

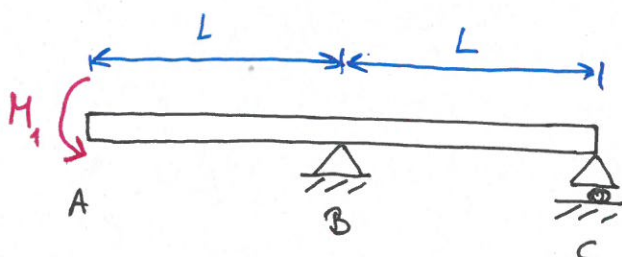
Küszködés az differenciál egyenlettel
Kilajlás

1. feladat

Az alábbiak terhelése az A keresztmetszetben működő $M_1 = 2 \text{ Nm}$ nyomaték. A tartó hajlítási merevsége 150 Nm^2 , $L = 1 \text{ m}$.

Feladatok

- Határozzuk meg a CB szakaszon a maximális kilajlás értéket és helyét!
- Számítsuk ki az A, B, C keresztmetszetekben a szögelfordulásokat és az A keresztmetszetben a kilajlás értékét!
- Mekkora a átmérőjű kör keresztmetszű acélból készítsünk tartót, ha azt szeretnénk, hogy az A km kilajlása 10 mm legyen?



Adatok:

$$L = 1 \text{ m}$$

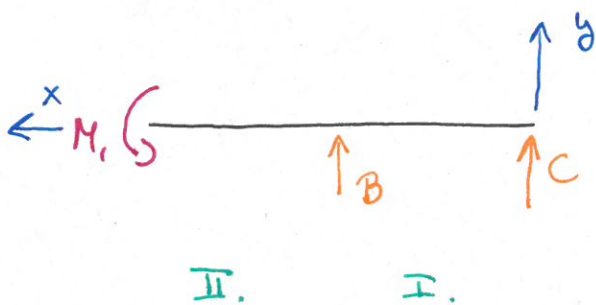
$$IE = 150 \text{ Nm}^2$$

$$M_1 = 2 \text{ Nm}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$w_{\text{meg}} = 10 \text{ mm}$$

Reakciók



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \quad 0 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad B + C = 0$$

$$\sum M_C = 0 \quad M_1 - B \cdot L = 0$$

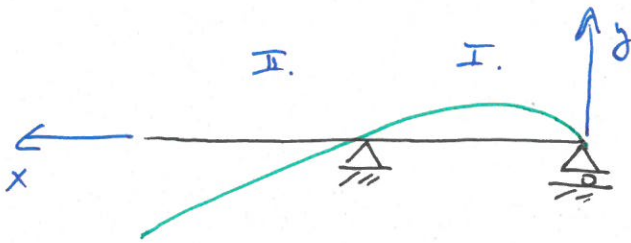
$$\hookrightarrow B = \frac{M_1}{L} = \underline{\underline{2 \text{ N}}}$$

$$\hookrightarrow C = -B = \underline{\underline{-2 \text{ N}}}$$

Integrálszerű felírás

$$M_{k1}(x) = -C \cdot x = \underline{\underline{\frac{M_1}{L} \cdot x}}$$

$$M_{k2}(x) = -Cx - B(x-L) = \underline{\underline{\frac{M_1}{L}x - \frac{M_1}{L}(x-L) = M_1}}$$

A deformált alak.1. szakasz:

$$M(x) = -IE w_1''(x)$$

$$\text{PF: } w_1(0) = 0$$

$$w_1(L) = 0$$

2. szakasz:

$$M(x) = -IE w_2''(x)$$

$$\text{PF: } w_2(L) = w_1(L) = 0$$

$$w_2'(L) = w_1'(L)$$

Illesztési
feltétel!I. szakasz:

$$-IE w_1''(x) = \frac{M_1}{L} \cdot x \quad / \int$$

$$-IE w_1'(x) = \frac{M_1}{L} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \quad / \int$$

$$-IE w_1(x) = \frac{M_1}{L} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$\hookrightarrow w_1(x) = \frac{1}{IE} \left(-\frac{M_1}{L} \frac{x^3}{6} - C_1 x + C_2 \right)$$

$$\text{PF: } \begin{cases} w_1(0) = \frac{1}{IE} (-C_2) = 0 \\ \quad \quad \quad \hookrightarrow \boxed{C_2 = 0} \\ w_1(L) = \frac{1}{IE} \left(-\frac{M_1 L^3}{6L} - C_1 \cdot L \right) = 0 \\ \quad \quad \quad \boxed{C_1 = -\frac{M_1}{6} \cdot L} \end{cases}$$

