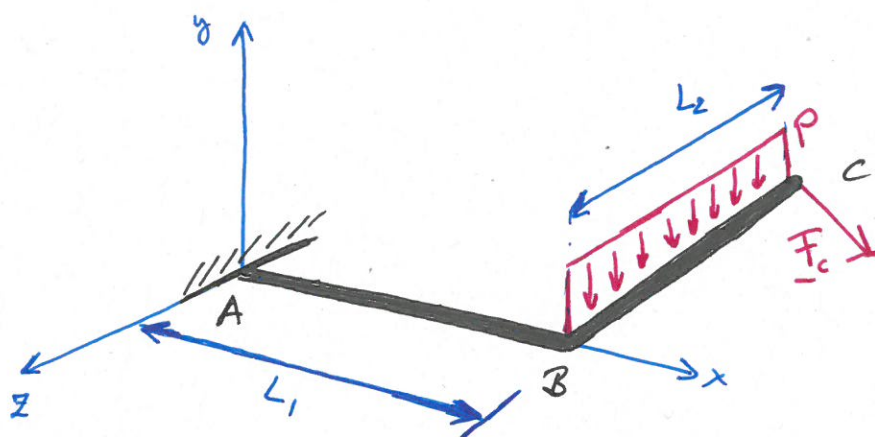


Összetett igénybevételek,
feszültségi állapot

1. feladat Egy törtvonalú tartó terhelését és méreteit mutatja az ábra. A tartó keresztmetszete állandó, d átmérőjű kör



Adatok:

$$L_1 = 3 \text{ m}$$

$$L_2 = 2 \text{ m}$$

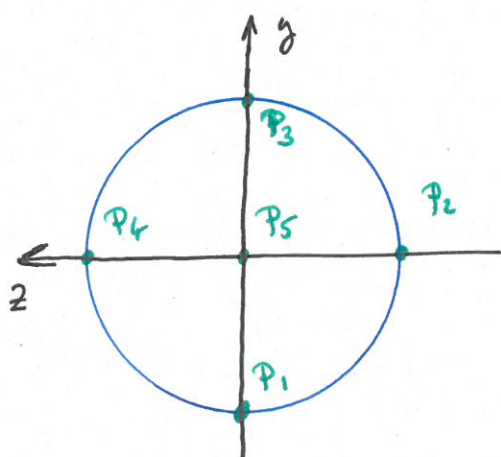
$$p = 40 \text{ N/m}$$

$$\underline{F}_C = \begin{bmatrix} -150 \\ 200 \\ -50 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

Feladatok

- Határozza meg a befogás keresztmetszetében az igénybevételekből adódó feszültségeloszlást!
- Ábrázolja a $P_1 - P_5$ pontokban a feszültséget!



- Redukáljuk az erőrendszert az A pontba! $(\underline{F}; \underline{M}_A)_A = ?$

↳ Erők redukálása:

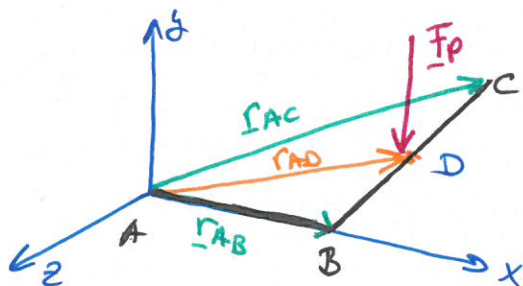
$$\underline{F} = \underline{F}_C + \underbrace{p \cdot L_2 \cdot (-\underline{j})}_{\underline{F}_p} = \begin{bmatrix} -150 \\ 200 \\ -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -150 \\ 120 \\ -50 \end{bmatrix} \text{ N}$$

↳ Nyomaték

- Az \underline{F}_C mő enőkanja $\underline{r}_{AC} = \underline{r}_C - \underline{r}_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ m}$
- A p megoszlóenő t befektetsüel \underline{F}_p enővel a D pontban!

