

Példatár 4.9

Főfeszültség, főirányok számítása

1. feladat

A feszültség-tenzor mátrixa egy anyagi pontban az xyz koordináta-rendszerben ismert. Határozzuk meg a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat sajáttekercs-sajátteljesítő irányokkal! Ábrázoljuk a feszültség-állapotot Mohr-körökkel!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 90 & 40 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Sajáttekercs, sajátteljesítő számítás:

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) \underline{n} = \underline{0} \rightarrow \det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

karaktensztikus
egyenlet

$$\begin{vmatrix} 90-\sigma & 40 & 0 \\ 40 & 30-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -50-\sigma \end{vmatrix} = (-50-\sigma)[(90-\sigma)(30-\sigma) - 40^2] = 0$$

$$= (-50-\sigma)(\sigma^2 - 120\sigma + 1100) = 0$$

$$\hookrightarrow \sigma_1 = -50 \quad \hookrightarrow \sigma_2 = 110$$

$$\hookrightarrow \sigma_3 = 10$$

Sorbarendezés után a főfeszültségek

$$\sigma_1 = 110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -50 \text{ MPa}$$

- $\sigma_1 = 110 \text{ MPa}$ -hez tartozó sajátteljesítő : $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}}) \underline{n}_1 = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 90-110 & 40 & 0 \\ 40 & 30-110 & 0 \\ 0 & 0 & -50-110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Vegyük észre, hogy az eredeti mátrixban $\rightarrow \sigma_2 = -50 \text{ MPa} = \sigma_3$.

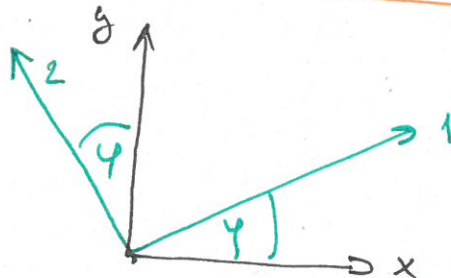
↓ főfeszítés

$\parallel \underline{\epsilon}$ vektor főirány

$$\underline{n}_3 = \underline{\epsilon}$$

↳ Emiatt a másik két főirány az xy síkban van

$$\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$



Behelyettesítés: (σ_1 -hez tartozó sajátvektor egyenletébe)

$$\begin{bmatrix} -20 & 40 & 0 \\ 40 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & -160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -20 \cos \varphi + 40 \sin \varphi = 0$$

$$40 \sin \varphi = 20 \cos \varphi$$

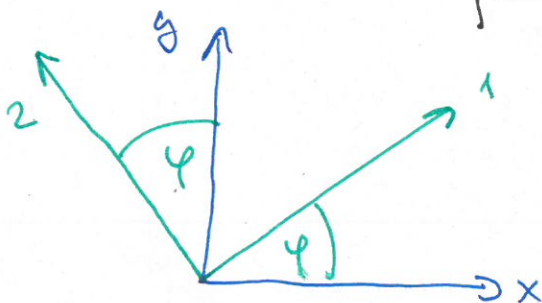
$$\tan \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{26,57^\circ}}$$

Teljesít:

$$\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 0,894 \\ 0,447 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\underline{n}_2 -t pedig úgy kell meghatározni, hogy jobbsodrású rendszer legyen!

$$\underline{n}_2 = \underline{n}_3 \times \underline{n}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\hat{z}} & \underline{\hat{y}} & \underline{\hat{x}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,447 \\ 0,894 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Mohr - körökkel

Elemi képlet: $\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 90 & 40 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

$$\hookrightarrow \sigma_x = 90 \text{ MPa}$$

$$\hookrightarrow \tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$$

$$\hookrightarrow \sigma_y = 30 \text{ MPa}$$

$$\hookrightarrow \sigma_z = -50 \text{ MPa}$$

A Mohr körök felrajzolását csak akkor végezzük el, ha az egyik főfeszültség ismert!

$$\hookrightarrow \text{Most mivel } \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\boxed{\sigma_z = -50 \text{ MPa}}$$