Vissza behelyettesítve:

$$w_1(x) = \frac{1}{IE} \left(-\frac{M_1}{L} \frac{x^3}{6} + \frac{M_1}{6} \cdot Lx \right)$$

$$\varphi_1(x) = w_1'(x) = \frac{1}{IE} \left(-\frac{M_1}{L} \frac{x^2}{2} + \frac{M_1 L}{6} \right)$$

Szélbővítés:

$$w_1'(x^*) = 0$$

$$\varphi_1(x^*) = 0$$

$$-\frac{M_1}{L} \frac{x^2}{2} + \frac{M_1 L}{6} = 0 \quad / \cdot \frac{2L}{M_1}$$

$$x^2 = \frac{L^2}{3} \rightarrow x_1 = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,577 \cdot L = \underline{\underline{0,577 \text{ m}}}$$

$$x_2 = -\frac{L}{\sqrt{3}} \quad \downarrow$$

Itt a lehajlás:

$$w_1(x_1) = \frac{M_1 L^2}{9\sqrt{3} \cdot EI} = \underline{\underline{0,8553 \text{ mm}}}$$

Az illesztés feltételhez:

$$\varphi_B = w_1'(L) = \varphi_1(L) = -\frac{M_1 L}{3EI} = -0,254^\circ$$

$$\varphi_C = w_1'(0) = \frac{M_1 L}{6EI} = 0,127^\circ$$

II. szakasz

$$-EI w_2''(x) = M_1 \quad / \int$$

$$-EI w_2'(x) = M_1 x + \tilde{C}_1 \quad / \int$$

$$-EI w_2(x) = \frac{M_1 x^2}{2} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$$

Illesztés feltétel:

$$w_2'(L) = w_1'(L)$$



Elegendő az első integrálás után ugyanígy visszatérni!

$$\bullet w_2'(L) = w_1'(L) = \varphi_B = -\frac{M_1 L}{3EI}$$

$$-EI \cdot \left(-\frac{M_1 L}{3EI}\right) = M_1 L + \tilde{C}_1$$

$$\boxed{\tilde{C}_1 = -\frac{2}{3} M_1 L}$$

$$w_2(L) = w_1(L) = 0$$

$$-IE \cdot 0 = \underbrace{\frac{M_1 L^2}{2} - \frac{2}{3} M_1 \cdot L^2 + \tilde{C}_2}_{-\frac{1}{6} M_1 \cdot L^2}$$

$$\boxed{\tilde{C}_2 = \frac{1}{6} M_1 L^2}$$

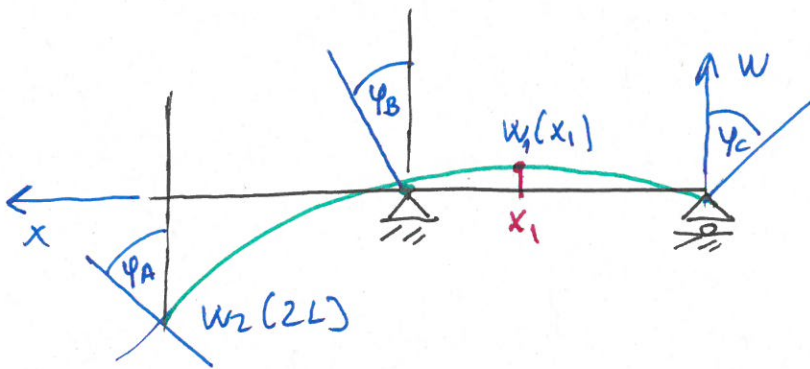
Visztaírva:

$$w_2(x) = \frac{1}{IE} \left(-\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{2}{3} M_1 L x - \frac{1}{6} M_1 L^2 \right)$$

$$\varphi_2(x) = w_2'(x) = \frac{1}{IE} \left(-M_1 x + \frac{2}{3} M_1 L \right)$$

$$w_A = w_2(2L) = -\frac{5}{6} \frac{M_1 L^2}{IE} = -\underline{\underline{11,111 \text{ mm}}}$$

$$\varphi_A = w_2'(2L) = -\frac{4}{3} \frac{M_1 L}{IE} = -\underline{\underline{1,019^\circ}}$$