$$\underline{r}_{AD} = \frac{1}{2} (\underline{r}_{AB} + \underline{r}_{AC}) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ m}}}$$



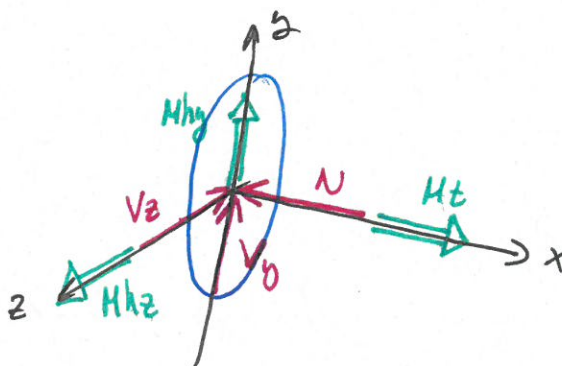
Ebből: $\underline{M}_A = \underline{r}_{AC} \times \underline{F}_C + \underline{r}_{AD} \times \underline{F}_p = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ -150 & 200 & -50 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -80 & 0 \end{vmatrix}$

$$\underline{M}_A = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 320 \\ 450 \\ 360 \end{bmatrix} \text{ Nm}}}$$

Telát a befogab keresztmetszetben az igénybevételek:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -150 \\ 120 \\ -50 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} N \\ V_y \\ V_z \end{matrix}$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 320 \\ 450 \\ 360 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} M_t \\ M_{ky} \\ M_{kz} \end{matrix}$$



A keresztmetszet geometriai jellemzői:

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 706,858 \text{ mm}^2$$

$$I_z = I_y = \frac{d^4 \pi}{64} = 39760,8 \text{ mm}^4$$

$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = 79521,6 \text{ mm}^4$$

$$K_y = K_z = \frac{d^3 \pi}{32} = 2650,72 \text{ mm}^3$$

$$K_p = \frac{d^3 \pi}{16} = 5301,44 \text{ mm}^3$$

Az egyes ígyletvételekhez kapcsolódó feszültségek

Normálígyletvétel

ment nyomott

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{-150}{706,858} = \underline{\underline{-0,212 \text{ MPa}}}$$

Nyúlóígyletvétel

$$\sigma_{xy}(y) = \frac{4}{3} \frac{V_y}{A} \left[1 - \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right] = 0,226 - 0,001006 y^2$$

x-re merőleges
y irányú

$$\sigma_{xy \max} = \sigma_{xy}(0) = 0,226 \text{ MPa}$$

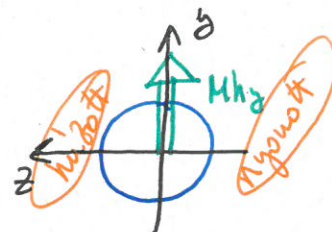
$$\sigma_{xz}(z) = -\frac{4}{3} \frac{V_z}{A} \left[1 - \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right] = -0,094 + 0,000419 z^2$$

$$\sigma_{xz \max} = 0,094 \text{ MPa}$$

Hajlítóígyletvétel

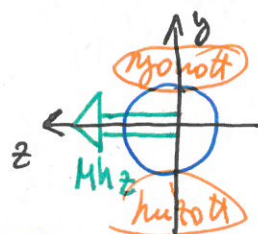
$$\sigma_x(z) = \frac{M_{ky}}{I_y} \cdot z = 11,318 z$$

