

# Mathematica bevezetés

VEM alapjai I-2. labor - 2016/2017/I. félév

Készítette: Berezvai Szabolcs

## A Mathematica kezelőfelülete

**File:** Alapvető fájlkezelés parancsai (megnyitás, mentés, nyomtatás, legutóbbi fájlok, stb...)

**Edit:** Szerkesztési műveletek (másolás, beillesztés, kivágás, keresés, stb...)

**Insert:** Beszúrás menü: új cellák, input-output sorok, speciális karakterek, mátrixok, de akár kép, szöveg, stb...

**Format:** A cellák és a szöveg formázása: betűtípus, háttér, színek, igazítás stb...

**Cell:** A cellákkal kapcsolatos legfontosabb műveletek, felosztás, egyesítés. DE itt található a Notebook history MINDENT (!!!!!) lehet látni

**Graphics:** Ábrákkal kapcsolatos eszköztárak, rendezési opciók

**Evaluation:** A notebook futtatása (Evaluate notebook) illetve a Kernellel kapcsolatos információk (Start/Quit Kernel)

**Palettes:** Szerkesztési és egyéb megjelenítésbeli segédeszközök. Görög betűk, szimbólumok beszúrása

**Window:** Ablakokkal kapcsolatos beállítások

**Help:** Mathematica Documentation (nagyon hasznos, sok jó példa, módosítható, MINDEN megtalálható itt). Licence információk, stb.... A Help-et mindig elérjük ha az adott parancsra, függvényre kattintunk és F1-et nyomunk.

Az input cellák futtatása: Shift+Enter vagy numerikus billentyűzet Enter

A notebookokba nem csak futtatható ún. *Input* cellát helyezhetünk el. Elhelyezhetünk szöveget (mint pl. ez a cella is), vagy akár címet, fejezetet, alfejezetet stb..

A notebookban található valamennyi változó értékét az alábbi paranccsal törölhetjük, (másik opció az Evaluation/Quit Kernel)

`Clear["Global`*"]`

Ha egy Input cellába kommentet szeretnénk elhelyezni azt a (\* \*) közé írva tehetjük meg.

## Alapműveletek

**Összeadás, kivonás, szorzás, osztás**

A szokásos (+, -, \*, /) karakterek segítségével

$217 \times 5713$  (\*A szorzást a "\*" és szóköz segítségével is megadhatjuk\*)

$217 * 5713$

Times [217, 5713]

A Mathematica ahol tud szimbolikusan tárolja az értékeket ennek megfelelően ha osztás esetében törtalakban tárolódnak az értékek

$1 / 26 + 2 / 52$

Ha azt szeretnénk, hogy numerikus értéket kapjunk, használjuk az N[ ] beépített függvényt, vagy ún. lebegőpontos számábrázolást:

N[1 / 26 + 2 / 52]

N[1 / 26 + 2 / 52, 3]

(\* Az N[a,m] függvény az "a" értéket "m" számjegy pontossággal adja meg \*)

1 / 26 + 2 / 52 // N

(\* A kifejezés végén a //N-t megadva a numerikus értéket adja vissza \*)

1. / 26 + 2 / 52 (\*Ha egy helyen is áttérünk a lebegőpontos számábrázolásra, akkor a teljes cella értéke numerikus lesz \*)

Ha nem szeretnénk egy adott cella futtatása után a kimenetet látni, akkor pontosvesszőt (;) kell tenni az adott sor végére

1 / 26 + 354 \* 243;

További alpműveletek esetében a szokásos karakterek mellett a Palettes/Basic Math Assistant-ból, illetve billentyűkombinációkkal szűrhetünk be különböző kifejezéseket:

Ctrl+2 =  $\sqrt{\square}$  - Gyökvonás

Ctrl+/ =  $\frac{\square}{\square}$  - tört megadása

Ctrl+6 =  $\square^{\square}$  - Hatványozás

Ezeket természetesen lehet kombinálni is:

Ctrl+2, Ctrl+6 =  $\sqrt{\square^{\square}}$

Görög betűk: Esc+latin betű + Esc pl:  $\pi$ =Esc+p+Esc

A % mindig visszaadja a legutóbbi kimenetet. Adott kimeneti cellára hivatkozhatunk még az Out-[szám] paranccsal is

25 !