Méretezés:

$$\tilde{w}_A = -10 \text{ mm lebet}$$

\Downarrow előjelbevesem!

$$\tilde{w}_A = -\frac{5}{6} \frac{M_1 L^2}{\tilde{I} E}$$

$$\downarrow \tilde{I} = -\frac{5}{6} \frac{M_1 L^2}{\tilde{w}_A E} = \frac{5000}{6} \approx 833,3 \text{ mm}^4$$

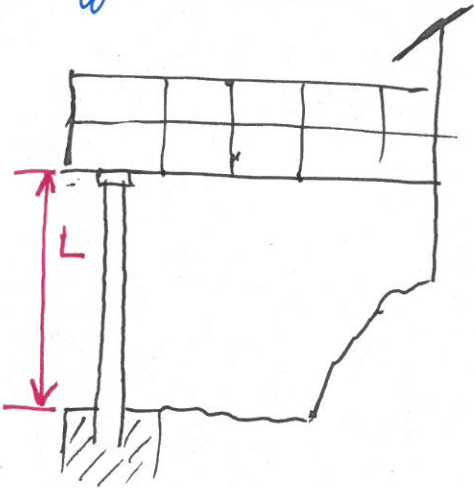
$$\tilde{d} = \sqrt[4]{\frac{64 \tilde{I}}{\pi}} = \underline{\underline{11,415 \text{ mm}}}$$

2. feladat

Az ábrán látható kábel $P = 100 \text{ kN}$ terheléssel

$a \pm L = 3,5 \text{ m}$ hosszúságú, $d = 100 \text{ mm}$ külső átmérőjű alumínium cső tartja. (Rugalmassági modulus $E_{AL} = 72 \text{ GPa}$). A cső alsó megtámasztása befogás, míg a felső rögzítés a vízszintes irányú mozgást gátolja, de az elfordulást engedi.

Hekkora legyen a cső t falvastagsága, ha azt szeretnénk, hogy hánsorozott biztonsággal megfeleljen követelményeknek?



Adatok:

$$L = 3,5 \text{ m}$$

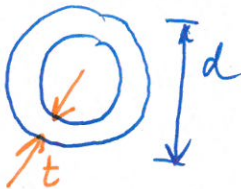
$$n = 3$$

$$d = 100 \text{ mm}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$E_{AL} = 72 \text{ GPa}$$

$$\sigma_0 = 480 \text{ MPa}$$



Geometria:

$$I_2 = \frac{[d^4 - (d - 2t)^4]}{64}$$

A megengedett tönöés:

$$n \cdot P = F_t$$

bizt.
tényező

$$F_t = \underline{\underline{300 \text{ kN}}}$$

TFH Euler-tartományon vagyunk!

$$\sigma_{cr} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E$$

$$\rightarrow \frac{F_t}{A} = \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 \frac{I_2}{A} \cdot E$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = l_0 \cdot \sqrt{\frac{A}{I_2}}$$

$$F_t = \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 I_2 E$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

Már csak a mehtikadó' működését kell



$$l_0 = 0,7 \cdot L = \underline{\underline{2,45 \text{ m}}}$$

Usszárra mindent:

$$F_t = \left(\frac{\pi}{l_0} \right)^2 I_2 \cdot E$$

$$300.000 = \left(\frac{\pi}{2,450} \right)^2 \left(\frac{100^4 - (100 - 2t)^4}{64} \cdot \pi \right) \cdot 72000$$

$$\hookrightarrow t = \underline{\underline{8,3 \text{ mm}}}$$

Ellenőrizni kell, hogy teljesül-e Euler kritériuma.

$$A = \frac{d^2 - (d - 2t)^2}{4} \cdot \pi = 2391,1 \text{ mm}^2$$

$$I_2 = \frac{d^4 - (d - 2t)^4}{64} \cdot \pi = 2533899,91 \text{ mm}^4$$

Inerciásugár

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = 32,55 \text{ mm}$$

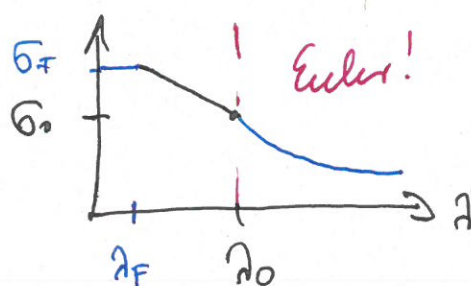
Körösugár

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \underline{\underline{75,27}}$$