$\hat{=}$ irány főirány

A Mohr kör szerkesztésének lépései:

- ① vegyük fel a nem ismert főfeszültség síkban a két pontot, amit jelöljünk számukra a feszültség-tenzor mátrixa. Valamint vegyük fel az ismert főfeszültséget

$$X(\sigma_x, |\tau_{xy}|) = (90, 40)$$

$$Y(\sigma_y, |\tau_{xy}|) = (30, 40)$$

$$\downarrow \\ Z(\sigma_z, 0) = (-50, 0)$$

- ② Számítsuk ki a Mohr kör középpontját és sugarait

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 60 \text{ MPa}$$

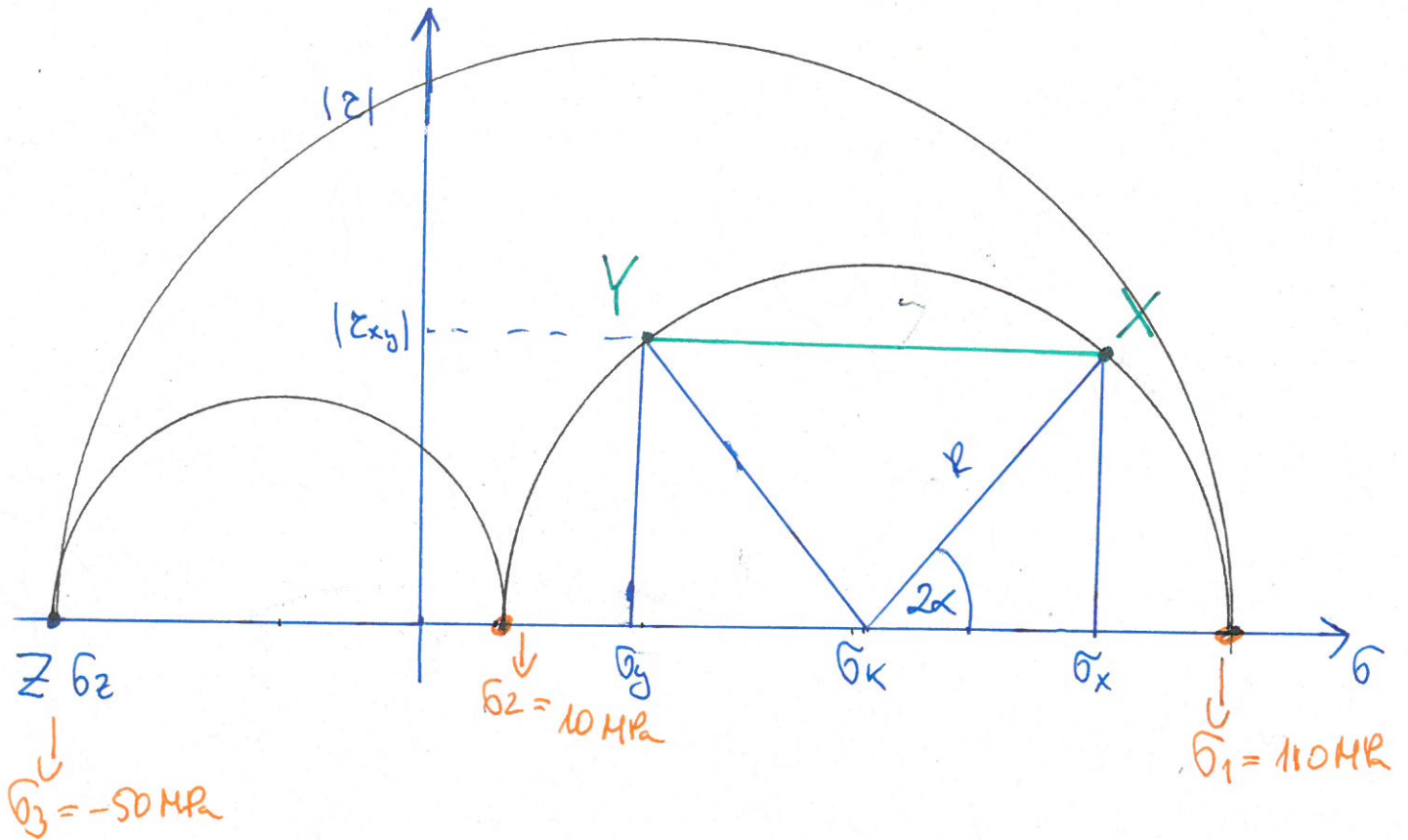
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 \text{ MPa}$$