% / (3 !  $\times$  22 !)

% \* .1<sup>3</sup> .9<sup>22</sup>

$\sqrt[3]{\text{Out}[14]}$  (\*Az Out[14]-es kimeneti cellában szereplő értékkel végzett művelet \*)

## Változók

A változónak tetszőleges nevet adhatunk. Azonban vannak védett karakterek E,  $\pi$ , D, I, N, stb... Amennyiben a változóhoz még nem rendeltünk értéket akkor kék-színnel jelennek meg, ha azonban értéket rendelünk hozzá fekete lesz:

2 a

a = 5; (\* Ezt a sort lefuttatva értéket adtunk az "a" változónknak, így fekete lett \*)

A változónak tetszőleges nevet adhatunk. Azonban vannak védett karakterek E,  $\pi$ , D, I, N, stb...

Amennyiben a változóhoz még nem rendeltünk értéket akkor kék-színnel jelennek meg, ha azonban értéket rendelünk hozzá fekete lesz.

$a = 17 / 13 + 211 / 93;$

$b = 23 a; c = (a + b) / 51$

Az értékmegadás kétféle lehet azonnali és késleltetett:

$a = 5! + 127 / 242$  (\* Ez az azonnali megadás,  
itt rögtön elvégezzük a műveletet és az eredmény a változóba íródik \*)

$b := 5! + 127 / 242$  (\* Késleltetett megadáskor, a műveletet nem végezzük el, nincs kimenet,  
csak akkor hajtjuk végre a műveletet, ha meghívjuk az adott változót \*)

$2 b + 1$  (\* Itt meghívtuk a változót, elvégeztük a műveletet\*)

A két értékadás összehasonlítása

$d = 6;$

$a1 = 3 d$

$a2 := 4 d$

$d = 7;$

$a1$  (\*  $a1$  érték nem változik \*)

$a2$  (\*  $a2$  érték változik,

mert  $d$  is változott és csak itt a változó meghívásakor végeztük el a műveletet\*)

A változók tartalmazhatnak paramétereket is

$\text{Clear}[d];$

$A1 = \frac{d^2 \pi}{4};$

$A1 /. d \rightarrow 5$  (\* $d$  helyére ebben a kifejezésben 5-  
t helyettesítünk. Ez azonban nem ad értéket a " $d$ " változónak \*)

Természetesen lehet több paraméterünk is

$A2 = L \frac{d^2 \pi}{4};$

$A2 /. d \rightarrow 5 /. L \rightarrow 6$

$A2 /. \{d \rightarrow 5, L \rightarrow 6\}$

(\* Ha több értéket kell behelyettesíteni, listát is használhatunk \*)

## Zárójelek

A matematikai műveleteknél **CSAK** a kerek zárójel "(" használható!!!!

$x (x + 2)^2$

A szögletes zárójel a függvények argumentumát jelöli. A beépített függvényeket mindig nagybetűvel **KELL** meghívni

$\text{Cos}[\pi / 3]$

A kapcsos zárójel a listák megadásánál használandó:

```
{1, 2, 3, 4}
```

Ha rosszul használjuk az zárójeleket hibaüzenetet kapunk

```
[x + y (1 - y)]^2
```



```
(1, 2)
```



```
Sin (π)
```

## Alapfüggvények

Valamennyi matematikai alapfüggvény elérhető Sin, Cos, Tan, ArcTan, Log, stb... Fontos tudni, hogy ezeknek a függvényeknek az értékeit is szimbolikusan tárolja a Mathematica

```
Sin[π / 3]
```

```
Sin[π / 12]
```

```
ArcTan[1]
```

```
ArcCos[26]
```

