Sajátérték, sajátvektor számítás

Az alábbi feladatok az 1. házi feladat megoldásához szükséges 2x2-es szimmetrikus mátrixok sajátérték-sajátvektor feladataihoz készültek

EMLÉKEZTETŐ

Azt mondjuk, hogy a λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix sajtértéke, ha létezik olyan nem nulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ teljesül. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektorainak nevezzük. (Forrás: Wettl, Lineáris algebra)

A fenti $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet rendezzük át az alábbi módon ($\mathbf{E}$ az egységmátrix)

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ez egy ún. lineáris egyenletrendszer $\mathbf{x}$-re nézve, amelynek akkor lesz zérusvektortól különböző megoldása, ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0.$$

Kiírva a fenti összefüggést, amelyet karakterisztikus egyenletnek nevezünk,

$$\det\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Kifejtve a fenti determinánst:

$$\lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) = 0.$$

A fenti egyenletet megoldva a két sajátérték λ_1 és λ_2 kiszámolható, melyeknél mindig λ_1 jelöli a legnagyobb sajátértéket. Fontos tudni, hogy szimmetrikus mártixok esetén a sajátértékek mindig valósak és a sajátvektorok merőlegesek egymásra. Emiatt a főmásodrendű nyomatékokhoz tartozó főirányok meghatározásához elegendő egy sajátvektort megadni (a másik főirány erre merőleges lesz).

Egy sajátértékhez végtelen sok sajátvektor rendelhető. Számunkra azonban elegendő egy sajátértéket megadni, amely egyértelműen kijelöli majd a főirányt. Ahhoz, hogy megadjunk egy λ_1-hez tartozó $\mathbf{e_1}$ sajátvektort helyettesítsük vissza λ_1-et a sajátérték egyenletbe, azaz

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{e_1} = \mathbf{0}.$$

Ez mátrixos alakban

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

A fenti egyenlet végtelen sok megoldása lesz, ezért legyen $e_1 = 1$. Ekkor elvégezve a szorzást

$$(A_{11} - \lambda_1) + A_{12}e_2 = 0.$$
$$A_{21} + (A_{22} - \lambda_1)e_2 = 0.$$

Az egyenletek bármelyikéből e_2 számítható. Így tehát az $\mathbf{e_1}$ sajátvektor:

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

Ebből az 1-es főtengely vízszintessel bezárt szöge α számítható, mint

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{e_2}{e_1} = e_2.$$

azaz

$$\alpha = \operatorname{arctg} e_2.$$

FELADATOK

1. Számítsuk ki az alábbi mátrix saját értékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel a karakterisztikus egyenletet!

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A determinánst kifejtve az alábbi adódik

$$(3-\lambda)(6-\lambda) - 2 \cdot 2 = 0,$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldását követően:

$$\lambda_1 = 7; \qquad \lambda_2 = 2.$$

Az $\mathbf{e_1}$ sajátvektor meghatározásához helyettesítsük vissza λ_1-et:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 2 \\ 2 & 6-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Felhasználva azt a feltevésünket, hogy $e_1 = 2$, az egyenletrendszer az alábbi alakra egyszerűsödik

$$\begin{bmatrix} 3-7 & 2 \\ 2 & 6-7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Elvégezve a szorzást

$$-4 + 2e_2 = 0$$

$$2 - e_2 = 0$$

adódik. Látható, hogy bármelyik egyenlet megoldva $e_2 = 2$. Tehát az $\mathbf{e_1}$ sajátvektorra

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Mivel az $\mathbf{e_2}$ sajátvektor (amely $\lambda_2 = 2$-höz tartozik) merőleges $\mathbf{e_1}$-re, ezért

$$\mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az 1-es sajátvektor vízszintessel bezárt szögére

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1} = 2,$$

melyből

$$\alpha = \operatorname{arctg}(2) = 63{,}44°.$$

2. Gyakorló feladatok – Határozzátok meg az alábbi 2x2-es szimmetrikus mártrixok sajátértékeit, sajátvektorait és az 1-es sajátvektor vízszintessel bezárt szögét!

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Megoldás: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{e_1} = (1;1)$, $\mathbf{e_2} = (-1;1)$, $\alpha = 45°$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Megoldás: $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{e_1} = (1;-1/3)$, $\mathbf{e_2} = (1/3;1)$, $\alpha = -18{,}44°$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

Megoldás: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{e_1} = (1;1)$, $\mathbf{e_2} = (-1;1)$, $\alpha = 45°$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5.2 & -0.4 \\ -0.4 & 5.8 \end{bmatrix}$

Megoldás: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 5$, $\mathbf{e_1} = (1;-2)$, $\mathbf{e_2} = (2;1)$, $\alpha = -63{,}44°$

e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

Megoldás: $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{e_1} = (1;2/3)$, $\mathbf{e_2} = (-2/3;1)$, $\alpha = -33{,}69°$