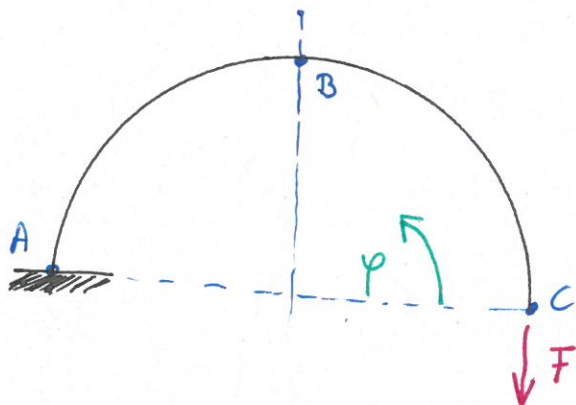


Castigliano-képlet

1. feladat Határozzuk meg a végkeresztmetszet függőleges elmozdulását!

- Az alakváltozási energia számításakor leegyszerűsítjük el a normál igénybevitelt határánál
- Végül feljellembé a normál igénybevitelt határánál!



Írjuk fel az igénybeviteli függvényeket φ koordináta segítségével!

$$N(\varphi) = F \cos \varphi$$

$$V(\varphi) = F \sin \varphi$$

$$M_k(\varphi) = FR(1 - \cos \varphi)$$

a) eset $u \approx u^{M_k} \rightarrow$ azaz u^V és u^N -t elhanyagoljuk

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_{(e)} M_k \cdot \frac{\partial M_k}{\partial F} dl = \frac{1}{EI} \int_0^\pi M_k \frac{\partial M_k}{\partial F} \underbrace{R d\varphi}_{ds \Rightarrow \text{elemi ívhossz}}$$

hossz mentén

$$\frac{\partial M_k}{\partial F} = R(1 - \cos \varphi)$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^\pi FR(1 - \cos \varphi) R(1 - \cos \varphi) R d\varphi$$

②

$$J = \frac{1}{IE} \int_0^{\pi} F l^3 \left(1 - 2 \cos \varphi + \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}} \right) d\varphi = \frac{1}{IE} \int_0^{\pi} F l^3 \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{IE} F l^3 \left[\frac{3}{2} \varphi - 2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{F l^3}{IE} \left(\frac{3}{2} \pi \right) = \frac{3\pi F l^3}{2IE}$$

Felhasználhatjuk, hogy $I = \frac{d^4 \pi}{64} \Rightarrow J = \frac{96 F l^3}{d^4 E}$

b) eset $u \approx u^M + u^N$

$$J = \frac{\partial u}{\partial F} = \underbrace{\frac{\partial u^M}{\partial F}}_{\frac{96 F l^3}{d^4 E}} + \frac{\partial u^N}{\partial F}$$

$$\frac{\partial u^N}{\partial F} = \frac{1}{AE} \int_0^{\pi} N \frac{\partial N}{\partial F} l d\varphi = \frac{1}{AE} \int_0^{\pi} F \cos^2 \varphi l d\varphi = \frac{1}{AE} \int_0^{\pi} F l \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}} d\varphi$$

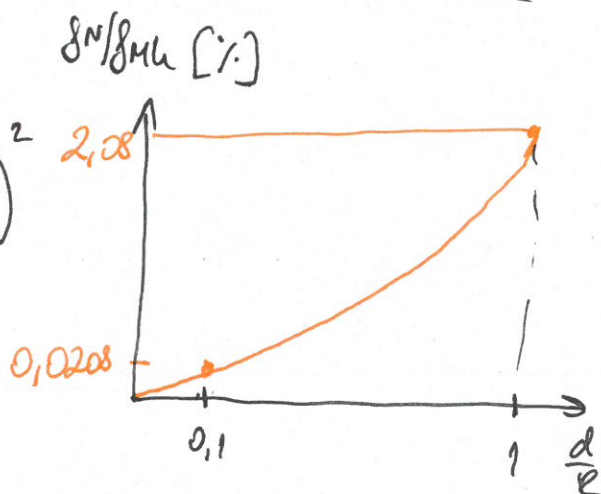
$$\frac{\partial N}{\partial F} = \cos \varphi$$

$$= \frac{1}{AE} F l \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{F l \pi}{2 A E} = \frac{2 F l}{d^2 E}$$