- ③ Rajzoljuk meg az X, és Y pontban a "nemő" Mohr kört. Határozzuk meg a főfeszültségeket!

$$\sigma_1 = \sigma_k + R = 110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_k - R = 10 \text{ MPa}$$

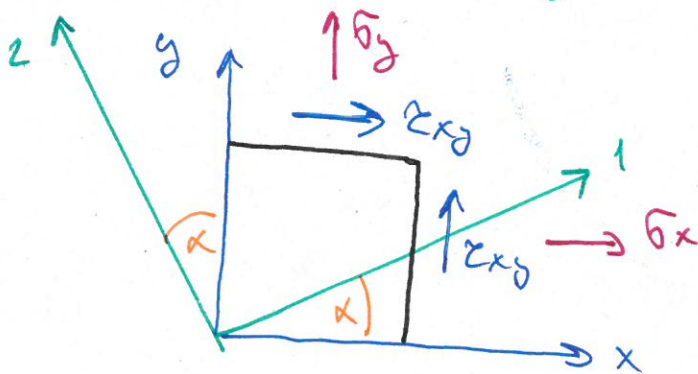
Az indexelésnél nézzük, hogy σ_z -hez képest hogy esnek $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$



④ Az α szög meghatározása

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2 |\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \underline{\underline{26,57^\circ}}$$

⑤ A sajáttektonik irányúak meghatározása



→ x- tengest forgatjuk

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,894 \\ 0,447 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,447 \\ 0,894 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Látniuk az x-y síkba és felírni a feszültség köbökét!
- Az a tengest forgatjuk, amelyik partja közelebb van a nagyobb főfeszültséghez.
- A forgatás irányát τ_{xy} iránya adja meg

2. feladat

A feszültségi tenzor mátrixa egy adott anyagi pontban az xyz koordináta-rendszerben ismert. Határozza meg a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat sajátérték-sajátvektor számítással, majd ellenőrizze azt a Mohr-körök felrajzolásával!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -40 \\ 0 & -40 & -10 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Sajátérték, sajátvektor számítás

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) \underline{n} = \underline{0} \rightarrow \det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

Azaz:

$$\begin{vmatrix} -30-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -20-\sigma & -40 \\ 0 & -40 & -10-\sigma \end{vmatrix} = (-30-\sigma)((-20-\sigma)(-10-\sigma) - (-40)^2) = (-30-\sigma)(\sigma^2 + 30\sigma - 1400) = 0$$

$$\hookrightarrow \sigma_1 = -30 \text{ MPa} \quad \hookrightarrow \sigma_2 = 25,31 \text{ MPa}$$

$$\hookrightarrow \sigma_3 = -55,31 \text{ MPa}$$

A sorbarendezett főfeszültségek:

$$\sigma_1 = 25,31 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -55,31 \text{ MPa}$$

A σ_1 -hez tartozó sajátvektor:

Látjuk $\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)}$ mátrixból, hogy $\sigma_x = \sigma_y = -30 \text{ MPa}$ főfeszültség
 $\hookrightarrow \underline{n}_2 = \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ főirány!

