

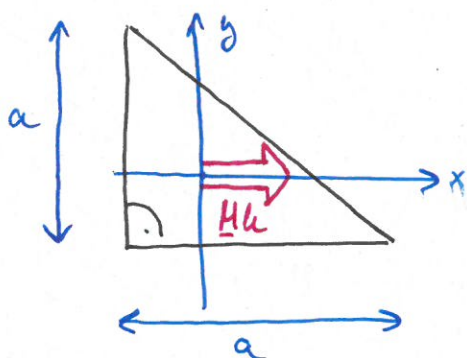
Szilárdságtan - 3. gyakorlat

Ferde hajlítás és síkgörbe rudak hajlítása

Példatár 1.15

1. feladat

Egy tartó keresztmetszetének terhelése tisztán hajlítás. Az $M_k = 3 \text{ kNm}$ nagyságú hajlítónyomatókó vektor irányát és értékét az alábbi ábra szemlélteti. A derékszögű háromszög alakú keresztmetszet mérete ismert: $a = 9 \text{ cm}$

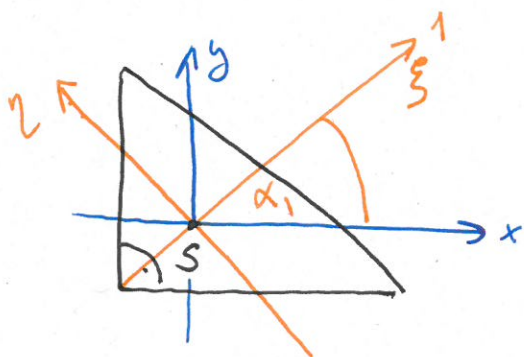


Adatok: $a = 9 \text{ cm}$
 $M_k = 3 \text{ kNm}$

Feladatok:

- Határozzuk meg a keresztmetszet mentén a hajlításból adódó normálfeszültség eloszlását! $\sigma_z(x, y) = ?$
- Mekkora biztonsági tényezővel felel meg a tartó, ha $\sigma_{meg} = 150 \text{ MPa}$
- Határozzuk meg a színtengely x -tengellyel bezárt szögét!

Rajzoljuk be a keresztmetszet valószínűleg főtengelyeit!



Értékelés:

Derékszögű háromszög:

$$I_x = \frac{a \cdot a^3}{36} = \frac{a^4}{36}$$

$$I_y = \frac{a \cdot a^3}{36} = \frac{a^4}{36}$$

$$I_{xy} = -\frac{a^2 a^2}{72} = -\frac{a^4}{72}$$

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$

$$\alpha_1 = \arctg\left(\frac{I_x - I_1}{I_{xy}}\right)$$

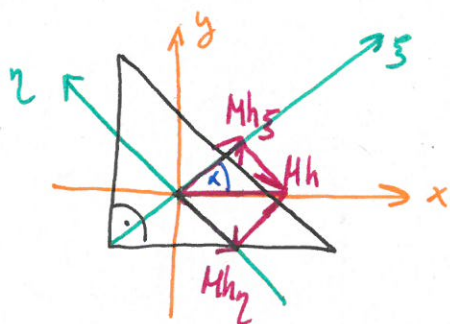
Egyenlőszárú derékszögű háromszög

$$I_1 = \frac{\frac{a^4}{36} + \frac{a^4}{36}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{36}\right) + 4\left(\frac{a^4}{72}\right)^2} = \frac{a^4}{24} = 2733750 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{\frac{a^4}{36} + \frac{a^4}{36}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{36}\right) + 4\left(\frac{a^4}{72}\right)^2} = \frac{a^4}{72} = 911250 \text{ mm}^4$$

$$\alpha_1 = \arctg\left(\frac{\frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{24}}{-\frac{a^4}{72}}\right) = 45^\circ \leftarrow \text{szimmetria miatt!}$$

Bontuk fel a legteljesebbetvektort!

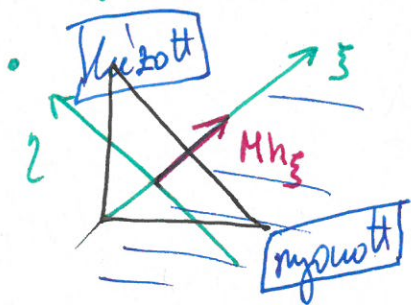


$$M_{H_z} = M_H \cos \alpha = \frac{M_H}{\sqrt{2}}$$

$$M_{H_\eta} = M_H \cdot \sin \alpha = \frac{M_H}{\sqrt{2}}$$

csak a nagyság!