$A = \frac{d^2 \pi}{4}$ \nearrow bevezetés: $J = \frac{96 F l^3}{d^4 E} + \frac{2 F l}{d^2 E}$

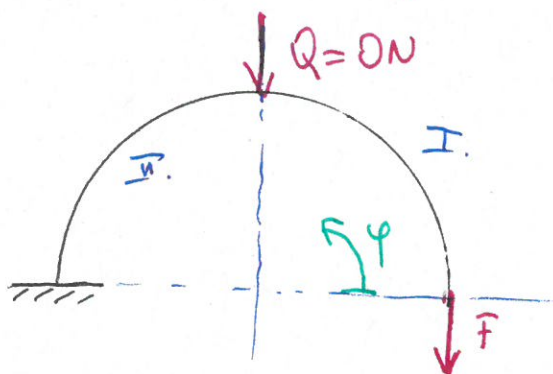
Vizsgáljuk J_N és J_M arányát:

$$\frac{J_N}{J_M} = \frac{2 F l}{d^2 E} \cdot \frac{d^4 E}{96 F l^3} = \frac{1}{48} \left(\frac{d}{l} \right)^2$$



2. feladat Számítsuk ki az előző feladatnál a B keresztmetszet elmozdulását és megfordulását! Az alakváltozás energiáját csak a hajlítást vesszük figyelembe!

a) Elmozdulás \rightarrow vegyünk fel $Q = 0 \text{ N}$ mőt a B km-ben!



$$u \approx u^{HH}$$

A hajlítógörvénél a egyenértékű egyenlet:

$$\bullet M_{H1}(\varphi) = FR(1 - \cos\varphi)$$

$$\bullet M_{H2}(\varphi) = FR(1 - \cos\varphi) + QR(-\cos\varphi)$$

A B km elmozdulása

$$q = \frac{\partial u}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\pi/2} M_{H1} \frac{\partial M_{H1}}{\partial Q} R d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} M_{H2} \frac{\partial M_{H2}}{\partial Q} R d\varphi \right]$$

A deriváltak

$$\frac{\partial M_{H1}}{\partial Q} = 0; \quad \frac{\partial M_{H2}}{\partial Q} = -R \cos\varphi$$

Behelyettesítés

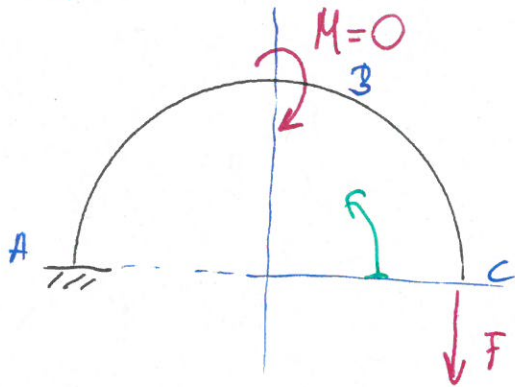
$$q = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\pi/2} FR(1 - \cos\varphi) \cdot 0 \cdot R d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} [FR(1 - \cos\varphi) + \underbrace{QR(-\cos\varphi)}_{=0}] (-R \cos\varphi) R d\varphi \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \int_{\pi/2}^{\pi} FR(1 - \cos\varphi)(-R \cos\varphi) R d\varphi = \frac{1}{EI} \int_{\pi/2}^{\pi} FR^3 (\cos^2\varphi - \cos\varphi) d\varphi$$

$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}$

$$= \frac{1}{EI} FR^3 \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} - \sin\varphi \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{FR^3}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 1 \right) = \frac{FR^3}{EI} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right)$$

b) elfordulások \rightarrow B-be egy $M=0$ Nm nyomatékot végzőnk fel!



$$u \approx u^{M_0}$$

A hajlítónyomaték kiígybeírható:

- $M_{k1}(\varphi) = FR(1 - \cos\varphi)$

$$\frac{\partial M_{k1}}{\partial M} = 0$$

- $M_{k2}(\varphi) = FR(1 - \cos\varphi) + M$

$$\frac{\partial M_{k2}}{\partial M} = 1$$

A B km elfordulás:

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial M} = \frac{1}{EI} \left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} M_{k1} \frac{\partial M_{k1}}{\partial M} R d\varphi}_{=0} + \int_{\pi/2}^{\pi} M_{k2} \frac{\partial M_{k2}}{\partial M} R d\varphi \right]$$

Belülső sík: $\varphi = \frac{1}{EI} \int_{\pi/2}^{\pi} (FR(1 - \cos\varphi) + M) \cdot 1 R d\varphi$

$$\varphi = \frac{1}{EI} \int_{\pi/2}^{\pi} FR^2(1 - \cos\varphi) d\varphi = \frac{1}{EI} FR^2 \left[\varphi - \sin\varphi \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{EI} FR^2 \left[\pi - 0 - \frac{\pi}{2} + 1 \right] = \underline{\underline{\frac{1}{EI} FR^2 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)}}$$

3. feladat Az előző példánál számítuk ki a C

konstrukciót vízszintes elmozdulást! Az alakváltozási energiát csak a hajlítást vesszük figyelembe!

A C ív-ben nincs vízszintes
mozgás \Rightarrow jól kell venni!

Hajlítónyomaték ki ígyleti egyenlete.

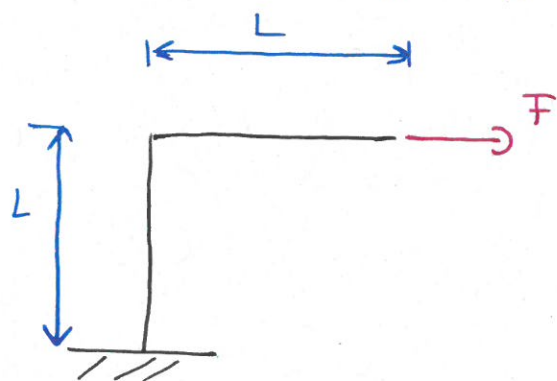
$$M_k(\varphi) = FR(1 - \cos\varphi) + QR \sin\varphi$$

$$\frac{\partial M_k}{\partial Q} = R \sin\varphi$$

A vízszintes elmozdulás.

$$\begin{aligned} q &= \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \int_0^\pi M_k \cdot \frac{\partial M_k}{\partial Q} R d\varphi = \frac{1}{EI} \int_0^\pi (FR(1 - \cos\varphi) + \overbrace{QR \sin\varphi}^0) R \sin\varphi R d\varphi \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^\pi FR^3 (1 - \cos\varphi) \sin\varphi d\varphi = \frac{FR^3}{EI} \int_0^\pi \sin\varphi - \cos\varphi \sin\varphi d\varphi = \\ &= \frac{FR^3}{EI} \left[-\cos\varphi - \frac{\sin^2\varphi}{2} \right]_0^\pi = \frac{FR^3}{EI} [+1 - 0 + 1 + 0] = \underline{\underline{\frac{2FR^3}{EI}}} \end{aligned}$$

4. feladat Az alábbi kör keresztmetszetű, törthozalú tartó anyaga és keresztmetszete állandó a tartó hossza mentén. Határozzuk meg a végkeresztmetszel q lehajlásait



Adatok:

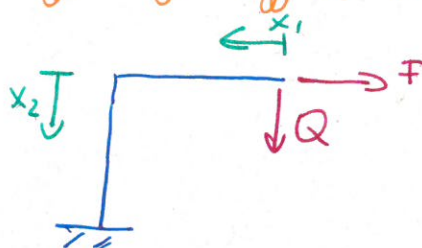
$$F = 100 \text{ N}$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

A függőleges lehajlás miatt végénél jel egy $Q = 0$ mőt!



