathbf{F}_S| = \mu |\mathbf{F}_N| \quad (3.226)$$

egyenlettel kell kiegészítenünk az egyenletrendszerünket és *azt újra meg kell oldani*. Fontos, hogy az indulás pillanatában az $|\mathbf{F}_S| = \mu |\mathbf{F}_N|$ egyenlet nem ad információt a súrlódási erő irányáról. Felvéve az erőt egy bizonyos irányban, az egyenletrendszer megoldása után ellenőriznünk kell, hogy nem jutunk-e ellentmondásra – erre az ellenőrzésre azonban nincs általános módszer.

3.37. példa: A 3.41 ábrán látható r sugarú és m tömegű homogén korong a vízszintessel α szöget bezáró lejtőn mozog. Sebességállapota adott.

Adatok: $m = 1$ kg, $r = 1$ m, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0.2$, $\mu_0 = 0.3$, $v_{S0x} = -2$ m/s, $\omega_{0z} = 1$ rad/s, $g = 9.81$ m/s².



3.41. ábra. (a) Lejtőn mozgó korong. (b) A feladathoz tartozó szabadtest ábra.

Határozzuk meg a síkmozgást végző korong gyorsulásállapotát és a rá ható erők nagyságát!

Megoldás:

A megoldás első lépésében ellenőrizzük, hogy a lejtővel érintkező K pont (kontakt pont) sebessége nulla-e. A sebességredukciós képlet alapján

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_{S0} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{SK} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (3.227)$$

tehát a korong nem gördül, a kontakt pont a lejtőn felfelé csúszik. Következésképpen, a rá ható $F_S = \mu F_N$ nagyságú csúszási súrlódási erő a lejtőn lefelé hat. Ennek ismeretében megrajzolhatjuk a 3.41/b szabadtest ábrát.

A dinamika alaptételének egyenletei:

$$ma_{Sx} = mg \sin(\alpha) + F_S, \quad (1)$$

$$0 = F_N - mg \cos(\alpha), \quad (2)$$

$$\Theta_z \varepsilon_z = F_S r. \quad (3)$$

A (2) egyenletben figyelembe vettük azt a kényszerfeltételt, hogy a súlypont a lejtővel párhuzamosan mozog. A csúszás miatt további kényszer egyenleteket nem írhatunk fel, csak a csúszási súrlódási erőt megadó

$$F_S = \mu F_N \quad (4)$$

egyenlettel egészíthetjük ki a fentieket. Itt mind az \mathbf{F}_S súrlódási erő, mind az \mathbf{F}_N normálerő iránya ismert, ennek megfelelően vettük fel ezeket az erőket a szabadtest ábrán – tehát a (4) egyenletben szereplő F_S és F_N pozitív értékűek. A lejtőn csúszó korong két szabadsági fokú, mert nincs kényszerkapcsolat a súlypont mozgása és a test forgása között.

Figyelembe véve, hogy $\Theta_z = \frac{1}{2}mr^2$, az egyenletrendszer megoldása:

$$a_{Sx} = 6.604 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \varepsilon_z = 3.398, \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad F_N = 8.496 \text{ N}, \quad F_S = 1.699 \text{ N}. \quad (3.228)$$

Amíg a csúszás tart, addig a fenti értékek változatlanok maradnak, ezért mind a súlypont sebessége, mind a test szögsebessége egyenletesen változik:

$$\begin{aligned} v_{Sx}(t) &= v_{S0x} + a_{Sx}t, \\ \omega_z(t) &= \omega_{0z} + \varepsilon_z t. \end{aligned} \quad (3.229)$$

A mozgás során a K kontakt pont sebessége is változik:

$$\mathbf{v}_K(t) = \mathbf{v}_S(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{SK} = \begin{bmatrix} v_{S0x} + a_{Sx}t + r(\omega_{0z} + \varepsilon_z t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.230)$$

A súrlódási erő csökkenti a súlypont lejtőn felfelé irányuló sebességének nagyságát, nyomatéka pedig növeli a szögsebesség nagyságát. Tehát bekövetkezik egy olyan t_1 időpont, amikor a kontakt pont sebessége nulla lesz.

$$\mathbf{v}_K(t_1) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{v_{S0x} + r\omega_{0z}}{a_{Sx} + r\varepsilon_z} \approx 0.1 \text{ s}. \quad (3.231)$$

A t_1 pillanatban teljesül a gördülés *kinematikai feltétele*, de ez még nem jelenti azt, hogy a korong tényleg gördülni kezd – hiszen ahhoz a *dinamikai feltételnek* is teljesülnie kell. Azonban nem használhatjuk fel a (3.228) eredményeket, mert azokat a csúszás esetére felírt egyenletekből kaptuk. A gördülés esetének vizsgálatához újra meg kell oldanunk a dinamika alaptételének egyenleteit.

Gördülés esetén nem alkalmazhatjuk a (4) egyenletet. Helyette az

$$a_{Sx} = -r\varepsilon_z \quad (4')$$

egyenlettel egészítjük ki az (1)-(3) egyenletrendszert. Ez az egyenlet egy geometriai kényszerfeltételből származik (lásd 1.8. megjegyzés), tehát a csúszáshoz képest tovább csökken – 1-re – a szabadsági fok.

Az (1), (2), (3), (4') egyenletrendszer megoldása:

$$a_{Sx} = 3.27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \varepsilon_z = -3.27, \quad \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, \quad F_N = 8.496 \text{ N}, \quad F_S = -1.625 \text{ N}. \quad (3.232)$$

Az eredményekből látszik, hogy a szabadtest ábrán felvett ellentétes a súrlódási erő iránya. Míg a csúszási súrlódási erő esetében az erő tényleges irányának meghatározásához elengedhetetlen a kontakt pont sebességének kiszámítása, a tapadási súrlódási erő előjele kiszámítható a dinamika alaptétele alapján. A gördülés dinamikai feltétele teljesül, mert

$$\frac{|F_S|}{|F_N|} = 0.19245 < \mu_0 = 0.3. \quad (3.233)$$

Következésképpen, a korong valóban gördülni kezd a t_1 pillanatban. Mivel $v_{Sx}(t_1) \approx -1.34$ m/s és $\omega_z(t_1) \approx 1.34$ rad/s, a korong felfelé gördül a lejtőn.

Végezetül, számítsuk ki a csúszási súrlódási erő munkáját! A munka a súrlódási erő teljesítményének idő szerinti integrálásával, a 2.42. példában bemutatott módon számolható:

$$W_{\text{súrl}} = \int_0^{t_1} F_S v_{Kx}(t) dt = -0.0849 \text{ J}. \quad (3.234)$$

A súrlódási erő munkája az alapján is meghatározható, hogy a korong kinetikus energiája csökken, potenciális energiája pedig – mivel felfelé halad a lejtőn – nő. A kinetikus energiának azonban csak egy része alakul át potenciális energiává, a többit a súrlódási erő munkája emészti fel. A munkatétel szerint

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + W_{\text{súrl}}. \quad (3.235)$$

A korong súlypontjának emelkedése a $t_0 = 0$ és t_1 pillanatok között

$$h = - \left(\frac{1}{2} a_{Sx} t_1^2 + v_{S0x} t_1 \right) \sin(\alpha) = 0.0835 \text{ m}, \quad (3.236)$$

tehát $U_1 - U_2 = -mgh = -0.8189$ J. A kinetikus energia megváltozása pedig

$$T_2 - T_1 = \left(\frac{1}{2} m (v_{S0x} + a_{Sx} t_1)^2 + \frac{1}{2} \Theta_z (\omega_{0z} + \varepsilon_z t_1)^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_{S0x}^2 + \frac{1}{2} \Theta_z \omega_{0z}^2 \right) = -0.9038 \text{ J}.$$

Ebből a súrlódási erő munkája

$$W_{\text{súrl}} = T_2 - T_1 - U_1 + U_2 = -0.0849 \text{ J}, \quad (3.237)$$

ami megegyezik a teljesítmény integrálásával kapott eredménnyel. ♠

3.5. Forgórészek kiegyensúlyozása

A gépészmérnöki gyakorlatban nagyon fontos az állandó szögsebességgel forgó tengelyek csapágyait terhelő erők ismerete. Általában elkerülendő a tengelyek ún. *dinamikus igénybevétele*, amikor a csapágyakban ébredő erők periodikusan változnak. A dinamikus hatások csökkentése érdekében szükséges a forgórészek megfelelő kiegyensúlyozása.

3.5.1. Az ideális forgórész

Az ideális esetben – melyet a 3.42/a ábra szemléltet – a tengely nem deformálódik, a tengelyre szerelt alkatrész súlypontja a forgástengelyen van és egyik főtehetetlenségi iránya (ha szimmetrikus, akkor a szimmetriatengelye) egybeesik a forgástengellyel. Ebben az esetben

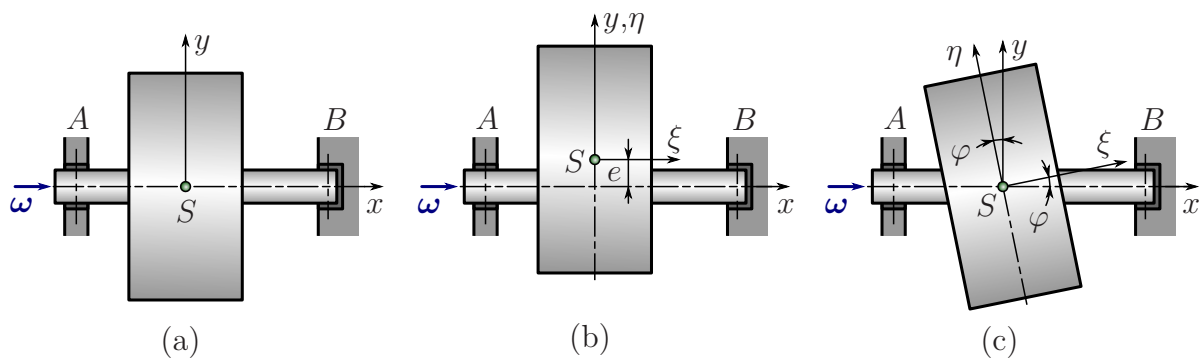
a súlypont gyorsulása nulla, a súlypontra számított perdület pedig párhuzamos a szögsebességgel, ezért a dinamika alaptételének egyenletei az alábbi alakot öltik:

$$m\mathbf{a}_S = \mathbf{0}, \tag{3.238}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_S = \mathbf{0}. \tag{3.239}$$

Következésképpen, a tengely és a rá szerelt forgórész egyensúlyban van. A csapágyakról átadódó kényszererők állandó nagyságúak és irányúak – akkor is ilyen reakció erőrendszer lépne fel, ha nem forogna a tengely.

Van két jól elkülöníthető eset, melyek eltérnek az ideális esettől: a statikus- és a dinamikus kiegyensúlyozatlanság esetei.

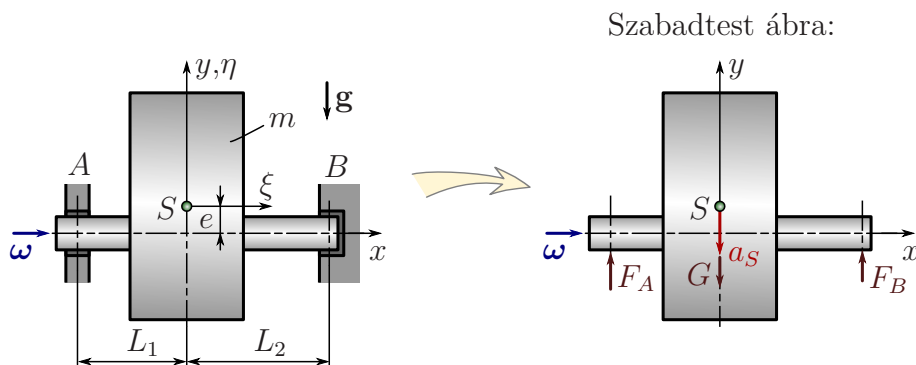


3.42. ábra. (a) Ideális, kiegyensúlyozott forgórész. (b) Statikusan kiegyensúlyozatlan forgórész. (c) Dinamikusan kiegyensúlyozatlan forgórész.

3.5.2. Statikus kiegyensúlyozatlanság

3.38. definíció. Ha a forgórész STATIKUSAN KIEGYENSÚLYOZATLAN, akkor az S súlypont $e \neq 0$ távolságra van a forgástengelytől (3.42/b ábra). Az „ e ” jelölés az excentricitás szóra utal. ♣

Ha a főtehetetlenségi irány párhuzamos a szögsebességgel, akkor továbbra is igaz, hogy $\dot{\mathbf{H}}_S = \mathbf{0}$, azaz nemcsak kinematikai, hanem dinamikai értelemben is síkmozgást végez a test. A súlypont gyorsulása azonban nem nulla, hanem $\mathbf{a}_S = -e\omega^2\mathbf{j}$. A 3.43 szabadtest ábra



3.43. ábra. Statikusan kiegyensúlyozatlan forgórész.

alapján felírható a dinamika alaptételének három komponens egyenlete:

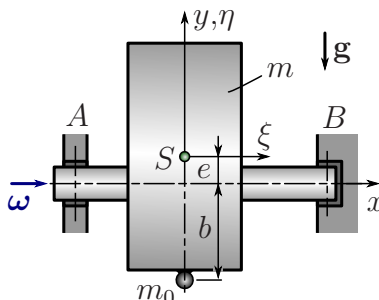
$$\begin{aligned} x: & & 0 &= 0 \\ y: & & -m\epsilon\omega^2 &= -mg + F_A + F_B \\ z: & & 0 &= F_B L_2 - F_A L_1. \end{aligned}$$

Az \mathbf{F}_A és \mathbf{F}_B csapágyreakciók a forgórész forgása során változtatják irányukat, tehát lüktető igénybevételnek teszik ki a szerkezetet, ami káros rezgésekhez vezethet.

A statikus kiegyensúlyozatlanságot úgy szüntethetjük meg, hogy a súlyponttal ellenkező oldalon, b távolságban elhelyezünk egy m_0 tömegű kis testet (póttömeget), ahogy a 3.44 ábra mutatja. A b távolságot és az m_0 tömeget úgy kell megválasztani, hogy teljesüljön az

$$m\epsilon\omega^2 = m_0 b \omega^2 \quad (3.240)$$

egyenlet, amiből $m\epsilon = m_0 b$. Ez annak felel meg, hogy a forgórészből és a póttömegeből álló test közös súlypontja a forgástengelyre kerül.



3.44. ábra. A statikus kiegyensúlyozatlanság megszüntetése.

3.5.3. Dinamikus kiegyensúlyozatlanság

3.39. definíció. DINAMIKUS KIEGYENSÚLYOZATLANSÁGRÓL akkor beszélünk, ha a forgórész egyik súlyponti tehetetlenségi főiránya sem párhuzamos a forgástengellyel. ♣

A gyakorlatban általában törekednek a dinamikus kiegyensúlyozatlanság elkerülésére. Gyártási és szerelési pontatlanságok miatt azonban minden forgórész esetében van egy kis szöghiba, azaz az egyik főtengely (az ábrákon a ξ tengely) kis φ szöget zár be a forgástengellyel (ami az ábrákon az x tengellyel párhuzamos).

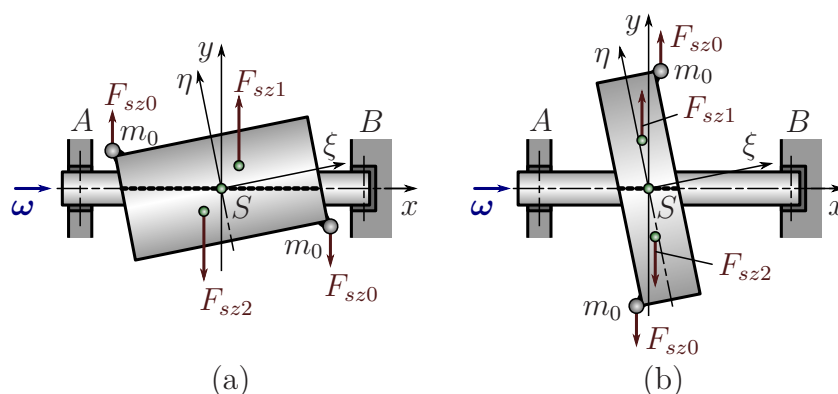
Ekkor a (3.196) és (3.197) egyenletek szerint sem a $\mathbf{\Pi}_S$ perdületvektor, sem annak deriváltja nem lesz párhuzamos a forgástengellyel. Állandó nagyságú szögsebesség (nulla szöggyorsulás) esetében a perdületvektor is állandó szögsebességgel változtatja irányát, mint a 3.11. példában. Ebből az következik, hogy $\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S$ miatt a perdület deriváltja is körbe forog.

Ennek a mozgásnak a fenntartásához $\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{M}_S$ miatt a csapágyakban ébredő reakcióerők súlypontra számított nyomatékának is folyamatosan változó irányúnak kell lennie. A reakcióerők ennek megfelelő ingadozása káros rezgésekhez vezet, a statikus kiegyensúlyozatlanság esetéhez hasonlóan.

Ahogy a 3.11. példában láttuk, a csapágyreakciók ingadozása azzal is magyarázható, hogy a testtel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben a szállító erő nyomatéka nem nulla.

Ebből a megközelítésből következik, hogy a dinamikus kiegyensúlyozatlanság megszüntetéséhez a szállító erő nyomatékát kell nullára csökkenteni.

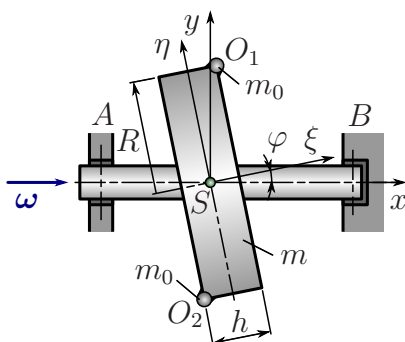
Jelölje a forgórész főtehetetlenségi nyomatékait Θ_ξ , Θ_η és Θ_ζ ! A gyakorlatban leginkább előforduló hengeres forgórészek esetében két eset lehetséges. a) $\Theta_\xi < \Theta_\eta = \Theta_\zeta$, azaz „hosszúkás” a tengelyre szerelt test. b) $\Theta_\xi > \Theta_\eta = \Theta_\zeta$, azaz „lapos, tárcsaszzerű” a tengelyre szerelt test.



3.45. ábra. Kiegyensúlyozatlanság megszüntetése dinamikusan kiegyensúlyozatlan forgórészek esetében. (a) Hosszúkás (b) lapos forgórész.

A 3.45 ábrán látható, hogy e két esetben hogyan érhető el a szállító erő nyomatékának lecsökkentése két darab, megfelelő tömegű test felszerelésével. Ezt a megoldást alkalmazzák gépkocsik kerekeinek *centrírozása*¹² során is.

3.40. példa: Egy R sugarú, h vastagságú, m tömegű, korong alakú test ξ főtehetlenségi tengelye φ szöget zár be a forgástengellyel párhuzamos x tengellyel, a 3.46 ábra szerint. A dinamikus kiegyensúlyozatlanság megszüntetése érdekében két darab m_0 tömegű testet helyezünk el a forgórészen. Határozzuk meg a kiegyensúlyozáshoz szükséges m_0 értéket!



3.46. ábra. Dinamikus kiegyensúlyozatlanság megszüntetése.

Megoldás:

Néhány szabályos alakú test főtehetlenségi nyomatékainak képletei megtalálhatók a 3.1 táblázatban. Ez alapján egy korong alakú forgórész súlypontra számított tehetlenségi nyo-

¹²A hétköznapi szóhasználatban sajnos gyakran találkozhatunk a hibás „centrírozás” szóval. A centrírozás elnevezése a centrum – azaz középpont – szóból ered.

matéki mátrixa a főirányok koordináta-rendszerében

$$\Theta_S^{korong} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 & 0 \\ (\xi\eta\zeta) & 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 \end{bmatrix}. \quad (3.241)$$

Az O_1 és O_2 pontokba helyezett m_0 tömegű testek S pontra számított tehetetlenségi nyomatéka a 3.17. Steiner-tétel segítségével számítható ki. Ha anyagi pontoknak tekintjük őket, akkor a saját súlypontjukra számított tehetetlenségi nyomatékuk elhanyagolható, tehát csak a Steiner-tételben szereplő Θ_{SO_1} és Θ_{SO_2} mátrixokat kell kiszámolni. E két mátrix megegyezik, mert az O_1 és O_2 pontok az S súlypontra szimmetrikusan helyezkednek el:

$$\mathbf{r}_{SO_1} = -\mathbf{r}_{SO_2} = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \\ R \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.242)$$

A Steiner-tétel szerint tehát

$$\Theta_S^{m_0} = \begin{bmatrix} m_0R^2 & -m_0R\frac{h}{2} & 0 \\ -m_0R\frac{h}{2} & m_0\frac{h^2}{4} & 0 \\ (\xi\eta\zeta) & 0 & m_0\left(\frac{h^2}{4} + R^2\right) \end{bmatrix}. \quad (3.243)$$

A forgórészből és két kiegyensúlyozó tömegből álló test tehetetlenségi nyomatéka a fentiek szerint

$$\begin{aligned} \Theta_S &= \Theta_S^{korong} + 2\Theta_S^{m_0} = \\ (\xi\eta\zeta) & \quad (\xi\eta\zeta) \quad (\xi\eta\zeta) \end{aligned} \quad (3.244)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + 2m_0R^2 & -2m_0R\frac{h}{2} & 0 \\ -2m_0R\frac{h}{2} & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 + 2m_0\frac{h^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 + 2m_0\left(\frac{h^2}{4} + R^2\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Theta_\xi & -D_{\xi\eta} & 0 \\ -D_{\xi\eta} & \Theta_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_\zeta \end{bmatrix}. \quad (3.245)$$

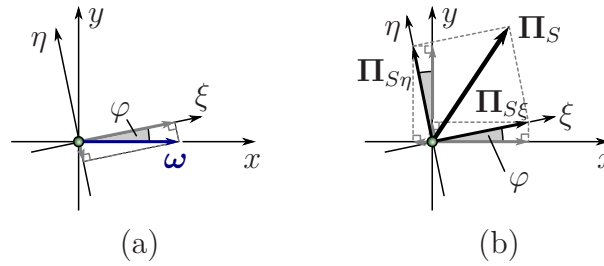
A tehetetlenségi nyomatéki mátrixtól eltérően, a szögsebesség az (xyz) koordináta-rendszerben adható meg a legkönnyebben:

$$\boldsymbol{\omega}_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.246)$$

A dinamikus kiegyensúlyozottság feltétele az, hogy a súlypontra számított perdület legyen párhuzamos a szögsebességgel, tehát

$$\mathbf{\Pi}_S = \begin{bmatrix} \Pi_{Sx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.247)$$

A perdület kifejezéséhez össze kell szorozni a Θ_S mátrixot és az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességet. Azonban ügyelni kell arra, hogy a képletekben szereplő mátrixokat és vektorokat ugyanabban a koordináta-rendszerben írjuk fel! Ebben az esetben két lehetőség kínálkozik; a továbbiakban mindkét eljárást bemutatjuk.



3.47. ábra. (a) A szögsebesség komponensei a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben. (b) A perdület komponensei az (xyz) koordináta-rendszerben.

1. Az ω szögsebességvektor kifejezése a főtehetetlenségi irányok rendszerében.

Az eljárás alkalmazásához az ω vektort kell komponensekre bontani, ami a 3.47/a ábra szerint

$$\underset{(\xi\eta\zeta)}{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \cos(\varphi) \\ -\omega_x \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.248)$$

Ezzel a perdület is kifejezhető a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben:

$$\underset{(\xi\eta\zeta)}{\Pi_S} = \underset{(\xi\eta\zeta)}{\Theta_S} \underset{(\xi\eta\zeta)}{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_{\xi\xi}\omega_\xi - D_{\xi\eta}\omega_\eta \\ -D_{\xi\eta}\omega_\xi + \Theta_{\eta\eta}\omega_\eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{S\xi} \\ \Pi_{S\eta} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.249)$$

A (3.247) egyenlet teljesülésének ellenőrzéséhez ki kell fejezni ezt a vektort az eredeti, (xyz) koordináta-rendszerben. A 3.47/b ábra alapján, a perdület ξ és η komponensét levetítve az x és y tengelyre:

$$\underset{(xyz)}{\Pi_S} \equiv \begin{bmatrix} \Pi_{Sx} \\ \Pi_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{S\xi} \cos(\varphi) - \Pi_{S\eta} \sin(\varphi) \\ \Pi_{S\xi} \sin(\varphi) + \Pi_{S\eta} \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.250)$$

$\omega \parallel \Pi_S$ feltétele: $\Pi_{Sy} = 0$. Behelyettesítések után a következő egyenletre jutunk:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{1}{2}mR^2 + 2m_0R^2 \right) \omega_x \cos(\varphi) + 2m_0R\frac{h}{2}\omega_x \sin(\varphi) \right) \sin(\varphi) \\ & - \left(2m_0R\frac{h}{2}\omega_x \cos(\varphi) + \left(\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 + 2m_0\frac{h^2}{4} \right) \omega_x \sin(\varphi) \right) \cos(\varphi) = 0, \end{aligned} \quad (3.251)$$

amiből a kiegyensúlyozó tömeg értéke

$$m_0 = \frac{m(3R^2 - h^2) \sin(2\varphi)}{24Rh \cos(2\varphi) + 6(h^2 - 4R^2) \sin(2\varphi)} \approx \frac{m(3R^2 - h^2)\varphi}{12Rh + 3(h^2 - 4R^2)\varphi}. \quad (3.252)$$

Itt az utolsó lépésben azzal a közelítéssel éltünk, hogy kis φ szög esetén $\sin(2\varphi) \approx 2\varphi$ és $\cos(2\varphi) \approx 1$.

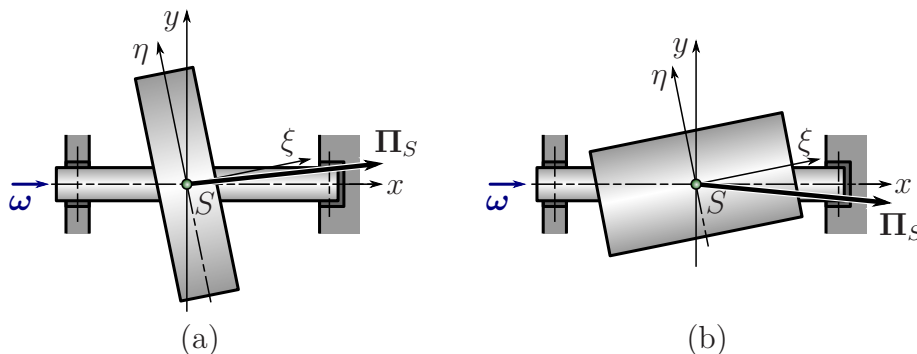
3.57. megjegyzés: A fenti számítás alapján meg lehet állapítani, hogy milyen irányú lenne a perdület vektora a kiegyensúlyozó tömegek nélkül. Kiegyensúlyozás nélkül $D_{\xi\eta} = 0$, ezért $\Pi_{S\xi} = \Theta_{\xi\xi}\omega_\xi = \Theta_{\xi\xi}\omega_x \cos(\varphi)$, és $\Pi_{S\eta} = \Theta_{\eta\eta}\omega_\eta = -\Theta_{\eta\eta}\omega_x \sin(\varphi)$.