A komponensekből számított feszültség:

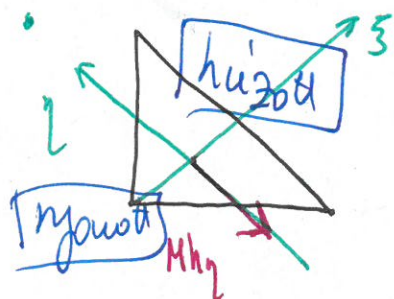


$$\sigma_z^{(z)}(\eta) = \frac{M_{H_z}}{I_z} \cdot \eta = 0,776 \cdot \eta \text{ [MPa]}$$

(mm)

$$\sigma_z^{(\eta)}(\xi) = \frac{M_{H_\eta}}{I_\eta} \cdot \xi = 2,32 \cdot \xi \text{ [MPa]}$$

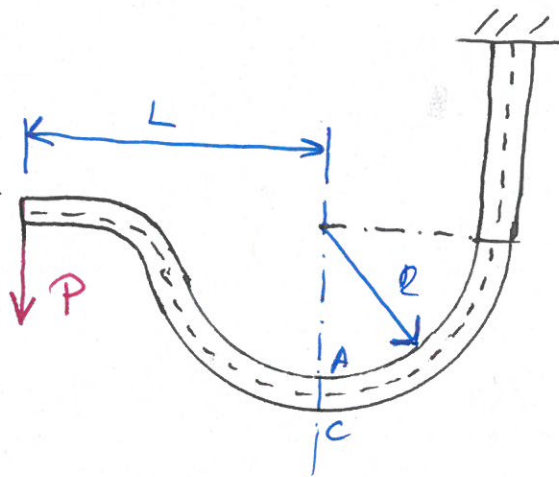
(mm)



$$\sigma_z(\xi, \eta) = \frac{M_{H_z}}{I_z} \cdot \eta + \frac{M_{H_\eta}}{I_\eta} \cdot \xi = 0,776 \cdot \eta + 2,32 \cdot \xi$$

2. feladat

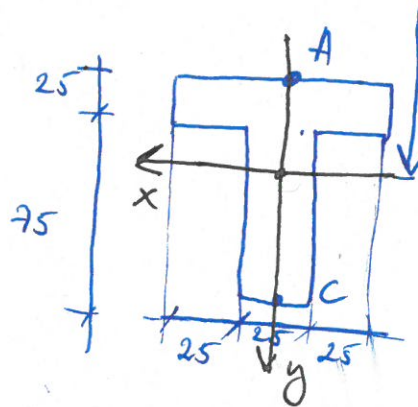
Mekkora lehet a P terhelés nagysága, ha az AC keresztmetszetben a hajlítóból származó normálfeszültség megengedett értéke $\sigma_{meg} = 20 \text{ MPa}$?

Adatok

$$L = 600 \text{ mm}$$

$$R = 300 \text{ mm}$$

$$\sigma_{meg} = 20 \text{ MPa}$$



$R \updownarrow 37,5$
 Sugartávolságtól

A hajlító tengelye x

$$I_x = 332,03125 \text{ cm}^4$$

$$A = 3750 \text{ mm}^2$$

Síkgörbe mid hajlítása

vizsgáljuk meg, milyen összefüggést kell alkalmazni:

$$\frac{R}{h} = 3,375 \rightarrow \text{Grashof képlet, de}$$

$$R = r + 37,5 = 337,5 \text{ mm}$$

$$h = 100 \text{ mm}$$

$I_o \approx I_x$ használható

A hajlító nyomatek: $M_h = -L \cdot P = -600 P$

ment kiabonja egyensíten
a mdat

$$\sigma(y) = \frac{M_h}{R \cdot A} + \frac{M_h}{I_x} \cdot y \cdot \frac{R}{R+y}$$

Behagtelisítést követően:

$$\sigma(y) = \frac{-600 P}{337,5 \cdot 3750} - \frac{600 P}{3320312,5} \cdot y \frac{337,5}{337,5 + y}$$

