

Statika - 5. gyakorlat - I.

Rácsos szerkezetek

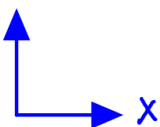
Eléleti áttekintés: Statika \rightarrow egyensúly!

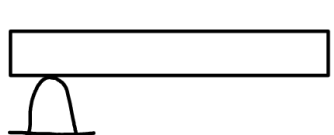

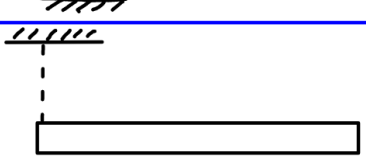

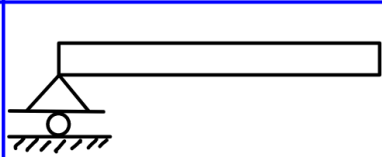

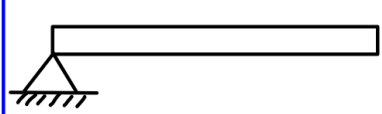
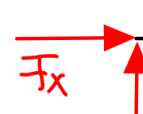
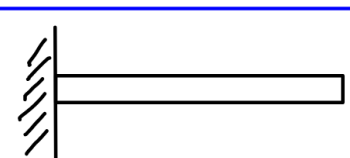
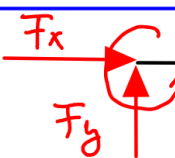
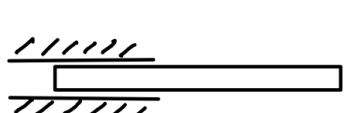
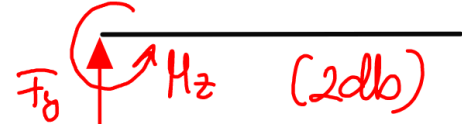
3D eset $[\underline{F}; \underline{M}_A]_A = [\underline{0}; \underline{0}]_A$ térben 6 db egyenlet

2D eset (x és y tengely jelöli ki a síkot!)

$$\left. \begin{array}{l} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ M_{Oz} = 0 \end{array} \right\} \text{3 db skalar egyenlet!}$$

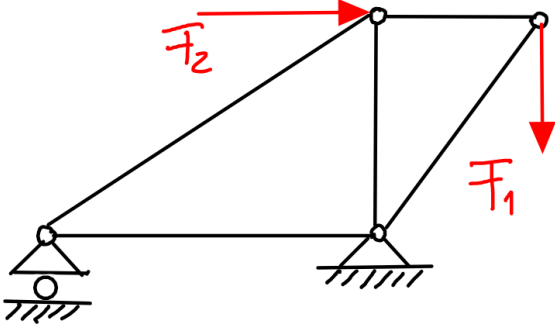
ahol: $F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$; $F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$; $M_{Oz} = \sum_{j=1}^m M_{jz} + \sum_{i=1}^n (r_i \times F_i)_z$

Képszerűk: 

Típus	Rajzi jel	Gátolt mozgáslehetőség	Reakció
Támasz		$u_y = 0$ (1 db)	 (1 db)
Kötél		$u_y = 0$ (1 db)	 (1 db)
Görge's támasz		$u_y = 0$ (1 db)	 (1 db)
Csuklós támasz		$u_x = 0$ $u_y = 0$ (2 db)	 (2 db)
Befogás		$u_x = 0$ $\varphi_z = 0$ $u_y = 0$ (3 db)	 (3 db)
Csúszka		$u_y = 0$ $\varphi_z = 0$ (2 db)	 (2 db)

Rácsos szerkezet

→ mechanikai modell



↳ végeken minden kapcsolódó merev rudak

↳ terhelés csak a csuklóokban

↳ a kapcsolatok olyanok, hogy minden marad a szerkezet!

A rudakban csak nyiróerő van!

↳ ún. normáligerőbevitel!

