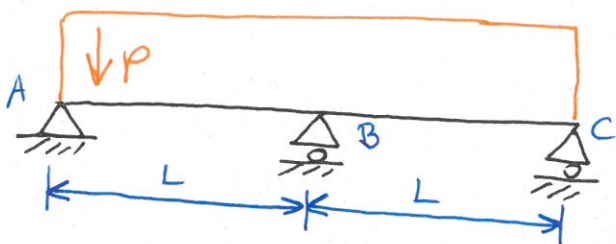


Példatár 7.8

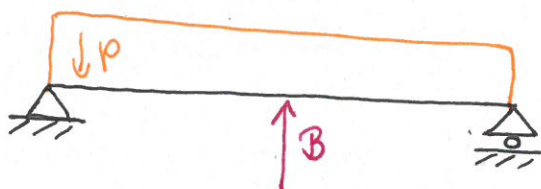
1. feladat Hálszor nagyobb erő ebből az alábbi tartó B alátámasztásánál mint A vagy C helyen? Rajzoljuk fel a tartó igénybevételei görbéit parametrikusan! A tartó anyaga és keresztmetszete végig állandó!

Adott: p, L, EI



Látjuk, hogy a tartó statikailag határozatlan $\rightarrow 2 + 1 + 1 = 4$ db reakcióerő

① Tegyük aktívá az egyik reakciót



② Alakváltozási feltétel

$$\delta_B = 0$$

Értékeljük ki az alakváltozási feltételt: \rightarrow Castigliano-tétel

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial B} = 0$$

ahol $U = \underbrace{U^N}_{=0} + \underbrace{U^U}_{\approx 0} + U^{Mh} + \underbrace{U^{Mt}}_{=0} \approx \underline{U^{Mh}}$

Fontos! A Castigliano-tételnél minden reakciót az aktív terheléssel kell kifejezni!

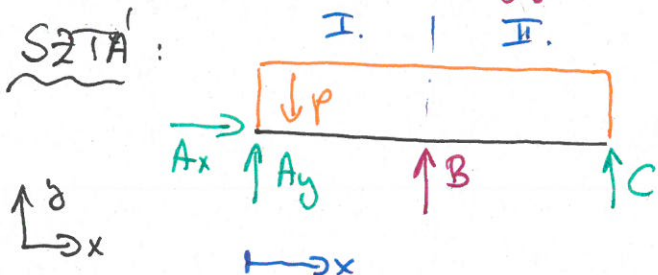
Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 : \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + B + C - p \cdot 2L = 0$$

$$\sum M_A = 0 : B \cdot L + C \cdot 2L - p \cdot 2L^2 = 0$$

SZITA:



(2)

A nyomatéki egyenletből: $C = \frac{p2L^2 - BL}{2L} = \underline{\underline{pL - \frac{B}{2}}}$

Vissza a az mozgásegyenletbe: $A_y = p \cdot 2L - B - C =$
 $= p2L - B - pL + \frac{B}{2} = \underline{\underline{pL - \frac{B}{2}}}$

Hajlítónyomatéki egyenleteli fgv.

$$M_{h1}(x) = -A_y x + \frac{px^2}{2} = -pLx + \frac{B}{2}x + \frac{px^2}{2} = \left(\frac{B}{2} - pL\right)x + \frac{px^2}{2}$$

$$M_{h2}(x) = -A_y x + \frac{px^2}{2} - B(x-L) = B \cdot L + \left(-\frac{B}{2} - pL\right)x + \frac{px^2}{2}$$

A deriváltak: $\frac{\partial M_{h1}}{\partial B} = \underline{\underline{\frac{x}{2}}}$ $\frac{\partial M_{h2}}{\partial B} = \underline{\underline{L - \frac{x}{2}}}$