Igyébenteli függvények

$$N_1(x_1) = F$$

$$N_2(x_2) = -Q$$

$$V_1(x_1) = Q$$

$$V_2(x_2) = F$$

$$M_{k1}(x_1) = Qx$$

$$M_{k2}(x_2) = Fx_2 + Q \cdot L$$

$$U = U^N + \underbrace{U^V}_{\approx 0} + U^{Mk} \approx U^N + U^{Mk}$$

A deriváltak: $\frac{\partial N_1}{\partial Q} = 0$; $\frac{\partial M_{k1}}{\partial Q} = x$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Q} = -1$$
 ; $\frac{\partial M_{k2}}{\partial Q} = L$

A lehajlás:

$$q = \frac{\partial U^N}{\partial Q} + \frac{\partial U^{Mk}}{\partial Q} = \frac{1}{AE} \left[\int_0^L N_1 \frac{\partial N_1}{\partial Q} dx_1 + \int_0^L N_2 \frac{\partial N_2}{\partial Q} dx_2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{IE} \left[\int_0^L M_{k1} \frac{\partial M_{k1}}{\partial Q} dx_1 + \int_0^L M_{k2} \frac{\partial M_{k2}}{\partial Q} dx_2 \right]$$

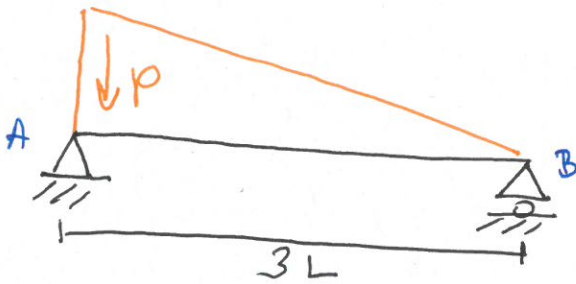
⑦

$$q = \frac{1}{AE} \left[\underbrace{\int_0^L 0 dx_1 + \int_0^L \underset{\substack{\downarrow \\ =0}}{(-Q)(-1)} dx_2}_{=0} \right] + \frac{1}{IE} \left[\int_0^L \underset{\substack{\downarrow \\ =0}}{Qx_1^2} dx_1 + \int_0^L \underset{\substack{\downarrow \\ =0}}{Fx_2L + QL^2} dx_2 \right]$$

$$q = \frac{1}{IE} \int_0^L FLx_2 dx_2 = \frac{1}{IE} \left[FL \frac{x_2^2}{2} \right]_0^L = \frac{FL^3}{2IE} = \underline{\underline{6,23 \text{ mm}}}$$

$$IE = \frac{d^4 \pi}{64} \cdot E = 7,9521 \cdot 10^9 \text{ Nmm}$$

5. feladat Határozzuk meg az alábbi kétfázisú tartóban a keresztmetszet megfordulását a B helyen. A tartó keresztmetszete "a" oldalirányú négyzet.



Adatok:

$$p = 2 \text{ kN/m}$$

$$a = 20 \text{ mm}$$

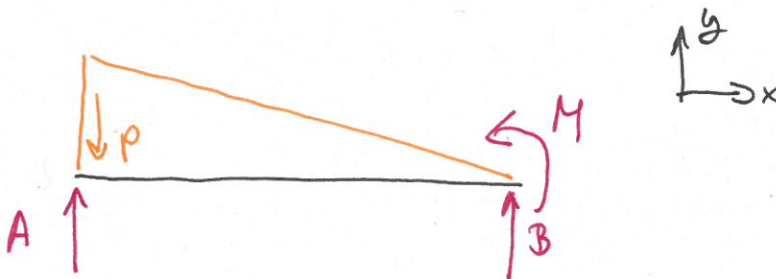
$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$L = 0,5 \text{ m}$$

1) Reakciók kifejezése

Mivel a B pontban kell megfordulást számolni
 \perp vegyük fel oda M-D nyomatékot!