$$\sigma_{x \max 1} = \frac{M_{ky}}{K_y} = 169,77 \text{ MPa}$$



$$\sigma_x(y) = -\frac{M_{kz}}{I_z} \cdot y = -9,054 y$$

$$\sigma_{x \max 2} = \frac{M_{kz}}{K_z} = 135,81 \text{ MPa}$$



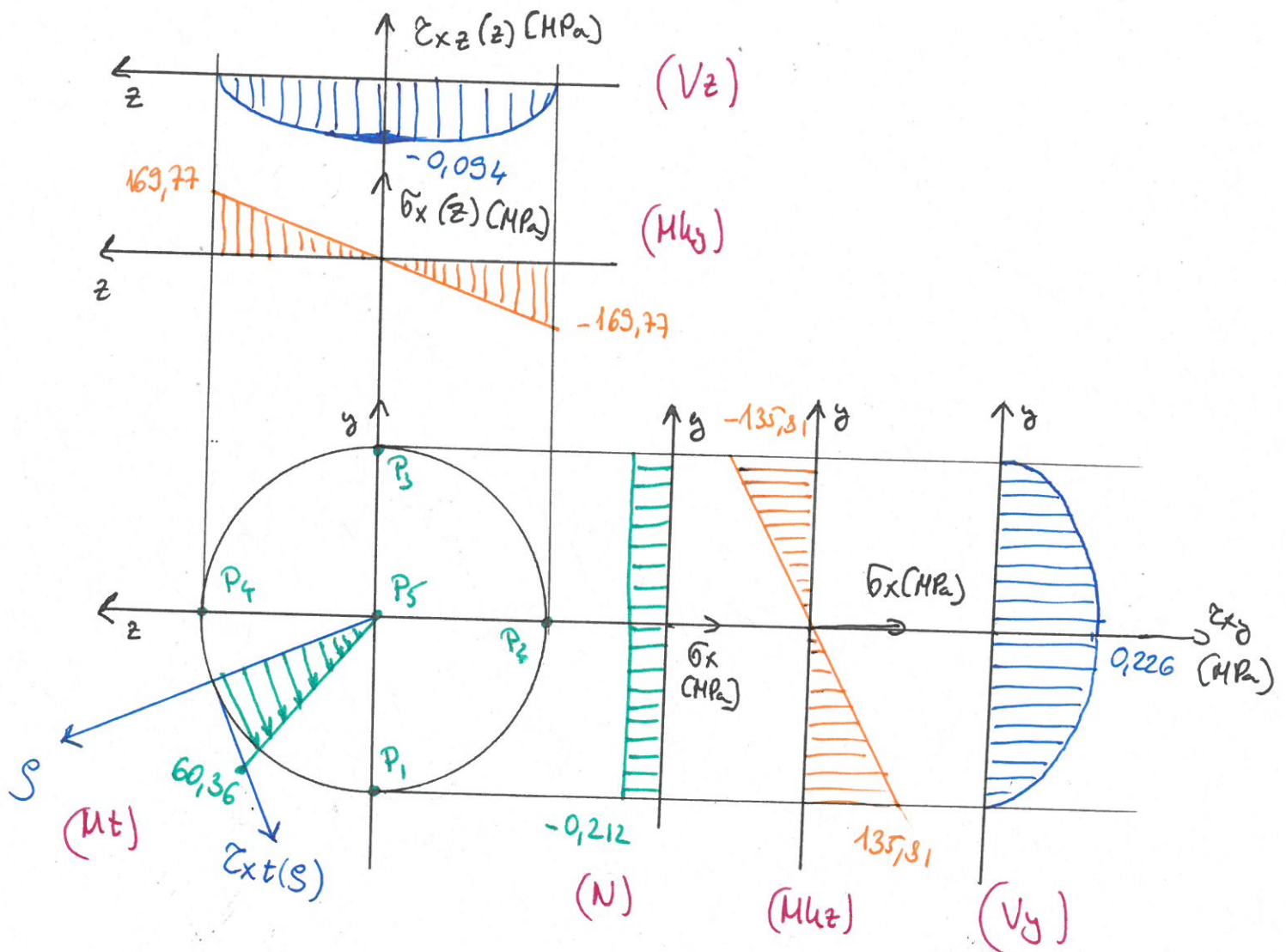
Árvány ígélbűtél

$$\tau_{xt}(s) = \frac{M_t}{I_p} \cdot s = 4,024 s$$

↑
tangenciális
írág

$$\downarrow \tau_{xtmax} = \tau_{xt}\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{M_t}{I_p} = \underline{\underline{60,36 MPa}}$$