Castigliano-tétel:

$$\delta B = \frac{\partial U}{\partial B} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^L M_{h1} \frac{\partial M_{h1}}{\partial B} dx + \int_L^{2L} M_{h2} \frac{\partial M_{h2}}{\partial B} dx \right)$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\int_0^L \left(\frac{B}{2} - pL\right) \frac{x^2}{2} + \frac{px^3}{4} dx + \int_L^{2L} \left[BL^2 + \left(-\frac{BL}{2} - pL^2 - \frac{BL}{2}\right)x + \left(\frac{pL}{2} + \frac{B}{4} + \frac{pL}{2}\right)x^2 - \frac{px^3}{4} \right] dx \right) \rightarrow \text{elvégezzük az integrálást!}$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{BL^3}{12} - \frac{5pL^4}{48} \right) + \left(\frac{BL^3}{12} - \frac{5pL^4}{48} \right) \right] = 0$$

$$\frac{BL^3}{6} - \frac{5pL^4}{24} = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{B = \frac{5}{4} pL}$$

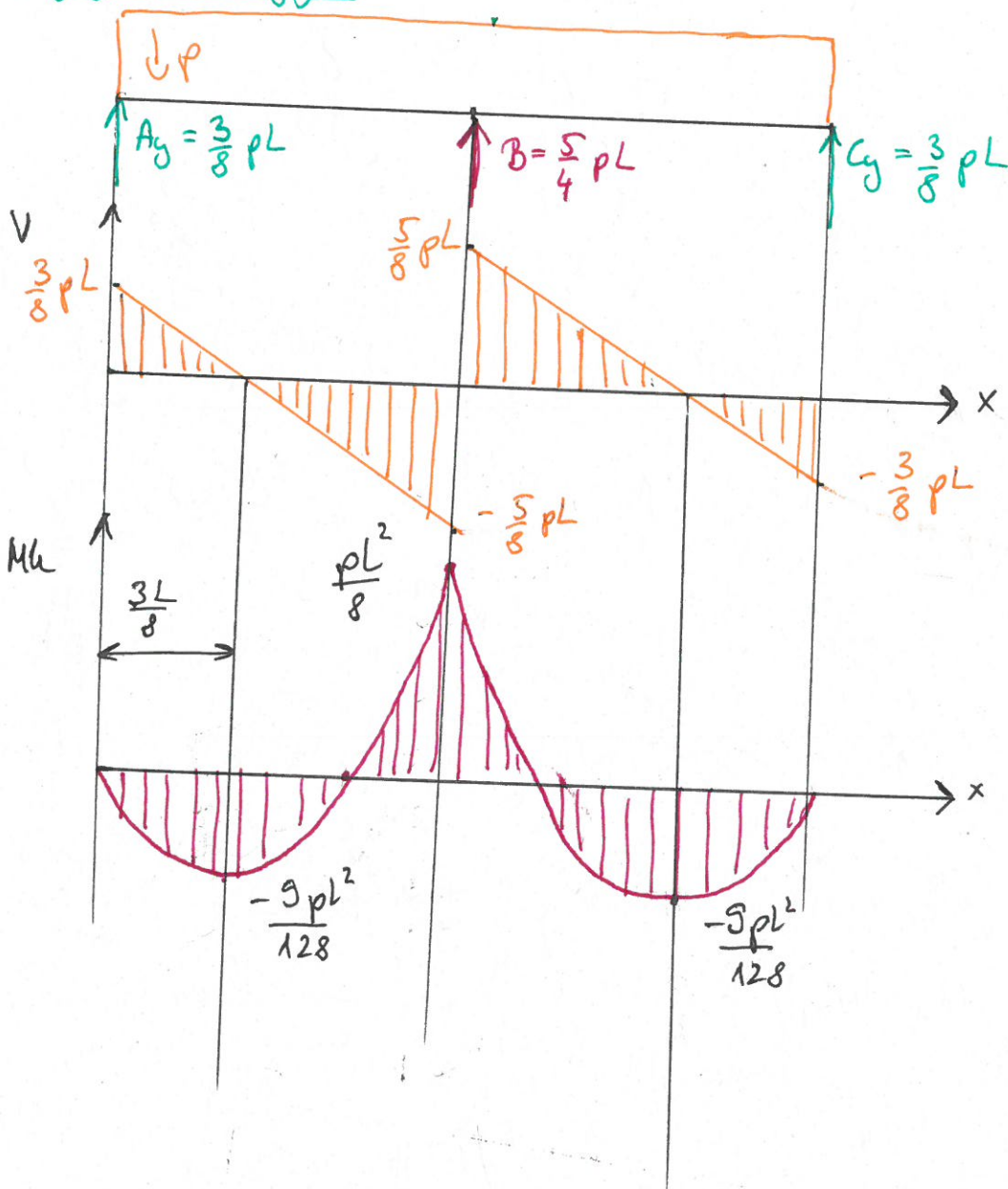
Visszaírva az egyenlet egyenletébe:

$$A_y = C = pL - \frac{B}{2} = pL - \frac{5}{8} pL = \underline{\underline{\frac{3}{8} pL}}$$

Annakiból az arányra vajuk kiakcsát:

$$\frac{B}{C} = \frac{\frac{5}{4} pL}{\frac{3}{8} pL} = \frac{10}{3} = \underline{\underline{3,33}}$$

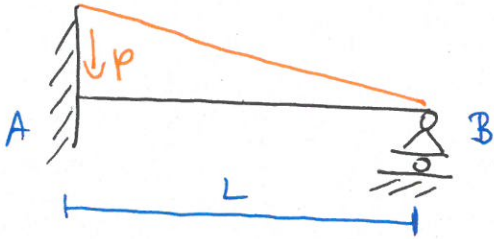
Igénybevételi ször



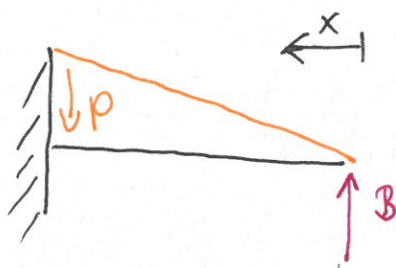
2. feladat

Mekkora lehet p értéke, ha azt szeretnénk, hogy a befogásnál 200 Nm nagyságú reakciómomenta ébredjen?
A támasz keresztmetszete és anyaga állandó!

Adatok: $L = 2 \text{ m}$
 $IE = \text{állandó}$



Látjuk, hogy $3 + 1 = 4$ db ismeretlen
reakció ébred \Rightarrow statikailag
határozatlan



Tegyük aktív!

$+ \int B = 0$ alakváltozási feltétel!

Castigliano-tétel: $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial B} = 0$

$\mathcal{U} = \underbrace{\mathcal{U}^N}_{=0} + \underbrace{\mathcal{U}^V}_{\approx 0} + \mathcal{U}^{M_k} + \underbrace{\mathcal{U}^{M_E}}_{=0} \approx \mathcal{U}^{M_k}$

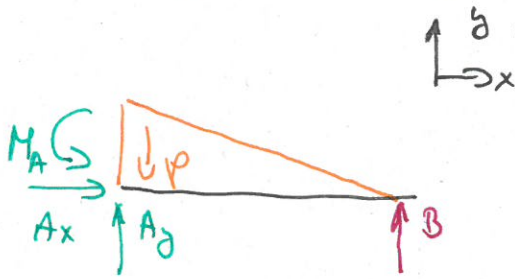
A nagyságmomenták izghatétel: $M_k = -Bx + \frac{p}{L} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -Bx + \frac{px^3}{6L}$

$\frac{\partial M_k}{\partial B} = -x$

$$\begin{aligned} \int B &= \frac{\partial \mathcal{U}^{M_k}}{\partial B} = \frac{1}{IE} \int_0^L M_k \cdot \frac{\partial M_k}{\partial B} dx = \frac{1}{IE} \int_0^L \left(Bx^2 - \frac{px^4}{6L} \right) dx = \frac{1}{IE} \left[\frac{Bx^3}{3} - \frac{px^5}{30L} \right]_0^L \\ &= \frac{1}{IE} \left(\frac{BL^3}{3} - \frac{pL^4}{30} \right) = 0 \end{aligned}$$

$B = \frac{pL^4}{30} \cdot \frac{3}{L^3} = \frac{pL}{10}$

Kost jel lehet rajzolni a szabadtest ábrát!