Ezeket behelyettesítve a (3.250) egyenletbe,

$$\Pi_y = \Pi_{S\xi} \sin(\varphi) + \Pi_{S\eta} \cos(\varphi) = \Theta_{\xi\xi}\omega_x \sin(\varphi) \cos(\varphi) - \Theta_{\eta\eta}\omega_x \sin(\varphi) \cos(\varphi). \quad (3.253)$$

Következésképpen, $\Theta_\xi > \Theta_\eta$ (lapos forgórész) esetén $\Pi_y > 0$, azaz a perdület vektora a forgástengely és a ξ főtengely közé esik, a 3.48 ábrának megfelelően.

$\Theta_\xi < \Theta_\eta$ (hosszúkas forgórész) esetén azonban $\Pi_y < 0$, tehát ebben az esetben a perdület vektora a forgástengely „túloldalára” kerül. Egy hasonló eredmény vezethető le az ún. szimmetrikus erőmentes pörgettyűk mozgása kapcsán is (lásd 3.51. tétel). ♣



3.48. ábra. Kiegyensúlyozatlan forgórész perdületvektorának iránya „lapos” (a) és „hosszúkas” (b) forgórész esetében.

2. A tehetetlenségi nyomaték mátrixának kifejezése az (xyz) koordináta-rendszerben.

A tehetetlenségi nyomatéki mátrix transzformációja a koordináta-rendszer z tengely körüli, φ szögű forgatásával érhető el, amit a \mathbf{T} forgatási mátrix segítségével írhatunk le, azaz (3.74) szerint

$$\Theta_S = \mathbf{T}^T \Theta_S \mathbf{T}, \quad (3.254)$$

(xyz) $(\xi\eta\zeta)$

ahol a transzformációs mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.255)$$

A transzformációs mátrix oszlopaiban az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , bázisvektorok vannak kifejezve a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben.

A (3.254) transzformáció elvégzése után a tehetetlenségi nyomaték mátrixa az alábbi alakban adódik az (xyz) koordináta-rendszerben:

$$\Theta_S = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & 0 \\ -D_{xy} & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix}. \quad (3.256)$$

(xyz)

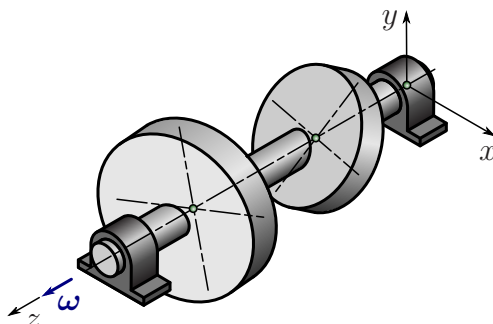
Ennek a mátrixnak minden eleme a tehetetlenségi nyomaték $(\xi\eta\zeta)$ rendszerben felírt elemei, továbbá $\sin(\varphi)$ és $\cos(\varphi)$ segítségével fejezhető ki. A transzformáció során kapható hosszú képletek ismertetésétől most eltekintünk; a fentihez hasonló számítások részletesebb kifejtése megtalálható a 3.20. és 3.26. példák megoldásában és a 3.59. megjegyzésben. A súlypontra számított perdület

$$\Pi_S = \Theta_S \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_x \omega_x \\ -D_{xy} \omega_x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.257)$$

(xyz) (xyz)

A dinamikai kiegyensúlyozottság feltétele $D_{xy} = 0$, ami a (3.252) egyenlettel egyenértékű egyenletre vezet. ♠

Azokban a feladatokban, melyekben nem nyilvánvaló a tehetetlenségi főtengelyek iránya, a szögsebesség fent bemutatott transzformációja nem – vagy csak nehézkesen – alkalmazható. Például a 3.49 ábrán látható esetben a két ferdén felszerelt forgórész főtehetetlenségi irányai nem párhuzamosak. Az ilyen feladatok csak a tehetetlenségi nyomaték transzformációjával oldhatók meg, tehát az a módszer általánosabb, mint a szögsebesség transzformációja.



3.49. ábra. Ha egy tengelyre több test is ferdén van felszerelve, akkor ezek főtehetetlenségi irányai általában nem párhuzamosak. Ebben az esetben nem célszerű a szögsebesség transzformációjának alkalmazása.

3.58. megjegyzés: „Hosszúkás” alakú forgórész esetén hasonlóan kell eljárni mint az előző példában, azonban ekkor a kiegyensúlyozó tömegeket az

$$\mathbf{r}_{SO_1} = -\mathbf{r}_{SO_2} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} \\ R \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.258)$$

helyvektornak megfelelően kell elhelyezni, amiből

$$m_0 \approx \frac{m(h^2 - 3R^2)\varphi}{12Rh - 3(h^2 - 4R^2)\varphi}. \quad (3.259)$$



3.59. megjegyzés: Ha a tehetetlenségi nyomatéki mátrix a főirányok koordináta-rendszerében

$$\mathbf{\Theta}_S = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix}, \quad (3.260)$$

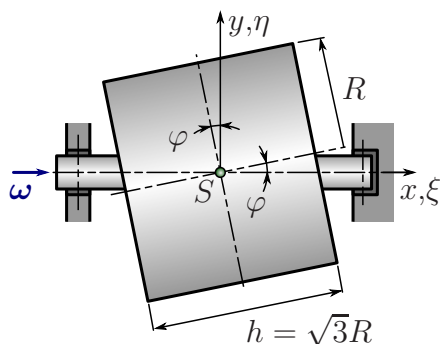
akkor a 3-as főirány körüli φ szögű elforgatás során adódó (xyz) koordináta-rendszerben

$$\mathbf{\Theta}_S = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi)\Theta_1 + \sin^2(\varphi)\Theta_2 & (\Theta_1 - \Theta_2)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & 0 \\ (\Theta_1 - \Theta_2)\sin(\varphi)\cos(\varphi) & \cos^2(\varphi)\Theta_2 + \sin^2(\varphi)\Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix}.$$

Ebből az eredményből látszik, hogy ha $\Theta_1 = \Theta_2$, akkor a 3-as tengely körüli forgatás során nem jelennek meg deviációs nyomatékok, a mátrix diagonális marad, azaz ekkor a 3-as

tengelyre merőleges összes irány főirány. Ezzel magyarázható, hogy a (3.252) kifejezés számológépében a $(3R^2 - h^2)$ kifejezés szerepel. Ha ugyanis $h^2 = 3R^2$, akkor a forgórész két főtehetetlenségi nyomatéka megegyezik, így akkor sem lesz dinamikusan kiegyensúlyozatlan, ha ferdén szerelik fel a tengelyre.

Hasonlóan látható be az, hogy ha egy test mindhárom súlyponti főtehetetlenségi nyomatéka megegyezik – ez a helyzet a $h = \sqrt{3}R$ magasságú henger esetében is (lásd 3.50 ábra) –, akkor minden iránya főirány, semmilyen elforgatott koordináta-rendszerben sem jelenhetnek meg deviációs nyomatékok, a tehetetlenségi „ellipszoid” gömb alakú.



3.50. ábra. A méretek megfelelő megválasztásával elérhető, hogy egy hengeres forgórész mindhárom főtehetetlenségi nyomatéka egyenlő legyen. Egy ilyen forgórész nem lehet dinamikusan kiegyensúlyozatlan.

Ugyanez a gondolatmenet minden forgásszimmetrikus homogén test esetében végigvihető. Például körkúpok esetében a $h = 2R$ magasságnál egyezik meg mindhárom főtehetetlenségi nyomaték, amint a 3.1 táblázat képletei alapján belátható.

A fentieket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy kinetikai szempontból a test alakját teljesen jellemzi a súlyponti tehetetlenségi ellipszoidjának alakja. Két ugyanolyan tehetetlenségi ellipszoidú és tömegű merev test teljesen ugyanúgy mozog azonos külső erőrendszer hatására.♣

3.60. megjegyzés: Ha a forgórész egyszerre statikusan és dinamikusan is kiegyensúlyozatlan, akkor a legáltalánosabb esetben a centrifugális erők eredője egy forgástengelyre merőleges síkba eső erő és egy ugyanebbe a síkba eső nyomaték, melyek nem merőlegesek egymásra, azaz erőcsavart alkotnak. Ebben az esetben több póttömeg használatával lehetséges a kiegyensúlyozás [12].

Fontos speciális eset az, amikor a testnek van a forgástengelyen olyan A pontja, melyre számított tehetetlenségi főirány párhuzamos a forgástengellyel. Az ilyen tulajdonságú pontot *főpontnak* nevezik. Ebben az esetben $\Theta_A \varepsilon$ és $\Theta_A \omega$ egyaránt párhuzamos lesz a forgástengellyel (és egyúttal az ω szögsebességgel és ε szöggyorsulással). Következésképpen, $\omega \times \Theta_A \omega = \mathbf{0}$, ezért az A pontra felírt

$$\Theta_A \varepsilon = \mathbf{M}_A, \quad (3.261)$$

perdülettételből az következik, hogy az A pontra számított nyomatéknak csak a forgástengely irányú komponense különbözik nullától. Tehát a centrifugális erők erőrendszerének A -ba redukált eredője egyetlen erő. A kiegyensúlyozás (ami egyszerre szünteti meg a statikus és a dinamikus kiegyensúlyozatlanságot) ebben az esetben megoldható egyetlen póttömeg elhelyezésével, az A ponton átmenő, forgástengelyre merőleges síkban. ♣

3.5.4. Kiegyensúlyozatlan forgórész csapnyomása

A kiegyensúlyozatlanságot gyakran megfelelően le tudjuk csökkenteni az előző fejezetben alkalmazott kiegyensúlyozó tömegek segítségével. Sok esetben azonban ez nem lehetséges vagy csak nehezen oldható meg. Például ha a forgórész a funkciójából adódóan aszimmetrikus (forgattyús tengely), nagyon nagy fordulatszámra forog (ultracentrifuga, gázturbina, marógép) vagy működés közben változik a tehetetlenségi nyomatéka (mosógép, köszörű), akkor jelentős terhelés érheti a forgórészt tartó csapágyakat. A csapágyakban ébredő erők komponenseinek meghatározásához a dinamika alaptételét használhatjuk, azaz az

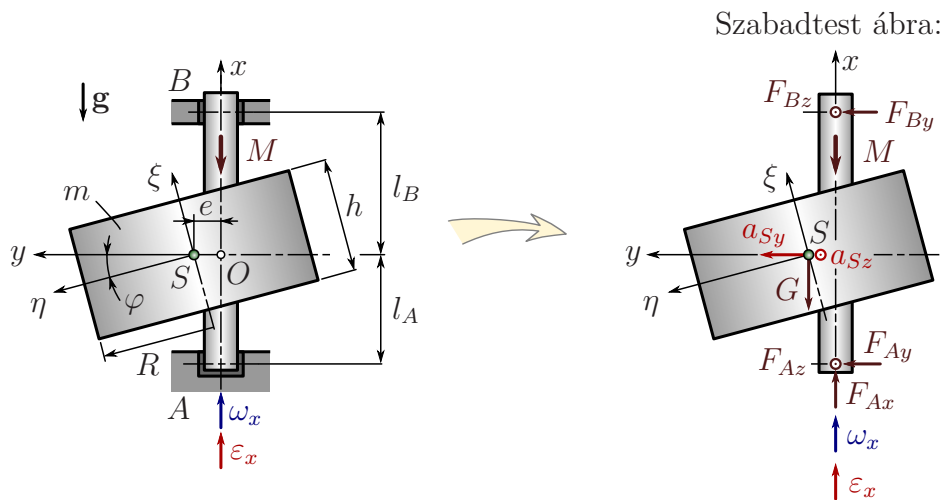
$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_S &= \mathbf{F}, \\ \Theta_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S &= \mathbf{M}_S \end{aligned} \quad (3.262)$$

egyenleteket. A statikai határozatlanság elkerülése érdekében a két csapággal megtámasztott forgórészek csapágyait úgy alakítják ki, hogy csak az egyik csapágy vehet fel tengely irányú (axiális) terhelést, a másikban csak a tengelyre merőleges (radiális) irányú erők ébredhetnek.

3.41. példa: *Fejessük ki a 3.51 ábrán látható, statikusan és dinamikusan is kiegyensúlyozatlan forgórész csapágyaiban ébredő csapreakciókat ω_x szögsebességgel és ε_x szöggyorsulással történő forgás során! Hány fordulat megtétele után áll meg a forgórész, ha állandó nagyságú M nyomaték fékezi?*

Megoldás:

Az ábra szerint az A csapágy axiális, míg a B csapágy radiális. Ennek figyelembevételével rajzolható meg a szabadtest ábra.



3.51. ábra. Mind statikusan, mind dinamikusan kiegyensúlyozatlan forgórész.

Az ábra alapján az impulzustétel komponens egyenletei

$$\begin{aligned} ma_{Sx} &= F_{Ax} - mg, \\ ma_{Sy} &= F_{Ay} + F_{By}, \\ ma_{Sz} &= F_{Az} + F_{Bz}. \end{aligned} \quad (3.263)$$

A tengely állandó iránya miatt a forgórész egy szabadsági fokú mozgást végez, melynek kinematikai jellemzőit egyértelműen jellemzi az ω_x szögsebesség és az ε_x szöggyorsulás. A statikus

kiegyensúlyozatlanság miatt a súlypont e sugarú körpályán mozog. Ennek a kényszerfeltételnek megfelelően a gyorsulása

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{OS} - \omega^2 \mathbf{r}_{OS} = \begin{bmatrix} 0 \\ -e\omega^2 \\ e\varepsilon_x \end{bmatrix}. \quad (3.264)$$

Mivel kinematikai értelemben síkmozgásról van szó, használhattuk a gyorsulásredukciós képlet síkmozgásra érvényes alakját.

A perdülettétel egyenleteinek felírásához ki kell fejeznünk a perdület derivált komponenseit is az (xyz) koordináta-rendszerben. Ehhez felhasználhatjuk a 3.40. példában bemutatott számítások eredményeit, mert ott egy ugyanilyen paraméterekkel jellemzett forgórészt vizsgáltunk. Akár a szögsebességvektor, akár a tehetetlenségi nyomaték transzformációját választjuk, az alábbi alakban fejezhető ki a perdületvektor az (xyz) koordináta-rendszerben (lásd (3.250) és (3.257)):

$$\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_x \omega_x \\ -D_{xy} \omega_x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.265)$$

Itt kihasználtuk, hogy a D_{yz} és D_{xz} deviációs nyomatékok eltűnnek, mert a z tengely merőleges a hengeres test egyik szimmetriasíkjára. A továbbiakban minden vektort az (xyz) koordináta-rendszerben fejezünk ki.

A perdület deriváltja

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S = \begin{bmatrix} \Theta_x \varepsilon_x \\ -D_{xy} \varepsilon_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -D_{xy} \omega_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_x \varepsilon_x \\ -D_{xy} \varepsilon_x \\ -D_{xy} \omega_x^2 \end{bmatrix}, \quad (3.266)$$

a külső erők súlypontra számított nyomatéka pedig a szabadtest ábra alapján

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M} + \mathbf{r}_{SA} \times \mathbf{F}_A + \mathbf{r}_{SB} \times \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} -F_{Az}e - F_{Bz}e + M_x \\ F_{Az}l_A - F_{Bz}l_B \\ F_{Ax}e - F_{Ay}l_A + F_{By}l_B \end{bmatrix}, \quad (3.267)$$

ahol

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{SA} = \begin{bmatrix} -l_A \\ -e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{SB} = \begin{bmatrix} l_B \\ -e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{By} \\ F_{Bz} \end{bmatrix}. \quad (3.268)$$

A fenti számításokat összefoglalva, az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= F_{Ax} - mg \\ -m e \omega^2 &= F_{Ay} + F_{By} \\ m e \varepsilon_x &= F_{Az} + F_{Bz} \\ \Theta_x \varepsilon_x &= -F_{Az}e - F_{Bz}e + M_x \\ -D_{xy} \varepsilon_x &= F_{Az}l_A - F_{Bz}l_B \\ -D_{xy} \omega_x^2 &= F_{Ax}e - F_{Ay}l_A + F_{By}l_B. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva a külső erőrendszer hat ismeretlen komponensére:

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= mg, & F_{Ay} &= \frac{emg + D_{xy}\omega_x^2 - e l_B m \omega_x^2}{l_A + l_B}, & F_{Az} &= \frac{e l_B m - D_{xy} \varepsilon_x}{l_A + l_B} \varepsilon_x, \\ M_x &= (\Theta_x + m e^2) \varepsilon_x, & F_{By} &= -\frac{emg + D_{xy}\omega_x^2 + e l_A m \omega_x^2}{l_A + l_B}, & F_{Bz} &= \frac{D_{xy} + e l_A m}{l_A + l_B} \varepsilon_x. \end{aligned}$$

Ha a tengellyel párhuzamos nyomaték fékezi a forgórészt, akkor a megállásig bekövetkező szögelfordulást két módszerrel is kiszámíthatjuk.

1. módszer: A munkatétel szerint

$$T(t_2) - T(t_1) = W_{12}. \quad (3.269)$$

Mivel a t_2 pillanatban megáll a test, $T(t_2) = 0$. A (3.212) képlet szerint ω_x szögsebességű forgás során

$$T(t_1) = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_x\omega_x^2 = \frac{1}{2}me^2\omega_x^2 + \frac{1}{2}\Theta_x\omega_x^2 = \frac{1}{2}(\Theta_x + me^2)\omega_x^2. \quad (3.270)$$

Itt kihasználtuk, hogy a fenti képlet teljesüléséhez elegendő, ha kinematikai értelemben síkmozgást végez a test. Másrészt, (3.193) szerint a nyomaték által végzett munka $\Delta\varphi$ szögelfordulás során

$$W_{12} = M_x\Delta\varphi. \quad (3.271)$$

Következésképpen, $W_{12} = T(t_2) - T(t_1) = -T(t_1)$ miatt

$$\Delta\varphi = -\frac{\frac{1}{2}(\Theta_x + me^2)\omega_x^2}{M_x}. \quad (3.272)$$

Mivel M_x negatív, az eredmény pozitív lesz.

2. módszer: Ha állandó a fékező nyomaték nagysága, akkor egyenletesen csökken a forgórész szögsebessége. Legyen a $t_1 = 0$ pillanatban ω_x a szögsebesség. A t_2 pillanatban a forgórész megáll, ezért

$$\omega_x(t_2) = \varepsilon_x t_2 + \omega_x = 0, \quad \Rightarrow \quad t_2 = -\frac{\omega_x}{\varepsilon_x}. \quad (3.273)$$

A t_2 idő alatt megtett szögelfordulás

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon_x t_2^2 + \omega_x t_2 = -\frac{1}{2}\frac{\omega_x^2}{\varepsilon_x}. \quad (3.274)$$

Mivel a dinamika alaptételéből kapott megoldás szerint

$$\varepsilon_x = \frac{M_x}{\Theta_x + me^2}, \quad (3.275)$$

behelyettesítés után ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a munkatételen alapuló módszerrel. ♠

3.6. Pörgettyűmozgás

3.42. definíció. PÖRGETTYŰMOZGÁSNAK a merev test olyan mozgását nevezzük, amikor a testnek van egy rögzített pontja (lásd még: 1.47. definíció). ♣

A definícióból következik, hogy egy pörgettyűmozgást végző merev test szabadsági foka három. Tehát ha a dinamika alaptételét a nulla sebességű és nulla gyorsulású A pontra írjuk fel, akkor a hat skalár egyenletből csak három lesz független, a perdülettétel három komponens egyenlete:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{M}_A, \quad \text{ahol} \quad (3.276)$$

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega}. \quad (3.277)$$

A perdülettétel alapján ugyanis – adott $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség mellett – meghatározható az $\boldsymbol{\varepsilon}$ szöggyorsulás, $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$ figyelembevételével pedig ezekből kiszámolható a súlypont gyorsulása.

A műszaki gyakorlatban számos esetben találkozhatunk pörgettyűmozgást végző testekkel – például a kardáncsuklók, a pörgettyűs iránytűk vagy a malomiparban használt ún. kollerjárat kapcsán. Az ebben a fejezetben levezetendő eredmények azonban a fizikai jelenségek egy bővebb körében is alkalmazhatók.

A merev testek mozgását minden pillanatban összetehetjük egy súlypont sebességével végbemenő *haladó mozgásból* és egy súlyponton átmenő tengely körüli *forgó mozgásból*. Ennek felel meg a dinamika alaptételének két egyenlete:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F} \quad \text{és} \quad \dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{M}_S. \quad (3.278)$$

Az általános esetben ezek az egyenletek összefüggenek. Például a perdülettételben szereplő szögsebességtől függ a test egyes pontjainak sebessége, a sebességállapottól és a test szöghelyzetétől pedig függhetnek a testre ható, az impulzustételben megjelenő erők. Hasonlóképpen, a súlypont helye és sebessége befolyásolhatja a testre ható nyomatékvektort.

Azonban sok esetben a dinamika alaptételének egyenletei egymástól függetlenek vagy – alkalmas közelítésekkel – függetlennek tekinthetők. Ekkor a súlypont körüli forgást nem befolyásolja, hogy a súlypont áll vagy mozog, tehát a forgás szempontjából pörgettyűnek tekinthető a test. Ezekben a feladatokban az $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ egyenlet az anyagi pontok kinetikájának eszközeivel oldható meg, a pörgettyűmozgástól elkülönítve tárgyalva.

Ennek a megközelítési módnak a legismertebb példája a bolygómozgás vizsgálata. A Naprendszer bolygóinak súlypontjai ellipszispályákon mozognak, de a keringéstől függetlenül tárgyalható a bolygók forgása illetve a forgástengelyük irányának változása.

A továbbiakban egyenleteinket az A rögzített pontra írjuk fel, de a fent részletezett feltételek mellett a súlypontra is igazak maradnak.

3.6.1. A pörgettyű helyzetének és szögsebességének megadása

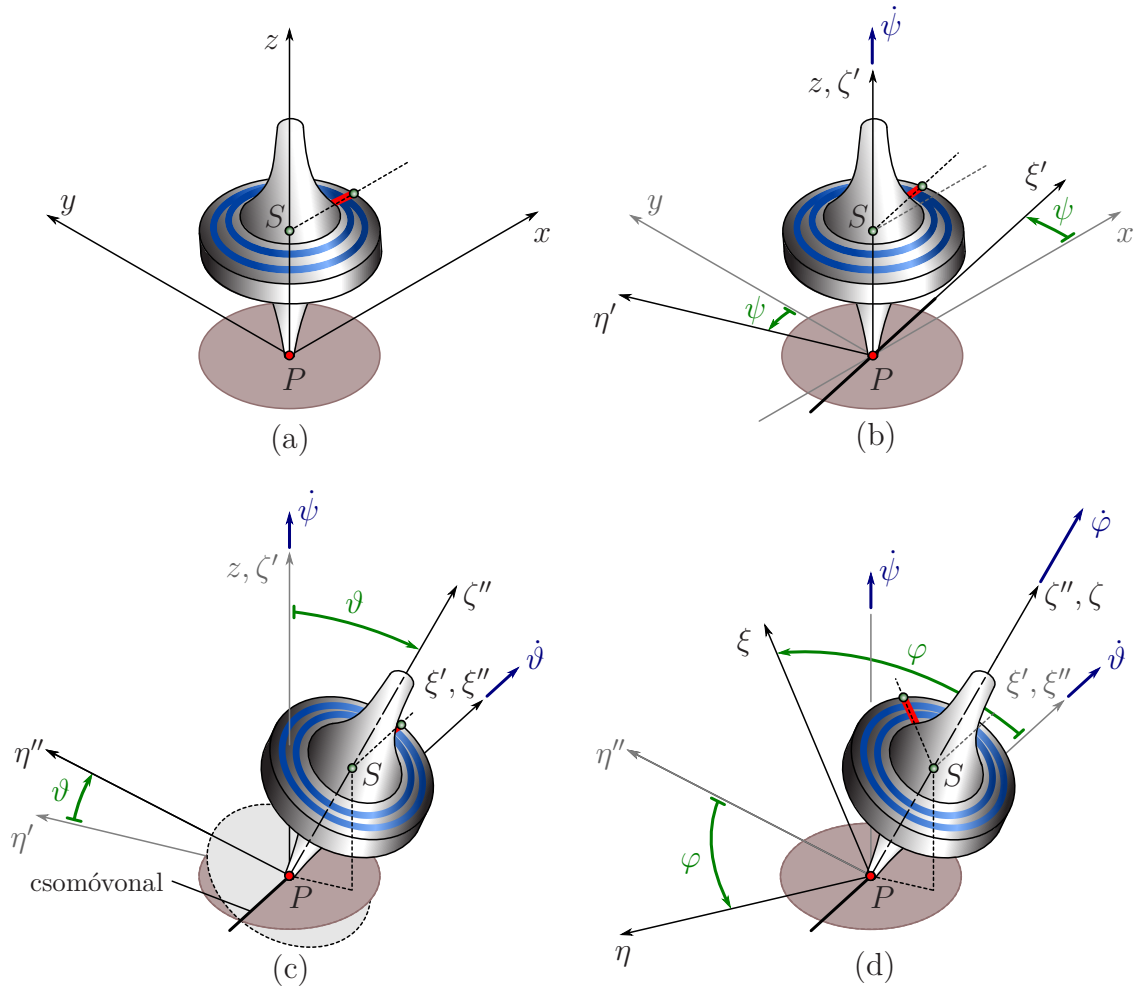
Az Euler-szögek

Az 1.2.1 fejezetben láttuk, hogy ha ismert a merev test egy pontjának helye, akkor a merev test többi pontjának térbeli helyét három szög segítségével rögzíthetjük.

Dinamikai szempontból a test helyzetét főtehetetlenségi tengelyeinek irányával jellemezhetjük, ezért a továbbiakban e három tengely irányának megadásával foglalkozunk. Ehhez az általában ψ , ϑ , φ -vel jelölt három szög kooordinátát, az úgynevezett *Euler-szögeket* használjuk. Az Euler-szögek megadják, hogy mekkora és milyen tengely körüli forgatásokkal juthatunk el a térben rögzített (xyz) koordináta-rendszerből a pörgettyű főtehetetlenségi tengelyeinek megfelelő $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerbe. Azonban – amint láttuk az 1.11. megjegyzés kapcsán – a szögefördülések sorrendje nem tetszőleges. Ezért a pörgettyű helyzetének egyértelmű megadásához rögzíteni kell az egymás utáni forgatások sorrendjét.