Log[2 E] (\* A Log[] a természetes alapú logaritmust jelöli, E pedig az Euler-szám \*)

Log[3, 25] (\* A két argumentumú Logaritmus függvényben az első érték az alap, míg a második a hatványérték \*)

## Egyenletek

Az egyenleteknél két egyenlőségjelet használunk ==, ennek a kimenete igaz/hamis lehet

```
2 * 17 - 34 == 0
```

```
3 == 4
```

```
2 x + x - 2 == 3 x + 5 - 7
```

3 = 4 (\* Az egy "=" jel, értékadást jelent, ezért ütközünk hibába \*)

Egyenletek analitikus (szimbolikus) megoldására a Solve parancs szolgál:

```
Solve[ x^2 - 7 x + 10 == 0, x]
```

Solve[ x^2 - P x + 10 == 0, x] (\*Ha a kifejezés tartalmaz egy "P" paramétert, akkor paraméteres megoldást kapunk \*)

Solve[ x^2 - P x + 10 == 0, P] (\* Most a változó, amelyre megoldjuk az egyenletet a "P", és "x" a paraméter \*)

A megoldás behelyettesítése

```
solution = Solve[ x^2 - 7 x + 10 == 0, x]
```

x /. solution[[2]] (\* Itt "x" helyére a második megoldást helyettesítettük be \*)

x^3 /. solution[[1]] (\*Itt pedig az első \*)

Egyenletrendszer esetén az egyenleteket és a változókat listaként kell megadni kapcsolószárójelek között

```
Solve[{x^2 - y == 1, -x + y == 1}, {x, y}]
```

```
Solve[{x^2 - P y == 1, -P^2 x + y == 1}, {x, y}] (* Paraméteres egyenletrendszer *)
```

Numerikus megoldásra az NSolve parancs alkalmazható

```
Solve[x^3 - 10 x^2 + 5 x + 1 == 0, x] (* Ez a pontos analitikus megoldás *)
```

```
NSolve[x^3 - 10 x^2 + 5 x + 1 == 0, x] (* Ez pedig a numerikus *)
```

Egy másik numerikus megoldó a FindRoot. Ebben az esetben meg kell adni a változó egy kezdeti értékét ahonnan keresni kezdjük a megoldást.

```
FindRoot[x^2 == Cos[x], {x, .85}]
```

## Függvények

A függvények megadása 4 féle lehet

```
f1 = (Sin[x])^2 + 2 Cos[x] + x^3 (* változóba írom *)
```

```
f2 := (Sin[x])^2 + 2 Cos[x] + x^3 (* változóba írom késleltetve (lásd fentebb) *)
```

```
f3[x_] = (Sin[x])^2 + 2 Cos[x] + x^3 (* definiálom a függvény változóját*)
```

```
f4[x_] := (Sin[x])^2 + 2 Cos[x] + x^3 (* definiálom a függvény változóját késleltetve*)
```

```
f3[t] (* Ennél a megadásnál könnyen le tudom cserélni a változót *)
```

```
f1 /. x -> t (* Itt csak a "behelyettesítéssel" lehet megoldani *)
```

Függvény értékének kiszámítása

```
f2 /. x -> 2 (* Itt csak a behelyettesítés működik *)
```

```
f4[5] (* Itt kicsit egyszerűbb *)
```

Alternatív megadási módok

```
f4@5
```

```
5 // f4
```

Többváltozós függvény megadása:

```
f3[x_, y_, z_] := (Sin[x])^2 + 2 Cos[x] + x^3 + 2 ArcTan[y z]
```

Összetett függvény megadása

```
g1[x_] = x^3; g2[x_] := 5 x + Sin[3 x]
```

```
g1[g2[y]]
```