Egyensúly egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \quad \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + B - \frac{p \cdot L}{2} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A + B \cdot L - \frac{pL}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0$$

Ebből:

$$A_y = \frac{pL}{2} - B = \frac{pL}{2} - \frac{pL}{10} = \underline{\underline{\frac{2pL}{5}}}$$

$$M_A = \frac{pL^2}{6} - B \cdot L = \frac{pL^2}{6} - \frac{pL^2}{10} = \frac{2pL^2}{30} = \underline{\underline{\frac{pL^2}{15}}}$$

Teljesítés:

$$M_A = 200 \text{ Nm}$$

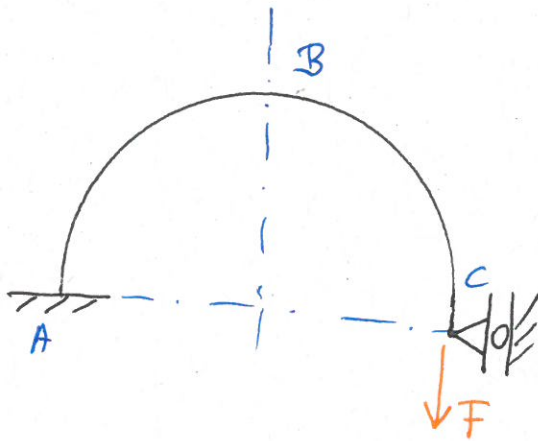
$$\hookrightarrow M_A = \frac{pL^2}{15} = 200 \text{ Nm}$$

$$p = \frac{15M_A}{L^2} = \underline{\underline{750 \frac{\text{N}}{\text{m}}}}$$

3. feladat

Számítsuk ki az alábbi tartónak a reakciókat!

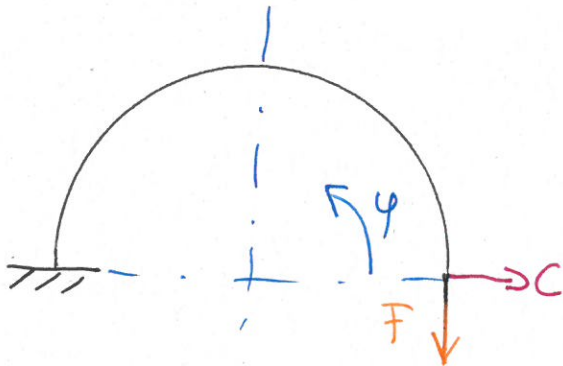
A tartó anyaga és keresztmetszete állandó!



Adott: F, R, IE, AE

→ 4 db ismeretlen reakció
↓
statikailag határozatlan

① Tegyük határozottá + alakvált. feltétellel



$$+ \boxed{f_c = 0}$$

Castigliano-tétellel: $f_c = \frac{\partial \ell}{\partial C}$

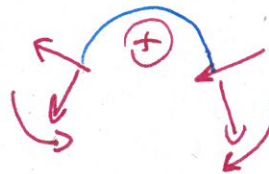
$$\ell = \underbrace{\ell^N}_{=0} + \underbrace{\ell^U}_{=0} + \underbrace{\ell^{Mh}}_{=0} + \underbrace{\ell^{Mt}}_{=0} = \ell^N + \ell^{Mh}$$

Írjuk fel az egyenleteli függvényeket!