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0: \quad 0 = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad A + B - \frac{p \cdot 3L}{2} = 0$$

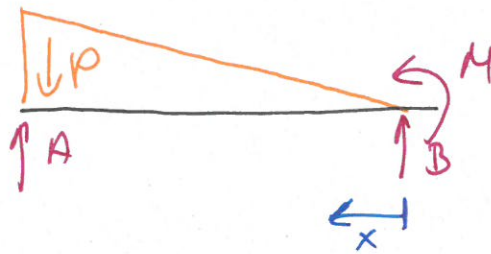
$$\sum M_A = 0: \quad B \cdot 3L + M - \frac{p \cdot 3L}{2} \cdot L = 0$$

$$\hookrightarrow B = \frac{\frac{p \cdot 3L^2}{2} - M}{3L} = \underline{\underline{\frac{pL}{2} - \frac{M}{3L}}}$$

$$\hookrightarrow A = \frac{p \cdot 3L}{2} - B = \underline{\underline{pL + \frac{M}{3L}}}$$

1. geizburekli juiggeysek

Indetsur x - koordinatit joldonol.



$$N(x) = 0$$

$$V(x) = -B + \frac{p}{3L} \cdot \frac{x^2}{2} = -\frac{pL}{2} + \frac{M}{3L} + \frac{p}{6L} x^2$$

$$M_h(x) = -M - Bx + \frac{p}{3L} \cdot x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -M + \frac{M}{3L} x - \frac{pLx}{2} + \frac{px^3}{18L}$$

$$u = \underbrace{u^N}_{=0} + \underbrace{u^V}_{=0} + u^{M_h} + \underbrace{u^{M_e}}_{=0} \approx u^{M_h}$$

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial M} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_h \cdot \frac{\partial M_h}{\partial M} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L M_h \cdot \frac{\partial M_h}{\partial M} dx$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial M} = -1 + \frac{x}{3L} =$$

Belugytsivur: $\varphi = \frac{1}{EI} \int_0^{3L} \underbrace{\left(-M + \frac{M}{3L}x - \frac{pLx}{2} + \frac{px^3}{18L}\right)}_{\text{fellekshozvaljuk,}} \left(-1 + \frac{x}{3L}\right) dx =$
 hogy $M=0$

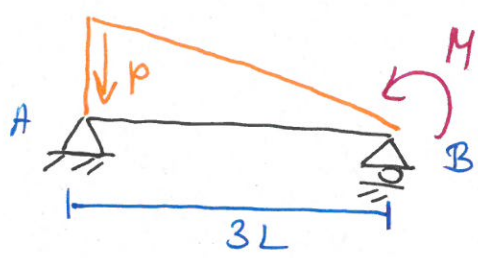
$$= \frac{1}{EI} \int_0^{3L} \left(-\frac{pLx}{2} + \frac{px^3}{18L}\right) \left(\frac{x}{3L} - 1\right) dx = \frac{1}{EI} \int_0^{3L} \left(\frac{Lpx}{2} - \frac{px^2}{6} - \frac{px^3}{18L} + \frac{px^4}{54L^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{Lpx^2}{4} - \frac{px^3}{18} - \frac{px^4}{72L} + \frac{px^5}{270L^2} \right]_0^{3L} = \frac{21}{40} \frac{L^3 p}{EI} = 0,0492 \text{ rad}$$

Naleuk: $IE = \frac{a^4}{12} \cdot E = 2,667 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$

$\varphi = 2,82^\circ$

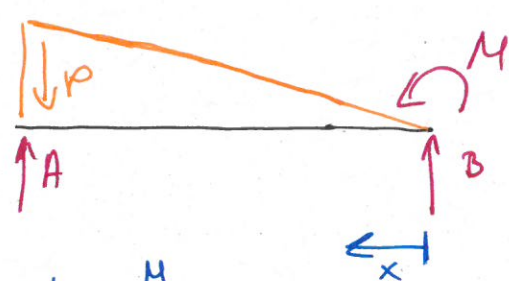
6. feladat Hekkora koncentrált nyomatékot kell a B pontban alkalmazni, hogy a két elfordulása zérus legyen?