A többi főirányt az $y-z$ síkon kell keresni!

$$\underline{n}_1 = ? \quad \underline{n}_3 = ?$$

$$\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \text{ alakban keresendo:}$$

$$\hookrightarrow (\underline{G} - \sigma_1 \underline{E}) \underline{n}_2 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -30 - \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 - \sigma_1 & -40 \\ 0 & -40 & -10 - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -55,31 & 0 & 0 \\ 0 & -45,31 & -40 \\ 0 & -40 & -35,31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \underline{0}$$

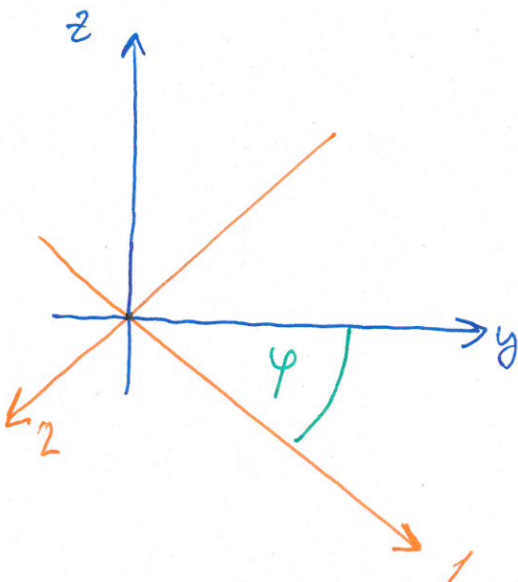
$$\hookrightarrow -45,31 \cos \varphi - 40 \sin \varphi = 0$$

$$\tan \varphi = -1,133$$

$$\varphi = \underline{\underline{-48,56^\circ}} \rightarrow \underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,662 \\ -0,75 \end{bmatrix}$$

↓ jobbsodrásúraig unit

$$\underline{n}_3 = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,75 \\ -0,662 \end{bmatrix}$$



Főfeszültség számítása Mohr-körökkel

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -40 \\ 0 & -40 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

mivel $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \rightarrow \sigma_x = -30 \text{ MPa}$ főfeszültség
 $\underline{n}_x = \underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ főirány

↳ ① Feszültség-pontok:

$$Y(\sigma_y; |\tau_{yz}|) = (-20; 40)$$

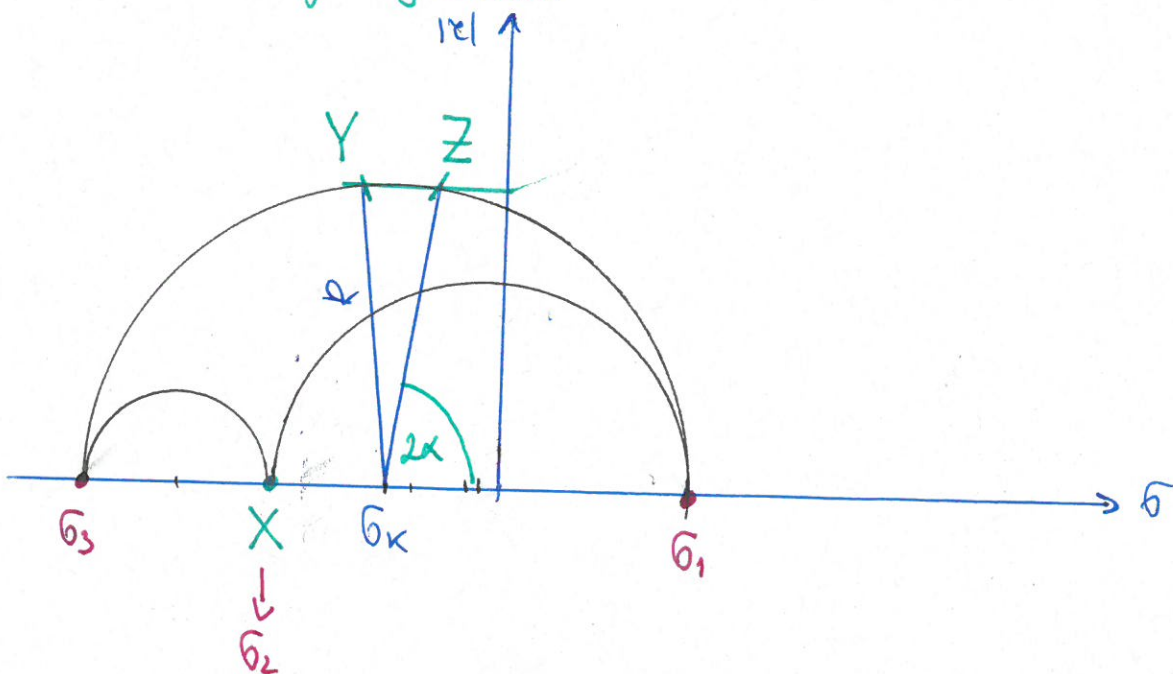
$$Z(\sigma_z; |\tau_{yz}|) = (-10; 40)$$