## Függvények ábrázolása

Plot[] függvény segítségével. Rengeteg beállítási lehetőség van, a SÚGÓban kell megnézni.

```
Plot[Sin[2 x^2] / (x^2 + 1), {x, 0, 10}]
```

```
Plot[ $\frac{\sin[x^2]}{x^2 + 1}$ , {x, 0, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red]
```

```
Plot[f4[x], {x, -1, 1}, AxesLabel -> {"x", "f(x)"}]
```

Több függvény ábrázolása listákkal

```
ff1 = x e-x/2 Cos[π x]; ff2 = x e-x/2 Sin[π x];
```

```
Plot[{ff1, ff2}, {x, 0, 12}]
```

```
Plot[{ $\sqrt[3]{x}$ , x, x^3}, {x, 0, 2}, PlotRange -> {0, 1.6},  
PlotStyle -> {{Dashing[{.02}]}, {Red}, {Thickness[.007]}}]
```

(\* Különböző tulajdonságokat is listaként adjuk meg \*)

Több grafikon egyben ábrázolása

```
PL1 = Plot[ $\frac{\sin[x^2]}{x^2 + 1}$ , {x, 0, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red];
```

```
PL2 = Plot[ $\frac{\sin[2 x^2]}{x^2 + 1}$ , {x, 0, 10}];
```

```
Show[PL1, PL2]
```

A plot-ot is definiálhatjuk függvényként

```
PL3[x_, y_] := Plot[ $\frac{\sin[x^2]}{x^2 + 1}$ , {x, 0, y}]
```

```
PL3[x, 5]
```

## Analízis

**Deriválás** számos módon elérhető

```
F1 = x e-x/2 Cos[π x];
```

```
F2[x_] = x Sin[π x / Log[x]];
```

```
D[F1, x]
```

```
∂x F2[x]
```

Amennyiben a függvény argumentuma is definálva van, lehet használni a "vesszőt" is mint deriválási művelet

```
F2'[t] (* Itt először átváltja a változót "t"-re és eszerint derivál *)
```

Magasabb rendű deriváltak

```
D[F2[y], {y, 3}]
```

```
∂y,y,y F2[y]
```

```
F2''[t]
```

Vegyes derivált (Young-tétel)

```
F3 = Cos[x y] + x y z^2;
```

```
D[F3, y, z]
```

$\partial_{y,z} F3$

Érdekesség a késleltetett függvénymegadáshoz

`h[x_] :=  $\partial_x ((x+1) \cos[x])$`

`h[2] (* HIBÁS eredményt ad, mert előbb helyettesíti be a 2-t, minthogy deriválna *)`

`f[x_] =  $\partial_x ((x+1) \cos[x])$  (* Ha nincs késleltetve, akkor helyes *)`