Adatok

$p = 2 \text{ kN/m}$
 $a = 20 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $L = 0,5 \text{ m}$

Reakciók, igazságteli függvények. (lásd előző feladat)



$u \approx u^{HH}$

$A = pL + \frac{M}{3L}$
 $B = \frac{pL}{2} - \frac{M}{3L}$

$N(x) = 0$
 $V(x) = -Bx + \frac{p}{3L} \frac{x^2}{2} = \frac{M}{3L}x - \frac{pL}{2}x + \frac{px^2}{6L}$

$M_H(x) = -M - Bx + \frac{p}{3L} \cdot x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$

Most M ismeretlen!

$M_H(x) = -M + \frac{M}{3L}x - \frac{pL}{2}x + \frac{px^3}{18L}$

de tudjuk, hogy

$\varphi = \frac{\partial u^{HH}}{\partial M} = 0$

\Downarrow
 $\frac{\partial M_H}{\partial M} = -1 + \frac{x}{3L}$

$\varphi = \frac{1}{EI} \int_0^{3L} \left(-M + \left(\frac{M}{3L} - \frac{pL}{2} \right)x + \frac{px^3}{18L} \right) \left(-1 + \frac{x}{3L} \right) dx =$

$= \frac{1}{EI} \int_0^{3L} \left(M + \left(\frac{pL}{2} - \frac{M}{3L} - \frac{M}{3L} \right)x + \left(\frac{M}{9L^2} - \frac{p}{6} \right)x^2 - \frac{px^3}{18L} + \frac{px^4}{54L^2} \right) dx$

$= \frac{1}{EI} \left[Mx + \left(\frac{pL}{2} - \frac{2M}{3L} \right) \frac{x^2}{2} + \left(\frac{M}{9L^2} - \frac{p}{6} \right) \frac{x^3}{3} - \frac{px^4}{72L} + \frac{px^5}{270L^2} \right]_0^{3L} = \boxed{LM + \frac{21pL^3}{40} = 0}$

Tehát az alulválasztási feltételből

$$\varphi_B = 0$$

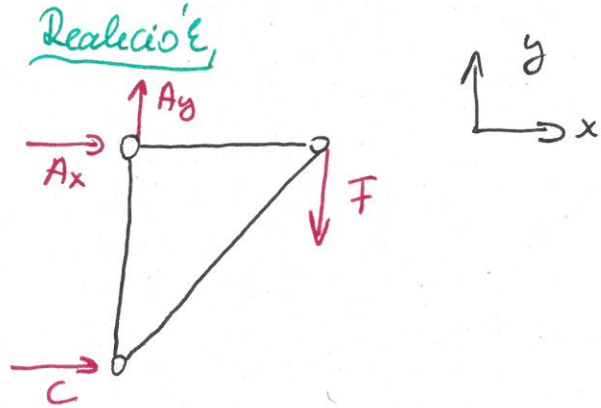
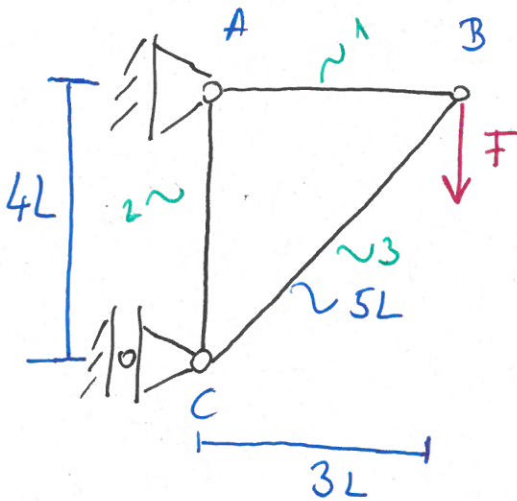
$$\hookrightarrow \boxed{LM - \frac{21 p L^3}{40} = 0}$$

$$\hookrightarrow \text{Megoldva: } M = \frac{-21 p L^2}{40} = \underline{\underline{-262,5 \text{ Nm}}}$$

↓
a negatív előjel az jelenti,
hogy a felülettel ellentétes
irány!

7. feladat

Az alábbi rácsos szerkezetben a málák keresztmetszete és anyag tulajdonsága azonos. Határozza meg a B-ben függőleges elmozdulását!