② Mohr-kör sugara, középpontja

$$\sigma_k = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = -15 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = 40,31 \text{ MPa}$$

③ Mohr-kör felrajzolása



$$\sigma_1 = \sigma_k + R = 25,31 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = -30 \text{ MPa}$$

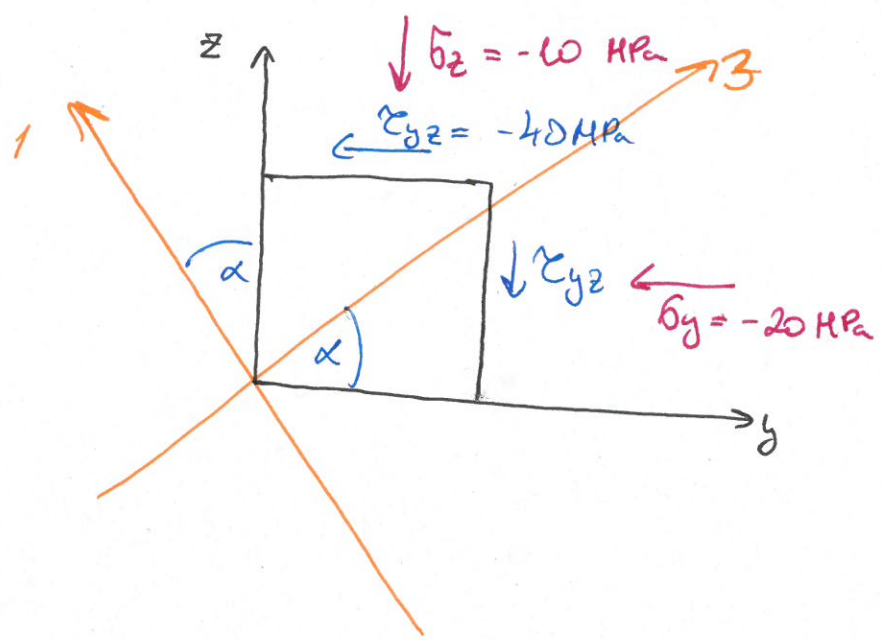
$$\sigma_3 = \sigma_k - R = -55,31 \text{ MPa}$$

Az α -szög meghatározása.

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2 |\tau_{yz}|}{\sigma_y - \sigma_z} \right) = 41,44^\circ$$

↳ Mivel a z-pont van a legközelebb σ_1 -hez

↳ z-tengelyt kell forgatni τ_{yz} irányába



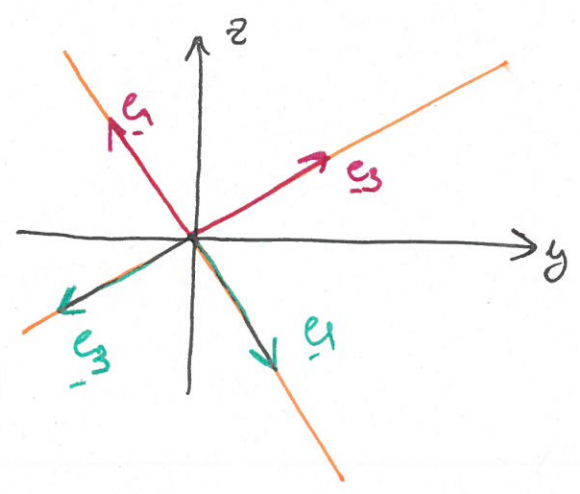
Ebból:

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,662 \\ 0,75 \end{bmatrix}$$

→ jobbsodra'úság miatt

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,75 \\ 0,662 \end{bmatrix}$$

Használtsuk össze a két megoldásból csak a fővághokat



Mohr-kör

Sajátérték - sajátvektor



Kendkét megoldás helyes
- a sajátvektor (-1) zérus
is sajátvektor!