$$N(\varphi) = F \cos \varphi + C \sin \varphi$$

$$V(\varphi) = F \sin \varphi - C \cos \varphi$$

$$M_h(\varphi) = FR(1 - \cos \varphi) - CR \sin \varphi$$



→ A deriváltak:

$$\frac{\partial N}{\partial C} = \sin \varphi$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial C} = -R \sin \varphi$$

Teixt a vizsintu denozduals:

$$J_C = \frac{\partial u^N}{\partial C} + \frac{\partial u^M}{\partial C} = \frac{1}{AE} \int_0^{\pi} N \cdot \frac{\partial N}{\partial C} R d\varphi + \frac{1}{IE} \int_0^{\pi} M \frac{\partial M}{\partial C} R d\varphi$$

$$= \frac{1}{AE} \int_0^{\pi} (F \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi) R d\varphi + \frac{1}{IE} \int_0^{\pi} FR^3 (\cos \varphi - 1) \sin \varphi + CR^3 \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{AE} \left[RF \frac{\sin^2 \varphi}{2} + \frac{CR}{2} \varphi - CR \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{IE} \left[FR^3 \frac{\sin^2 \varphi}{2} + FR^3 \cos \varphi + \frac{CR^3}{2} \varphi - \frac{CR \sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{AE} \frac{CR\pi}{2} + \frac{1}{IE} \left(-2FR^3 + \frac{CR^3\pi}{2} \right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$C \left(\frac{R\pi}{2AE} + \frac{R^3\pi}{2IE} \right) - \frac{2FR^3}{IE} = 0$$

$$C = \frac{\frac{2FR^3}{IE}}{\frac{IR\pi + AR^3\pi}{2AE}} = \frac{4AR^2F}{I\pi + AR^2\pi}$$

SZTA'



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad A_x + C = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad A_y - F = 0 \\ \sum M_A = 0 & \quad M_A - F \cdot 2R = 0 \end{aligned}$$

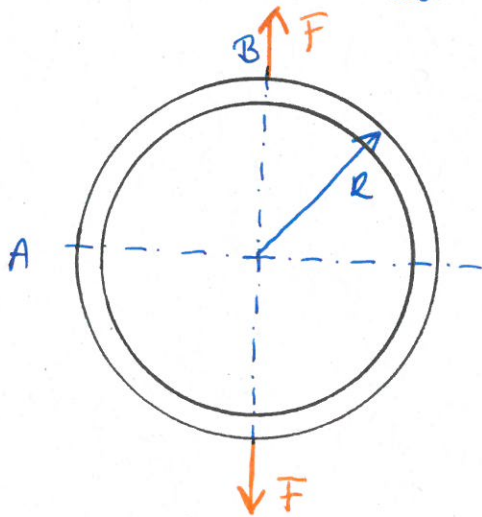
$$\hookrightarrow A_x = - \frac{4AR^2F}{I\pi + AR^2\pi}$$

$$\hookrightarrow A_y = F$$

$$\hookrightarrow M_A = \underline{\underline{2RF}}$$

5. feladat

Határozzuk meg az alábbi keretnél a legfeszültségvonal elmozdulását! Mekkora a maximális legfeszültségvonal elmozdulás? A keret anyaga és keresztmetszete végig állandó



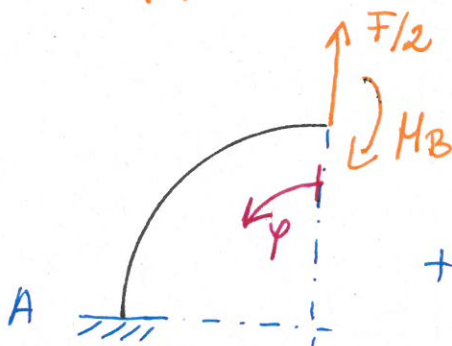
Adott: F, R

↳ Zárt keret \rightarrow mesterségesen vágjuk szét

+ használjuk ki a kétoldali szimmetriát is! \rightarrow terület és geometria

↓ "negyedmodell"

Ha szimmetria miatt vágjuk el \Rightarrow nem elegendő!