Tudjuk:

$$\sigma_0 = \left(\frac{\pi}{\lambda_0} \right)^2 E$$

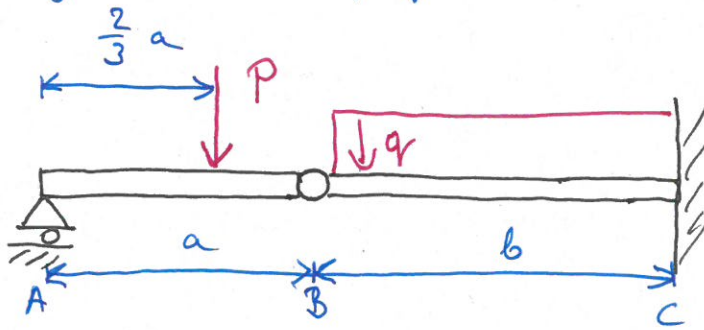
$$\hookrightarrow \lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2}{\sigma_0} E} = \underline{\underline{38,48}}$$



miel $\lambda > \lambda_0$ teljesül a megoldás!

3. feladat

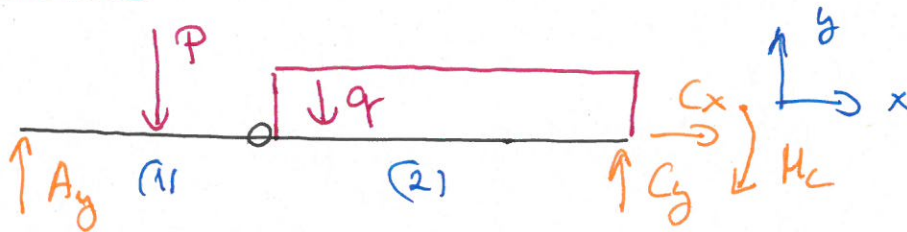
Az ábrán látható AB és BC rúd csuklósan kapcsolódik a B pontban. A távtól $\frac{2}{3}a$ terhelés P koncentrált erő és q egyenletes terhelés. Határozzuk meg a B csukló helyénél a superpozíció elveket és a járási feltételeket felhordozva!



Adatok:

$$P, q, a, b, EI$$

Reakciók



$$\sum F_x = 0: C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0: A_y + C_y - P - qb = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad \text{balról: az (1) és rész}$$

$$\bullet -A_y \cdot a + P \cdot \frac{a}{3} = 0$$

$$\underline{\underline{A_y = \frac{P}{3}}}$$

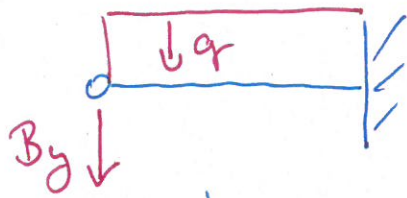
$$\hookrightarrow C_y = P + qb - A_y = \frac{2}{3}P + qb$$

jobbról, a (2) és rész

$$\bullet \sum M_B = -q \cdot \frac{b^2}{2} + C_y \cdot b - M_c = 0$$

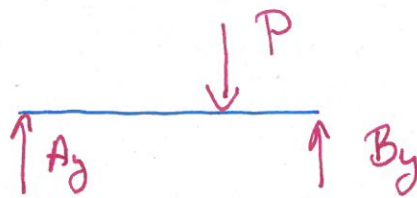
$$M_c = -q \frac{b^2}{2} + C_y \cdot b = \frac{1}{6} b (4P + 3bg)$$

Telát a BC-műd.



↓
felírható mint

Az AC-műd



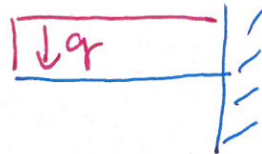
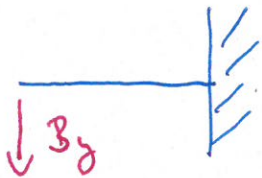
$$B_y = P - F_A = \underline{\underline{\frac{2}{3} P}}$$

I.