3. feladat

A feszültség-tenzor mátrixa egy anyagi pontban az xyz koordináta-rendszerben ismert. Határozzuk meg a főfeszültségeket és a feszültség főirányokat sajátérték-sajátvektor számítással! Ellenőrizze a számítást a Mohr-körök felrajzolásával!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Sajátérték, sajátvektor számítás

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) \underline{n} = \underline{0} \rightarrow \det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

Behelyettesítés:

$$\begin{vmatrix} 0 - \sigma & 0 & 100 \\ 0 & 100 - \sigma & 0 \\ 100 & 0 & 0 - \sigma \end{vmatrix} = (100 - \sigma)[(-\sigma)(-\sigma) - 100^2] =$$

$$(100 - \sigma)(\sigma^2 - 100^2) = 0$$

$$\hookrightarrow \sigma_1 = 100 \text{ MPa} \quad \hookrightarrow \sigma_2 = 100 \text{ MPa}$$

$$\hookrightarrow \sigma_3 = -100 \text{ MPa}$$

A főfeszültségek (sorba rendezve!)

$$\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -100 \text{ MPa}$$

Itt felvettem
 σ_2 -nek is
 választani!

Tudjuk, hogy $\sigma_y = \sigma_1 = 100 \text{ MPa}$ főfeszültség
 $\underline{n}_1 = \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

\hookrightarrow A sajátvektorokat az x-z síkban keressük

$$\underline{n}_2 = ? ; \underline{n}_3 = ?$$

$$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$$

→ visszairjuk

$$(\underline{\sigma} - \sigma_2 \underline{E}) \underline{u}_2 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -\sigma_2 & 0 & 100 \\ 0 & 100 - \sigma_2 & 0 \\ 100 & 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Numerikusan:

$$\begin{bmatrix} -100 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \underline{0}$$

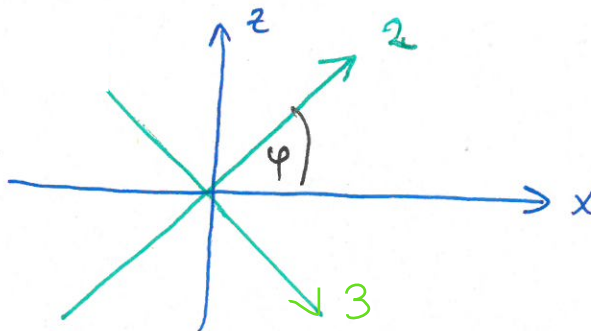
(látható, hogy mivel $\sigma_1 = \sigma_2 = 100 \text{ MPa} \rightarrow$ két azonos sajátérték miatt 2 sor is kicsi!)

$$-100 \cos\varphi + 100 \sin\varphi = 0$$

$$\tan\varphi = 1 \rightarrow \underline{\varphi = 45^\circ}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0 \\ 0,707 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0 \\ -0,707 \end{bmatrix}$$



Főfeszültség számítása Mohr-körökkel

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{yz} = 0 \rightarrow \sigma_y = 100 \text{ MPa főfeszültség}$$

$$\underline{n}_y = \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ főirány.}$$