A következőkben három lépésben áttérünk a vonatkoztatási rendszerhez rögzített (xyz) koordináta-rendszerből a pörgettyű ξ , η és ζ főtehetetlenségi tengelyeivel megadott koordináta-rendszerbe.

1. A 3.52/a ábrán látható módon, abból a helyzetből indulunk ki, mikor a két koordináta-rendszer egybeesik. Az első transzformáció során – melyet a 3.52/b ábra illusztrál –



3.52. ábra. Az Euler-szögek értelmezése. (a) Kiindulási helyzet. (b) A testhez kötött koordináta-rendszer elforgatása a z tengely körül ψ szöggel. Az így kapott ξ' tengely a vastag vonallal jelölt csomóvonal. (c) Elforgatás a csomóvonal körül ϑ szöggel. (d) Forgatás a $\zeta \equiv \zeta''$ tengely körül φ szöggel.

a merev testhez kötött koordináta-rendszert elforgatjuk a z tengely körül ψ szöggel. Ennek eredményeképpen a ξ és η tengelyek iránya megváltozik, de mindkettő az xy síkban marad. Ezt a forgatást a

$$\mathbf{T}_{prec} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.279)$$

mátrix írja le, melynek oszlopaiban az (xyz) rendszer egységvektorai vannak kifejezve az elforgatott koordináta-rendszerben, melynek tengelyeit ξ' , η' , ζ' -vel jelöljük. A ψ szöveget *precessziós szögnek* nevezzük.

2. A második lépésben áttérünk egy olyan koordináta-rendszerre, melyet az előző lépésben kapott ξ' tengely körüli ϑ szögű forgatással kapunk, a 3.52/c ábrának megfelelően. Ennek során az η' tengely elemelkedik az xy síkból. A ψ és ϑ szögek egyértelműen megadják a ζ tengely irányát, mely most már a test pozíciójának megfelelően áll. Az így kapott koordináta-rendszer tengelyei: ξ'' , η'' , ζ'' . A $\xi''\eta''$ és xy síkok metszévonalát

– ami merőleges a $z\zeta''$ síkra – *csomóvonalnak* nevezzük. A ξ' tengely körüli – azaz csomóvonal körüli – forgatást a

$$\mathbf{T}_{nut} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ 0 & -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \quad (3.280)$$

mátrix segítségével írhatjuk le, melynek oszlopaiban a $(\xi'\eta'\zeta')$ rendszer egységvektorai vannak kifejezve az elforgatott rendszerben. A ϑ szöget *nutációs szögnek* nevezzük.

3. A harmadik, φ szögű forgatás során a ξ és η tehetetlenségi fő tengelyeket is a test pozíciójának megfelelő helyzetbe forgatjuk, a ζ'' tengely körül, ahogy a 3.52/d ábra mutatja. A megfelelő transzformációs mátrix

$$\mathbf{T}_{rot} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.281)$$

aminek az oszlopai a végleges állású $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszer bázisvektorait tartalmazzák, a $(\xi''\eta''\zeta'')$ rendszerben. A φ szöget *rotációs szögnek* nevezzük.

A fentiek szerint a test helyzetét az x tengely és a csomóvonal közti ψ szög, a z tengely és a ζ tengely közti ϑ szög, valamint a csomóvonal és a ξ tengely közti φ szög adja meg.

A 3.2.3 fejezetben leírtaknak megfelelően, a három transzformáció együttes hatása a három transzformációs mátrix szorzatával fejezhető ki.

3.43. tétel. *Bármilyen, (xyz) -ben megadott vektort a*

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{rot} \mathbf{T}_{nut} \mathbf{T}_{prec} \quad (3.282)$$

mátrixszal való szorzással tudunk áttranszformálni a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerbe.

A \mathbf{T} mátrix oszlopaiban az (xyz) rendszer egységvektorai vannak kifejezve $(\xi\eta\zeta)$ -ban. Az Euler-szögekkel megadva

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \psi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \psi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (3.283)$$

A fordított transzformációhoz \mathbf{T} transzponáltjával kell szorozni a $(\xi\eta\zeta)$ rendszerben megadott vektort. ♠

3.61. megjegyzés: Egyes esetekben – például amikor tengelyszimmetrikus a test – célszerű olyan koordináta-rendszert választani, mely a φ szög irányában nem forog együtt a testtel, azaz a rotációnak megfelelő forgatást kihagyjuk. Az ennek megfelelő mátrix

$$\mathbf{T}_{nut} \mathbf{T}_{prec} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{bmatrix}. \quad (3.284) \quad \clubsuit$$

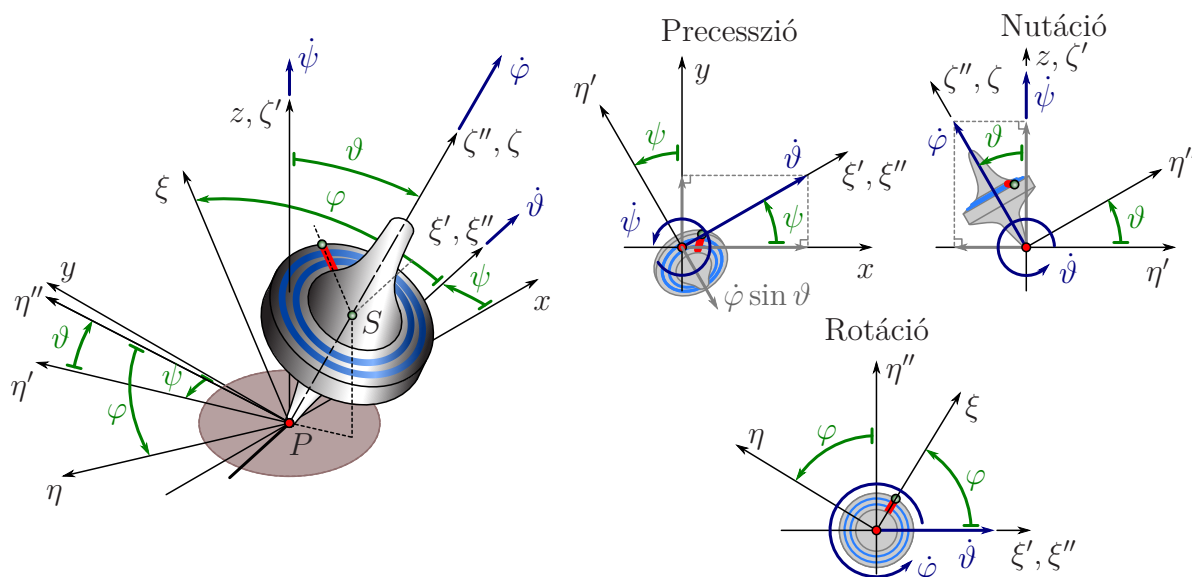
A szögsebesség kifejezése Euler-szögekkel

A bevezetett Euler-szögek és a hozzájuk tartozó forgástengelyek segítségével a következő szögsebességvektorokat definiáljuk:

- $\boldsymbol{\omega}_p \equiv \dot{\psi}$ a z irányú *precessziós szögsebességvektor*, ezzel a szögsebességgel forog a csomóvonal.
- $\boldsymbol{\omega}_n \equiv \dot{\vartheta}$ a csomóvonallal párhuzamos *nutációs szögsebességvektor*.
- $\boldsymbol{\omega}_r \equiv \dot{\varphi}$ a ζ tengellyel párhuzamos *rotációs szögsebességvektor*.

Ezeknek a szögsebességeknek az eredője adja a test $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességét, tehát

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_r \equiv \dot{\psi} + \dot{\vartheta} + \dot{\varphi}. \quad (3.285)$$



3.53. ábra. Az Euler-szögek és a szögsebesség $\dot{\psi}$ precessziós, $\dot{\vartheta}$ nutációs és $\dot{\varphi}$ rotációs komponensei.

A következő lépésben ki kell fejeznünk a szögsebesség komponenseit egy derékszögű koordináta-rendszerben. A 3.53 ábra alapján beláthatók az alábbi tétel állításai:

3.44. tétel. A SZÖGSEBESSÉG KOMPONENSEI az (xyz) derékszögű koordináta-rendszerben

$$\boldsymbol{\omega}_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \cos(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \sin(\psi) \\ \dot{\vartheta} \sin(\psi) - \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \cos(\psi) \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \omega_n \cos(\psi) + \omega_r \sin(\vartheta) \sin(\psi) \\ \omega_n \sin(\psi) - \omega_r \sin(\vartheta) \cos(\psi) \\ \omega_p + \omega_r \cos(\vartheta) \end{bmatrix}. \quad (3.286)$$

A szögsebesség $(\xi\eta\zeta)$ -beli komponensei szintén leolvashatók az ábráról, de a 3.43. tételben megadott \mathbf{T} mátrix segítségével is kiszámíthatók:

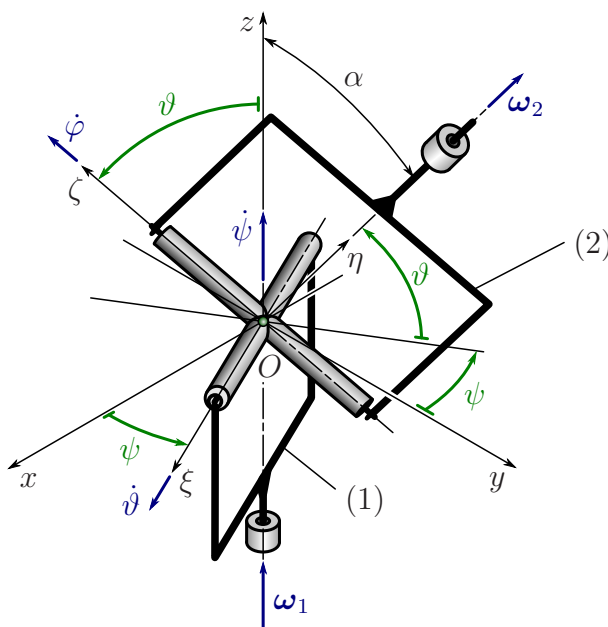
$$\boldsymbol{\omega}_{(\xi\eta\zeta)} = \begin{bmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} = \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}_{(xyz)} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + \dot{\vartheta} \cos(\varphi) \\ \dot{\psi} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) - \dot{\vartheta} \sin(\varphi) \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \omega_p \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + \omega_n \cos(\varphi) \\ \omega_p \sin(\vartheta) \cos(\varphi) - \omega_n \sin(\varphi) \\ \omega_r + \omega_p \cos(\vartheta) \end{bmatrix}. \quad (3.287)$$

A szögsebesség fenti kifejezéseit EULER-FÉLE GEOMETRIAI EGYENLETEKNEK nevezzük. ♠

Mivel a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszer tengelyeit a főtengelyekkel párhuzamosan vettük fel, kinetikai feladatokban szokásos az $\omega_\xi \equiv \omega_1$, $\omega_\eta \equiv \omega_2$, $\omega_\zeta \equiv \omega_3$ jelölés is.

3.62. megjegyzés: A fentiekben bevezetett szögsebesség komponensek általában nem állíthatók elő $f(\psi, \eta, \varphi)$ alakú függvények differenciálhányadosaként. Ez annak felel meg, hogy maga az ω vektor sem fejezhető ki egy φ szögelfordulás vektor deriváltjaként – hiszen a véges szögelfordulások nem adhatók meg vektor segítségével. ♣

3.45. példa: A KARDÁNC SUKLÓ KINEMATIKÁJÁNAK TÁRGYALÁSA az Euler-féle szögekkel. A 3.54 ábrán látható kardáncsukló az (1) jelű, állandó ω_1 szögsebességgel forgó hajtó tengelyt kapcsolja össze a (2) jelű hajtott tengellyel. A két tengely egyenesei α szögben metszik egymást. Mindkét tengelyhez csuklósan kapcsolódik a pörgettyűmozgást (gömbi mozgást) végző keresztadarab, melynek álló O középpontja a két tengely metszéspontjában helyezkedik el. Határozzuk meg a hajtott tengely ω_2 szögsebességét és ε_2 szöggyorsulását!



3.54. ábra. Kardáncsukló mozgásának vizsgálata az Euler-szögek segítségével.

Megoldás:

Az (xyz) koordináta-rendszert úgy vesszük fel, hogy az (1) tengely a z tengellyel párhuzamos, a (2) tengely pedig az (yz) síkba esik. Ennek megfelelően, a két tengely szögsebessége¹³

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{(xyz)} \quad \text{és} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \sin(\alpha) \\ \omega_2 \cos(\alpha) \end{bmatrix}_{(xyz)}. \quad (3.288)$$

Tudjuk, hogy az Euler-szögekkel kapcsolatban bevezetett csomóvonal $\dot{\psi} = \omega_1$ szögsebességgel forog. Ennek megfelelően, a keresztadarab (1) tengelyhez kapcsolódó ágával párhuzamosan vesszük fel a csomóvonalat. A keresztadarab az (1) tengelyhez képest $\dot{\vartheta}$ szögsebességgel forog. Így a keresztadarab szögsebességvektora

$$\Omega = \omega_1 + \dot{\vartheta}. \quad (3.289)$$

¹³Az 1 és 2 indexek a hajtó illetve hajtott tengelyre vonatkoznak, nem a szögsebesség főtengelyi irányokba eső komponenseire, amiről az Euler-féle geometriai egyenletek kapcsán volt szó.

A (2) hajtott tengely keresztadarabhoz képest vett szögsebessége a keresztadarab másik ágával párhuzamos, ezért abban az irányban vesszük fel a ζ tengelyt. A (2) tengely a ζ tengely körül $\dot{\varphi}$ szögsebességgel forog a keresztadarabhoz képest. Tehát az ω_2 szögsebesség

$$\omega_2 = \dot{\psi} + \dot{\vartheta} + \dot{\varphi}. \quad (3.290)$$

Ennek komponensei kiszámíthatók az Euler-féle geometriai egyenletek alapján, ha a (3.286) képletekbe $\dot{\psi} = \omega_1$ -et helyettesítünk:

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \cos(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \sin(\psi) \\ \dot{\vartheta} \sin(\psi) - \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \cos(\psi) \\ \omega_1 + \dot{\varphi} \cos(\vartheta) \end{bmatrix}. \quad (3.291)$$

Ezt az eredményt összevetve ω_2 (3.288) egyenletben megadott kifejezésével:

$$\dot{\vartheta} \cos(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \sin(\psi) = 0, \quad (1)$$

$$\dot{\vartheta} \sin(\psi) - \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \cos(\psi) = \omega_2 \sin(\alpha), \quad (2)$$

$$\omega_1 + \dot{\varphi} \cos(\vartheta) = \omega_2 \cos(\alpha). \quad (3)$$

Még van egy feltétel, amit nem használtunk ki: ω_2 -nek nem lehet ζ irányú komponense, mert a (2) tengelyre merőleges a keresztadarab ζ irányú ága. Következésképpen, (3.287) alapján

$$\omega_{2\zeta} \equiv \dot{\varphi} + \omega_1 \cos(\vartheta) = 0. \quad (4)$$

Az (1) egyenletet $\sin(\psi)$ -vel, a (2) egyenletet pedig $-\cos(\psi)$ -vel szorozva és a két egyenletet összeadva, továbbá (3) és (4) átrendezésével az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\dot{\varphi} \sin(\vartheta) = -\omega_1 \sin(\alpha) \cos(\psi) \quad (5)$$

$$\dot{\varphi} \cos(\vartheta) = \omega_2 \cos(\alpha) - \omega_1 \quad (6)$$

$$\dot{\varphi} = -\omega_1 \cos(\vartheta). \quad (7)$$

Az (5) és (6) egyenletek hányadosát négyzetre emelve:

$$\tan^2(\vartheta) = \frac{\omega_2^2 \sin^2(\alpha) \cos^2(\psi)}{(\omega_1 - \omega_2 \cos(\alpha))^2}. \quad (8)$$

Ha a (7) egyenletből $\dot{\varphi}$ -ot behelyettesítjük (6)-ba, akkor azt kapjuk, hogy

$$\cos^2(\vartheta) = \frac{\omega_1 - \omega_2 \cos(\alpha)}{\omega_1}.$$

Ebből

$$\sin^2(\vartheta) \equiv 1 - \cos^2(\vartheta) = \frac{\omega_2 \cos(\alpha)}{\omega_1},$$

illetve a két kifejezés hányadosából

$$\tan^2(\vartheta) = \frac{\omega_2 \cos(\alpha)}{\omega_1 - \omega_2 \cos(\alpha)}. \quad (9)$$

(8) és (9) jobb oldalainak egyenlőségéből algebrai átalakítások után kifejezhető a hajtott tengely szögsebessége:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos(\alpha)}{1 - \sin^2(\alpha) \sin^2(\psi)}. \quad (10)$$

Ebből az összefüggésből látható, hogy ω_2 – hacsak α nem nulla – függ a ψ szögtől. Ha állandó nagyságú a hajtó tengely $\omega_1 = \dot{\psi}$ szögsebessége, akkor (az időt a $\psi = 0$ helyzettől mérve) $\psi = \omega_1 t$, ezért $\sin^2(\psi) \equiv \sin^2(\omega_1 t)$ is időben változik, a hajtott tengely szögsebességével együtt. Tehát a kardáncsukló az állandó szögsebességű forgást változó szögsebességű forgássá alakítja, ami szöggyorsulásokkal jár.

A (2) tengely szöggyorsulása kifejezhető a (10) kifejezés idő szerinti deriválásával, figyelembe véve, hogy $\psi = \omega_1 t$:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \omega_1^2 \frac{\sin^2(\alpha) \cos(\alpha) \sin(2\omega_1 t)}{(1 - \sin^2(\alpha) \sin^2(\omega_1 t))^2} \quad (3.292)$$

Mivel a (2) hajtott tengely iránya nem változik, ε_2 párhuzamos ω_2 -vel, azaz

$$\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \sin(\alpha) \\ \varepsilon_2 \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (3.293)$$

3.6.2. A pörgettyű mozgását leíró Euler-egyenletek

A 3.2.5 fejezetben láttuk, hogy a perdülettételt

$$\Theta_A \varepsilon + \omega \times \Theta_A \omega = M_A. \quad (3.294)$$

alakban írhatjuk fel a merev test egy rögzített A pontjára. Ha a test főtehetetlenségi tengelyeihez rögzített koordináta-rendszerben írjuk fel ezt az egyenletet, akkor az alábbi differenciálegyenlet-rendszerre jutunk:

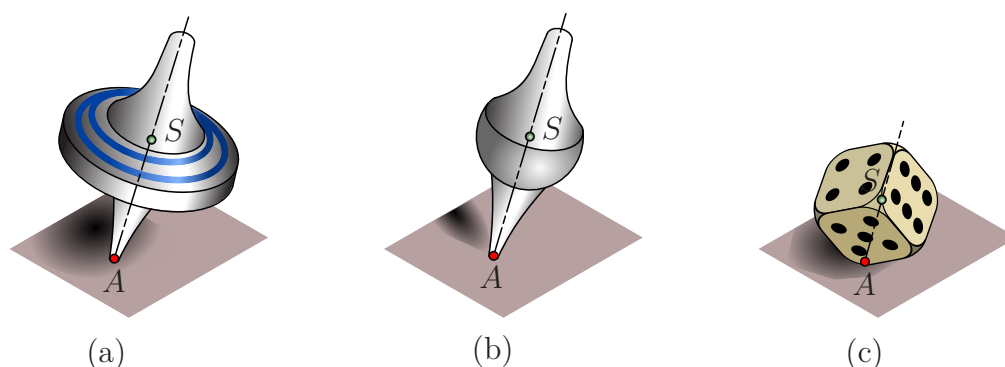
3.46. tétel. A FORGÓ MOZGÁS EULER-FÉLE DIFFERENCIÁLEGYENLETEI

$$\begin{aligned} \Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1, \\ \Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_3 \omega_1 &= M_2, \\ \Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3, \end{aligned} \quad (3.295)$$

ahol $\Theta_1 \geq \Theta_2 \geq \Theta_3$ a test főtehetetlenségi nyomatékai, $\omega_1 \equiv \omega_\xi$, $\omega_2 \equiv \omega_\eta$, $\omega_3 \equiv \omega_\zeta$, illetve M_1, M_2, M_3 pedig a szögsebesség és az A pontra számított nyomaték főirányoknak megfelelő komponensei. ♠

A (3.287) egyenlettel megadott, Euler-féle geometriai egyenletekkel együtt így összesen hat elsőrendű differenciálegyenletet kapunk, melyekből az ismeretlen ψ , ϑ , φ szögek és az $\omega_1 \equiv \omega_\xi$, $\omega_2 \equiv \omega_\eta$, $\omega_3 \equiv \omega_\zeta$ szögsebességek meghatározhatók.

A gyakorlatban előforduló legtöbb pörgettyű homogén forgástestnek tekinthető, melynek van szimmetriatengelye. A szimmetriatengely egyben tehetetlenségi főtehetetlenségi tengely is. Dinamikai szempontból azonban nem a test geometriai tengelyei, hanem a tehetetlenségi ellipszoid tengelyei szerint tekintünk egy pörgettyűt szimmetrikusnak vagy aszimmetrikusnak. Ennek megfelelően, akár egy megfelelő alakú és tömegeloszlású háromágú propellernek is meggyezhet a három főtehetetlenségi nyomatéka, azaz kinetikai szempontból homogén gömbbel helyettesíthető.



3.55. ábra. (a) Lapos pörgettyű. (b) Nyújtott pörgettyű. (c) Gömbi pörgettyű.

3.47. definíció. Ha két főtehetetlenségi nyomaték megegyezik, akkor a pörgettyűt SZIMMETRIKUSNAK nevezik. A megfelelő tehetetlenségi- vagy energiaellipszoid forgásellipszoid alakú, azaz a szimmetriatengelyre merőleges összes tengely főtengely. Három esetet különböztetnek meg, melyeket a 3.55 ábra szemléltet:

- Ha $\Theta_2 = \Theta_3 < \Theta_1$, akkor az 1-es tengely a szimmetriatengely. Ekkor LAPOS pörgettyűről beszélünk.
- Ha $\Theta_1 = \Theta_2 > \Theta_3$, akkor a 3-as tengely a szimmetriatengely. Ez a NYÚJTOTT pörgettyű.
- Ha $\Theta_1 = \Theta_3$, akkor mindhárom tehetetlenségi nyomatéknak meg kell egyeznie ($\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$), ezért minden tengely szimmetriatengely. Mivel ekkor a tehetetlenségi ellipszoid gömb alakú, az ilyen pörgettyűt GÖMBI pörgettyűnek nevezik. ♣

Gömbi pörgettyű esetében a perdület és a szögsebesség mindig párhuzamosak. Lapos és nyújtott pörgettyűnél azonban ez csak akkor van így, ha a szögsebesség párhuzamos a szimmetriatengellyel vagy arra merőleges.

Nemcsak a főtehetetlenségi ellipszoid tulajdonságai, hanem a pörgettyűre ható nyomaték értéke alapján is osztályozhatók a pörgettyűk. A szakirodalom megkülönböztet két speciális esetet, melyeket az alábbiakban külön tárgyalunk.

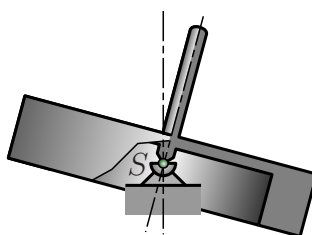
3.48. definíció. ERŐMENTESNEK hívjuk a pörgettyűt, ha a külső erőknek a rögzített pontra számított nyomatéka nulla. Ha a nehézségi erőnek a rögzített pontra számított nyomatéka nem zérus, akkor SÚLYOS PÖRGETTYŰRŐL beszélünk. ♣

Mivel az erőmentes pörgettyűk tárgyalása egyszerűbb, először ezzel az esettel foglalkozunk.

3.6.3. Erőmentes pörgettyű

Általános megállapítások

A pörgettyűk erőmentességét a gyakorlatban súlyponti alátámasztással (lásd 3.56 ábra) vagy Cardano-féle felfüggesztéssel lehet biztosítani. Ide tartoznak azok – a 3.6 fejezet bevezetőjében említett – esetek is, amikor a testnek egyik pontja sem rögzített, de a testre ható erőrendszer súlypontra számított nyomatéka nem függ a test szöghelyzetétől és szögsebességétől. Például ilyen a műholdak, bolygók, illetve (elhanyagolható közegellenállás mellett) az elhajított testek mozgása.



3.56. ábra. Az erőmentes pörgettyű egy lehetséges megvalósítása.