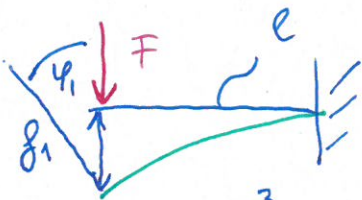
és

II.

Szuperpozíciója

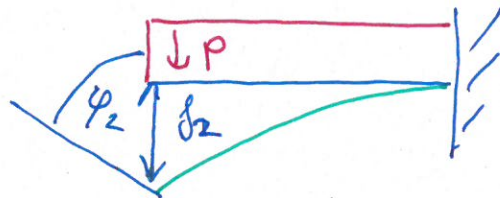


A két esetre vonatkozó járulékegyenletek



$$\delta_1 = \frac{F \cdot l^3}{3IE}$$

$$\varphi_1 = \frac{F l^2}{2IE}$$



$$\delta_2 = \frac{p l^4}{8IE}$$

$$\varphi_2 = \frac{p l^3}{6IE}$$

Ezek alapján

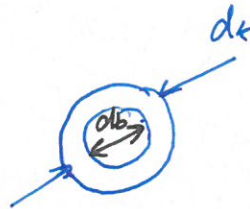
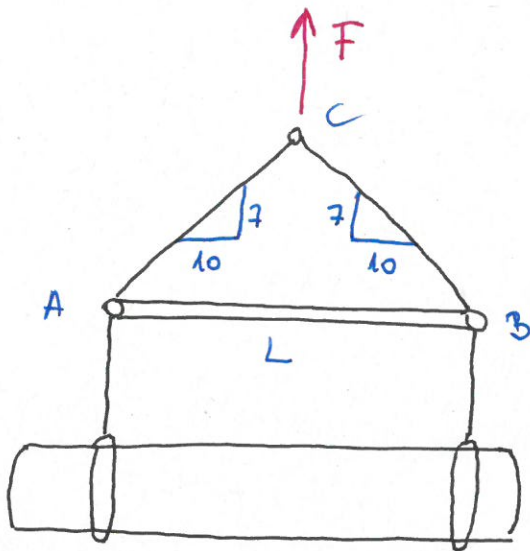
$$\bullet \delta_B = \delta_1 + \delta_2 = \frac{B_y \cdot b^3}{3IE} + \frac{q \cdot b^4}{8IE} = \underline{\underline{\frac{2}{9} \frac{P b^3}{IE} + \frac{q b^4}{8IE}}}$$

$$\bullet \varphi_B = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{B_y \cdot b^2}{2IE} + \frac{q b^3}{6IE} = \underline{\underline{\frac{P b^2}{3IE} + \frac{q b^3}{6IE}}}$$

4. feladat Egy hosszú csövet az ábrán látható acélsodrony segítségével kívánunk felemelni; ahhoz az A és B közé egy távtartót illesztünk be. A távtartó keresztmetszete körgyűrű, ahhoz a külső és belső átmérője 70 illetve 57 mm, míg AB hossza 2,6 m.

Mekkora lehet a cső súlya, ha azt szeretnénk, hogy a távtartó 2,25-es biztonsággal feleljen meg kihajlásra?

(A távtartó és az acélsodrony súlyát elhanyagolhatjuk)



Adatok:

$$dk = 70 \text{ mm}$$

$$db = 57 \text{ mm}$$

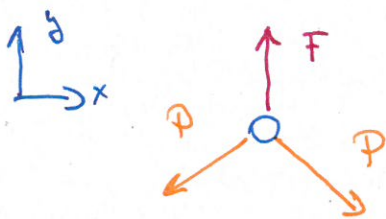
$$L = 2,6 \text{ m}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\sigma_0 = 100$$

$$n = 2,25$$

C-csukló



$$\sum F_x = 0$$

$$P_x - P_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F - 2P_y = 0$$

$$P_y = \frac{F}{2}$$

Geometriából

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{7}{10}$$

$$P_x = \frac{10}{7} P_y = \frac{5}{7} F$$

A távtartó geometriája:

$$A = \frac{(dk^2 - db^2)\pi}{4} = 1256,7 \text{ mm}^2$$

$$I_2 = \frac{(dk^4 - db^4)\pi}{64} = 660422 \text{ mm}^4$$

Inerciásugár

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = 22,57 \text{ mm}$$

↳ Megfeszítés módja



$$C = 1$$

Csuklós-csuklós

$$l_0 = C \cdot L = 2600 \text{ mm}$$

Korrcsútság:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = 115,21 > \lambda_0$$