Feszültségeloszlás



Vizsgáljuk az egyes pontokat:

P_1 :

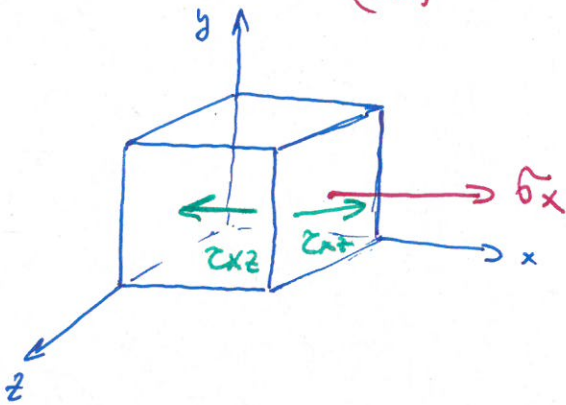
(N) (M_{yz}) (M_{xz})

$$\sigma_x = -0,212 + 135,81 + 0 = 135,598 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 0 \text{ MPa} \quad (V_y)$$

$$\tau_{xz} = -0,094 - 60,36 = -60,454 \text{ MPa}$$

(V_z) (M_t)



$$\underline{\underline{\sigma}}^{(P_1)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 135,598 & 0 & -60,454 \\ 0 & 0 & 0 \\ -60,454 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

P_2 :

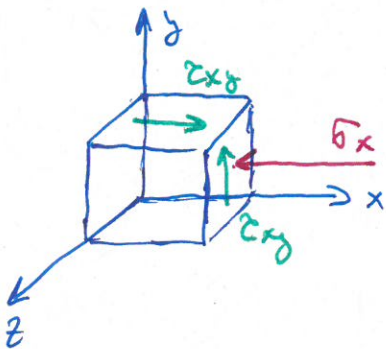
(N) (M_{yz}) (M_{xz})

$$\sigma_x = -0,212 + 0 - 169,77 = -169,982 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 0,226 + 60,36 = 60,586 \text{ MPa}$$

(V_y) (M_t)

$$\tau_{xz} = 0 \text{ MPa}$$



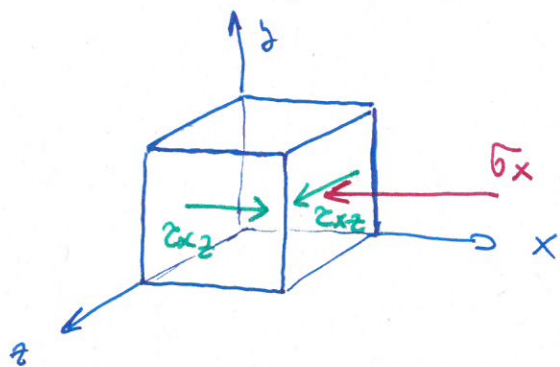
$$\underline{\underline{\sigma}}^{(P_2)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -169,982 & 60,586 & 0 \\ 60,586 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$P_3:$

$$\sigma_x = \overset{(N)}{-0,212} - \overset{(M_{xz})}{135,81} + \overset{(M_{xy})}{0} = -136,022 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \overset{(V_y)}{0} \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \overset{(V_z)}{-0,094} + \overset{(M_t)}{60,36} = 60,266 \text{ MPa}$$



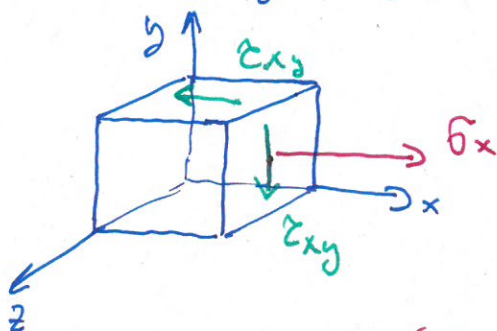
$$\underline{\underline{\sigma}}^{(P_3)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -136,022 & 0 & 60,266 \\ 0 & 0 & 0 \\ 60,266 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$P_4:$

$$\sigma_x = \overset{(N)}{-0,212} + \overset{(M_{xz})}{0} + \overset{(M_{xy})}{169,77} = 169,558 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \overset{(V_y)}{0,226} - \overset{(M_t)}{60,36} = -60,134 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \overset{(V_z)}{0} \text{ MPa}$$