+ alakváltozás feltétel

$$\varphi_B = 0$$

Castigliano-tétel: $\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = 0$

$$U = \underbrace{U^N}_{\approx 0} + \underbrace{U^V}_{=0} + U^M + \underbrace{U^T}_{=0} = U^N + U^M$$

$$\varphi_B = \frac{\partial U^N}{\partial M_B} + \frac{\partial U^M}{\partial M_B} = \frac{1}{AE} \int_0^{\pi/2} N \frac{\partial N}{\partial M_B} R d\varphi + \frac{1}{IE} \int_0^{\pi/2} M \frac{\partial M}{\partial M_B} R d\varphi$$

Legfeszültségvonal

$$N(\varphi) = \frac{F}{2} \sin \varphi$$

$$V(\varphi) = -\frac{F}{2} \cos \varphi$$

$$M(\varphi) = M_B - \frac{F}{2} R \sin \varphi$$

A deriváltak

$$\frac{\partial N}{\partial M_B} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_B} = 1$$

Visszaírva:

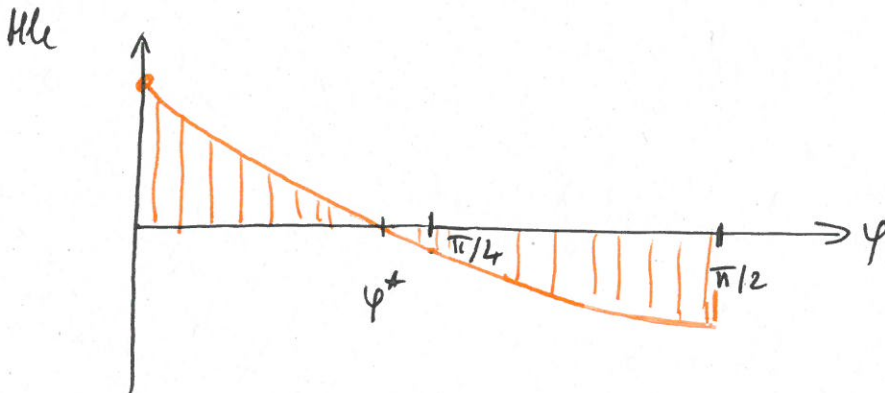
$$\varphi_B = \underbrace{\frac{1}{AE} \int_0^{\pi/2} \frac{F}{2} \sin \varphi \cdot 0 R d\varphi}_{=0} + \frac{1}{IE} \int_0^{\pi/2} \left(M_B - \frac{FR}{2} \sin \varphi \right) R d\varphi$$
$$= \frac{1}{IE} \left[M_B R \varphi + \frac{FR}{2} R^2 \cos \varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{IE} \left(M_B R \frac{\pi}{2} - \frac{FR^2}{2} \right) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{M_B R \pi}{2} = \frac{FR^2}{2}$$

Ez alapján a hajlítónyomatéki egyenlettel:

$$\boxed{M_B = \frac{FR}{\pi}}$$

$$M_h(\varphi) = \frac{FR}{\pi} - \frac{FR}{2} \sin \varphi = \underline{\underline{FR \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \varphi \right)}}$$



Nézzük értéket:

$$M_h(0) = \frac{FR}{\pi} = 0,3183 \cdot FR$$

$$M_h(\pi/2) = FR \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = -0,1817 FR$$

$$M_h(\pi/4) = FR \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = -0,0352 FR$$

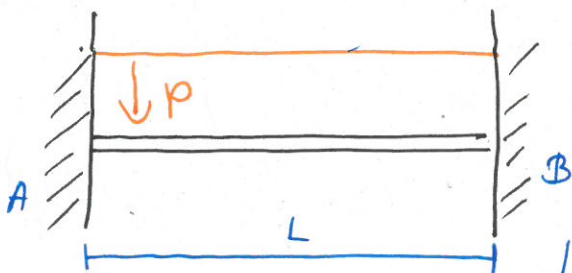
Írjuk fel: $M_h(\varphi^*) = 0$

$$FR \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin \varphi^* \right) = 0$$

$$\hookrightarrow \sin \varphi^* = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \varphi^* = 0,69 = \underline{\underline{39,54^\circ}}$$