⇓ Euler-keplet

$$F_t = \left(\frac{\pi}{l_0} \right)^2 I_2 E = 192843 \text{ N}$$

⇓ kritikus tömegcsúszás

A tényleg axiális terhelés: P_x

$$F_t \leq n \cdot P_x$$

$$F_t \leq n \cdot \frac{5}{7} F$$

⇓

$$F_{\text{max}} = \frac{7 F_t}{5 n} = \underline{\underline{119991 \text{ N}}}$$

5. feladat

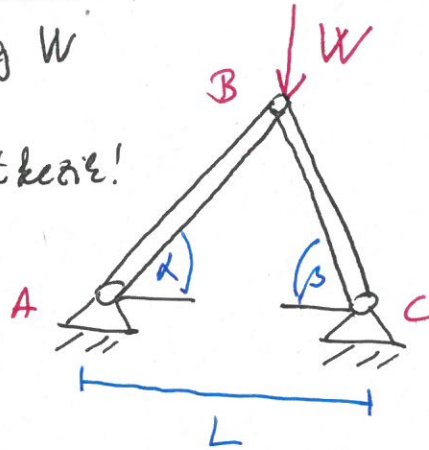
Az ábrán látható csukló szerkezet terhelése a B

csuklóban működő W koncentrált erő. Mindkét nyél körkeresztmetszetű

$d = 100 \text{ mm}$ külső átmérővel és $t = 6 \text{ mm}$ falvastagsággal.

Mindkét nyél kello'én kanyasú alkot, hogy az Euler-jellel elus'lettel számolhassunk!

Határozzuk meg W értékét, ahol kinyúlás jelentkezik!



Adatok:

$$L = 7 \text{ m}$$

$$\alpha = 40^\circ$$

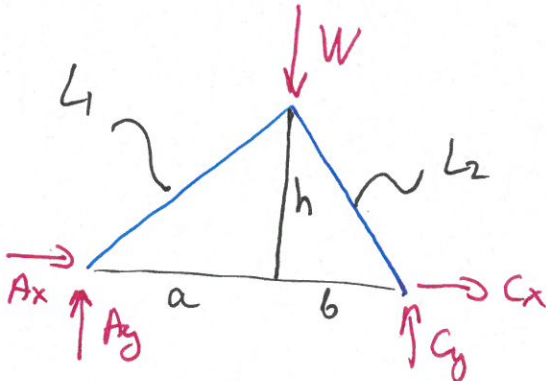
$$\beta = 55^\circ$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$d = 100 \text{ mm}$$

$$t = 6 \text{ mm}$$

Szabadtest ábra



$$\left. \begin{aligned} h &= a \cdot \tan \alpha \\ h &= b \cdot \tan \beta \\ a + b &= L \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a \tan \alpha &= (L - a) \tan \beta \\ \Downarrow \\ a &= 4409,33 \text{ mm} \\ b &= 2590,67 \text{ mm} \\ h &= 3699,86 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$L_1 = \sqrt{a^2 + h^2} = 5735,97 \text{ mm}$$

$$L_2 = \sqrt{b^2 + h^2} = 4516,7 \text{ mm}$$

$$\sum F_x = 0 : A_x + C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + C_y - W = 0$$

$$\sum M_C = 0 : W \cdot b - A_y \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 0,37 W$$

$$\Rightarrow C_y = 0,63 W$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{A_y}{\tan \alpha} = 0,441 W$$

$$\Rightarrow C_x = -0,441 W$$

$$\frac{A_y}{A_x} = \tan \alpha$$

A nidenő

$$N_1 = -\sqrt{A_x^2 + A_y^2} = -0,5757 \text{ W}$$

$$N_2 = -\sqrt{C_x^2 + C_y^2} = -0,769 \text{ W}$$

Kihajlás:

$$I_2 = \frac{(d^4 - (d-2t)^4)}{64} = 1964991 \text{ mm}^4$$

$$F_t^{AB} = \left(\frac{n}{L_1}\right)^2 I_2 E = 117,072 \text{ kN}$$

$$F_t^{BC} = \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 I_2 E = 190,129 \text{ kN}$$