Jelölés: N

Előjel konvenció:

húzott rúd (+)

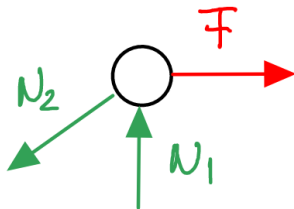
nyomott rúd (-)

Megoldási módszerek:

1) Csomóponti módszer

↳ egyensúlyi egyenlet a csuklóra

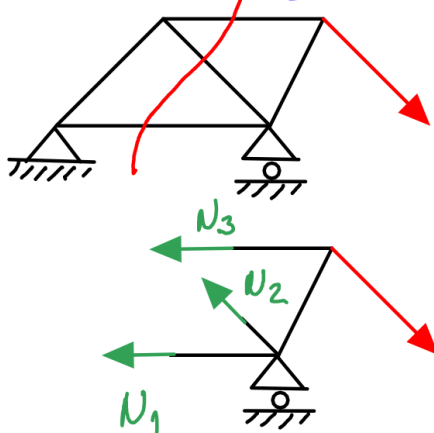
$$\begin{aligned} 2 \text{ db egyenlet} \quad \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned}$$



Fontos! Csak olyan csuklóra alkalmazzuk, ahol max. 2 db ismeretlen nyiróerő szerepel!

Csuklóról csuklóra kell haladni!

2) Átvetsző módszer



↳ két részre vágjuk a szerkezetet

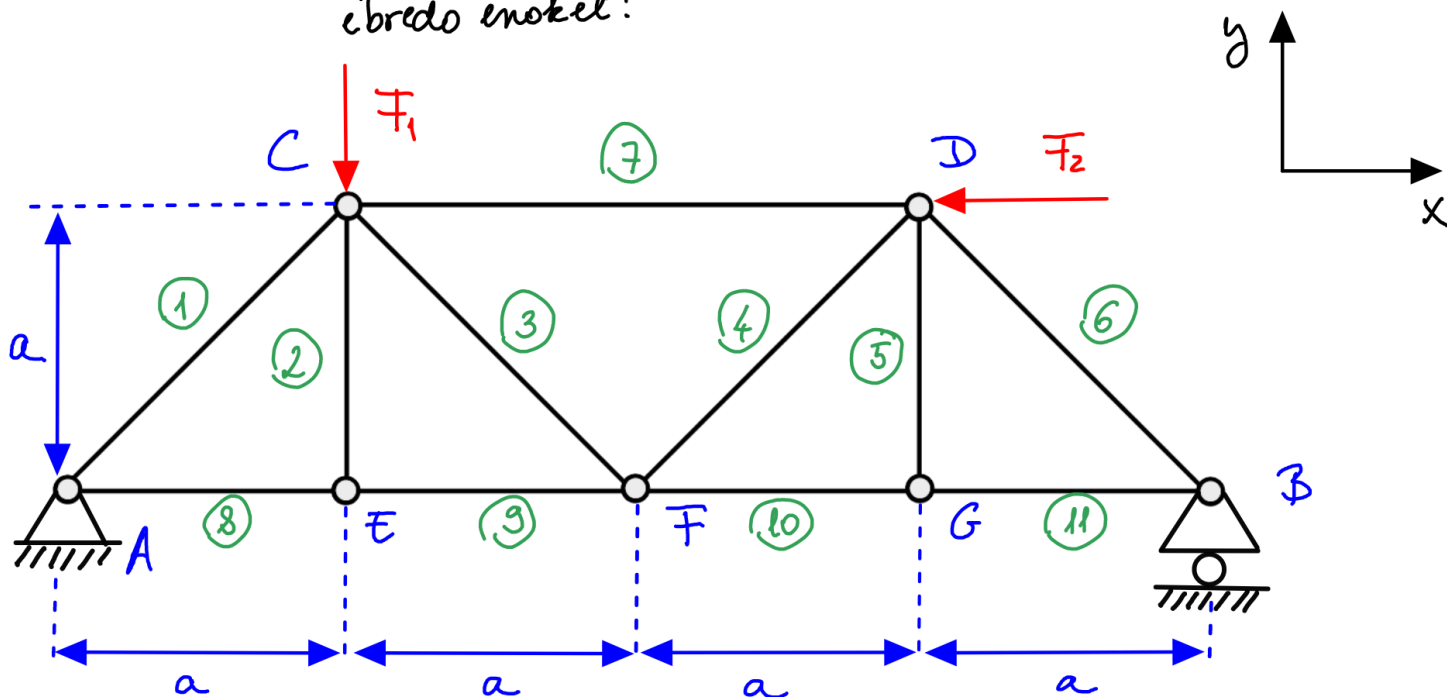
↳ elvágtatott rész helyett nyiróerő!