Mindent (mm) - (MPa) dimenzió' szentelünk be

↓ a szébo' pontokiban

$$\begin{aligned} y_A &= -37,5 \text{ mm} \\ y_C &= 62,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\sigma_A = \sigma(y_A) = 0,0071495 P$$

$$\sigma_C = \sigma(y_C) = -0,0100035 P$$

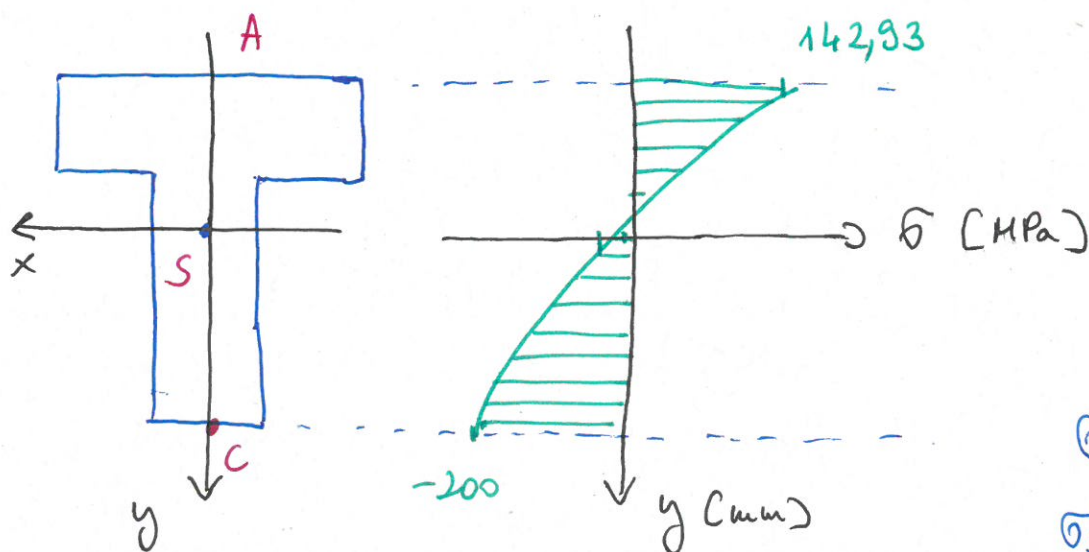
A fesz'ges pont
C lesz

$$|\sigma_C| \leq \sigma_{meg}$$

$$|\sigma_{Cmax}| = 0,0100035 P = 200 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow P = \underline{\underline{19,993 \text{ kN}}}$$

Rajzoljuk fel a fesz'el'eloszlást:



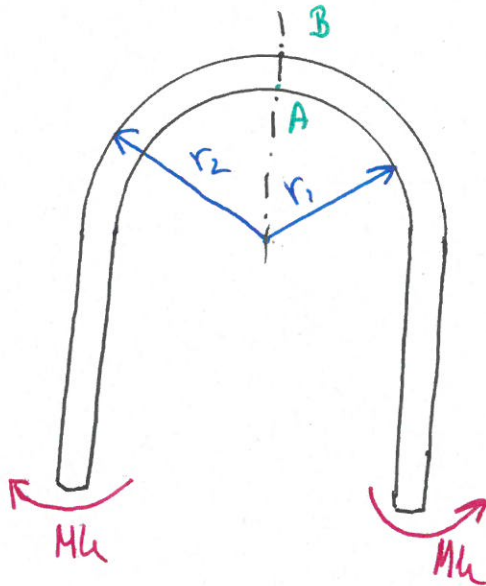
$$\sigma_C = -200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_S = -9,478 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = 142,93 \text{ MPa}$$

3. feladat

Az alábbi kör keresztmetszetű görbe mind terhelése $1,5 \text{ Nm}$ a végpontok helyén! Határozzuk meg a hajlítóból származó normál feszültség eloszlását az AB keresztmetszetben!