AB nidl esete

$$|N_1| = F_t^{AB}$$

$$0,5757 \text{ W} = F_t^{AB}$$

$$\hookrightarrow W_1 = \underline{\underline{203,355 \text{ kN}}}$$

BC nidl esete

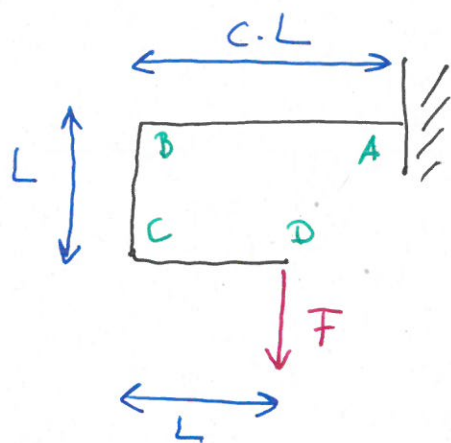
$$|N_2| = F_t^{BC}$$

$$0,769 \text{ W}_2 = F_t^{BC}$$

$$\hookrightarrow W_2 = \underline{\underline{247,242 \text{ kN}}}$$

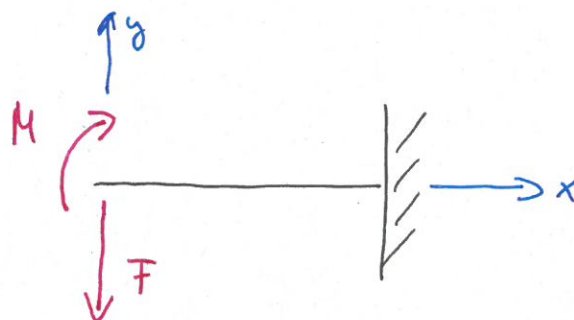
Tehát, mivel $W_1 < W_2$ ezért $W = W_1 = 203,355 \text{ kN}$
 enővel jelentkezik a kihajlás!

6. feladat Mekkora legyen az AB szakasz hossza, hogy a B keresztmetszet függőleges elmozdulása zérus legyen?



Nekünk csak az AB rúd kell

↓
redukáljuk az erőt B pontba



$$M = F \cdot L$$

Rugalmas rúd differenciálegyenlete:

$$M_H(x) = -M + Fx = -FL + Fx = F(x - L)$$

$$-EI w''(x) = M_H(x)$$

$$-EI w''(x) = F(x - L) \quad / \int$$

$$-EI w'(x) = \frac{Fx^2}{2} - FLx + C_1 \quad / \int$$

$$-EI w(x) = \frac{Fx^3}{6} - \frac{FLx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Peremfeltételek:

$$w(c \cdot L) = 0$$

$$w'(c \cdot L) = 0$$

Beliebigkeit

$$w'(c \cdot L) = 0$$

$$0 = \frac{FL(c \cdot L)^2}{2} - FL \cdot (c \cdot L) + C_1$$

$$C_1 = -\frac{FL^2}{2} + FLcL^2 = \frac{FL^2}{2}(-c^2 + 2c)$$

$$w(c \cdot L) = 0$$

$$0 = \frac{FL(c \cdot L)^3}{6} - \frac{FL(c \cdot L)^2}{2} + \frac{FL^2}{2}(c^2 + 2c) \cdot (c \cdot L) + C_2$$

$$C_2 = -\frac{FL^3}{6} + \frac{FLc^2L^2}{2} + \frac{FL^2}{2}(c^2 - 2c)cL$$

$$C_2 = \frac{FL^3}{6}(-c^3 + 3c^2 + 3c^3 - 6c^2) = \underline{\underline{\frac{FL^3}{6}(2c^3 - 3c^2)}}$$

Visszainva:

$$w(x) = -\frac{1}{1E} \left(\frac{Fx^3}{6} - \frac{FLx^2}{2} + \frac{FL^2}{2}(-c^2 + 2c)x + \frac{FL^3}{6}(2c^3 - 3c^2) \right)$$

Feltétel: $w(0) = 0$

↓

$$0 = -\frac{1}{1E} \left(0 - 0 + 0 + \frac{FL^3}{6}(2c^3 - 3c^2) \right)$$

$$\frac{FL^3}{6}(2c^3 - 3c^2) = 0$$

$$2c^3 = 3c^2$$

$$\boxed{c = \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

nincs értelme!