↳ legfeljebb 3 rúd kerülhet NEM egy pontban metsződnék!

↳ 3 db egyensúlyi egyenlet!

1. feladat

Határozzuk meg csomóponti módszerrel a rudakban ébredő erőket!



Adatok: $a = 1\text{ m}$

$F_1 = 400\text{ N}$

$F_2 = 200\text{ N}$

Feltételezzük, hogy minden rudat azonosítsuk!
(általában számozással)

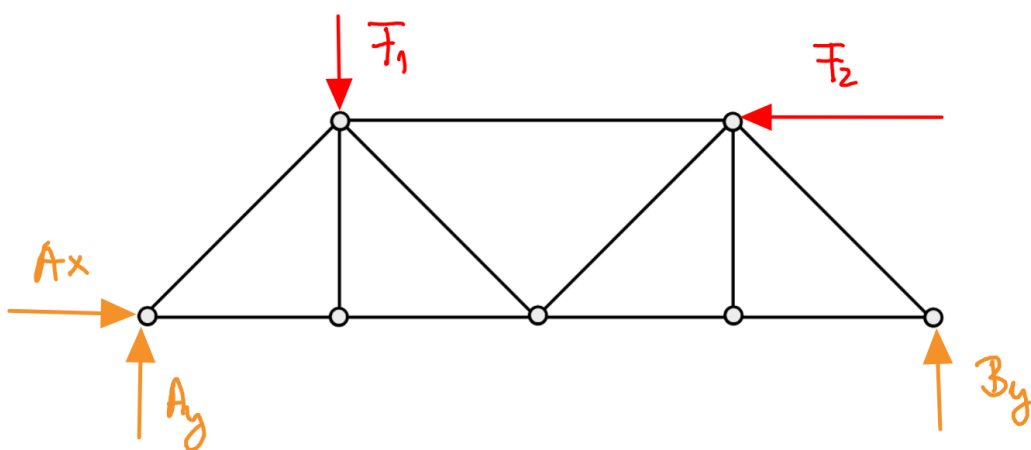
Hasonlóképpen a csomópontokat bejelölve!

1) Reakcióerők kiszámítása

Szabadtest ábra

SZTA!

Képzünk \rightarrow Reakcióerőket!



Mindig kell koordináta-rendszer!

Equilibrium equations:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - F_1 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -F_1 \cdot a + F_2 \cdot a + B_y \cdot 4a = 0 \quad (3)$$

(1)-ből $\rightarrow A_x = F_2 = \underline{200N}$

(3)-ből $\rightarrow B_y = \frac{F_1 a - F_2 \cdot a}{4a} = \frac{F_1 - F_2}{4} = \underline{50N}$

(2)-ből $\rightarrow A_y = F_1 - B_y = \underline{350N}$

Vektorsan: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \end{bmatrix} N$; $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} N$

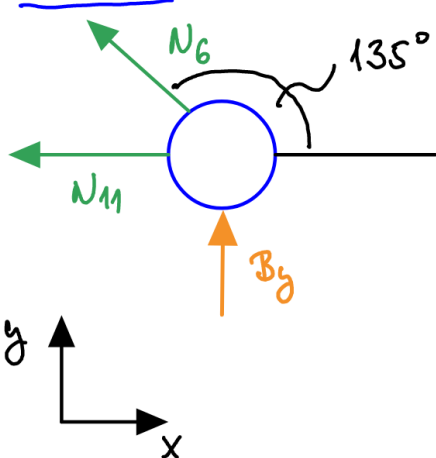
A reakciók nagysága:

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{200^2 + 350^2} = \underline{403,1 N}$$

$$B = |\underline{B}| = \underline{50 N}$$

Rúdnők kiszámítása: Csomóponti módszer (Csomópontból csomópontra haladva)
mindig olyan csomópont kell, ahol 2 db rúdhoz ismeretlen!