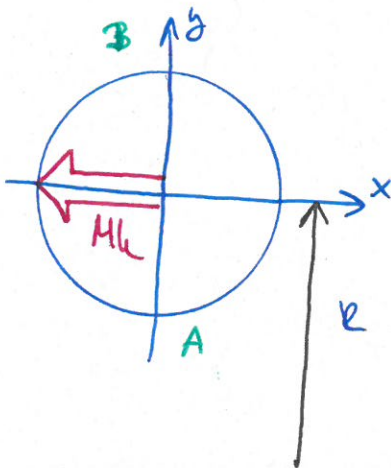
Adatok

$$M_h = 1,5 \text{ Nm}$$

$$r_1 = 4 \text{ cm}$$

$$r_2 = 6 \text{ cm}$$

Rajzoljuk le a keresztmetszetet:



$$d = r_2 - r_1 = 2 \text{ cm} = 20 \text{ mm}$$

A görbületi sugár

$$R = \frac{r_2 + r_1}{2} = 50 \text{ mm}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 314,159 \text{ mm}^2$$

Ellenőriznie, milyen képlettel kell számolni.

$$\frac{R}{u} = \frac{R}{d} = 2,5 \Rightarrow \text{Grashof, de } I_o \approx I_x$$

$$I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = \underline{\underline{7853,38 \text{ mm}^4}}$$

Alkalmaszva a fenti egyenletet:

$$\sigma(y) = \frac{M_h}{R \cdot A} + \frac{M_h}{I_x} \cdot y \cdot \frac{R}{R+y}$$

M_h -t negatív előjellel kell behelyettesíteni:

$$\sigma(y) = \underbrace{-0,09549}_{\sigma(0)} - \frac{3,5493y}{50+y}$$

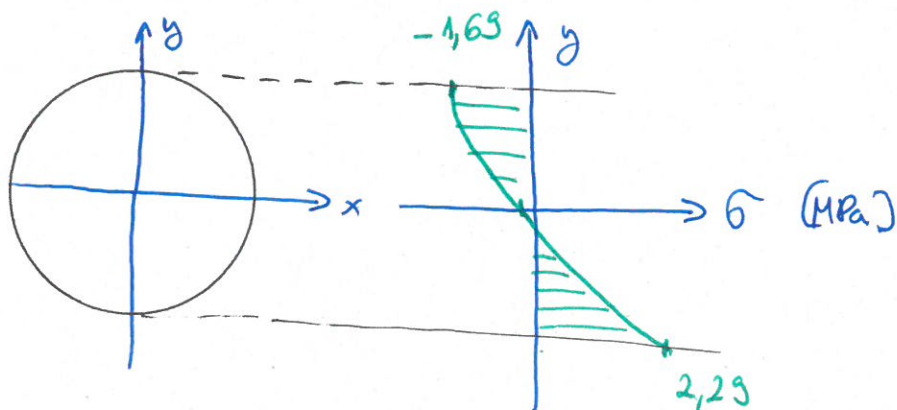
A keresztmetszet szélső pontjaiban:

$$\sigma_B = \sigma\left(+\frac{d}{2}\right) = -1,69 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \sigma(0) = -0,095 \text{ MPa}$$

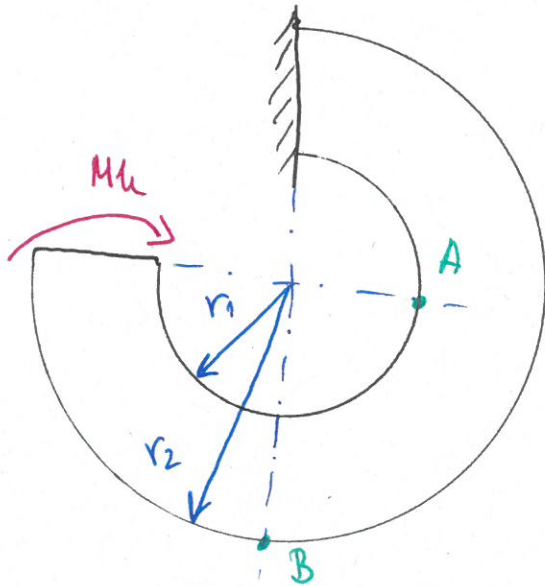
$$\sigma_A = \sigma\left(-\frac{d}{2}\right) = 2,29$$

A feszültségeloszlás:



4. feladat

Az ábrán látható kör keresztmetszetű görbe níl terhelése 5 kNm nyomaték a végkeresztmetszetben. Határozza meg a normálfeszültség értékeit az A és B helyeken! Milyen távolságban helyezkedik el a B ponttól sugárirányban a semleges tengely helye?