6. feladat Határozzuk meg az alábbi támaszú kétcsapású gerjesztésű ígyletű függőleges elmozdulást! Mekkora a felakasztott csapódó nyomaték nagysága? Hol lesz zérus a legfőbb nyomaték? A támasz anyaga és keresztmetszete állandó!

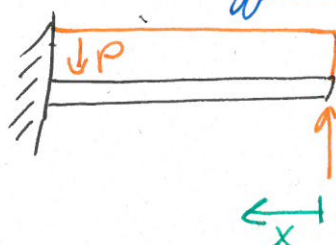
Adott: p, L



Vegyük észre, hogy szimmetrikus a feladat!

↳ a két befogásban az y -irányú reakció $\frac{pL}{2}$

↓ egyszerűsített feladat:



$$+ \boxed{f_B = 0}$$

alakraírtási feltétel!

Castigliano-tétel:

$$f_B = \frac{\partial u}{\partial M_B} = 0$$

$$u = \underbrace{u}_{=0} + \underbrace{u}_{\approx 0} + u^{MH} + \underbrace{u}_{=0}^{ME} = u^{MH}$$

$$f_B = \frac{\partial u}{\partial M_B} = \frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial M_B} dx = 0$$

Az ígyletű függvény:

$$M(x) = M_B - \frac{pL}{2}x + \frac{px^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial M}{\partial M_B} = 1$$

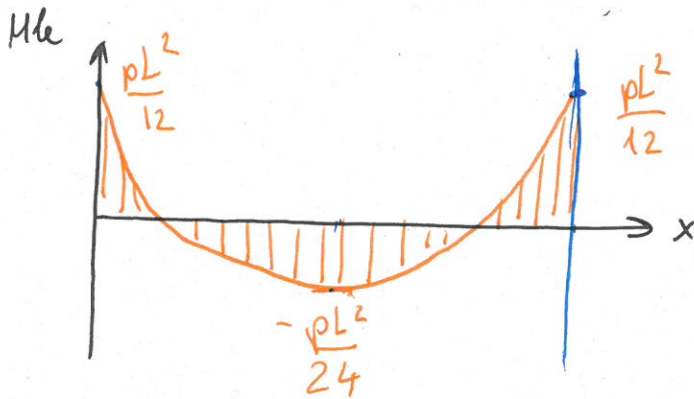
Visszaírva:

$$f_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_B - \frac{pL}{2}x + \frac{px^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left[M_B x - \frac{pL}{4}x^2 + \frac{px^3}{6} \right]_0^L = \frac{1}{EI} \left[M_B L - \frac{pL^3}{4} + \frac{pL^3}{6} \right]$$

$$A_{2a2} : f_B = \frac{1}{EI} \left(M_B L - \frac{pL^3}{12} \right) = 0$$

$$\hookrightarrow M_B = \underline{\underline{\frac{pL^2}{12}}}$$

Teljesít a hajlítónyomaték függvény: $M_h(x) = \frac{pL^2}{12} - \frac{pL}{2}x + \frac{px^2}{2}$



Nevezetes értékek:

$$M_h(0) = \frac{pL^2}{12}$$

$$M_h(L/2) = \frac{pL^2}{12} - \frac{pL^2}{4} + \frac{pL^2}{8} = -\frac{pL^2}{24}$$

$$M_h(x^*) = 0$$

$$\frac{pL^2}{12} - \frac{pL}{2}x^* + \frac{p}{2}x^{*2} = 0$$

$$\hookrightarrow x_1^* = \underline{\underline{0,211 L}}$$

$$x_2^* = \underline{\underline{0,788 L}}$$