Ha a pörgettyű erőmentes, akkor $\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{0}$ miatt a rögzített pontra számított perdülete állandó:

$$\mathbf{\Pi}_A = \text{állandó.} \quad (3.296)$$

Továbbá, mivel csak a rögzített pontban hatnak erők, azok teljesítménye és munkája is nulla, így az erőmentes pörgettyű kinetikus energiája is állandó:

$$T = \text{állandó.} \quad (3.297)$$

Mivel a pörgettyű A pontja áll, a kinetikus energia kifejezhető csak a szögsebesség komponensek segítségével, azaz a 3.53. megjegyzésben írtak szerint

$$T = \frac{1}{2} \left(\Theta_x \omega_x^2 + \Theta_y \omega_y^2 + \Theta_z \omega_z^2 - 2D_{xy} \omega_x \omega_y - 2D_{xz} \omega_x \omega_z - 2D_{yz} \omega_y \omega_z \right). \quad (3.298)$$

Az ennek az energiának megfelelő szögsebességvektorok egy ellipszoidot – az energiaellipszoidot – jelölnek ki a testhez képest, ami a tehetetlenségi ellipszoidhoz (lásd 3.50. megjegyzés) hasonló. (3.171) szerint $T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{\Pi}_A = \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_A \cdot \boldsymbol{\omega}$, tehát

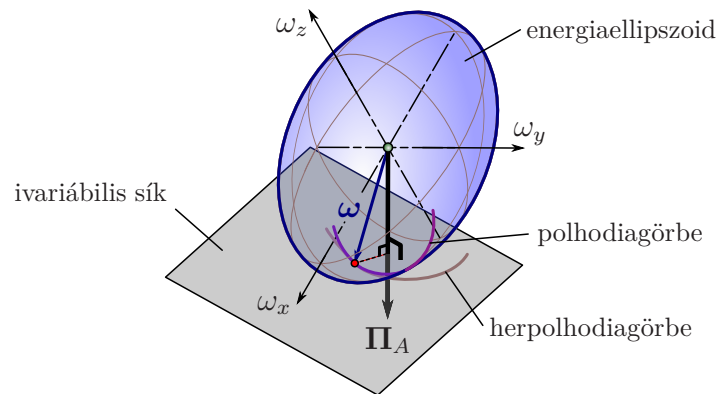
$$\mathbf{\Pi}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T, \quad (3.299)$$

azaz *a szögsebességvektornak a perdületvektorra vetett vetülete is állandó.*

3.63. megjegyzés: A fenti három megmaradási törvény lehetőséget ad az erőmentes pörgettyű mozgásának szemléltetésére a szögsebesség irányának és nagyságának változásán keresztül (lásd 3.57 ábra). Ha csak a test szögsebessége érdekel minket, akkor a test mozgását elképzelhetjük a szögsebesség komponensek terében, azaz egy olyan absztrakt térben, ahol az egyes irányokban nem távolságokat, hanem a szögsebesség adott komponenseinek nagyságát mérjük fel. Itt a testet tökéletesen helyettesíti az energiaellipszoidja, melyet a test álló pontja köré rajzolhatunk. Az energiaellipszoidot tekinthetjük az adott energiához tartozó szintfelületnek, ezért valamely pontjához tartozó érintősíkjának normálvektorát gradiens számítással határozhatjuk meg – ahol a szögsebesség komponensei szerint végezzük a deriválást:

$$\text{grad}_{\boldsymbol{\omega}} T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \omega_x} \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_y} \\ \frac{\partial T}{\partial \omega_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_x \omega_x - D_{xy} \omega_y - D_{xz} \omega_z \\ -D_{xy} \omega_x + \Theta_y \omega_y - D_{yz} \omega_z \\ -D_{xz} \omega_x - D_{yz} \omega_y + \Theta_z \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{\Pi}_A. \quad (3.300) \quad \clubsuit$$

Az energiaellipszoid felületén minden pont egy szögsebességvektornak feleltethető meg. A fenti eredmény szerint ha egy pontban felvesszük az ellipszoid érintősíkját, az merőleges lesz a perdületvektorra. Ezek szerint kijelölhető a térben egy perdületvektorra merőleges sík, az ún. *invariábilis sík*, ami az adott pillanatban érvényes $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor végpontjában



3.57. ábra. Az erőmentes pörgettyű mozgásának tárgyalása három megmaradási törvény alapján. (1) A forgással kapcsolatos kinetikus energia állandó voltából következik, hogy a szögsebességvektor végpontja minden pillanatban egy ellipszoidon helyezkedik el. (2) Az energiaellipszoid perdületvektorra merőleges érintősíkja (az invariábilis sík) éppen a szögsebesség végpontjában érinti az ellipszoidot. (3) A perdületvektor állandó. Következésképpen, a mozgás elképzelhető az energiaellipszoid invariáns síkon történő legördüléseként.

érinti az energiaellipszoidot. Ez annak felel meg, hogy a szögsebességvektor perdület irányú vetülete állandó.

A mozgás során a perdületvektor is állandó, a szögsebesség viszont a perdületvektor körül elfordul és azzal bezárt szöge, valamint nagysága is változhat – de végpontja mindig az invariábilis síkon lesz. A mozgás tehát a *szögsebességek terében* elképzelhető úgy, hogy az energiaellipszoid gördül az invariábilis síkon.

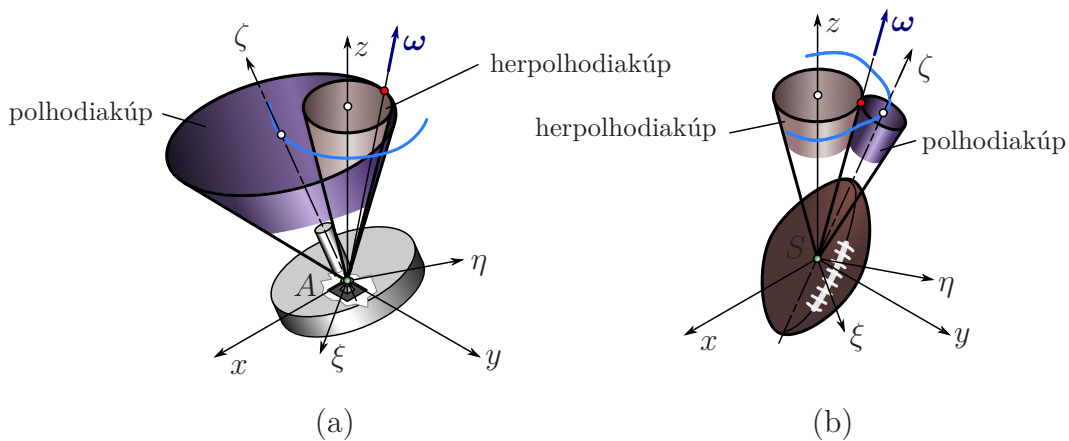
Az egymás utáni szögsebességvektorok végpontjait az ellipszoidon összekötő görbét *polhodiagörbének* nevezik, ami a pólusvándorlás kapcsán bevezetett mozgó pólusgörbével analóg módon értelmezhető. Ugyanígy bevezethető a szögsebességvektor által az invariábilis síkon leírt, ún. *herpolhodiagörbe* is, ami az álló pólusgörbe megfelelője.

Kinematikai vizsgálataink során (lásd 1.71. tétel) láttuk, hogy a *valódi térben* a pörgettyűmozgás (gömbi mozgás) két kúp egymáson történő legördüléseként képzelhető el. A pörgettyűk pillanatnyi forgó mozgást végeznek, tehát szögsebességvektoruk kijelöli a pillanatnyi forgástengelyük irányát – ami természetesen átmegy a rögzített A ponton is. Az egymás utáni szögsebességvektorok az A ponttal a *polhodiakúpot* – mozgó pólusfelületet – alkotják, amint a 3.58 ábra mutatja. Az ennek megfelelő álló pólusfelület a *herpolhodiakúp*. Az általános esetben ezek a kúpok nem körkúpok.

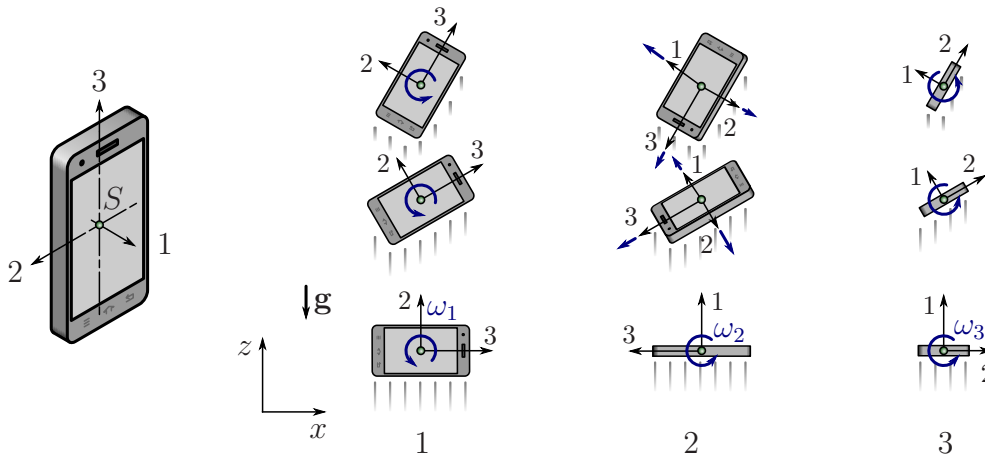
Az energiamegmaradás és a perdületmegmaradás kihasználása megkönnyíti a (3.295) Euler-féle differenciálegyenletek megoldását, azaz a szögsebesség komponensek időbeli változásának meghatározását – azonban ez az általános esetben csak elliptikus függvények segítségével fejezhető ki. A levezetés megtalálható a Landau-Lifsic: Elméleti fizika I. című könyvben [9].

Forgás szabad tengelyek körül

A 3.2.2 fejezet eredményeiből következik, hogy ha a testet az egyik főtehetetlenségi tengelye körül forgatjuk meg, akkor a perdület és a szögsebesség vektorai párhuzamosak, a szögsebesség iránya a térben is és a testhez képest is állandó marad. Ezért nevezik a súlyponti



3.58. ábra. Pörgettyű mozgásának szemléltetése két kúp egymáson történő legördüléseként. (a) Lapos pörgettyű. (b) Nyújtott pörgettyű.



3.59. ábra. Az 1, 2, illetve 3 főtehetetlenségi tengelyek körül forgó és v_{S0} súlyponti sebességgel feldobott mobiltelefon mozgása. A legkisebb és legnagyobb főtehetetlenségi nyomatékhoz tartozó forgás stabil, a 2-es tengely körül megforgatott test mozgása azonban instabil.

főtehetetlenségi tengelyeket szabad tengelyeknek. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy bizonyos esetekben már egy kis zavarás hatására is megváltozhat a mozgás jellege.

Például ha egy téglatest alakú testet (gyufásdobozt, mobiltelefont...) egymás után feldobunk a három szimmetriatengelye körül megforgatva (lásd 3.59 ábra), akkor azt tapasztaljuk, hogy az egyik tengely körüli forgás *instabil*. Ez azt jelenti, hogy a test szögsebességének iránya nagyon hamar jelentősen megváltozik, ha nem tökéletesen pontosan párhuzamos az instabil tengellyel. Ennek a jelenségnek a megvilágítása érdekében az alábbiakban megvizsgáljuk a szabad tengelyek körüli forgás stabilitását.

3.49. tétel. Ha mindhárom főtehetetlenségi nyomaték különböző, akkor A LEGNAGYOBBHOZ ÉS A LEGKISEBBHEZ (Θ_1 ÉS Θ_3) TARTOZÓ FŐTENGELY KÖRÜLI FORGÁS STABIL, A NAGYSÁG SZERINTI KÖZÉPSŐHÖZ (Θ_2) TARTOZÓ TENGELY KÖRÜLI FORGÁS PEDIG INSTABIL.

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy a pörgettyűt az 1-es (legnagyobb tehetetlenségi nyomatékhoz tartozó) tengelye körül forgatjuk meg. Ebben az állandósult állapotban a szögsebesség

komponensei:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_{10} = \text{állandó}, \\ \omega_2 &= 0, \\ \omega_3 &= 0.\end{aligned}$$

Ezek az értékek nyilvánvalóan kielégítik az alábbi, Euler-féle differenciálegyenletet:

$$\begin{aligned}\Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 &= 0, \\ \Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_3\omega_1 &= 0, \\ \Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 &= 0.\end{aligned}$$

Ha megzavarjuk ezt a mozgást, akkor mindhárom szögsebesség komponens megváltozik. Ha a kis eltéréseket x_1 , x_2 és x_3 jelöli, akkor a megváltoztatott szögsebesség komponensei az alábbiak lesznek:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega_{10} + x_1(t), \\ \omega_2(t) &= x_2(t), \\ \omega_3(t) &= x_3(t).\end{aligned}$$

Itt külön jelöltük, hogy a zavarás után már nem a szabad tengely körül forog a test, így időben tovább változhat a szögsebesség. Behelyettesítve a fenti kifejezéseket az Euler-féle differenciálegyenletbe:

$$\begin{aligned}\Theta_1 \dot{x}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)x_2x_3 &= 0, \\ \Theta_2 \dot{x}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)x_3(\omega_{10} + x_1) &= 0, \\ \Theta_3 \dot{x}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)x_2(\omega_{10} + x_1) &= 0.\end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer azt adja meg, hogy hogyan változnak időben az állandósult állapottól való eltérést jellemző x_1 , x_2 és x_3 szögsebesség értékek. Ha a megoldás szerint mindhárom nullához tart vagy a nulla körül marad, akkor a mozgás *stabil*, ellenkező esetben *instabil*.

A differenciálegyenletek elmélete szerint a stabilitás eldönthető a *linearizált* egyenletrendszer vizsgálatával. A linearizálás során azt használjuk ki, hogy x_1 , x_2 és x_3 kicsik, tehát szorzataik már *másodrendben kicsinek* számítanak, így a stabilitás szempontjából elhanyagolható a hatásuk. Linearizálás és a deriváltak együtthatóival való osztás után az alábbi egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &\approx 0, \\ \dot{x}_2 &\approx \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2} x_3 \omega_{10}, \\ \dot{x}_3 &\approx \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3} x_2 \omega_{10}.\end{aligned}$$

Bevezetve az $\mathbf{X} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ vektort, ez az egyenlet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ alakban is felírható:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_2} \omega_{10} \\ 0 & \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_3} \omega_{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (3.301)$$

Az itt szereplő \mathbf{A} mátrix sajátértékei döntik el az 1-es tengely körüli forgás stabilitását: a stabilitás feltétele, hogy egyik sajátérték valós része se legyen pozitív. A λ sajátértékeket a $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeiként határozhatjuk meg, ahol \mathbf{E} az egységmátrix.

A számítás eredményeképpen azt kapjuk, hogy az egyik sajátérték nulla, a másik kettő értéke pedig a főtételenségi nyomatók értékétől függ:

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_{2,3} = \pm i \frac{\sqrt{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}}{\sqrt{\Theta_2 \Theta_3}} \omega_{10}.$$

Ha $\Theta_1 > \Theta_2$ (és ebből következően $\Theta_1 > \Theta_3$), akkor a gyökjel alatti kifejezés pozitív, tehát a $\lambda_{2,3}$ gyökök komplex konjugált képzetes értékek. Ha $\Theta_1 = \Theta_2$, akkor viszont mindhárom sajátérték nulla. Az eredmény szerint tehát az 1-es tengely körüli forgás *stabil*.

2. Akkor is felhasználhatjuk az előző számítás eredményeit, ha a 2-es – tehát a nagyság szerint középső tehetetlenségi nyomatókhoz tartozó tengely körül forgatjuk meg a testet, eredetileg $\omega_{20} = \text{állandó}$ szögsebességgel. Csupán annyit kell tennünk, hogy a tehetetlenségi nyomatók és a szögsebesség indexeit ciklikusan felcseréljük: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$:

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_{2,3} = \pm i \frac{\sqrt{(\Theta_2 - \Theta_1)(\Theta_2 - \Theta_3)}}{\sqrt{\Theta_3 \Theta_1}} \omega_{20} = \pm \frac{\sqrt{(\Theta_1 - \Theta_2)(\Theta_2 - \Theta_3)}}{\sqrt{\Theta_3 \Theta_1}} \omega_{20}.$$

Ha $\Theta_1 > \Theta_2$ és $\Theta_2 > \Theta_3$, akkor a $\lambda_{2,3}$ gyökök valós értékek: egyik pozitív, a másik negatív, azaz a mozgás *instabil*. Ha $\Theta_1 = \Theta_2$ vagy $\Theta_3 = \Theta_2$, akkor viszont mindhárom sajátérték nulla és a mozgás *stabil*.

3. A legkisebb tehetetlenségi nyomatókhoz tartozó, 3-as tengely körüli ω_{30} szögsebességű állandósult forgás stabilitását az indexek újabb ciklikus permutációjával vizsgálhatjuk meg:

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_{2,3} = \pm i \frac{\sqrt{(\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_3 - \Theta_1)}}{\sqrt{\Theta_1 \Theta_2}} \omega_{30}$$

Ha $\Theta_3 < \Theta_2$ (és ebből következően $\Theta_3 < \Theta_1$), akkor a gyökjel alatti kifejezés pozitív, tehát a $\lambda_{2,3}$ gyökök komplex konjugált képzetes értékek. Ha $\Theta_3 = \Theta_2$, akkor viszont mindhárom sajátérték nulla. Az eredmény szerint tehát a 3-es tengely körüli forgás *stabil*. ♠

3.64. megjegyzés: A fenti számítás eredményei jól szemléltethetők a 3.53. megjegyzésben bevezetett energiaellipszoid segítségével. Az energiaellipszoidot a különböző tengelyek körüli forgások szögsebességvektorai jelölik ki a testhez képest, állandó kinetikus energiájú forgás esetében. Főtengelyei egybeesnek a tehetetlenségi ellipszoid főtengelyeivel, nagyságát pedig a kinetikus energia határozza meg. Az energiaellipszoid egyenlete

$$2T = \Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2 = \text{állandó} \quad (3.302)$$

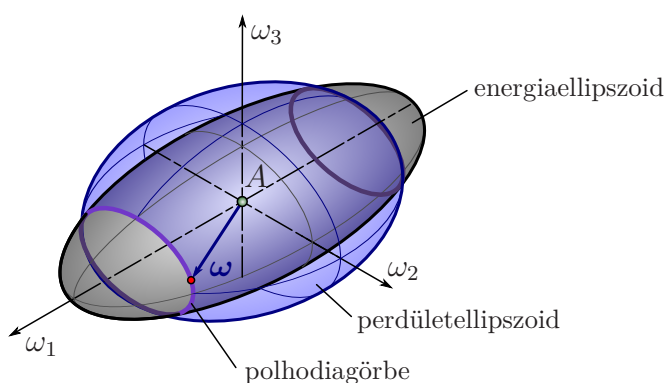
alakban írható fel.

Ha nemcsak a forgással kapcsolatos kinetikus energia, hanem a test $\mathbf{\Pi}_A$ perdülete is állandó az álló inerciarendszerben, akkor *a testtel együtt mozgó* vonatkoztatási és koordináta-rendszerben általában a perdület iránya nem, csak nagysága marad állandó. Tehát $\mathbf{\Pi}_A = (\Theta_1\omega_1 \Theta_2\omega_2 \Theta_3\omega_3)^T$ miatt

$$|\mathbf{\Pi}_A| = \text{állandó} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Pi}_A^2 = \Theta_1^2\omega_1^2 + \Theta_2^2\omega_2^2 + \Theta_3^2\omega_3^2 = \text{állandó}. \quad (3.303)$$

Ez utóbbi egyenlet is egy testtel együtt mozgó ellipszoidot definiál: a *perdületellipszoidot*.

Ha egy test szabad mozgást végez és mind a perdülete, mind a kinetikus energiája állandó, akkor a szögsebességvektor végpontjának a testhez képest az energiaellipszoid és a perdületellipszoid metszésvonalán kell lennie – a 3.63. megjegyzésben megemlített polhodiagörbén. Mindkét ellipszoidot a szögsebességek terében kell elképzelni, a 3.60 ábrának megfelelően.



3.60. ábra. *Ha mind a kinetikus energia, mind a perdület állandó, akkor a testtel együtt mozgó rendszerben a szögsebességvektor végpontjának az energiaellipszoid és a perdületellipszoid metszésvonalán kell lennie.*

A stabilitásvizsgálathoz azonban célszerű áttérni a *perdületek* terébe – itt az egyes főirányokban a perdület megfelelő irányú Π_1 , Π_2 és Π_3 komponensét mérjük fel, ahol $\Pi_i = \Theta_i\omega_i$, $i = 1, 2, 3$. Ezekkel a perdület komponensekkel a (3.302) egyenlet az alábbi alakú lesz:

$$\frac{\Pi_1^2}{\Theta_1} + \frac{\Pi_2^2}{\Theta_2} + \frac{\Pi_3^2}{\Theta_3} = 2T, \quad (3.304)$$

ami továbbra is egy ellipszoid egyenlete – ez az energiaellipszoid a perdületek terében, melynek féltengelyei $\sqrt{2T\Theta_1}$, $\sqrt{2T\Theta_2}$ és $\sqrt{2T\Theta_3}$ nagyságúak.

A perdületek terében a perdületmegmaradást a

$$\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 = \mathbf{\Pi}_A^2 \quad (3.305)$$

egyenlet fejezi ki, ami egy $|\mathbf{\Pi}_A|$ sugarú gömb – a perdület gömb – egyenlete.

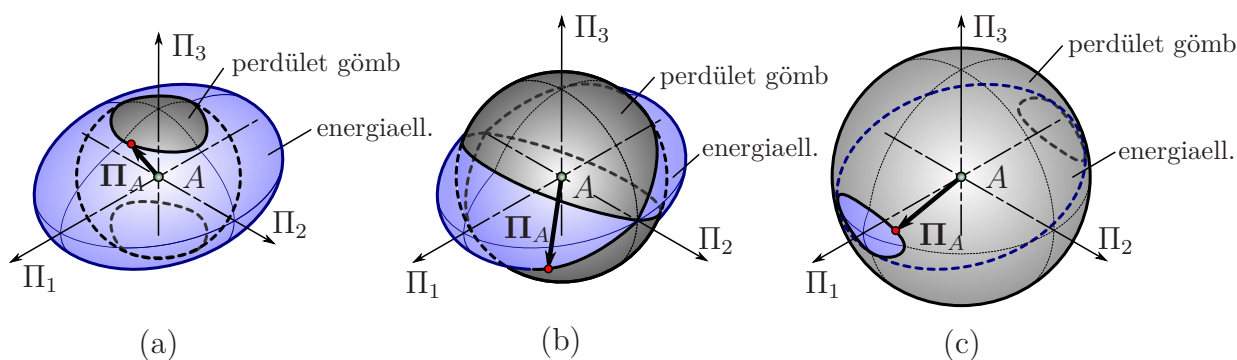
Továbbra is fennáll, hogy a mozgást jellemző mennyiség – most a perdületvektor – a fenti ellipszoid és gömb metszésvonalán kell hogy maradjon. Ilyen metszésvonalnak mindig kell lennie, mert a fenti két egyenlet szerint

$$\sqrt{2T\Theta_3} \leq |\mathbf{\Pi}_A| \leq \sqrt{2T\Theta_1}, \quad (3.306)$$



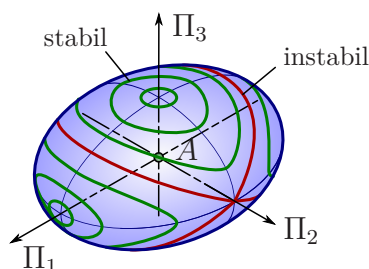
azaz a gömb sugara az ellipszoid legkisebb és legnagyobb féltengelye közé esik.

A 3.62 ábra a két alakzatot mutatja azonos energia, de különböző perdületek esetén. Ha $|\mathbf{\Pi}_A|$ csak kicsit nagyobb $\sqrt{2T\Theta_3}$ -nél, akkor a metszésvonal zárt görbe a 3-as tengely körül.



3.61. ábra. Az energiaellipszoid és a perdület gömb metszészvonalai adott energiájú, de különböző perdületű mozgások során, a perdületek terében. (a): Stabil periodikus mozgásnak megfelelő metszészvonal a 3-as főtengely közelében. (b): A metszészvonalak elágaznak a 2-es főtengely közelében, a mozgás instabil. (c): Stabil periodikus mozgásnak megfelelő metszészvonal az 1-es főtengely közelében.

Hasonló zárt görbe jelenik meg az 1-es tengely körül, ha $|\mathbf{\Pi}_A|$ csak kicsit kisebb $\sqrt{2T\Theta_1}$ -nél. Ezek a zárt görbék a két tengely közelében történő stabil periodikus mozgásnak felelnek meg. A $|\mathbf{\Pi}_A| = \sqrt{2T\Theta_2}$ értéknél a gömb és az ellipszoid metszészvonala két görbe, melyek az ellipszoid 2-es tengelyen lévő pólusaiban metszik egymást. Ez annak felel meg, hogy a 2-es tengely körüli forgás során már egy kis zavarás hatására is eltávolodik a perdületvektor a 2-es tengelytől, ezért az a körüli forgás instabil, ahogy a 3.62 ábra is mutatja.



3.62. ábra. A perdület gömb és az energiaellipszoid különféle nagyságú perdület értékekhez tartozó metszészvonalai.

Szimmetrikus erőmentes pörgettyű

Mivel az általános alakú erőmentes pörgettyűk mozgása csak elliptikus függvények segítségével írható le [9], ebben a fejezetben a szimmetrikus pörgettyűk vizsgálatával foglalkozunk.

A 3.6.3 fejezetben láttuk, hogy a pörgettyű szabadon foroghat a tehetetlenségi főtengelyei körül. Azonban ha a szögsebesség nem párhuzamos egyik főiránnyal – azaz a szimmetriatengellyel – sem, akkor az erőmentes pörgettyű ún. *szabadnutációt* végez.

3.50. definíció. Szimmetrikus erőmentes pörgettyű forgása során a szögsebességvektor perdületvektor körüli egyenletes forgását SZABADNUTÁCIÓNAK nevezzük. ♣

Az elnevezés magyarázata az, hogy a jelenség a külső erőhatásoktól teljesen független, annak periódusidejét csak a pörgettyű tömegeloszlása határozza meg.

A szimmetrikus erőmentes pörgettyűk esetében lineáris egyenletekre vezetnek a (3.295) Euler-féle differenciálegyenletek, ezért azok megoldása viszonylag könnyen megkereshető. Az eredmény a *testhez rögzített* vonatkoztatási rendszerben adja meg a szögsebesség komponenseit. Mint látni fogjuk a következőkben, ebben a rendszerben úgy látszik, hogy a szögsebesség vektora a szimmetriatengely körül forog.

Ahhoz, hogy a *térben álló* inerciarendszerben is meg tudjuk adni a test mozgását, a következő lépésben a (3.287) Euler-féle geometriai egyenleteket is meg kell oldani. Mivel az erőmentes pörgettyű perdülete állandó, az inerciarendszerben az figyelhető meg, hogy szabadnutáció során a perdületvektor körül forog mind a szögsebességvektor, mind a szimmetriatengely.

Az alábbiakban bemutatjuk a megoldás menetét.