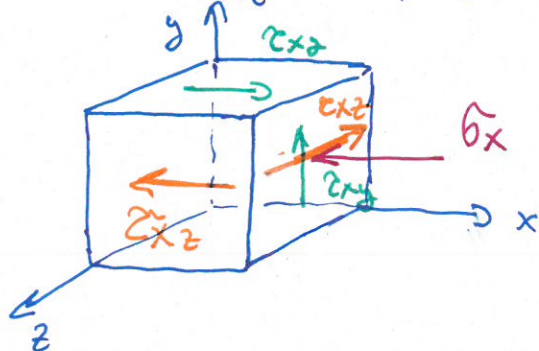
$$\underline{\underline{\sigma}}^{(P_4)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 169,558 & -60,134 & 0 \\ -60,134 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$P_5:$

$$\sigma_x = \overset{(N)}{-0,212} + \overset{(M_{xz})}{0} + \overset{(M_{xy})}{0} = -0,212 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \overset{(V_y)}{0,226} \text{ MPa}$$

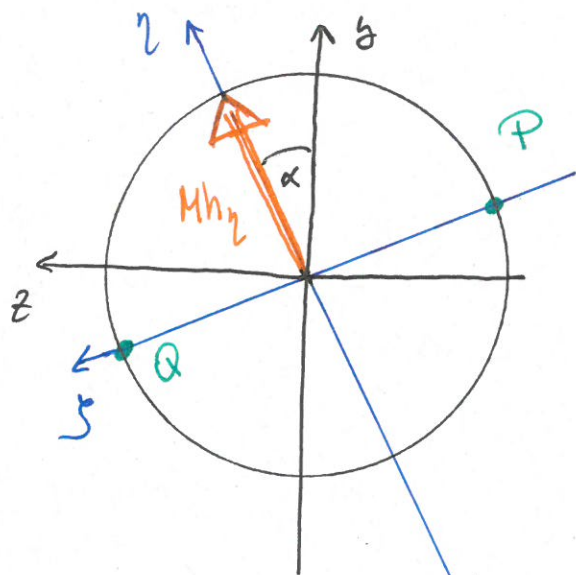
$$\tau_{xz} = \overset{(V_z)}{-0,094} \text{ MPa}$$



$$\underline{\underline{\sigma}}^{(P_5)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -0,212 & 0,226 & -0,094 \\ 0,226 & 0 & 0 \\ -0,094 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Kivél kör keresztmetszet

→ minden irány főirány



mindig egyenes hajlítás lesz

$$\underline{Mh}_y = \underline{Mh}_y + \underline{Mh}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 450 \\ 360 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

$$Mh_y = \sqrt{Mh_y^2 + Mh_z^2} = 576,281 \text{ Nm}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{Mh_z}{Mh_y}\right) = 38,69^\circ$$

$$I_z = I_y = 39760,8 \text{ mm}^4$$

$$K_z = K_y = 2650,72 \text{ mm}^3$$

Innen a hajlításból számazó fesz. eloszlás.

$$\sigma_x = \frac{Mh_y}{I_z} \cdot s = 14,495$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh_y}{K_z} = \underline{\underline{217,4 \text{ MPa}}}$$

Maximális normál feszültség

normál + hajlítás

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{N}{A} + \frac{Mh_y}{I_z} \cdot s = -0,212 - 14,495$$

⇓

a maximális σ feszültség

$$\sigma_x^Q = \tilde{\sigma}_x\left(\frac{d}{2}\right) = 217,188 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^P = \tilde{\sigma}_x\left(-\frac{d}{2}\right) = 217,612 \text{ MPa} \leftarrow \text{ez a vesz. pont!}$$