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: \quad A_x + C = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y - F = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad -F \cdot 3L + C \cdot 4L = 0$$

$$\hookrightarrow A_y = F$$

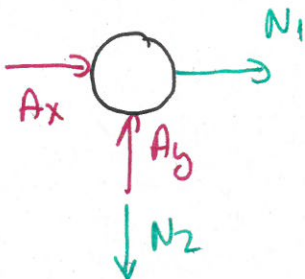
$$\hookrightarrow C = \frac{3}{4} F$$

$$\hookrightarrow A_x = -\frac{3}{4} F$$

Csukló's szerkezet \rightarrow kizárt/nyitott málák

\hookrightarrow Csomóponti módszer

"A"



$$\sum F_x = 0 \quad A_x + N_1 = 0$$

$$\hookrightarrow N_1 = -A_x = \frac{3}{4} F$$

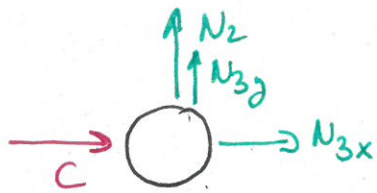
kizárt

$$\sum F_y = 0 \quad A_y - N_2 = 0$$

$$\hookrightarrow N_2 = A_y = F$$

kizárt

C'-csukló



$$\sum F_x = 0: C + N_{3x} = 0$$

$$\hookrightarrow N_{3x} = -C = -\frac{3}{4} F$$

$$\sum F_y = 0: N_2 + N_{3y} = 0$$

$$\hookrightarrow N_{3y} = -N_2 = -F$$

$N_3 \rightarrow$ nyújt

$$N_3 = -\sqrt{N_{3x}^2 + N_{3y}^2} = -\frac{5}{4} F$$

Most csak U^N kárpótos íbred

$$U = U^N = U^{N_1} + U^{N_2} + U^{N_3}$$

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial U^{N_1}}{\partial F} + \frac{\partial U^{N_2}}{\partial F} + \frac{\partial U^{N_3}}{\partial F}$$

Eltérítéssel: $\frac{\partial N_1}{\partial F} = \frac{3}{4}; \quad \frac{\partial N_2}{\partial F} = 1; \quad \frac{\partial N_3}{\partial F} = -\frac{5}{4}$

$$\delta = \frac{1}{AE} \left[\int_0^{3L} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial F} dx_1 + \int_0^{4L} N_2 \frac{\partial N_2}{\partial F} dx_2 + \int_0^{5L} N_3 \frac{\partial N_3}{\partial F} dx_3 \right]$$

$$\delta = \frac{1}{AE} \left[\int_0^{3L} \frac{9}{16} F dx_1 + \int_0^{4L} F dx_2 + \int_0^{5L} \frac{25}{16} F dx_3 \right] = \frac{1}{AE} \left(\frac{27}{16} FL + 4FL + \frac{125}{16} FL \right)$$

$$\boxed{\delta = \frac{27FL}{2AE}}$$

Második megoldás

↳ Mivel csak 1 db F -g kapcsolat van



$$W = \frac{1}{2} F \cdot g$$

A rendszerben tárolt rugalmas energia:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{3L} \frac{N_1^2}{2AE} dx_1 + \int_0^{4L} \frac{N_2^2}{2AE} dx_2 + \int_0^{5L} \frac{N_3^2}{2AE} dx_3 = \\ &= \int_0^{3L} \frac{9 F^2}{32AE} dx_1 + \int_0^{4L} \frac{F^2}{2AE} dx_2 + \int_0^{5L} \frac{25 F^2}{32AE} dx_3 = \underbrace{\left(\frac{27}{32} + 2 + \frac{125}{32} \right)}_{\frac{27}{4}} \frac{F^2 L}{AE} \end{aligned}$$

Azaz:
$$U = \frac{27}{4} \frac{F^2 L}{AE}$$

Mivel: $U = W \Rightarrow \frac{1}{2} F g = \frac{27}{4} \frac{F^2 L}{AE}$

$$\Rightarrow g = \frac{27}{2} \frac{FL}{AE}$$