1. Tegyük fel, hogy az 1-es tengely a szimmetriatengely. Ekkor $\Theta_2 = \Theta_3$, tehát ez a *lapos* pörgettyű esete. Az Euler-féle egyenletek az alábbi alakot öltik:

$$\begin{aligned}\Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= 0, \\ \Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1\omega_3 &= 0, \\ \Theta_2 \frac{d\omega_3}{dt} + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 &= 0.\end{aligned}$$

Az első egyenletből azonnal következik, hogy $\omega_1 \equiv \omega_{10} = \text{állandó}$, azaz a szögsebességnek a *szimmetriatengelyre* vetett vetülete állandó.¹⁴ Ezt az értéket pozitívnak tekinthetjük, mert a szimmetriatengelyen ennek megfelelően állíthatjuk be az 1-es koordináta-tengely irányát és ehhez igazodva vehetjük fel a 2 és 3 koordináta-tengelyeket is. Az Euler-egyenletek második és harmadik egyenlete átírható az alábbi módon:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_2}\omega_{10}\omega_3 &= 0, \\ \frac{d\omega_2}{dt} - \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_2}\omega_{10}\omega_2 &= 0.\end{aligned}$$

Bevezetve az

$$\alpha = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_2}\omega_{10} \quad (3.307)$$

jelölést, az alábbi két egyenletre jutunk:

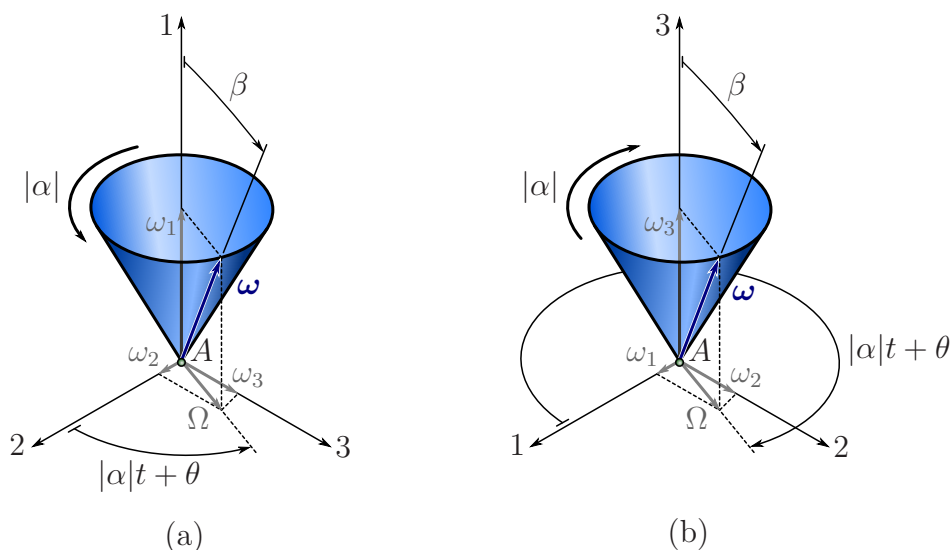
$$\begin{aligned}\frac{d\omega_2}{dt} + \alpha\omega_3 &= 0, \\ \frac{d\omega_3}{dt} - \alpha\omega_2 &= 0.\end{aligned}$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az egyenletrendszer megoldása:

$$\omega_2 = \Omega \cos(\alpha t + \theta) \quad \text{és} \quad \omega_3 = \Omega \sin(\alpha t + \theta), \quad (3.308)$$

ahol Ω a szögsebességnek a szimmetriatengelyre merőleges síkra vetett vetülete. Fizikailag ez azt jelenti, hogy a *testhez kötött vonatkoztatási rendszerben* a szögsebesség vektora $\alpha > 0$ szögsebességgel forog a szimmetriatengely körül.

¹⁴Emellett a perdületre vetett vetülete is állandó, a (3.299) egyenletnek megfelelően.



3.63. ábra. Szabadnutáció során állandó szögsebességgel forog a szögsebesség vektora a szimmetriatengely körül a testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben. A szögsebesség vektora a polhodiakúpot írja le, melynek félkúpszöge β . Az (a) ábra a lapos pörgettyű esetét, a (b) ábra a nyújtott pörgettyű esetét mutatja.

A szögsebességvektor a testhez képest az úgynevezett polhodia kúp palástján mozog, a 3.65 ábrának megfelelően, végpontjai pedig a polhodiagörbét rajzolják ki a szögsebességek terében.

2. Hasonlóan járhatunk el, ha a 3-as tengely a pörgettyű szimmetriatengelye, azaz egy *nyújtott* pörgettyű mozgását vizsgáljuk. Ekkor $\Theta_1 = \Theta_2$, ezért az Euler-egyenletek

$$\begin{aligned}\Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (\Theta_3 - \Theta_1)\omega_2\omega_3 &= 0, \\ \Theta_1 \frac{d\omega_2}{dt} + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_3\omega_1 &= 0, \\ \Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

A harmadik egyenlet szerint $\omega_3 = \omega_{30} = \text{állandó}$, amit a tengelyek megfelelő felvételével pozitívnak tekinthetünk. Ezúttal az

$$\alpha = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1} \omega_{30} \quad (3.309)$$

jelölés bevezetésével (ahol $\alpha < 0$) kapjuk az alábbi egyenleteket:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{dt} + \alpha\omega_2 &= 0, \\ \frac{d\omega_2}{dt} - \alpha\omega_1 &= 0.\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása is

$$\omega_1 = \Omega \cos(\alpha t + \theta) \quad \text{és} \quad \omega_2 = \Omega \sin(\alpha t + \theta). \quad (3.310)$$

Most is azt kaptuk, hogy *a testhez kötött vonatkoztatási rendszerben* a szögsebesség vektora α szögsebességgel forog a szimmetriatengely körül, azonban a forgás iránya a lapos pörgettyűhöz képest ellentétes. A mozgás periódusideje $T_{per} = 2\pi/|\alpha|$. A szögsebességvektor és a szimmetriatengely közötti β szög tangense

$$\tan(\beta) = \frac{\Omega}{\omega_{30}}. \quad (3.311)$$

3.65. megjegyzés: Bizonyos megkötésekkel a Nap körül keringő Föld is szimmetrikus, erőmentes, lapos pörgettyűnek tekinthető, ahol az egyenlítő síkjába eső tehetetlenségi nyomatékok megegyeznek és $\Theta_1 > \Theta_2 = \Theta_3$. A mozgás jellemzésére be szokták vezetni a

$$k = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_2} \quad (3.312)$$

dinamikai lapultság fogalmát, ami a Föld esetében $k \approx 303$. Ezzel a szabadnutáció szögsebessége $\alpha = k\omega_{10}$, amiből a periódusideje

$$T_{per} = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (3.313)$$

Mivel a Föld tengely körüli forgásának szögsebessége $\omega_{10} \approx 2\pi/\text{nap}$, a szabadnutáció periódusideje kb. 303 nap. Ezt, a merev testek kinetikája alapján számolt periódusidőt *Euler-féle periódusnak* nevezik. A mérések szerint azonban ez a periódusidő kb. 433 nap: a *Chandler-periódus*. Az eltérés a Föld rugalmas alakváltozására vezethető vissza. Forgás közben ugyanis a tömegek úgy rendeződnek át, hogy a tehetetlenségi főtengely közeledik a forgástengelyhez [17].

A pillanatnyi forgástengely és a szimmetriatengely eltéréseinek nagyságát jól jellemzi, hogy ezeknek a Föld felszínével vett dőféspontjai mintegy 10 m sugarú körön belül maradnak egymáshoz képest. Ezt a rendkívül kicsi eltérést már több mint 100 éve ki tudják mérni a geofizikusok. ♣

3.51. tétel. *Szimmetrikus erőmentes pörgettyű mozgása során a szimmetriatengely, a szögsebesség vektora és a perdületvektor egy síkba esnek (3.64 ábra).*

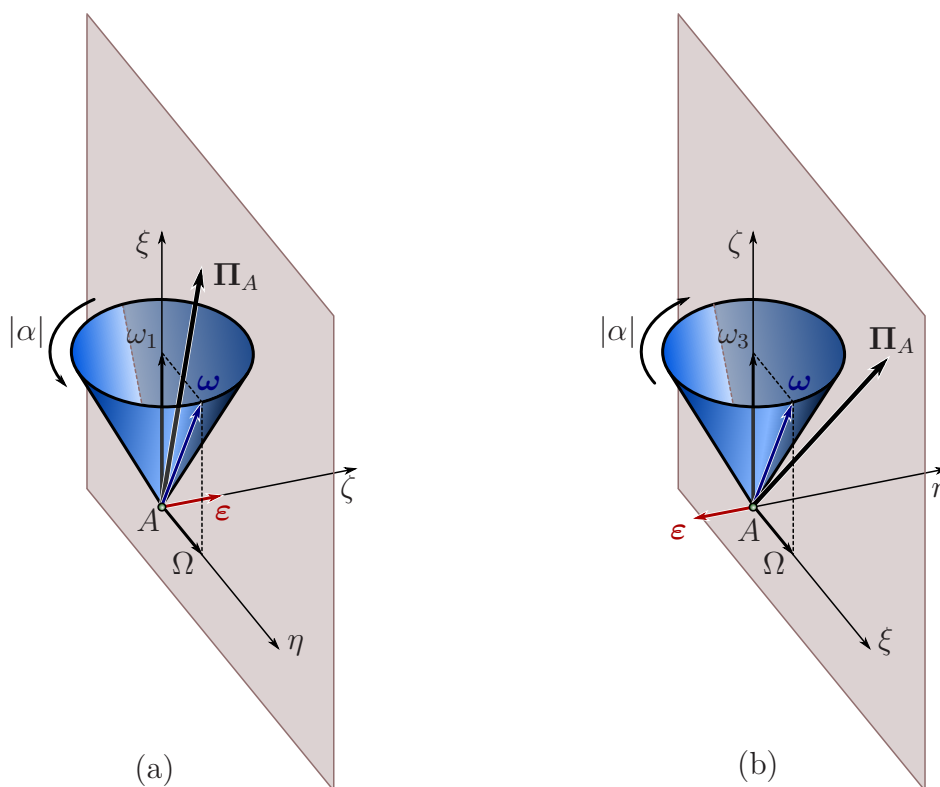
Bizonyítás:

A bizonyítást a nyújtott pörgettyű példáján keresztül mutatjuk be. Egy adott pillanatban vegyük fel a koordináta-rendszer ζ tengelyét a nyújtott pörgettyű 3-as szimmetriatengelyével párhuzamosan. Ekkor a szimmetriatengely és a szögsebesség vektora kijelölnek egy síkot. E síkon vegyük fel a koordináta-rendszer ξ tengelyét, az η tengelyt pedig a síkra merőlegesen. Ebben a koordináta-rendszerben a vizsgált pillanatban $\omega_\xi \equiv \omega_1 = \Omega$, míg $\omega_\eta \equiv \omega_2 = 0$. Ez annak felel meg, hogy a (3.310) képletbe $t = 0$ -át és $\theta = 0$ -át helyettesítünk. Ugyanakkor ω_ζ a (3.309) képletben megadott $\omega_3 \equiv \omega_{30}$ -al egyezik meg, tehát a szögsebesség vektora

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \\ \omega_{30} \end{bmatrix}. \quad (3.314)$$

Ekkor – figyelembe véve, hogy a szimmetriatengelyre merőleges síkban minden tengely főtengely és $\Theta_1 = \Theta_2$ – a *perdületvektor is a szimmetriatengely és a szögsebességvektor síkjába esik:*

$$\boldsymbol{\Pi}_A = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \Omega \\ 0 \\ \Theta_3 \omega_{30} \end{bmatrix}. \quad (3.315)$$



3.64. ábra. Szimmetrikus erőmentes pörgettyű mozgása során a szimmetriatengely (ξ illetve ζ), a szögsebesség (ω) és a perdület (Π_A) egy síkba esnek. Az (a) ábra a lapos, a (b) ábra a nyújtott pörgettyű esetét mutatja.

Mivel $\Theta_1 > \Theta_3$, a perdületvektor nagyobb szöget zár be a ζ szimmetriatengellyel, mint a ω szögsebességvektor.

Lapos pörgettyű esetében ez fordítva van, akkor ugyanis a hasonló számításból azt kapjuk, hogy a perdületvektor a szimmetriatengely és a szögsebesség közé esik. Ez az eredmény egybevág azzal, amit a kiegyensúlyozatlan forgórészek kapcsán levezettünk a 3.57. megjegyzésben. ♠

3.66. megjegyzés: A fenti eredmény felhasználásával más megközelítésben is meghatározható a szögsebességvektor szimmetriatengely körüli mozgása. A perdülettétel szerint erőmentes pörgettyű esetében

$$\Theta_A \varepsilon + \omega \times \Pi_A = \mathbf{0}, \quad (3.316)$$

amiből

$$\varepsilon = \Theta_A^{-1} (\Pi_A \times \omega) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Theta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ (\Theta_3 - \Theta_1)\Omega\omega_{30} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1}\Omega\omega_{30} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.317)$$

Ez pontosan annak felel meg, hogy az állandó nagyságú ω szögsebességvektor $\alpha = \omega_{30}(\Theta_3 - \Theta_1)/\Theta_1$ szögsebességgel forog a szimmetriatengely körül:

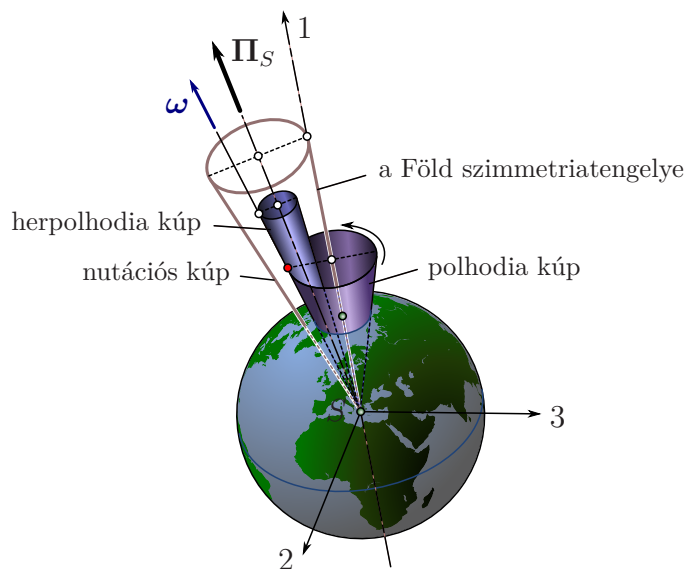
$$\varepsilon = \alpha \times \omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1}\omega_{30} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \\ \omega_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1}\Omega\omega_{30} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.318)$$

Mivel ugyanezt kapjuk a szögsebesség bármely térbeli irányítása esetén, a szögsebesség valóban egyenletes szögsebességgel forog a szimmetriatengely körül. Ezzel visszakaptuk a szabadnutációnak megfelelő (3.310) eredményt. ♣

Az előző levezetés a *testhez rögzített* rendszerben írja le a nutáció folyamatát. Ahhoz, hogy a pörgettyű *térbeli helyzetéről* is legyen információnk, először is fel kell venni egy térben rögzített (xyz) koordináta-rendszert. Mivel az erőmentes pörgettyű perdülete állandó, célszerű a koordináta-rendszer z tengelyét a perdületvektorral párhuzamosan felvenni. A test helyzetét ebben a rendszerben a ψ , ϑ és φ Euler-szögek adják meg, a 3.6.1 fejezetben leírtak szerint. Tehát például ϑ a szimmetriatengely és a perdületvektor iránya közti szög, $\dot{\psi}$ pedig a szimmetriatengely perdület körüli forgásának szögsebessége.

Az Euler-szögek kifejezéséhez meg kell oldani a (3.287) Euler-féle geometriai egyenletekből álló alábbi differenciálegyenlet-rendszert:

$$\boldsymbol{\omega}_{(\xi\eta\zeta)} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + \dot{\vartheta} \cos(\varphi) \\ \dot{\psi} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) - \dot{\vartheta} \sin(\varphi) \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos(\vartheta) \end{bmatrix}. \quad (3.319)$$



3.65. ábra. Erőmentes, szimmetrikus, lapos pörgettyű mozgásának szemléltetése a Föld példáján keresztül. A perdület állandó az inerciarendszerben, ehhez képest mozog a szimmetriatengely és a szögsebességvektor. A perdületvektor körül forgó szimmetriatengely a nutációs kúpot írja le, a – szintén a perdületvektor körül forgó – szögsebességvektor pedig a herpolhodia kúp palástján mozog. A Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve úgy tűnik, hogy a szögsebességvektora forog körbe a szimmetriatengely körül. E látszólagos mozgás során a szögsebességvektora a polhodia kúp palástját söpri végig. A mozgás során a szögsebesség, a perdület és a szimmetriatengely minden pillanatban egy síkba esik, azaz úgy képzelhető, hogy a polhodia kúp és a herpolhodia kúp egymáson gördülnek.

A fenti egyenleteknek elegendő egy partikuláris megoldását megtalálni, mert az általános megoldásban szereplő három integrációs állandó szabadon megválasztható a koordináta-rendszer megfelelő megválasztásával.

A 3.66. megjegyzésben megmutattuk, hogy a szögsebességvektor, a perdületvektor és a szimmetriatengely egy síkba esik. Ebből következik, hogy a szögsebességnek nem lehet erre a síkra merőleges – csomóvonal irányú – komponense, azaz $\dot{\vartheta} = 0$. Tehát a ϑ szög az időben nem változik:

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{állandó.} \quad (3.320)$$

Ezt visszahelyettesítve a (3.319) képletbe és felhasználva a (3.310) eredményt:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} \sin(\vartheta_0) \sin(\varphi) &= \Omega \cos(\alpha t + \theta), \\ \dot{\psi} \sin(\vartheta_0) \cos(\varphi) &= \Omega \sin(\alpha t + \theta), \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos(\vartheta_0) &= \omega_{30}. \end{aligned} \quad (3.321)$$

Az első két egyenletből adódik, hogy

$$\dot{\psi} \sin(\vartheta_0) = \Omega. \quad (3.322)$$

Ez azt jelenti, hogy a pörgettyű szimmetriatengelye a térben állandó perdületvektor tengelye körül állandó $\dot{\psi} = \Omega / \sin(\vartheta_0)$ szögsebességgel forog, ahogy a 3.66 ábra is mutatja.

A fenti eredményt felhasználva, szintén az első két egyenletből

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\alpha t + \theta) = -\alpha t + \text{konstans.} \quad (3.323)$$

Ha ezeket az eredményeket beírjuk (3.321) harmadik egyenletébe, akkor azt kapjuk, hogy

$$-\alpha + \dot{\psi} \cos(\vartheta_0) \equiv -\alpha + \frac{\Omega}{\sin(\vartheta_0)} \cos(\vartheta_0) = \omega_{30}, \quad (3.324)$$

amiből

$$\tan(\vartheta_0) = \frac{\Omega}{\omega_{30} + \alpha}. \quad (3.325)$$

Mivel $\alpha = \omega_{30}(\Theta_3 - \Theta_1)/\Theta_1$, a szimmetriatengely és a perdületvektor közti szög

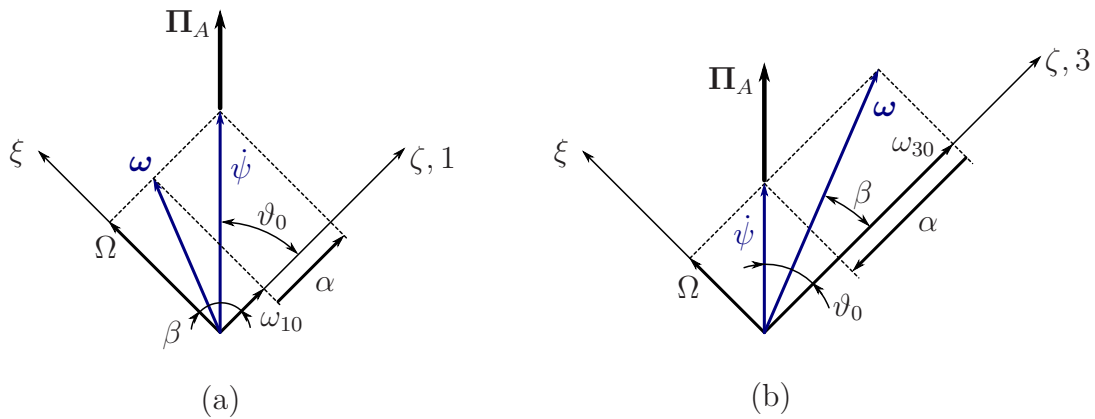
$$\tan(\vartheta_0) = \frac{\Omega}{\omega_{30}} \frac{\Theta_1}{\Theta_3}. \quad (3.326)$$

Összehasonlítva ezt az eredményt a (3.311) képlettel, láthatjuk, hogy nyújtott pörgettyűnél $\Theta_1 > \Theta_3$ miatt $\vartheta_0 > \beta$, azaz a szögsebességvektor a perdületvektor és a szimmetriatengely közé esik. Lapos pörgettyű esetében a tehetetlenségi nyomatékok indexeit fel kell cserélni a képletekben, így ott $\vartheta_0 < \beta$, tehát a perdületvektor esik a szögsebesség és a szimmetriatengely közé. További különbség a két eset között, hogy ha nyújtott a pörgettyű, akkor $\alpha < 0$, lapos pörgettyű esetében pedig $\alpha > 0$.

A fentiek szerint adott ω_{30} és Ω szögsebesség komponensek mellett a főtchetetlenségi nyomatékok felhasználásával kiszámítható a perdületvektor és a szimmetriatengely ϑ_0 szöge, amiből a szimmetriatengely perdületvektor körüli forgásának $\dot{\psi}$ szögsebessége is megkapható.

A bevezetett szögsebesség komponenseket a 3.66 ábra mutatja. Ellenőrizhető, hogy (3.324) miatt

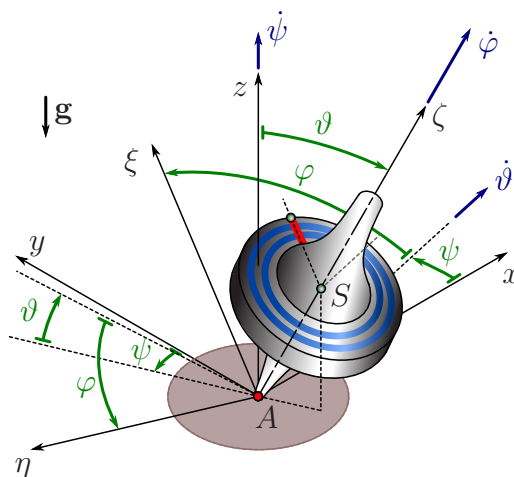
$$\dot{\psi} \cos(\vartheta_0) = \omega_{30} + \alpha. \quad (3.327)$$



3.66. ábra. Szimmetrikus, erőmentes pörgettyű szögsebesség komponenseinek kapcsolata. Az ω szögsebességvektor és a ζ szimmetriatengely $\dot{\psi}$ szögsebességgel forog a térben állandó perdületvektor körül, a szögsebesség vektora pedig α szögsebességgel forog a szimmetriatengely körül. (a) ábra: lapos, (b) ábra: nyújtott pörgettyű esete.

3.6.4. Súlyos pörgettyű

A súlyos pörgettyű mozgásának csak azzal a speciális esetével foglalkozunk, amikor a testnek van szimmetriatengelye és mind az S súlypont, mind a rögzített A pont rajta van ezen a tengelyen. Feltesszük, hogy a rögzített A pontra csak a nehézségi erőnek van nyomatéka, a súrlódástól pedig eltekintünk. A térben rögzített (xyz) koordináta-rendszer z tengelyét függőlegesen felfelé irányítjuk, a nehézségi erő ezzel a tengellyel párhuzamos, a 3.67 ábrának megfelelően. A test (123) vagy $(\xi\eta\zeta)$ főtehetetlenségi tengelyeinek helyzetét az Euler-szögek



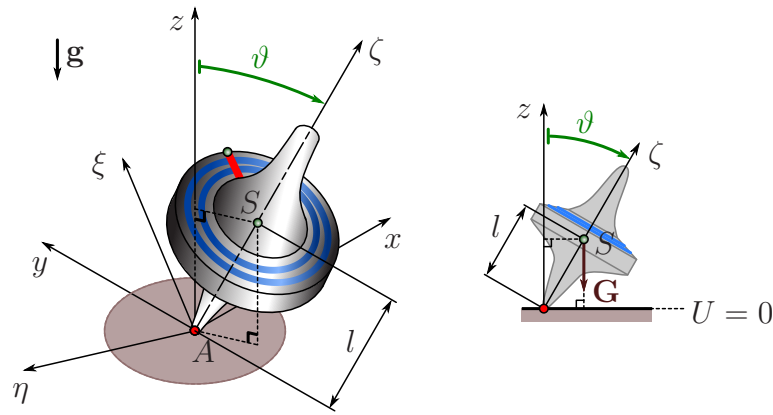
3.67. ábra. Példa súlyos pörgettyűre.

adják meg. Feltételezzük, hogy $\Theta_1 = \Theta_2 \equiv \Theta_\xi$. Ekkor az Euler-egyenletek alakja, a rögzített

A pontra felírva:

$$\begin{aligned}\Theta_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + (\Theta_\zeta - \Theta_\xi)\omega_\eta\omega_\zeta &= M_\xi, \\ \Theta_\xi \frac{d\omega_\eta}{dt} + (\Theta_\xi - \Theta_\zeta)\omega_\zeta\omega_\xi &= M_\eta, \\ \Theta_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} &= M_\zeta.\end{aligned}\tag{3.328}$$

A feladat megoldható közvetlenül a fenti egyenletek alapján is, de a vizsgált esetben található három ún. megmaradó mennyiség (más néven: első integrál), amik alapján egyszerűbb alakban megkaphatók a mozgást leíró differenciálegyenletek.



3.68. ábra. A nehézségi erő potenciális energiájának számítása súlyos pörgettyű esetében.

1. Ha nincs súrlódás, akkor a *mechanikai energia megmarad*. Ha a súlypont és a rögzített pont távolsága l , akkor a 3.68 ábra szerint a nehézségi erő potenciális energiája $U = mgl \cos(\vartheta)$, a kinetikus energia pedig $T = (\Theta_\xi\omega_\xi^2 + \Theta_\xi\omega_\eta^2 + \Theta_\zeta\omega_\zeta^2)/2$, azaz

$$E = T + U = \frac{1}{2} (\Theta_\xi\omega_\xi^2 + \Theta_\xi\omega_\eta^2 + \Theta_\zeta\omega_\zeta^2) + mgl \cos(\vartheta) = \text{állandó}.\tag{3.329}$$

2. A nehézségi erő nyomatéka merőleges a $z\zeta$ síkra, így $M_\zeta = 0$, ezért a harmadik Euler-egyenletből

$$\omega_\zeta = \text{állandó}.\tag{3.330}$$

3. A fentiek miatt az A pontra számított nyomaték z komponense is nulla ($M_z = 0$), ezért a perdület z komponense is állandó:

$$\Pi_{Az} = \text{állandó}.\tag{3.331}$$

A perdületet a merev testhez kötött $(\xi\eta\zeta)$ rendszerben az alábbi alakban fejezhetjük ki:

$$\mathbf{\Pi}_A = \begin{bmatrix} \Theta_\xi\omega_\xi \\ \Theta_\xi\omega_\eta \\ \Theta_\zeta\omega_\zeta \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)}.\tag{3.332}$$

Ezt a vektort a (3.283) egyenletben megadott transzformációs mátrix transzponáltjával való szorzással tudjuk kifejezni az (xyz) rendszerben:

$$\mathbf{\Pi}_A = \mathbf{T}^T \mathbf{\Pi}_A = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \Theta_\xi \omega_\xi \sin(\varphi) \sin(\vartheta) + \Theta_\xi \omega_\eta \cos(\varphi) \sin(\vartheta) + \Theta_\zeta \omega_\zeta \cos(\vartheta) \end{bmatrix}, \quad (3.333)$$

azaz a perdület z komponensének állandósága miatt

$$\Theta_\xi (\omega_\xi \sin(\varphi) \sin(\vartheta) + \omega_\eta \cos(\varphi) \sin(\vartheta)) + \Theta_\zeta \omega_\zeta \cos(\vartheta) = \text{állandó}. \quad (3.334)$$

Ha a fent levezetett (3.329), (3.330) és (3.334) egyenletekbe behelyettesítjük a szögsebesség komponenseit megadó (3.319) kifejezéseket, akkor az alábbi egyenletekre jutunk:

$$\Theta_\xi (\dot{\vartheta} + \sin^2(\vartheta) \dot{\psi}^2) + 2mgl \cos(\vartheta) = \text{állandó}_1 \quad (3.335)$$

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos(\vartheta) \equiv \omega_\zeta = \text{állandó}_2 \quad (3.336)$$

$$\Theta_\xi \dot{\psi} \sin^2(\vartheta) + \Theta_\zeta \omega_\zeta \cos(\vartheta) = \text{állandó}_3. \quad (3.337)$$

(Az első egyenletben a $\Theta_\zeta \omega_\zeta^2$ tagot is belevettük az állandóba.)