B-csukló' (Az ismeretlen rúdnőket úgy vesszük fel, mintha húzott rúd lenne)



SZTA'

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{6x} - N_{11} = 0$$

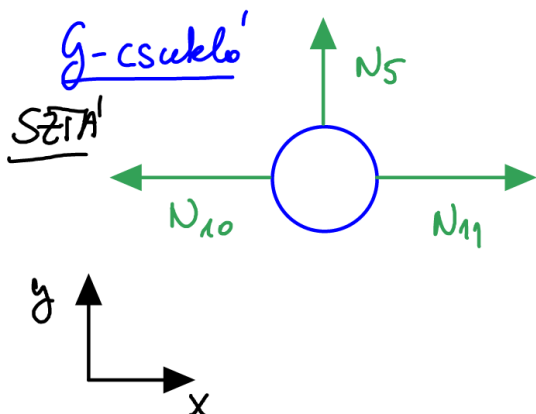
$$N_6 \cos 135^\circ - N_{11} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{6y} + B_y = 0$$

$$N_6 \sin 135^\circ + B_y = 0 \quad (2)$$

$$(2): N_6 = \frac{-B_y}{\sin 135^\circ} = -50\sqrt{2} = \underline{-70,71 N} \quad (\text{nyomott})$$

$$(1) N_{11} = N_6 \cos 135^\circ = -50\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{50 N} \quad (\text{húzott})$$



SZTA'

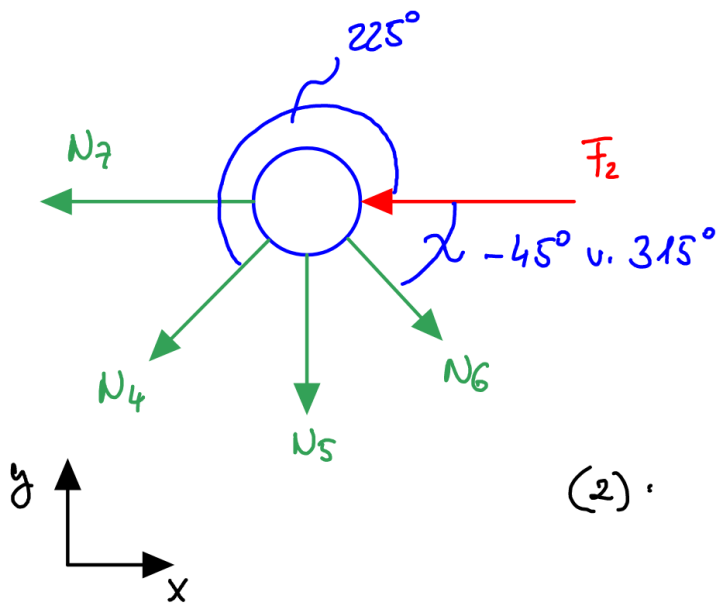
Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_{10} + N_{11} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{N_5 = 0} \quad (\text{vakrúd})$$

$$(1): N_{10} = N_{11} = \underline{50 N} \quad (\text{húzott})$$

D-csukló SZTA



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_1 + N_4 \cos 225^\circ + N_6 \cos(-45^\circ) - F_2 = 0$$

$$-N_1 + N_4 \cos 225^\circ + N_6 \cos(-45^\circ) - F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_4 \sin 225^\circ - N_5 - N_6 \sin(-45^\circ) = 0$$

$$N_4 \sin 225^\circ - N_5 + N_6 \sin(-45^\circ) = 0 \quad (2)$$

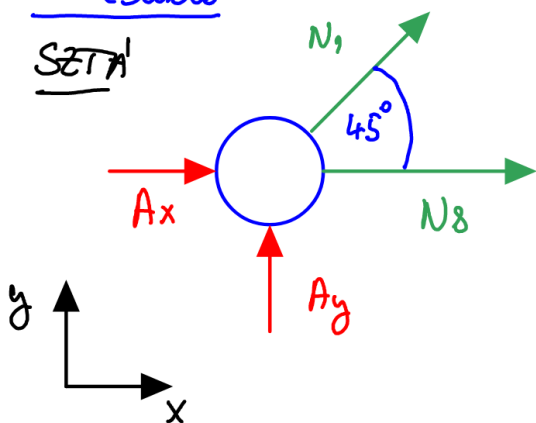
$$(2): N_4 = \frac{N_5 - N_6 \sin(-45^\circ)}{\sin 225^\circ} = \frac{50\sqrt{2}}{1} = 70.71 \text{ N} \quad (\text{leírható})$$