① Feszültség-párok

$$X(\sigma_x; |\tau_{xz}|) = (0, 100)$$

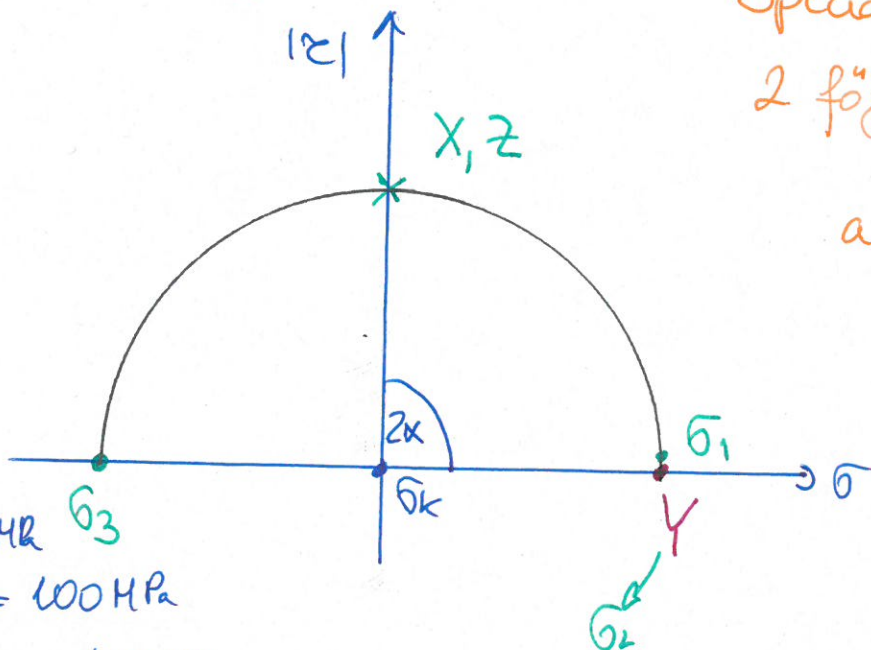
$$Z(\sigma_z; |\tau_{xz}|) = (0, 100)$$

② Mohr-kör sugara, középpontja:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = 0 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 100 \text{ MPa}$$

③ Mohr-kör felvázolása



$$\sigma_1 = \sigma_y = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_k + R = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_k - R = -100 \text{ MPa}$$

Speciális eset:

2 főfeszültség egybeesik



a 3 körből

1 lesz!

α -szög meghatározása:

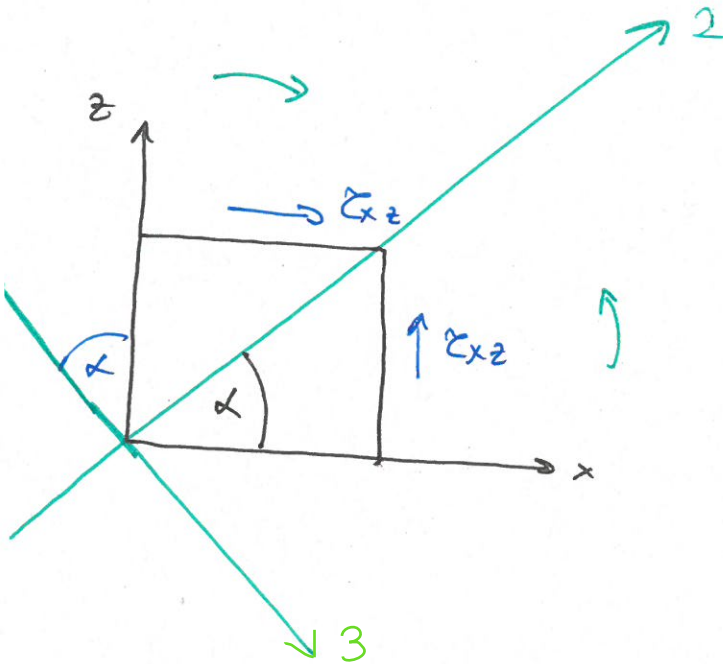
$$\alpha = 45^\circ \rightarrow \text{leolvasni}$$

vagy

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 |\epsilon_{xz}|}{\epsilon_x - \epsilon_z} \right) = \underline{\underline{45^\circ}}$$

$\rightarrow \infty$

Kost tetszőlegesen választhatjuk meg, hogy x vagy z -tengelyt forgatjuk!



$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0,707 \\ 0 \\ 0,707 \end{bmatrix}}}$$

↓ jobbsodrásból.

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0,707 \\ 0 \\ -0,707 \end{bmatrix}}}$$