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása elliptikus integrálra vezet. Azonban alkalmas közelítésekkel (például feltéve, hogy a ω_ζ megfelelően nagy, továbbá a ϑ szög a kezdeti ϑ_0 érték körül kis mértékben ingadozik a mozgás során) az alábbi megoldásokat kapjuk egy adott szöghelyzetből indított, a ζ tengely körül megforgatott pörgettyű mozgására [3]:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \frac{\Theta_\xi mgl \sin(\vartheta_0)}{\Theta_\zeta^2 \omega_\zeta^2} \left(1 - \cos \left(\frac{\Theta_\zeta}{\Theta_\xi} \omega_\zeta t \right) \right), \quad (3.338)$$

$$\psi(t) = \psi_0 + \frac{mgl}{\Theta_\zeta \omega_\zeta} \left(t - \frac{\Theta_\xi}{\Theta_\zeta \omega_\zeta} \sin \left(\frac{\Theta_\zeta}{\Theta_\xi} \omega_\zeta t \right) \right). \quad (3.339)$$

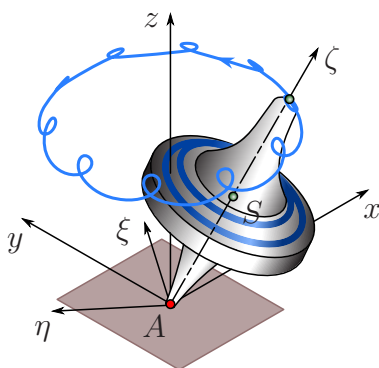
Hasonlóképpen fejezhető ki a φ szög időfüggése, is, de mivel az a tengely mozgását nem befolyásolja, annak közlésétől eltekintünk. A $\dot{\varphi}$ szögsebességgel történő forgás a *rotáció*.

A ϑ szög időbeli változása a *nutáció*. Ennek amplitúdója a fenti képlet szerint $1/\omega_\zeta^2$ -tel arányos, tehát nagy ω_ζ -nál elhanyagolható. A nutáció körfrekvenciája $\frac{\Theta_\zeta}{\Theta_\xi} \omega_\zeta$. Tehát a ϑ szög ingadozása nagy ω_ζ szögsebesség mellett kis amplitúdójú és gyors.

A ψ szög változása a *precesszió*: ennek során a szimmetriatengely vízszintes vetülete egy meghatározott irányba forog a függőleges z tengely körül. Idő szerinti deriválással meghatározható a precesszió szögsebessége:

$$\dot{\psi}(t) = \frac{mgl}{\Theta_\zeta \omega_\zeta} \left(1 - \cos \left(\frac{\Theta_\zeta}{\Theta_\xi} \omega_\zeta t \right) \right). \quad (3.340)$$

A képlet szerint $\dot{\psi}$ periodikusan változik 0 és egy maximális érték között, a nutációéval megegyező $\frac{\Theta_\zeta}{\Theta_\xi} \omega_\zeta$ körfrekvenciával. Nagy ω_ζ mellett a precesszió szögsebessége kicsi és annak ingadozása nagyon gyors. Ha súrlódás vagy közegellenállás lassítja a mozgást, akkor ω_ζ csökken, ezért a precesszió szögsebessége nő, de kisebb frekvenciával ingadozik. A precesszió és nutáció együttes jelenléte mellett kialakuló mozgást a 3.69 ábra illusztrálja.

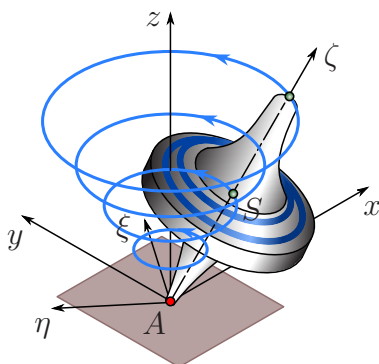


3.69. ábra. Nutációt és precessziót végző súlyos pörgettyű.

3.6.5. Szimmetrikus súlyos pörgettyű reguláris precessziója

A korábban bevezetett jelölések szerint a rotációs, precessziós és nutációs szögsebességek a három Euler-szög deriváltjával egyenlők: $\omega_r = \dot{\varphi}$, $\omega_p = \dot{\psi}$ és $\omega_n = \dot{\vartheta}$. Fontos speciális eset, amikor a ϑ szög állandó marad a súlyos szimmetrikus pörgettyű mozgása során, azaz nincs nutáció, $\omega_n = 0$. Egy ilyen mozgást mutat a 3.70 ábra.

3.52. definíció. *Súlyos szimmetrikus pörgettyű állandó ϑ nutációs szög mellett (azaz zérus $\omega_n = \dot{\vartheta}$ nutációs szögsebességgel) történő mozgását REGULÁRIS PRECESSZIÓNAK nevezzük.♣*



3.70. ábra. Súlyos pörgettyű reguláris precessziója.

A mozgás leírásához egy olyan koordináta-rendszert használunk, amelynek a ζ tengelye a pörgettyű szimmetriatengelyébe esik. A szimmetria miatt a ξ és η tengelyek iránya tetszőleges; ezeket célszerűen úgy vesszük fel, hogy a rotációs szög nulla legyen: $\varphi = 0$.

Az előző fejezetben levezetett, a mechanikai energia állandó voltát kifejező (3.335) egyenletből következik, hogy reguláris precesszió során a precesszió $\omega_p = \dot{\psi}$ szögsebessége állandó, tehát a pörgettyű szimmetriatengelye ezzel a szögsebességgel, egyenletesen forog körbe a nehézségi erővel párhuzamos z tengely körül.

Továbbá, a (3.336) egyenlet szerint ha $\dot{\psi} = \text{állandó}$, akkor a rotációs szögsebesség, $\omega_r = \dot{\varphi}$ is állandó. Mivel a precesszió és rotáció szögsebességét a testhez kötött vonatkoztatási rendszerben értelmezzük, ezek állandósága azt jelenti, hogy a szögsebesség vektora is együtt fordul el a pörgettyű szimmetriatengelyével.

A pörgettyű szögsebességvektora $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_p$, amit (3.287) alapján fejezhetünk ki a bevezetett koordináta-rendszerben, kihasználva, hogy $\varphi = 0$ és $\omega_n = 0$:

$$\boldsymbol{\omega}_{(\xi\eta\zeta)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \sin(\vartheta) \\ \omega_r + \omega_p \cos(\vartheta) \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)}. \quad (3.341)$$

Ez a vektor körbe forog a z tengely körül ω_p szögsebességgel, ezért a pörgettyű szöggyorsulása

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_r \omega_p \sin(\vartheta) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi\eta\zeta)}. \quad (3.342)$$

Az A pontra számított perdület a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben:

$$\boldsymbol{\Pi}_A = \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \sin(\vartheta) \\ \omega_r + \omega_p \cos(\vartheta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_1 \omega_p \sin(\vartheta) \\ \Theta_3 (\omega_r + \omega_p \cos(\vartheta)) \end{bmatrix}, \quad (3.343)$$

tehát ez a vektor is az $\eta\zeta$ síkba esik, ugyanúgy, mint a szögsebesség és a szimmetriatengely. A fentiekből következően a perdület deriváltja

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}}_A = \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_A = \begin{bmatrix} \Theta_3 \omega_r \omega_p \sin(\vartheta) + (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_p^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.344)$$

a nehézségi erő A pontra számított nyomatékának pedig csak a ξ komponense nem nulla: $M_{A\xi} = mgl \sin(\vartheta)$.

Tehát $\sin(\vartheta)$ -val való egyszerűsítés után arra jutunk, hogy

$$\Theta_3 \omega_r \omega_p + (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_p^2 \cos(\vartheta) = mgl. \quad (3.345)$$

Ennek az egyenletnek kell teljesülnie ahhoz, hogy a pörgettyű a feltételezett módon mozogjon, tehát ez a *reguláris precesszió feltétele*. Ez alapján adott ω_r rotációs szögsebességhez kiszámítható a precessziós szögsebesség.

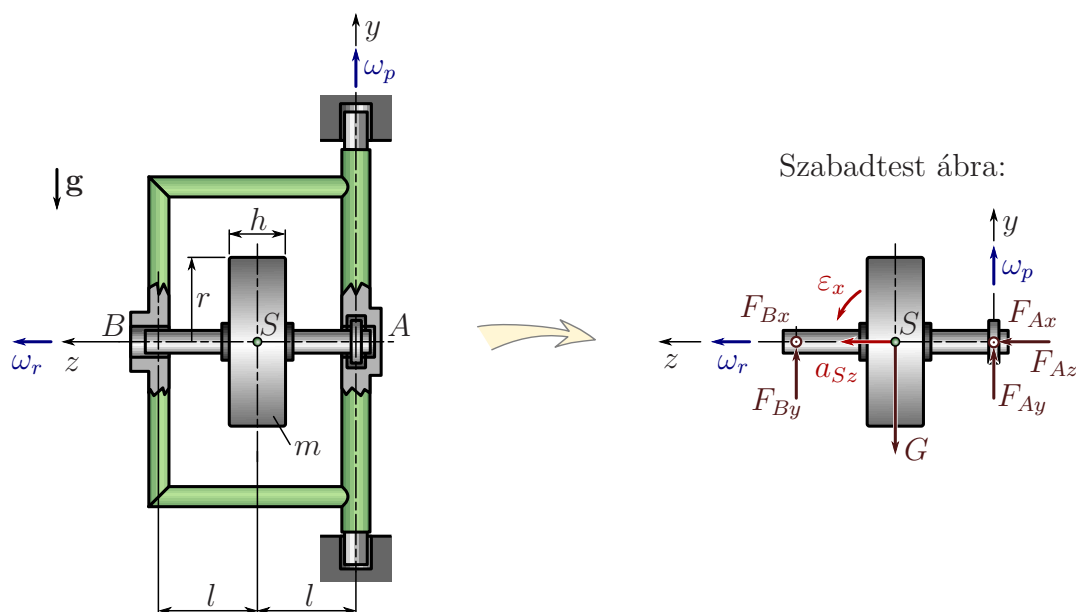
Például $\vartheta = 90^\circ$ esetén $\cos(\vartheta) = 0$, ezért a fenti egyenlet leegyszerűsödik: $\Theta_3 \omega_r \omega_p = mgl$. Ebből $\omega_p = \frac{mgl}{\Theta_3 \omega_r}$.

3.53. példa: A 3.71 ábrán látható r sugarú és h magasságú hengerből álló szimmetrikus pörgettyű tengelye az A és B pontokban található csapágyakban forog, a kerethez képest állandó ω_r nagyságú szögsebességgel. Maga a keret a függőleges y tengely körül forog, szintén állandó nagyságú ω_p szögsebességgel. A vizsgált pillanatban a henger főtehetetlenségi irányával párhuzamosak az álló (xyz) koordináta-rendszer tengelyei, a 3.71 ábrának megfelelően. Az A csapágy tetszőleges irányú terhelést fel tud venni, míg a B csapágy radiális, tehát csak sugárirányú terhelést vesz fel, így $B_z = 0$.¹⁵ Határozzuk meg az A és B csapágyakról a tengelyre átadódó erőket!

Megoldás:

A hengeres testet és a hozzá mereven rögzített AB tengelyt egy merev testként kezeljük, egy szabadtest ábrán ábrázolva a rá ható erőket: a \mathbf{G} nehézségi erőt, valamint a csapágyakról átadódó A_x , A_y , A_z , B_x és B_y erő komponenseket.

¹⁵Ha mindkét csapágy fel tudna venni axiális terhelést, akkor statikailag határozatlan lenne a szerkezet, így a merev test mechanika keretein belül csak a A_z és B_z erők összegét tudnánk meghatározni.



3.71. ábra. Szimmetrikus súlyos pörgettyű és a hozzá tartozó szabadtest ábra.

A pörgettyű súlypontja l sugarú körpályán mozog az y tengely körül, ezért gyorsulásának csak a z komponense nem nulla: $a_{Sz} = -l\omega_p^2$. Az $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ impulzustételből az alábbi skalár egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 &= A_x + B_x, \\ 0 &= A_y + B_y - mg, \\ -ml\omega_p^2 &= A_z. \end{aligned} \quad (3.346)$$

A perdülettételt az álló A pontra írjuk fel: $\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{M}_A$. A tehetetlenségi nyomaték mátrixa, a Steiner-tétel figyelembevételével

$$\mathbf{\Theta}_A = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2 + ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2 + ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}. \quad (3.347)$$

A szögsebesség vektora és a perdület:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \\ \omega_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi}_A = \begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_y\omega_p \\ \Theta_z\omega_r \end{bmatrix}. \quad (3.348)$$

Bár a szögsebesség nagysága állandó, iránya állandóan változik, ahogy ω_p szögsebességgel forog a keret az y tengely körül. Tehát a szöggyorsulás

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \\ \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_p\omega_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.349)$$

A fentiek figyelembevételével kifejezhető a perdület deriváltja az alábbi alakban:

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{\Theta}_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_A = \begin{bmatrix} \Theta_x\omega_p\omega_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\Theta_z - \Theta_y)\omega_p\omega_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_z\omega_p\omega_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.350)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\Theta_x = \Theta_y$.

A testre ható erők eredő nyomatéka

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{B} + \mathbf{r}_{AS} \times \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -2lB_y + mgl \\ 2lB_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.351)$$

tehát a perdülettétel az alábbi egyenletekre vezet:

$$\begin{bmatrix} \Theta_z \omega_p \omega_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2lB_y + mgl \\ 2lB_x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.352)$$

A (3.346) és (3.352) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása

$$A_x = B_x = 0, \quad (3.353)$$

$$A_z = -ml\omega_p^2, \quad (3.354)$$

$$A_y = \frac{1}{2} \left(mg + \frac{\Theta_z \omega_p \omega_r}{l} \right), \quad (3.355)$$

$$B_y = \frac{1}{2} \left(mg - \frac{\Theta_z \omega_p \omega_r}{l} \right). \quad (3.356)$$

Az eredmény szerint $A_y \neq B_y$, azaz a súlypontra számított nyomaték nem nulla, tehát ez egy súlyos pörgettyű, mely kialakításánál fogva reguláris precessziót végez. ♠

3.67. megjegyzés: Az előző példa megoldásából következik, hogy a paraméterek megfelelő megválasztásával az egyik erő (B_y) akár nullává is tehető. Ehhez (3.356) szerint az alábbi feltételnek kell teljesülnie:

$$mg = \frac{\Theta_z \omega_p \omega_r}{l} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \frac{mgl}{\Theta_z \omega_r}. \quad (3.357)$$

Ha ez teljesül, akkor a tengely a B csapágyról átadódó erők nélkül is megtartja vízszintes helyzetét – tehát ebben a feladatban ez a reguláris precesszió feltétele.

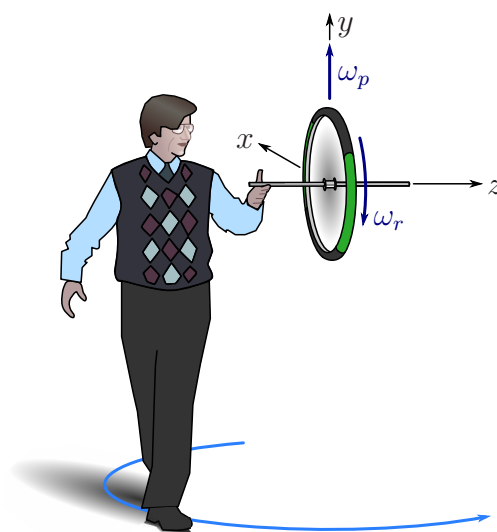
Kísérletileg is ellenőrizhető, hogy megvalósítható a fenti eredménynek megfelelő mozgás. A 3.72 ábrán egy saját tengelye körül ω_r rotációs szögsebességgel megforgatott biciklikerek látható. Megfelelő szögsebesség értékek esetén a tengelye közelítőleg vízszintes maradhat, annak ellenére, hogy a tengelyt csak egyik oldalán függesztjük fel.

Az előző példa eredményei alapján ebben az esetben a szögsebesség $\boldsymbol{\omega}$ vektora és a $\boldsymbol{\Pi}_A$ perdületvektor az yz síkba esik, az A pontra számított \mathbf{M}_A nyomaték pedig x irányú. Mindhárom vektor együtt forog a test szimmetriatengelyével.

A mozgás elemzését megkönnyíti, ha áttérünk egy ennek megfelelő vonatkoztatási rendszerre, mely a test szimmetriatengelyével együtt $\boldsymbol{\omega}_p = (0 \ \omega_p \ 0)^T$ precessziós szögsebességgel forog az y tengely körül, azonban rotációt (z tengely körüli forgást) nem végez. A szimmetria miatt ebben a vonatkoztatási rendszerben is állandó a tehetetlenségi nyomaték, a reguláris precesszió miatt pedig a szögsebesség és a perdület vektora is állandónak látszik, mert együtt forognak a vonatkoztatási rendszerrel.

A 3.2.5 és 3.2.5 fejezetekben közölt levezetéseknek megfelelően, a nulla sebességű és gyorsulású A pontra

$$\dot{\boldsymbol{\Pi}}_A = \overset{\circ}{\boldsymbol{\Pi}}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\Pi}_A, \quad (3.358)$$



3.72. ábra. Megforgatott biciklikerek „táncoltatása”.

ahol $\dot{\Pi}_A$ a perdület ω_p szögsebességgel forgó rendszerben értelmezett deriváltja:

$$\dot{\Pi}_A = \Theta_A \dot{\omega} + \dot{\Theta}_A \omega. \quad (3.359)$$

A szimmetria miatt $\dot{\Theta}_S = \mathbf{0}$ és mivel a szögsebesség is állandónak látszik a mozgó rendszerből, $\dot{\omega} = \mathbf{0}$ is teljesül. Tehát a perdület mozgó rendszerben értelmezett deriváltja $\dot{\Pi}_A = \mathbf{0}$ és így

$$\dot{\Pi}_A = \omega_p \times \Pi_A. \quad (3.360)$$

Ez az egyenlet úgy értelmezhető, hogy az állandó nagyságú perdületvektor ω_p szögsebességgel forog az y tengely körül. A fenti vektoriális szorzatot kifejtve és figyelembe véve, hogy a nehézségi erő A pontra számított nyomatéka $\mathbf{M}_A = (mgl \ 0 \ 0)^T$, ismét az

$$mgl = \Theta_z \omega_p \omega_r \quad (3.361)$$

egyenletet – a reguláris precesszió feltételét – kapjuk.

A (3.360) egyenlet csak szimmetrikus pörgettyű reguláris precessziója során ad pontos eredményt, azonban ettől eltérő esetekben is alkalmas lehet közelítő számításokra. Ezért ezt a formulát a perdület derivált *mérvnői közelítésének* nevezik.

A fenti gondolatmenet szerint a biciklikerek reguláris precessziója során $\mathbf{M}_A \perp \omega$, $\mathbf{M}_A \perp \Pi_A$, továbbá a Π_A és \mathbf{M}_A vektorok ω_p szögsebességgel forognak a függőleges y tengely körül.

Ez annak felel meg, hogy a perdülettétel szerint a perdület a nyomaték irányában változik. Mivel a vizsgált esetben a nyomatéknak nincsen a perdülettel párhuzamos összetevője, a perdület nagyságát nem, csak az irányát tudja megváltoztatni.

Akkor is a nyomaték irányában változik a perdület, ha a kerék kezdetben nem forog ($\omega_r = \omega_p = 0$). Ekkor a tengely vízszintes helyzetében nulla a perdület. Ebből a helyzetből elengedve a kereket, a nyomatéknak megfelelő irányú perdület alakul ki, azaz a kerék elfordul az x tengely körül.

A vizsgált feladattal analóg az a feladat, amikor egy anyagi pont "fejfel lefelé" mozog egy függőleges körpálya alsó oldalán, mint az 1.27. példában. Ha a test sebessége nulla, akkor a nehézségi erő hatására leesik – sebessége a ható erő irányában változik meg.

Sebessége akkor is az erő irányában változik, ha kezdetben nem nulla. Ha van a testnek a nehézségi erő irányára merőleges sebességkomponense, akkor nem zuhan le függőlegesen, hanem fokozatosan változik meg a sebességének iránya.

Ha elegendően nagy sebességgel körpályán mozog egy anyagi pont, mint a 2.14. feladatban, akkor a \mathbf{K} kényszererő minden pillanatban merőleges a sebesség (és az impulzus) irányára, tehát a sebességnek csak az irányát tudja megváltoztatni. Ez teljesen megfeleltethető a reguláris precesszió esetének: akkor ugyanis a szögsebességnek kell elegendően nagy lennie és a nyomatékvektor marad merőleges a perdületvektorra, annak csak az irányát változtatva. ♣

4. fejezet

Összefoglalás

Ebben a fejezetben a Dinamika legfontosabb fogalmait, tételeit foglaljuk össze. Természetesen itt nem térhetünk ki minden részletkérdésre; a definíciók, tételek pontos megfogalmazását a szövegben elhelyezett hivatkozások segítségével lehet megkeresni.

4.1. Az anyagi pontok kinematikája

A dinamikai problémák megoldásának első lépése a *mechanikai modell* felállítása a vizsgált test és az azt körülvevő környezet (a *mechanikai rendszer*) tulajdonságai alapján. A legegyszerűbb esetben a vizsgált test helye egyetlen pontjának helyével leírható; ekkor alkalmazható az *anyagi pont* modell.

Az anyagi pontok (1.1. definíció) mozgását (lásd 1.1 fejezet) egy általunk célszerűen választott *vonatkoztatási rendszerhez* (másik, merev testhez) képest egy szintén célszerűen választott *koordináta-rendszerben* felírt vektor értékű függvénnyel, az időben változó $\mathbf{r}(t)$ *helyvektorral* írhatjuk le. Nemcsak anyagi pontok, hanem bármely test esetében *mozgástörvénynek* (1.2.) nevezzük azoknak a függvényeknek az összességét, melyek alapján egyértelműen megadható a vizsgált test összes pontjának mozgása. Anyagi pontok esetében a mozgástörvényt megadható az $\mathbf{r}(t)$ helyvektorral.

A mechanikai rendszer modelljének ismeretében *kényszerfeltételek* (1.1.4 fejezet) fogalmazhatók meg, melyek korlátozásokat jelentenek a test mozgására vonatkozóan. A kényszerfeltételek csökkentik a *szabadsági fokot* (1.22. definíció), tehát a mozgástörvény egyértelmű megadásához szükséges skalár függvények számát.

Az anyagi pont mozgásának további jellemzésére bevezetett *sebességvektor* és *gyorsulásvektor* (1.5. és 1.6. definíciók) a helyvektor idő szerinti deriválásával származtathatók:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (4.1)$$

A sebességvektor mindig a pálya \mathbf{e}_t tangenciális érintővektora (1.7. definíció) irányába mutat, tehát csak tangenciális összetevője van, normális nincs:

$$\mathbf{v}(t) = |\mathbf{v}(t)|\mathbf{e}_t, \quad (4.2)$$

ahol $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = |\mathbf{v}(t)|$ a sebesség abszolút értéke.

A gyorsulásvektor a sebességvektor deriváltja. Két természetes komponensre bontható: a *tangenciális (érintő irányú) gyorsulás* (1.9. definíció) a sebesség *nagyságának* változásával,

a simulóköri középpontja felé mutató *normális gyorsulás* (1.11. definíció) pedig a sebesség *irányának* változásával van kapcsolatban. Az 1.14. tétel szerint

$$\mathbf{a}(t) = a_t(t)\mathbf{e}_t + a_n(t)\mathbf{e}_n = |\dot{\mathbf{v}}|\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n, \quad (4.3)$$

ahol ρ a pálya simulóköri görbüeti sugara. A fentiekből következik, hogy csak akkor lehet nulla egy anyagi pont gyorsulása, ha egyenes vonalú, egyenletes (állandó sebességű) mozgást végez (lásd 1.3. megjegyzés).

4.2. A merev testek kinematikája

A merev test valamely A pontjának sebességét ismerve, a test egy másik, B pontjának sebességét a

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (4.4)$$

sebességredukciós képlet (1.30. tétel) alapján számíthatjuk, ahol $\boldsymbol{\omega}$ a merev test egészét jellemző szögsebességvektor. Különböző tengelyek körüli forgások eredő szögsebessége az egyes szögsebességek vektori eredője (1.50. következmény és 1.78. tétel).

A sebességredukciós képlet levezetéséhez kihasználtuk, hogy $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$ az \mathbf{r}_{AB} állandó nagyságú vektor idő szerinti deriváltja. Általában is igaz, hogy egy állandó nagyságú, $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forgó \mathbf{b} vektor idő szerinti deriváltja az 1.32. megjegyzés szerint $\dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$.

A szögsebesség és a sebesség vektorkettőst alkot, a *kinematikai vektorkettőst* (1.35. definíció és 1.2.3 fejezet). Ennek alapján dönthető el, hogy milyen *elemi mozgást* (1.2.4 fejezet) végez a test: pillanatnyi haladó mozgást, pillanatnyi forgó mozgást vagy pillanatnyi csavarozást. Pillanatnyi forgó mozgás során a pillanatnyi forgástengely párhuzamos a szögsebességvektorral és pontjai nulla sebességűek, ezért ha találunk két nulla sebességű pontot, akkor a test pillanatnyi forgó mozgást végez és a szögsebesség iránya megállapítható.

A merev test A és B pontjainak gyorsulása közötti összefüggést megadó *gyorsulásredukciós képlet* (1.51. tétel):

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}), \quad (4.5)$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon}$ a merev testet jellemző *szöggyorsulásvektor*. A szöggyorsulás akkor is különbözik nullától, ha az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség nagysága nem, csak iránya változik. Ha ekkor a pillanatnyi forgástengely $\boldsymbol{\omega}_p$ állandó nagyságú szögsebességgel változtatja irányát, akkor $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}$.