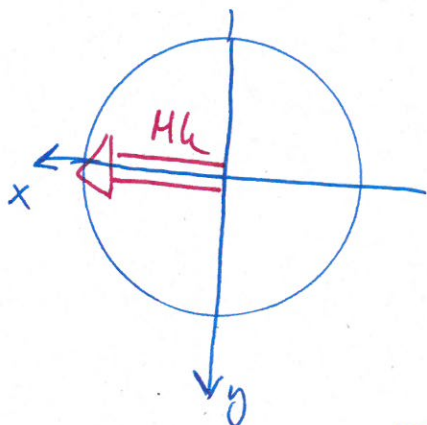
Adatok

$$r_1 = 200 \text{ mm}$$

$$r_2 = 400 \text{ mm}$$

$$M_k = 5 \text{ kNm}$$

Bármely keresztmetszet esetében az alábbi koordináta-rendszert kell felvenni:



$$\frac{R}{h} = 1,5 \Rightarrow \text{Grashof-képlet}$$

nyíró egyenértékű

$$R = \frac{r_1 + r_2}{2} = 300 \text{ mm}$$

$$h = r_2 - r_1 = 200 \text{ mm}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 31415,9 \text{ mm}^2$$

$$I_0 = R \cdot A \cdot \kappa$$

$$\text{ahol } \kappa_{\text{ kör }} = \frac{1}{4} \left(\frac{d}{2R} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{d}{2R} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{d}{2R} \right)^6 + \frac{7}{128} \left(\frac{d}{2R} \right)^8 + \dots$$

$$\kappa = 0,023437$$

Viisszahelyettesítés:

$$I_0 = 83\,229\,715 \text{ mm}^4$$

Erdekesség: $I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = 78539816 \text{ mm}^4$

Ez már jól nagy libát okozna!

A feszültségelosztás:

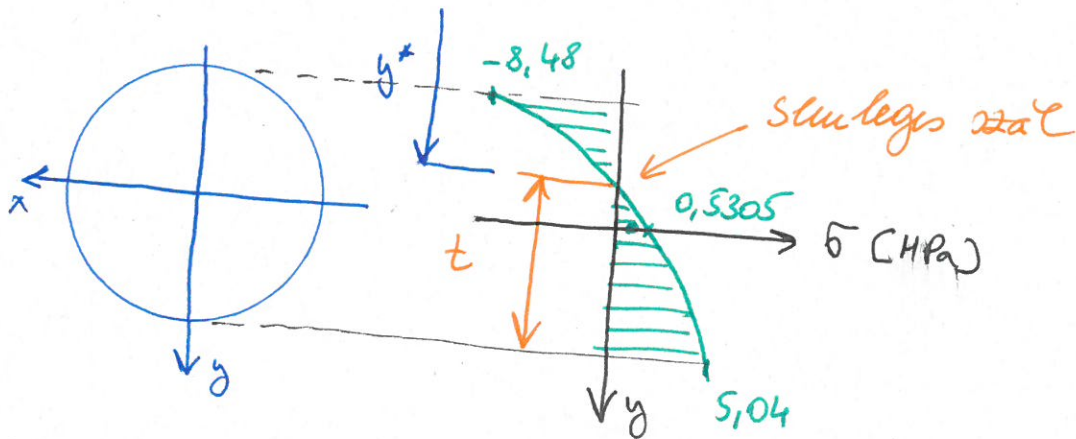
$$\sigma(y) = \frac{M_h}{R A} + \frac{M_h}{I_0} y \frac{R}{R+y} = \underbrace{0,5305}_{\sigma(0)} + \frac{18,0224 y}{300+y}$$

↳ A szélső pontokban:

$$\sigma_A = \sigma\left(-\frac{d}{2}\right) = -8,48 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \sigma(0) = \underline{\underline{0,5305 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_B = \sigma\left(\frac{d}{2}\right) = 5,04 \text{ MPa}$$



$\sigma(y^*) = 0$ egyenletet kell megoldani!

$$\frac{M_h}{R A} + \frac{M_h}{I_0} y^* \frac{R}{R+y^*} = 0$$

$$\frac{M_h}{R A} (R+y^*) + \frac{M_h}{I_0} R y^* = 0$$

$$y^* = \frac{-\frac{M_h \cdot R}{R A}}{\frac{M_h}{R A} + \frac{M_h \cdot R}{I_0}} = -8,578 \text{ mm} \rightarrow t = \frac{d}{2} - y^* = \underline{\underline{108,578 \text{ mm}}}$$