`f[2]`

### Integrálás

Itt is több felírási mód lehetséges

`G1 =  $\sin[x] e^x$ ;`

`G2[x_] =  $\cos[x] x^5$ ;`

`Integrate[G1, x]`

`Integrate[G2[x], x]`

$$\int (G1 * G2[x]) \, dx$$

**Fontos:** határozatlan integrálásnál a konstans nem adódik hozzá az eredményhez!

`Integrate[G1, {x, -1, 2}]`

`Integrate[G2[x], {x, -1, 2}]`

$$\int_{-1}^2 (G1 * G2[x]) \, dx$$

Többszörös függvények integrálása

`G3 =  $x y^2$ ;`

`Integrate[Integrate[G3, {x, -1, 2}], {y, -1, 1}]`

`Integrate[G3, {x, -1, 2}, {y, -1, 1}]`

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^2 G3 \, dx \, dy$$

## Vektorok, mátrixok

### Vektorok

Megadása kapcsos zárójelek között, elválasztás pedig vesszővel

`v1 = {1, 2, 3, 4}`

`v2 = {5, 6, 7, 8}`

Alapműveletek

`v1 + v2`

`v1 * v2 (* Ez a megfelelő elemeket szorozza össze *)`

`v1.v2 (* Skáláris szorzás *)`

```

u1 = {1, 2, 3};
u2 = {1, 1/2, 1/3};
Cross[u1, u2] (* vektori szorzás, csak 3x3-as vektorokra *)

Length[v1] (*A vektor mérete --> hány elemből áll*)

Norm[v1] (* A vektor hossza / abszolút értéke *)

Megjelenítés "vektorosan"

v3 = {5, 6, 7, 8, 9};
v3 // MatrixForm (* Ezt csak így szabad megjeleníteni *)
v4 = {5, 6, 7, 8, 9} // MatrixForm (*Ha így definiáljuk,
    akkor nem lehet műveleteket elvégezni vele *)

Vektorok megadása különböző szabályok segítségével

v5 = Range[5] (* 5-ig minden egész szám kerül a vektorba *)
v6 = Range[-2, 10, 2] (* -2 és 10 között 2-es lépésekkel minden szám *)
v7 = Table[i2, {i, -2, 4, 2}] (* Az "i" futóindex -2 és 4 között 2-
    es lépéssel halad és az egyes kiértékelések eredményei lesznek a lista elemei *)
v8 = Table[xi, {i, 0, 5}]

A vektor adott sorszámú elemének megadása

```

```
v8[[4]]
```

### Mátrixok

A mátrixok 2D listaként kerülnek definiálásra. Megadási módjuk lehet az Insert menü Table/Matrix parancsból vagy

```
M1 = {{1, 5, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}};
```

```
M1 // MatrixForm
```

Hasonlóképp a vektorokhoz, itt is megadhatunk szabályt Table parancs segítségével

```
M2 = Table[i * 10 + j, {i, 0, 2}, {j, 1, 3}]
```

```
M2 // MatrixForm
```

Műveletek mátrixokkal

```
M1 + 2 M2
```

```
M1.M2 (* Mátrixszorzás SZÁMÍT A SORREND!!!! *)
```

```
M2.M1
```

```
Det[M1]
```

```
Det[M2] (* Determináns *)
```

```
Inverse[M1] (* Inverz*)
```

```
Inverse[M2]
```

```
Transpose[M1]
```

```
M1.u1 (* Mátrix-vektor szorzás *)
```

```
Dimensions[M1] (* Mátrix mérete *)
```

Mátrix elemének meghatározása

```
M1[[2, 3]]
```



Sajátérték, sajátvektor számítás

Eigenvalues [M2]

Eigenvectors [M2]

Eigensystem [M2]

## További hasznos függvények, érdekességek

Expand  $[(x + 5)^3 (2x - 1)^2]$

Factor  $[x^3 + 2x^2 - 5x - 6]$

Together  $\left[x + \frac{2}{x^2 + 1}\right]$

Apart  $\left[\frac{x}{x^2 + 3x + 2}\right]$

Simplify  $[x(3 - x) - 5x^2 + (x - 1)(2x + 3)]$

FullSimplify  $[x(3 - x) - 5x^2 + (x - 1)(2x + 3)]$

GraphicsRow[{Plot[Abs[Cos[x] - .5], {x, 0, 4π}], Plot[Abs[Abs[x] - 1], {x, -3, 3}]}]

redRect = {Red, Opacity[.67], Rectangle[{-1, 1}, {1, 2}]};

thickCircle = {Thickness[.02], Opacity[.5], Green, Circle[{1, 1}, 1]};

purpleDisk = {Purple, Opacity[.4], Disk[{0, 1}, .7]};

Graphics[{redRect, thickCircle, purpleDisk}]

## Differenciálegyenletek

Dd = 0.1; α = 2;

DE = x''[t] + 2 \* Dd \* α x'[t] + α² x[t] == 0;

BC = {x[0] == 1, x'[0] == 0};

Sol = DSolve[{DE, BC}, x, t];

Plot[Evaluate[x[t] /. Sol[[1]]], {t, 0, 10}, PlotRange → {-1, 1}]