Ha a merev test pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak, akkor *síkmozgásról* beszélünk (1.2.8 fejezet). Ebben az esetben elég egy síkot kiszemelni és az abba eső pontok mozgását vizsgálni. Gyakran úgy választják meg a koordináta-rendszert, hogy az xy sík párhuzamos a vizsgált síkkal, ekkor a szögsebesség és a szöggyorsulás vektora a z tengellyel párhuzamos. Síkmozgás esetén minden pillanatban lehet találni egy olyan P pontot a merev testen, melynek sebessége zérus. Ezt a pontot *sebességpólusnak* (1.55. definíció) nevezzük; helyvektora egy A pont sebességének és a szögsebességnek az ismeretében számítható (1.36. tétel):

$$\mathbf{r}_{AP} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\omega^2}. \quad (4.6)$$

A sebességpólus helye általában könnyen meghatározható szerkesztéssel is: a merev test két pontjának sebességvektoraira merőlegesen állított egyenesek metszéspontjában található.

Egy B pont sebességének nagysága a sebességpólustól mért távolságával arányos: $v_B = \omega |\mathbf{r}_{PB}|$, iránya \mathbf{r}_{BP} -re merőleges.

A sebességpólus helye változhat a mozgás során, a P geometriai pont elmozdulásának \mathbf{u} sebességét a *pólusvándorlás sebességének* (1.68. tétel) nevezzük:

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_P}{\omega^2}. \quad (4.7)$$

Sok feladatban ismert a pólusvándorlás sebességének iránya, például kényszerpályán gördülő test esetében a test és a pálya érintkezési pontja a póluspont. Ekkor a pólusvándorlás sebessége a kényszerpálya érintőjével párhuzamos. Tehát a fenti képlet szerint a sebességpólus gyorsulása merőleges a kényszerpálya érintőjére és $\mathbf{a}_P = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ (1.69. tétel).

Síkmozgás esetén mindig lehet találni egy olyan G pontot, a *gyorsuláspólust* (1.58. definíció), melynek gyorsulása zérus. A gyorsuláspólus helyvektora

$$\mathbf{r}_{AG} = \frac{\omega^2 \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (4.8)$$

Egy B pont gyorsulásának nagysága a gyorsuláspólustól mért távolságával arányos: $a_B = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} |\mathbf{r}_{GB}|$.

Sok feladatban valamilyen kényszerfeltétel teremt kapcsolatot a vizsgált test és egy másik, szintén mozgó test mozgása között. A kényszerfeltétel figyelembevételére érdekében a *relatív kinematika* (1.2.11 fejezet) összefüggéseit alkalmazhatjuk. Ha a (2) merev test mozgását egy mozgó, (1) vonatkoztatási rendszerben is le tudjuk írni, akkor egy álló, (0) vonatkoztatási rendszerben a következő összefüggésekkel adhatjuk meg a P pont ún. *abszolút sebességét és gyorsulását* (1.74. és 1.81. definíciók):

$$\mathbf{v}_{P20} = \mathbf{v}_{P21} + \mathbf{v}_{P10}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{a}_{P20} = \mathbf{a}_{P21} + \mathbf{a}_{P10} + \mathbf{a}_{PCor}, \quad (4.10)$$

ahol \mathbf{v}_{P21} és \mathbf{a}_{P21} a P pont *relatív sebessége* illetve *relatív gyorsulása* (1.73. és 1.80. definíciók); $\mathbf{v}_{P10} = \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P$ és $\mathbf{a}_{P10} = \mathbf{a}_\Omega + \boldsymbol{\varepsilon}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P + \boldsymbol{\omega}_{10} \times (\boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\rho}_P)$ az (1) rendszer P -vel fedésben levő pontjának *szállító sebessége* illetve *szállító gyorsulása*, $\mathbf{a}_{PCor} = 2\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21}$ pedig a *Coriolis-gyorsulás* (1.73. és 1.82. definíciók).

Az *abszolút szögsebességet és szöggyorsulást* az

$$\boldsymbol{\omega}_{20} = \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{10}, \quad (4.11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{20} = \boldsymbol{\varepsilon}_{21} + \boldsymbol{\varepsilon}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \boldsymbol{\omega}_{21} \quad (4.12)$$

képletekkel számíthatjuk, ahol $\boldsymbol{\omega}_{10}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_{10}$ a *szállító szögsebesség* illetve *szöggyorsulás*, $\boldsymbol{\omega}_{21}$ és $\boldsymbol{\varepsilon}_{21}$ pedig a *relatív szögsebesség* és *relatív szöggyorsulás* (1.78. és 1.84. tételek).

4.3. Az anyagi pontok kinetikája

Míg a kinematika csak a mozgás leírásával foglalkozik, a kinetika célja annak megállapítása, hogy hogyan befolyásolják a testek egymás mozgását.

A kinetika logikai felépítése a *Newton-törvényeken* alapul.

1. Vannak olyan vonatkoztatási rendszerek, melyekben egy magára hagyott anyagi pont nem gyorsul, azaz teljesül a *tehetetlenség törvénye* (2.1. tétel); ezek az inerciarendszerek (2.2. tétel).

2. Az anyagi pontok m tömegükkel jellemezhetők. Ha egy anyagi pontra más testek hatnak, akkor a hatást jellemző \mathbf{F} erő az anyagi pont tömegének és gyorsulásának szorzatával egyenlő és a gyorsulással egyező irányú (2.5. tétel):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (4.13)$$

Az $\mathbf{I} = m\mathbf{v}$ lendület vagy impulzus (2.6. definíció) fogalmának bevezetésével – és feltéve, hogy a test tömege nem változik – Newton II. törvénye

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F} \quad (4.14)$$

alakban is felírható.

3. Két anyagi pont kölcsönhatása során a két testre ható erők egyenlő nagyságúak és ellentétes irányúak (2.8. tétel).
4. Ha egy anyagi pontra több másik test is hat, akkor az erők együttes hatása egyenértékű a külön-külön ható erők vektori eredőjének hatásával, azaz az erők egymástól függetlenül összegezhetőek (2.10. tétel).

Egy anyagi pont mozgása a *dinamika alaptétele* (2.12. tétel) alapján vizsgálható, azaz inerciarendszerben

$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad (4.15)$$

ahol $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ a vizsgált anyagi pontra ható erők eredője.

Ha több anyagi pont (anyagi pontrendszer) mozgását akarjuk vizsgálni, akkor az egyes testeket külön-külön lerajzoljuk *szabadtest ábrákon* (2.3.2 fejezet), majd az ábrák alapján külön-külön felírjuk a dinamika alaptételének egyenleteit az egyes testekre. A testek közötti belső erőket Newton III. törvénye alapján vesszük figyelembe.

A dinamika alaptételének megoldását illetve a feladatok megértését megkönnyítheti a 2.21. *impulzustétel*:

$$\mathbf{I}(t_2) - \mathbf{I}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k dt, \quad (4.16)$$

ahol $\mathbf{I} = m\mathbf{v}_S$ az anyagi pontrendszer impulzusa vagy lendülete, \mathbf{v}_S a súlypont sebessége, \mathbf{F}_k pedig a külső erők eredője. Ugyanez a tétel differenciális alakban: $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}_k$.

Ha csak egy anyagi pont tangenciális (azaz sebességgel párhuzamos) gyorsulásának, illetve a rá ható erő sebességgel párhuzamos komponensének vizsgálata a célunk, akkor a skaláris szorzás tulajdonságait kihasználva célszerű definiálni az \mathbf{F} erő $P = \mathbf{F}\mathbf{v}$ *teljesítményét* és az anyagi pont $T = 1/2 mv^2$ kinetikus (mozgási) energiáját (2.32. és 2.33. definíciók). Igazolható a 2.34. *teljesítménytétel*, mi szerint $\dot{T} = m\mathbf{a}\mathbf{v} = m\dot{v}v$ miatt $\dot{T} = P$. A teljesítménytétel anyagi pontrendszerre is teljesül, ahol mind a kinetikus energiát, mind a teljesítményt az egyes pontok kinetikus energiáinak illetve a rájuk ható erők teljesítményeinek összegeként definiáljuk.

A teljesítménytétel integrálásával kapjuk a 2.40. *munkatételt*:

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P dt \equiv W_{12}, \quad (4.17)$$

ahol W_{12} a ható erőrendszer *mechanikai munkája* (2.39. definíció).

A munka kiszámítását megkönnyíti, ha az erőrendszerben szereplő aktív erőkhöz *időtől független*, csak a koordinátáktól függő $U(\mathbf{r})$ *potenciálfüggvény* vagy *potenciális energia* (2.47. és 2.45. definíciók) található. Az ilyen erőket *konzervatívnak* (2.53. definíció) nevezzük. Ekkor ugyanis az erőrendszer által végzett munka csak a mozgás végpontjaitól függ (2.51. tétel), azaz

$$W_{12} = U(\mathbf{r}(t_1)) - U(\mathbf{r}(t_2)), \quad (4.18)$$

amiből következik a 2.54. *mechanikai energia megmaradásának tétele*:

$$\begin{aligned} T(t_2) - T(t_1) &= U(\mathbf{r}(t_1)) - U(\mathbf{r}(t_2)) \quad \text{és} \\ T(t_2) + U(\mathbf{r}(t_2)) &= T(t_1) + U(\mathbf{r}(t_1)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben megjelennek ún. *tehetetlenségi erők* is, melyek nem köthetők valódi test hatásához (2.3.3 fejezet). A *szállító erő* $\mathbf{F}_{sz} = -m\mathbf{a}_{P10}$, azaz a szállító gyorsulással ellentétes irányú. A *Coriolis-erő* $\mathbf{F}_{Cor} = -m\mathbf{a}_{Cor} = -m\boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{v}_{P21}$, ami a Coriolis-gyorsulással ellentétes irányú.

A tehetetlenségi és valódi erők vektori eredője a *relatív erő*. A relatív erő és relatív gyorsulás fogalmát felhasználva az inerciarendszerekben érvényes tételek kimondhatók gyorsuló rendszerekben is, a képletekben szereplő „abszolút” mennyiségeket „relatív” mennyiségekre cserélve (2.4.4 fejezet).

4.4. A merev testek kinetikája

A merev testek folytonos tömegeloszlású anyagi pontrendszereknek tekinthetők. Minden, anyagi pontrendszerekre kimondott tétel érvényes merev testekre is, csak a képletekben szereplő összegéseket integrálásokra kell cserélni.

A *dinamika alaptétele merev testre* (3.2. tétel):

$$[\dot{\mathbf{I}}; \mathbf{D}_B]_B = [\mathbf{F}; \mathbf{M}_B]_B, \quad (4.20)$$

ahol \mathbf{F} a *külső erők eredője* és \mathbf{M}_B a *külső erőrendszer tetszőleges B pontra számított nyomatéka*.

$\dot{\mathbf{I}}$ az *impulzus deriváltja*, ami kifejezhető a test *súlypontjának* gyorsulásával (3.6. tétel):

$$\dot{\mathbf{I}} = m\mathbf{a}_S. \quad (4.21)$$

\mathbf{D}_B a merev test B pontjára számított *kinetikai nyomatéka* (3.25. tétel).

$$\mathbf{D}_B \equiv \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{a} \, dm = \boldsymbol{\Theta}_B \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_B \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{BS} \times m\mathbf{a}_B, \quad (4.22)$$

ahol az \mathbf{r} vektor a test tetszőleges B pontjából mutat a test pontjaiba.

Itt

$$\boldsymbol{\Theta}_B = \int_{(m)} (\mathbf{r}^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r} \circ \mathbf{r})) \, dm \quad (4.23)$$

a test B pontra számított *tehetetlenségi nyomatéki mátrixa* (3.16. definíció), ahol az \mathbf{r} vektor a B pontból mutat a test egyes pontjaiba. A tehetetlenségi nyomaték számítását megkönnyíti a 3.17. *Steiner-tétel*, ami kapcsolatot teremt a *súlyponti* tehetetlenségi nyomaték és egy másik pontra számított tehetetlenségi nyomaték között. Elforgatott tengelyű koordináta-rendszerben a (3.74) képletnek megfelelően kell alkalmazni a forgatási transzformációt. A

kinetikai nyomaték fenti képlete szerint nulla gyorsulása vagy az \mathbf{r}_{BS} vektorral párhuzamos gyorsulása pontra ($\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{a}_B \parallel \mathbf{r}_{BS}$) és a súlypontra ($B \equiv S$) a kinetikai nyomaték kifejezésének harmadik tagja nulla.

Még tovább egyszerűsíthető a dinamika alaptételének felírása, ha nulla sebességű pontra vagy a test súlypontjára írjuk fel. Ekkor ugyanis jól használható a *perdület* fogalma. A 3.8. és 3.22. tételek alapján egy merev test perdülete

$$\mathbf{\Pi}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} \quad \text{az } S \text{ súlypontra,} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{\Pi}_A = \mathbf{\Theta}_A \boldsymbol{\omega} \quad \text{a test nulla sebességű } A \text{ pontjára.} \quad (4.25)$$

A 2.72. tétel szerint a kinetikai nyomaték és a perdület derivált között az alábbi kapcsolat áll fent:

$$\mathbf{D}_A = \dot{\mathbf{\Pi}}_A + \mathbf{v}_A \times \mathbf{I}, \quad (4.26)$$

amiből az következik, hogy álló ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$) pontra $\mathbf{D}_A = \dot{\mathbf{\Pi}}_A$ és a test súlypontjára $\mathbf{D}_S = \dot{\mathbf{\Pi}}_S$. A perdület deriváltját megadó Euler-féle formula (3.116 tétel):

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S. \quad (4.27)$$

A fentiek alapján a perdülettétel alábbi két alakjának használata javasolt:

$$\mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_S = \mathbf{M}_S \quad \text{az } S \text{ súlypontra,} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{\Theta}_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Pi}_A = \mathbf{M}_A \quad \text{a test nulla sebességű és nulla gyorsulású } A \text{ pontjára.} \quad (4.29)$$

Merev test kinetikus (mozgási) energiája

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{\Theta}_A \boldsymbol{\omega}, \quad (4.30)$$

ahol A a merev test egy nulla sebességű pontja (3.3.1 fejezet).

Merev testek mozgására is érvényes a teljesítménytétel és a munkatétel (3.3.2 fejezet).

A dinamika alaptételének egyenletei számottevően leegyszerűsödnek, ha a test dinamikai értelemben *síkmozgást* végez (3.4 fejezet). Ekkor a test pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak (síkmozgás kinematikai értelemben) és a súlypontra számított perdület párhuzamos a szögsebességgel. Ebben az esetben az impulzustétel és a perdülettétel hat skalár egyenletéből csak három hordoz információt:

$$\begin{aligned} m a_{Sx} &= F_x \\ m a_{Sy} &= F_y \\ \Theta_z \varepsilon_z &= M_{Sz}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Egy fontos speciális mozgás a *gördülés*. Ennek *kinematikai feltétele*, hogy a két test érintkező pontjainak megegyezzen a sebessége (3.35. definíció). Egy álló talajon gördülő homogén, r sugarú korong esetében ebből az alábbi összefüggést kapjuk a súlypont gyorsulásának és a szöggyorsulásnak a nagysága között:

$$a_S = r \varepsilon. \quad (4.32)$$

A gördülés fenntartásához elegendően nagy tapadási súrlódási erőre van szükség, amiből a gördülés *dinamikai feltétele* (3.36. definíció):

$$\frac{|\mathbf{F}_S|}{|\mathbf{F}_N|} \leq \mu_0. \quad (4.33)$$

Csúszás során a test másik testtel érintkező pontjának sebességével ellentétes irányú, $F_S = \mu F_N$ nagyságú csúszási súrlódási erő lép fel. Ekkor a gördülés kinematikai feltétele nem teljesül.

A dinamika alaptételének egyik fontos alkalmazási területe a *forgórészek kiegyensúlyozása* (3.5 fejezet). A forgórész *statikusan kiegyensúlyozatlan*, ha a súlypontja nincs rajta a forgástengelyen. Ebben az esetben a súlyponttal átellenes oldalon elhelyezett póttömeggel lehet elérni a kiegyensúlyozást.

Dinamikus kiegyensúlyozatlanság esetében a forgórész súlypontra számított perdülete nem párhuzamos a szögsebességgel. A kiegyensúlyozó póttömegek méretezéséhez azonos koordináta-rendszerben kell kifejezni a tehetetlenségi nyomaték mátrixát és a szögsebességvektort. A 3.5.3 fejezetben leírtaknak megfelelően, ez a legegyszerűbb esetekben megtehető akár a szögsebesség, akár a tehetetlenségi nyomaték transzformációjával:

$$\underset{(\xi\eta\zeta)}{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T} \underset{(xyz)}{\boldsymbol{\omega}}, \quad (4.34)$$

$$\underset{(xyz)}{\boldsymbol{\Theta}}_S = \mathbf{T}^T \underset{(\xi\eta\zeta)}{\boldsymbol{\Theta}}_S \mathbf{T}, \quad (4.35)$$

ahol a \mathbf{T} transzformációs mátrix oszlopaiban az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} bázisvektorok vannak kifejezve a $(\xi\eta\zeta)$ koordináta-rendszerben (3.2.3 fejezet).

Pörgettyűmozgás (3.6 fejezet) során vagy van a testnek egy rögzített A pontja, vagy a súlypont mozgása a test forgásától függetlenül tárgyalható. A pörgettyű szöghelyzetét az Euler-szögek segítségével lehet megadni (3.6.1 fejezet). A szögsebesség komponensek is kifejezhetők az Euler-szögekkel, a (3.286) és (3.287) Euler-féle geometriai egyenletek segítségével. A perdülettétel egyenleteit a test főtehetetlenségi tengelyeihez rögzített rendszerben felírva jutunk a forgó mozgás Euler-féle differenciálegyenleteihez (3.46. tétel):

$$\begin{aligned} \Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ \Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_3\omega_1 &= M_2, \\ \Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 &= M_3, \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ha a fenti egyenletben szereplő nyomaték komponensek zérusok, akkor a pörgettyű *erőmentes*. Az erőmentes pörgettyűk esetében mind a perdület, mind a kinetikus energia állandó. Közelítőleg ilyen mozgást végeznek az elhajított testek is, melyek forgása a legnagyobb és legkisebb főtehetetlenségi nyomatékokhoz tartozó irányokban stabil (3.49. tétel).

A 3.51. tétel szerint szimmetrikus erőmentes pörgettyű mozgása során a szimmetriatengely, a szögsebesség vektora és a perdületvektor egy síkba esnek, a perdületvektor a térben állandó helyzetű. Lapos pörgettyűk esetében a perdületvektor a szimmetriatengely és a szögsebesség közé esik, míg nyújtott pörgettyűk mozgása során a szögsebesség vektora helyezkedik el a szimmetriatengely és a perdület között.

A *súlyos pörgettyűk* esetében a test rögzített pontjára számított nyomaték nem nulla, ezért a perdület sem állandó: a perdület mindig a nyomaték irányában változik. Ez figyelhető meg a szimmetrikus, súlyos pörgettyűk *reguláris precessziója* során is (3.6.5 fejezet). Ekkor az egy síkba eső perdületvektor, szimmetriatengely és szögsebességvektor állandó precessziós szögsebességgel forognak, annak következtében, hogy a nyomaték vektora is a testtel együtt forog körbe.

A merev testek kinetikájának legfontosabb képleteit a 4.1 táblázatban gyűjtöttük össze.

	Súlypontra	A test rögzített pontjára ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$)	A test tetszőleges pontjára
Impulzustétel	$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F} \Rightarrow m\mathbf{a}_S = \mathbf{F}$		
Impulzus	$\mathbf{I} = m\mathbf{v}_S$		
Perdülettétel	$\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \mathbf{M}_S$	$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \mathbf{M}_A$	$\mathbf{D}_B = \mathbf{M}_B$
	$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} \Leftrightarrow [\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A$		
Kinet. nyom.	$\mathbf{D}_S = \dot{\mathbf{\Pi}}_S$	$\mathbf{D}_A = \dot{\mathbf{\Pi}}_A$	$\mathbf{D}_B = \dot{\mathbf{\Pi}}_B + \mathbf{v}_B \times m\mathbf{v}_S$
	$\mathbf{D}_B = \mathbf{D}_A + \mathbf{r}_{AB} \times \dot{\mathbf{I}} \Leftrightarrow [\dot{\mathbf{I}}; \mathbf{D}_A]_A$		
Perdület	$\mathbf{\Pi}_S = \Theta_S \boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{\Pi}_A = \Theta_A \boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{\Pi}_B = \Theta_B \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{BS} \times m\mathbf{v}_B$
	$\mathbf{\Pi}_B = \mathbf{\Pi}_A + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{I} \Leftrightarrow [\mathbf{I}; \mathbf{\Pi}_A]_A$		
Perdület der.	$\dot{\mathbf{\Pi}}_S = \Theta_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_S \boldsymbol{\omega}$	$\dot{\mathbf{\Pi}}_A = \Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega}$	$\dot{\mathbf{\Pi}}_B = \Theta_B \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_B \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{BS} \times m\mathbf{a}_B - \mathbf{v}_B \times m\mathbf{v}_S$
Kinet. nyom.	$\mathbf{D}_S = \Theta_S \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_S \boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{D}_A = \Theta_A \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_A \boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{D}_B = \Theta_B \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_B \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{BS} \times m\mathbf{a}_B$
Teljesítménytétel	$\dot{T} = P$		
Mozgási energia	$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \Theta_S \boldsymbol{\omega}$	$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \Theta_A \boldsymbol{\omega}$	$T = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \Theta_B \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{v}_B(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BS})$
Mozg. energia der.	$\dot{T} = \mathbf{I} \mathbf{a}_S + \mathbf{\Pi}_S \boldsymbol{\varepsilon}$		
Teljesítmény	$P = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i + \mathbf{M} \boldsymbol{\omega}$.		

4.1. táblázat. A merev test kinetika legfontosabb összefüggései.

5. fejezet

Függelék

5.1. Matematikai alapok – vektoralgebra

A dinamika tárgykörébe tartozó jelenségek leírásához célszerű vektorokat használni, ezért ebben a fejezetben összefoglaljuk a vektoralgebra legfontosabb definícióit és tételeit, a teljesség igénye nélkül.

A matematikában vektor alatt általában az *Euklideszi vektortér elemeit* értik. Az Euklideszi vektortér pontos definícióját nem mondjuk ki, mert a benne szereplő fogalmak értelmezése túlmutat e jegyzet keretein. Akkor tekinthetünk egy halmazt vektortérnek, ha megfelelően értelmezhető a halmaz elemeinek összeadása és skalárral való szorzása.¹ Egy vektortér akkor nevezhető Euklideszinek, ha még a *skaláris szorzás* is értelmezhető az elemei között.

A vektorok mechanikai számításokhoz történő használatához elegendő az alábbi, szemléletes definíció is:

5.1. definíció. *A vektorok irányított egyenesdarabokkal jellemezhető, a parallelogramma szabály szerint összegezhető mennyiségek.* ♣

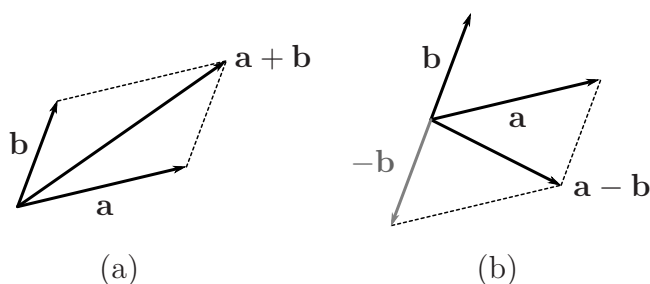
A parallelogramma szabály szerint egy **a** és egy **b** vektor összege az az **a + b** vektor, melynek hosszát és irányát az **a** és **b** vektorokból összeállított parallelogramma átlója adja meg, az 5.1/a ábra alapján. Nyilvánvaló a szerkesztésből, hogy az összeg nem függ az összeadandó vektorok sorrendjétől: **a + b = b + a**.

5.68. megjegyzés: Vannak olyan mennyiségek, melyek ugyan egyértelműen jellemezhetők irányukkal és nagyságukkal – azaz irányított egyenesdarabokkal –, de nem követik a parallelogramma szabályt, ezért nem vektorok. Ilyen mennyiség például a szögelfordulás: az 1.31 ábra alapján könnyen belátható, hogy egy test különböző tengelyek körüli véges nagyságú elfordulásainak sorrendje nem tetszőleges.

Azonban – az 1.49. tételnek megfelelően – a végtelenül kicsi, elemi elfordulások már vektorként összegezhetőek. ♣

A képletekben mindig világosan meg kell különböztetni egymástól a vektor- és skalár-mennyiségeket. A továbbiakban a vektorokat vastag betűvel szedve írjuk, pl. **a**, **b**. Kézírásban célszerű az aláhúzás, pl. a használata. Egy **a** vektor nagyságának jelölésére az **|a|**, vagy – előjeles nagyság esetében – az *a* szimbólumok szolgálhatnak (lásd 1.1. megjegyzés).

¹Vektorok összeadása asszociatív és kommutatív, létezik nullvektor és létezik minden vektornak az ellentettje. Továbbá, a skalárral való szorzás ún. disztributivitási szabályai is teljesülnek.



5.1. ábra. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok összegzése (a) és különbsége (b) a parallelogramma szabály alapján.

Egy \mathbf{a} vektor $(-\mathbf{a})$ *ellentettjét* úgy definiáljuk, mint egy \mathbf{a} -val megegyező nagyságú, \mathbf{a} -val párhuzamos, de azzal ellentétes irányú – tehát \mathbf{a} -val ellentétes *értelmű* – vektort. Ezt felhasználva, a parallelogramma szabály szerint két vektornak nemcsak az összege, hanem a különbsége is megszerkeszthető, az 5.1/b ábra szerint: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

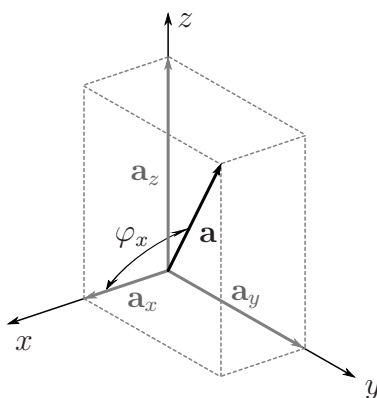
5.2. definíció. Egy \mathbf{a} vektor λ SKALÁRRAL VALÓ SZORZATÁNAK eredménye egy olyan $\lambda\mathbf{a}$ vektor, mely \mathbf{a} -val párhuzamos, nagysága pedig $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$. ♣

A skalárral való szorzással tehát a vektor hosszát és értelmét tudjuk megváltoztatni. Az ellentett képzése is a vektor skalárral való szorzásának speciális esete, $\lambda = -1$ esetén.

Számítások végzéséhez célszerű egy koordináta-rendszer bevezetésével szám n -esekkel jellemezni a vektorokat. A legegyszerűbb lehetőség a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer használata, (x, y, z) tengelyekkel. A parallelogramma szabály alapján egy \mathbf{a} vektor komponenseire bontható:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z, \quad (5.1)$$

ahol az \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y és \mathbf{a}_z vektorok az \mathbf{a} vektor egyes tengelyekre vetett vetületei. A vetítés szabályai miatt $|\mathbf{a}_x| = |\mathbf{a}| \cos(\varphi_x)$, ahol φ_x az \mathbf{a} vektor és az x tengely által bezárt szög (5.2 ábra).



5.2. ábra. Egy térbeli vektor komponensekre bontása

A koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos, egységnyi hosszúságú \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} bázisvektorok segítségével az \mathbf{a} vektor az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (5.2)$$

Ha rögzítjük a bázisvektorokat, akkor az \mathbf{a} vektor jellemzésére elegendő a bázisvektorok együtthatóinak, az \mathbf{a} vektor a_x, a_y, a_z skalár koordinátáinak a megadása, ún. oszlopvektor formájában:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Nagyon fontos, hogy a dinamika keretében használt vektorok valamilyen fizikai mennyiséget írnak le, tehát nem tekinthető bármilyen számhármassal egy vektor koordinátáinak.

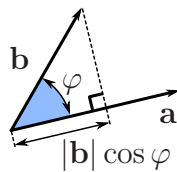
A v_1, v_2, v_3 számhármassal akkor tekinthető egy \mathbf{v} vektor három koordinátájának, ha egy másik, az eredetihez képest elforgatott koordináta-rendszerre áttérve az új koordinátákkal felírt $\mathbf{v}' = [v'_1 v'_2 v'_3]^T$ vektor és az eredeti $\mathbf{v} = [v_1 v_2 v_3]^T$ vektor között egy \mathbf{U} unitér forgatási mátrix teremt kapcsolatot: $\mathbf{v}' = \mathbf{U}\mathbf{v}$. Ilyen forgatási mátrixokat használunk a 3.2.3 fejezetben is.

Az Euklideszi tér vektorai esetében nem értelmezhető a vektorok térbeli elhelyezkedése, ezek *szabad vektorok*. A mechanikában azonban nagy jelentősége van bizonyos vektorok *támadáspontjának* vagy *hatásvonalának* is. A merev testek dinamikájában csak a hatásvonalnak van fizikai tartalma. A hatásvonallal kapcsolatos információt vektorkettősök segítségével lehet megadni – ezzel kapcsolatban lásd az 1.2.3 fejezetet.

5.3. definíció. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok SKALÁRIS SZORZATÁNAK eredménye skalármennyiség, melynek értéke

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\varphi), \quad (5.4)$$

ahol φ a két vektor által bezárt szög (5.3 ábra). ♣



5.3. ábra. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok skaláris szorzatának értelmezése.

A definícióból következik, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata zérus, párhuzamos vektorok skaláris szorzatának értéke pedig $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ vagy $-|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$. A szorzótényezők sorrendje közömbös, tehát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

A fentiek szerint az

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

vektorok skaláris szorzata:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}). \quad (5.6)$$

Figyelembe véve, hogy a bázisvektorok merőlegesek egymásra,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (5.7)$$

A skaláris szorzat formálisan végrehajtható a mátrixok szorzásának szabályai alapján is. Ehhez az első tényezőt 1×3 elemű mátrixnak (sorvektornak), a második tényezőt pedig 3×1 elemű mátrixnak (oszlopvektornak) kell tekinteni, azaz az első tényező transzponáltja szerepel a szorzatban:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (5.8)$$

Az \mathbf{a} vektor nagysága is könnyen számítható a skaláris szorzat segítségével, a Pythagoras-tétel alapján: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, és

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (5.9)$$

A skaláris szorzat segítségével ki tudjuk számítani egy adott \mathbf{a} vektor bármely irányú vetületeit, és így a koordinátáit és komponenseit is egy másik derékszögű koordináta-rendszerben. Ehhez az \mathbf{a} vektort a vizsgált irányba mutató egységvektorral, vagy a koordináta-rendszer (egységnyi hosszúságú) bázisvektoraival kell skalárisan szorozni. Például Descartes-féle (xyz) koordináta-rendszerben a koordináták

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}. \quad (5.10)$$

A vektor értékű komponensek meghatározásához meg kell szorozni a koordinátákat a megfelelő egységvektorokkal. $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$, ahol

$$\mathbf{a}_x = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_y = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_z = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}. \quad (5.11)$$

Itt a zárójelben lévő kifejezések skaláris szorzatok, tehát eredményük skalár.

Ha szeretnénk meghatározni egy \mathbf{a} vektor \mathbf{b} irányú vetületét (komponensét), akkor a fentiek szerint a \mathbf{b} irányú

$$\mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \quad (5.12)$$

egységvektorral kell beszoroznunk az \mathbf{a} vektort:

$$a_b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b \quad (\text{skalár koordináta}) \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_b = a_b \mathbf{e}_b \quad (\text{vektor komponens}). \quad (5.13)$$

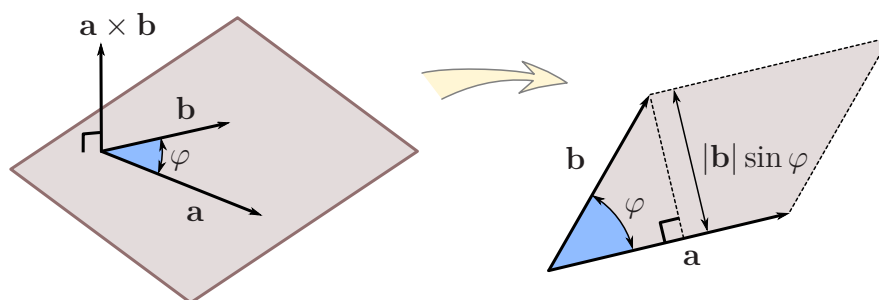
Hasonlóan számíthatjuk ki az \mathbf{a} vektor a_1, a_2, a_3 koordinátáit egy tetszőleges, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisvektorokkal megadott derékszögű koordináta-rendszerben, pl. $a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1$ és $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$.

A továbbiakban a tömörség érdekében helyenként elhagyjuk a szorzásra utaló pontot a skaláris szorzat kijelölésekor, tehát \mathbf{ab} is a két vektor skaláris szorzatát jelöli.

5.4. definíció. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok VEKTORIÁLIS SZORZATÁNAK eredménye vektor, melynek nagysága

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\varphi), \quad (5.14)$$

ahol φ a vektorok által bezárt szög. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor merőleges mind az \mathbf{a} , mind a \mathbf{b} vektorra és az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak (5.4 ábra). ♣



5.4. ábra. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok vektoriális szorzatának értelmezése.

A definícióból következik, hogy párhuzamos vektorok vektoriális szorzata a nullvektor, merőleges vektorok vektoriális szorzatának nagysága a két vektor abszolút értékének szorzatával egyenlő, továbbá $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. A 5.4 ábra alapján az is könnyen belátható, hogy az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok által kifeszített paralelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

A szorzótényezőket kifejtve

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}). \quad (5.15)$$

Figyelembe véve, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ és $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

A vektoriális szorzat számítása formálisan egy determináns kifejtésével is megtehető:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Számítások ellenőrzésére felhasználható, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata nulla, például $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

A vektoriális szorzat nem asszociatív, tehát $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Egy ilyen, *hármass vektoriális szorzat* kiszámítását könnyíti meg az alábbi tétel:

5.5. tétel. KIFEJTÉSI TÉTEL (*bac-cab szabály*).

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (5.18)$$

A *hármass vektoriális szorzat* eredménye olyan vektor, mely felírható a képlet bal oldalán zárójelben levő \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok lineáris kombinációjaként. A szorzatban középen álló vektort pozitív, a másik zárójelben levő vektort pedig negatív előjellel kell figyelembe venni. ♠

A kifejtési tételnek megfelelően,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (5.19)$$

A kifejtési tételből is látszik, hogy hármasszorzat nem értelmezhető, hiszen az $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ képletben a $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ szorzat eredménye már skalár, így nem lehet egy skaláris szorzat tényezője – a skaláris szorzatban mindkét tényezőnek vektornak kell lennie. E helyett bevezethető a *diadikus szorzat* fogalma.

5.6. definíció. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ DIADIKUS SZORZATA egy ún. tenzor. A tenzorok olyan lineáris operátorok, melyek egy tetszőleges \mathbf{v} vektorhoz egy másik vektort rendelnek. A diadikus szorzat esetében a hozzárendelési szabály a következő:

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}). \quad (5.20)$$

Tehát az $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ diadikus szorzat a \mathbf{v} vektorhoz egy \mathbf{a} irányú vektort rendel. ♣

Mivel $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ skalár, $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$ is igaz. Diadikus szorzattal írható le például egy \mathbf{v} vektornak adott \mathbf{a} irányra történő vetítése. Ehhez az (5.20) képletbe \mathbf{a} és \mathbf{b} helyébe egységnyi hosszúságú, $\mathbf{e}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ vektorokat kell behelyettesíteni:

$$\mathbf{v}_a = (\mathbf{e}_a \circ \mathbf{e}_a)\mathbf{v} \equiv \mathbf{e}_a(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{v}). \quad (5.21)$$

Innen látható, hogy az (5.11) képletekkel megadott számítások is kifejezhetőek a diadikus szorzat segítségével, pl. $\mathbf{a}_x = (\mathbf{i} \circ \mathbf{i})\mathbf{a}$.

Adott koordináta-rendszerben a diadikus szorzatként kifejezhető tenzort egy mátrix segítségével reprezentálhatjuk (azaz írhatjuk le):

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Ezt a mátrixot a \mathbf{v} vektorral szorozva éppen az (5.20) definíciónak megfelelő eredményt kapjuk. A skaláris szorzathoz hasonlóan, két vektor diadikus szorzata is felírható a mátrixszorzás analógiájára. Ezúttal nem a szorzat első, hanem a második tényezője tekintendő sorvektornak:

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

5.7. definíció. Az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok HÁRMAS VEGYES SZORZATA $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. ♣

A hármasszorzat az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát adja meg. Ez alapján könnyen belátható, hogy a szorzat bárhogy zárójelezhető és a tényezők ún. *ciklikus permutációja* sem változtatja meg a végeredményt:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (5.24)$$

Mivel a skaláris szorzat tényezői felcserélhetők, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ is teljesül.

5.2. A sebességredukciós képlet levezetése transzformációs mátrixokkal

A 3.2.3 fejezetben bevezetett transzformációs mátrix segítségével a sebességredukciós képlet is levezethető. Rögzítsük az álló vonatkoztatási rendszerhez az (xyz) koordináta-rendszert, a mozgó merev testhez pedig a $(\xi\eta\zeta)$ rendszert! Célunk a sebességvektorok kifejezése az (xyz) rendszerben. A merev test B pontjának helyvektora az (xyz) rendszerben

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}. \quad (5.25)$$

A merev test A pontjából a B pontjába mutató vektort kifejezhetjük a testhez kötött $(\xi\eta\zeta)$ rendszerben is. Legyen ez a vektor $\boldsymbol{\rho}_{AB}$! A (3.97) egyenletben megadott transzformációs mátrix segítségével felírhatók az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AB} &= \tilde{\mathbf{T}}\boldsymbol{\rho}_{AB}, \\ \boldsymbol{\rho}_{AB} &= \tilde{\mathbf{T}}^T\mathbf{r}_{AB}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Következésképpen,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \tilde{\mathbf{T}}\boldsymbol{\rho}_{AB}. \quad (5.27)$$

Az egyenlet mindkét oldalát idő szerint deriválva

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \dot{\tilde{\mathbf{T}}}\boldsymbol{\rho}_{AB} + \tilde{\mathbf{T}}\dot{\boldsymbol{\rho}}_{AB}. \quad (5.28)$$

A merev testhez kötött rendszerben megadott $\boldsymbol{\rho}_{AB}$ vektor komponensei nem változnak, tehát a fenti kifejezés utolsó tagja nulla. (5.26) figyelembevételével

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \dot{\tilde{\mathbf{T}}}\tilde{\mathbf{T}}^T\mathbf{r}_{AB}. \quad (5.29)$$

Az eredményt összevetve a sebességredukciós képlettel, arra jutunk, hogy a szögsebességgel való vektoriális szorzás kiváltható az

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\tilde{\mathbf{T}}}\tilde{\mathbf{T}}^T \quad (5.30)$$

mátrixszal való szorzással. Ha (3.97) alapján behelyettesítjük a $\tilde{\mathbf{T}}$ mátrix elemeit, akkor az alábbi mátrixot kapjuk:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \alpha_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_2\dot{\alpha}_2 + \alpha_3\dot{\alpha}_3 & \beta_1\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\alpha}_2 + \beta_3\dot{\alpha}_3 & \gamma_1\dot{\alpha}_1 + \gamma_2\dot{\alpha}_2 + \gamma_3\dot{\alpha}_3 \\ \alpha_1\dot{\beta}_1 + \alpha_2\dot{\beta}_2 + \alpha_3\dot{\beta}_3 & \beta_1\dot{\beta}_1 + \beta_2\dot{\beta}_2 + \beta_3\dot{\beta}_3 & \gamma_1\dot{\beta}_1 + \gamma_2\dot{\beta}_2 + \gamma_3\dot{\beta}_3 \\ \alpha_1\dot{\gamma}_1 + \alpha_2\dot{\gamma}_2 + \alpha_3\dot{\gamma}_3 & \beta_1\dot{\gamma}_1 + \beta_2\dot{\gamma}_2 + \beta_3\dot{\gamma}_3 & \gamma_1\dot{\gamma}_1 + \gamma_2\dot{\gamma}_2 + \gamma_3\dot{\gamma}_3 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Tudjuk, hogy a bázisvektorok egységnyi hosszúságúak. Például $\mathbf{i}^2 = 1$ -nek megfelelően $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Ennek az idő szerinti deriváltja

$$\alpha_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_2\dot{\alpha}_2 + \alpha_3\dot{\alpha}_3 = 0. \quad (5.32)$$

Két hasonló egyenlet írható fel β_{123} -mal és γ_{123} -mal, tehát a mátrix főátlójában szereplő tagok nullák.

Azt is ki tudjuk használni, hogy a különböző bázisvektorok szorzata nulla, például $\mathbf{ij} = 0$. Következésképpen, $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$, amiből

$$(\alpha_1\dot{\beta}_1 + \alpha_2\dot{\beta}_2 + \alpha_3\dot{\beta}_3) + (\beta_1\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\alpha}_2 + \beta_3\dot{\alpha}_3) = 0, \quad (5.33)$$

azaz

$$(\alpha_1\dot{\beta}_1 + \alpha_2\dot{\beta}_2 + \alpha_3\dot{\beta}_3) = -(\beta_1\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\alpha}_2 + \beta_3\dot{\alpha}_3). \quad (5.34)$$

Két hasonló egyenlet írható fel a mátrix többi, egymáshoz képest szimmetrikusan elhelyezkedő elem-párjára is. Következésképpen, a $\mathbf{\Omega}$ mátrix antiszimmetrikus és az

$$\omega_x = \beta_1\dot{\gamma}_1 + \beta_2\dot{\gamma}_2 + \beta_3\dot{\gamma}_3,$$

$$\omega_y = \gamma_1\dot{\alpha}_1 + \gamma_2\dot{\alpha}_2 + \gamma_3\dot{\alpha}_3,$$

$$\omega_z = \alpha_1\dot{\beta}_1 + \alpha_2\dot{\beta}_2 + \alpha_3\dot{\beta}_3$$

jelölésekkel

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

alakúra hozható. Ellenőrizhető, hogy $\mathbf{\Omega}\mathbf{r}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$, tehát ez a mátrix valóban megfelelhető a korábban bevezetett szögsebességvektornak.

Tárgymutató

- o – koordináták idő szerinti deriváltja, 91
- ívhosszparaméter, 19
- álló pólusgörbe, 75
- állandó nagyságú vektor deriváltja, 40
- általános koordináta, 145
- általánosított perdülettétel, 173, 176
- érintő egységvektor, 11

- abszolút gyorsulás, 95
- abszolút sebesség, 91
- abszolút szöggyorsulás, 97
- abszolút szögsebesség, 92
- akció-reakció törvénye, 112
- aktív erők, 115
- anholonom kényszer, 25
- anyagi pont, 5
- anyagi pont mozgása körpályán, 15
- axiális vektor, 61

- bac-cab szabály, 291
- befutási törvény, 19
- binormális egységvektor, 13

- Cardano-probléma, 78
- centrális egyenes, 48
- centrális erők, 113, 171
- centrális mozgás, 171
- centrifugális erő, 129
- Chandler-periódus, 266
- Coriolis-gyorsulás, 96
- csúszási súrlódási tényező, 235
- csomóvonal, 251

- deviációs nyomaték, 188
- diadikus szorzat, 291
- dinamika alaptörvénye, 119
- dinamika alaptétele, 119
 - merev testre, 184
- dinamikus kiegyensúlyozatlanság, 239
- ekvipotenciális felület, 166

- elemi elfordulás, mint vektor, 59
- elemi mozgások, 47
- elforgatás, 56
- eltolás, 56, 57
- energiaellipszoid, 257
- erő, 110
- erőhatások függetlenségének elve, 114
- erőimpulzus, 134
- erőlökés, 134
- erőtörvény, 115
- erőtér, 149
- Euler-féle formula, 37
- Euler-féle geometriai egyenletek, 252
- Euler-féle periódus, 266
- Euler-formula
 - perdület derivált, 210
- Euler-szögek, 249
- explicit időfüggés, 155

- főtehetetlenségi nyomaték, 189
- főtehetetlenségi nyomatékok, 198
- forgáspár, 46
- forgástengely, 57
- forgó mozgás, 57
 - síkbeli, 56
- foronómiai görbék, 20

- gördülés dinamikai feltétele, 234
- gördülés kinematikai feltétele, 233
- Galilei-féle relativitási elv, 110
- gravitációs erő, 115, 132
- gyorsulás, 10
- gyorsulásállapot, 62
- gyorsuláspólus, 70
- gyorsulásredukciós képlet, 62
- gyorsulásszög, 66, 70

- hármas vegyes szorzat, 292
- hármas vektoriális szorzat, 291
- haladó mozgás

- síkbeli, 56
- térbeli, 57
- hatás-ellenhatás törvénye, 112
- helyvektor, 7
- herpolhodiagörbe, 258
- herpolhodiakúp, 258
- holonom kényszer, 25
- ideális kényszer, 143, 144
- implicit időfüggés, 155
- impulzus (anyagi ponté), 111
- impulzusmegmaradás tétele, 138
- impulzusmomentum (anyagi ponté), 169
- impulzusnyomaték (anyagi ponté), 169
- impulzustétel, 134
- impulzustétel anyagi pontrendszerre, 137
- impulzustétel differenciális alakja, 134
- inerciarendszer, 108
- iránykoszinusz, 202
- jerk, 10
- kötött vektor
 - hatásvonalához kötött, 43
 - ponthoz kötött, 43
- közvetett összefüggés, 155
- közvetlen időfüggés, 155
- kísérő triéder, 13
- kényszer, 23
- kardáncsukló, 253
- Kepler-törvények, 169
- keringés, 15
- keringés szöggyorsulása, 18
- keringés szögsebessége, 18
- kifejtési tétel, 291
- kinematika, 5
- kinematikai vektorkettős, 45
- kinetikai nyomaték, 173
- kinetikai vektorkettős, 173
- kinetikus energia
 - merev testé, 220
 - síkmozgás esetére, 230
- kinetikus energia (anyagi ponté), 142
- konzervatív erőtér, 157
- konzervatív mechanikai rendszer, 160
- koordináta-rendszer, 6
- koordináta-rendszer (relatív kinematika), 88
- lendület (anyagi ponté), 111
- lendületmegmaradás tétele, 138
- mérnöki közelítés
 - perdület derivált, 277
- mechanikai energia, 160
- mechanikai rendszer, 7
- merev test, 35
- merev test gyorsulásállapota, 62
- merev test helyzetének megadása, 35
- merev test síkmozgása, 56
- merev test sebességállapota, 36
- mozgás leírása, 6
- mozgásegyenlet, 131
- mozgási energia
 - merev testé, 220
 - síkmozgás esetére, 230
- mozgási energia (anyagi ponté), 142
- mozgástörvény, 7
- mozgó pólusgörbe, 75
- munkatétel, 147
- nehézségi erő, 115, 133
- nem ideális kényszer, 118
- Newton első törvénye, 108
- Newton harmadik törvénye, 112
- Newton második törvénye, 110
- Newton negyedik törvénye, 114
- normális egységvektor, 13
- normális gyorsulás, 12, 13
- nutációs szög, 251
- nutációs szögsebesség, 252
- pörgettyűhatás nyomatéka, 211
- pörgettyűmozgás, 248
- pálya, 8
- pályagyorsulás, 20
- párhuzamos tengelyek tétele, 199
- póluspont, 67
- pólusvándorlás sebessége, 75, 81
- parallelogramma szabály, 287
- perdület (anyagi ponté), 169
- perdület (anyagi pontrendszeré), 177
- perdületellipszoid, 262
- perdületmegmaradás tétele, 172
- pillanatnyi csavarmozgás, 49
- pillanatnyi csavartengely, 49
- pillanatnyi forgástengely, 47
- pillanatnyi forgó mozgás, 47

- pillanatnyi haladó mozgás, 47
pillanatnyi nyugalom, 47
Poincot-ellipszoid, 222
poláris vektor, 61
polhodiakúp, 258
potenciálfüggvény, 152
potenciális energia, 152
potenciális örvény, 159
potenciális erőter, 152
precessziós szög, 250
precessziós szögsebesség, 252
pseudovektor, 61
- redukció
 erőrendszeré, 44
reguláris precesszió, 272
relatív erő, 127
relatív gyorsulás, 95
relatív kinematika, 88
relatív kinetikus energia, 164
relatív mozgási energia, 164
relatív sebesség, 91
relatív szöggyorsulás, 97
relatív szögsebesség, 92
relatív teljesítmény, 164
rotáció, 56, 57
rotációs szög, 251
rotációs szögsebesség, 252
ruck, 10
rugóerő, 116
- síkmozgás
 dinamikai értelemben, 226
síkmozgás kinematikai értelemben, 56
súlyos tömeg, 132
súlytalanság, 113
súrlódási tényező
 csúszási, 235
 tapadási, 234
sebesség, 9
sebességállapot, 37
sebességpólus, 67
sebességpólus gyorsulása, 82
sebességredukciós képlet, 37
simulókör, 14
skaláris szorzat, 289
statikai határozatlanság, 118
statikai vektorkettős, 44
- statikus kiegyensúlyozatlanság, 238
Steiner-tétel, 199
 síkmozgás esetén, 229
szöggyorsulás, 62
szögsebesség, 38
szállító gyorsulás, 96
szállító sebesség, 92
szállító szöggyorsulás, 97
szállító szögsebesség, 92
szabad mozgás, 21
szabad tengely, 189
szabad vektor, 43
szabadsági fok, 21
szintfelület, 154
szuperpozíció elv, 114
- tömeg, 110
tömegközéppont, 136
tömegpont, 111
térbeli mozgás
 dinamikai értelemben, 230
tangenciális egységvektor, 11
tangenciális gyorsulás, 11, 13
tapadási súrlódási tényező, 234
tehetetlen tömeg, 132
tehetetlenség törvénye, 107
tehetetlenségi főtengely, 189
tehetetlenségi főtengelyek, 198
tehetetlenségi nyomaték, 183
 tengelyre számított, 188
teljesítmény
 merev testre, 223
teljesítménytétel
 merev testre, 223
teljesítménytétel (anyagi pontra), 142
tenzor, 291
torzió, 15
transzláció, 56, 57
- unilaterális kényszer, 24
- véges mozgások, 55
vektor, 287
vektor deriválása
 mozgó vonatkoztatási rendszerben, 91
vektor ellentettje, 288
vektor komponensei, 288
vektor koordinátái, 288

- vektor koordinátáinak, vetületeinek számítása, 290
- vektor skalárral való szorzata, 288
- vektoriális szorzat, 290
- vektorkettős, 43, 45
 - kinematikai, 45
- vektorok diadikus szorzata, 291
- vektorok hármas vegyes szorzata, 292
- vektorok skaláris szorzata, 289
- vektorok vektoriális szorzata, 290
- virtuális teljesítmény, 144
- viszkózus csillapító erő, 116
- vonatkoztatási rendszer, 6
- vonatkoztatási rendszer (relatív kinematika), 88

Irodalomjegyzék

- [1] Béda Gyula-Bezák Antal: Kinematika és dinamika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [2] Budó Ágoston: Kísérleti fizika I. 12. kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.
- [3] Budó Ágoston: Mechanika, 10. kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.
- [4] Csernák Gábor, Stépán Gábor: A műszaki rezgésstan alapjai, elektronikus jegyzet, 2013
- [5] Dede Miklós: Kísérleti fizika I. Kossuth Lajos Tudományegyetem, 14. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992
- [6] Fényes Imre (szerk.): Modern fizikai kisenciklopédia, Gondolat könyvkiadó, Budapest, 1971.
- [7] Hraskó Péter: Elméleti fizika I – Elméleti mechanika, Janus Pannonius Tudományegyetem jegyzetkiadója, 1995
- [8] Hraskó Péter: A fizika axiomatizálásáról, Fizikai szemle, 2009/7-8. pp. 229.
- [9] Landau-Lifsic: Elméleti fizika I – Mechanika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974
- [10] Ludvig Győző: Lengésstan példatár, Műegyetemi kiadó, 41033, 1998.
- [11] Ludvig Győző: Dinamika példatár II. rész, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [12] Muttnyánszky Ádám: Kinematika és kinetika, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.
- [13] Pach Zs. Pálné - Frey Tamás: Vektor- és tenzoranalízis, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970
- [14] Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete, 4. kiadás, Akadémiai kiadó, Budapest, 1998
- [15] Stépán Gábor: Kinematika és dinamika előadások, Budapesti Műszaki Egyetem, 1998-99
- [16] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979
- [17] Völgyesi Lajos: A Föld nutációs mozgása, Fizikai Szemle 2013/6, pp. 187-192
- [18] Völgyesi Lajos: A Föld precessziós mozgása, Fizikai Szemle 2013/5, pp. 152-156
- [19] Zentai Béla: Vadászfegyverek és löszerek, Magánkiadás, ISBN:9632027973, Budapest, 2002.