$$(1): N_1 = -F_2 + N_6 \cos(-45^\circ) + N_4 \cos 225^\circ = -300 \text{ N} \quad (\text{nyomó})$$

Induljunk el a másik irányból is!

A-csukló

SZTA



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + N_2 + N_1 \cos 45^\circ = 0$$

$$A_x + N_2 + N_1 \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + N_1 \sin 45^\circ = 0$$

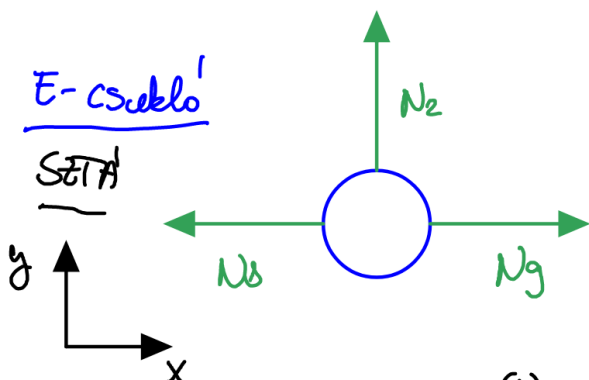
$$A_y + N_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$(2): N_1 = \frac{-A_y}{\sin 45^\circ} = -350\sqrt{2} = -494.98 \text{ N} \quad (\text{nyomó})$$

$$(1): N_2 = -A_x - N_1 \cos 45^\circ = 150 \text{ N} \quad (\text{leírható})$$

E-csukló

SZTA



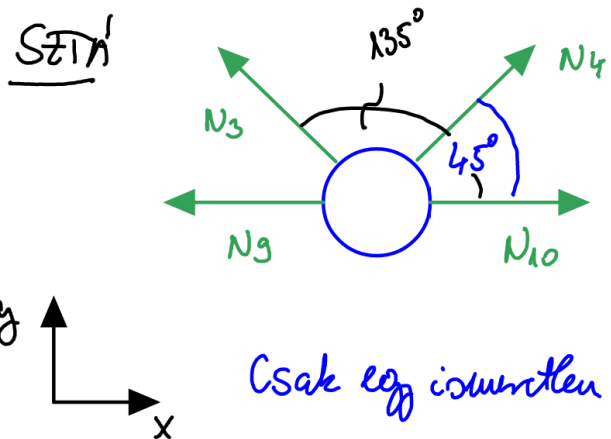
Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_2 + N_3 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 = 0 \quad (\text{vakmód})$$

$$(1): N_3 = N_2 = 150 \text{ N} \quad (\text{leírható})$$

F-csukló:



Egyenlőgi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{10} - N_9 + N_4 x + N_3 x = 0$$

$$N_{10} - N_9 + N_4 \cos 45^\circ + N_3 \cos 135^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_4 y + N_3 y = 0$$

$$N_4 \sin 45^\circ + N_3 \sin 135^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow N_3 = \frac{-N_4 \sin 45^\circ}{\sin 135^\circ} = -50\sqrt{2} = \underline{\underline{70,71 \text{ N}}} \quad (\text{leírás})$$

Minden más ismert \rightarrow van plusz egyenlet } ellenőrzés!
 és C pontot nem is vizsgáljuk

Az eredmények:

$$N_1 = -494,98 \text{ N}$$

$$N_2 = 0 \text{ N}$$

$$N_3 = -70,71 \text{ N}$$

$$N_4 = 70,71 \text{ N}$$

$$N_5 = 0 \text{ N}$$

$$N_6 = -70,71 \text{ N}$$

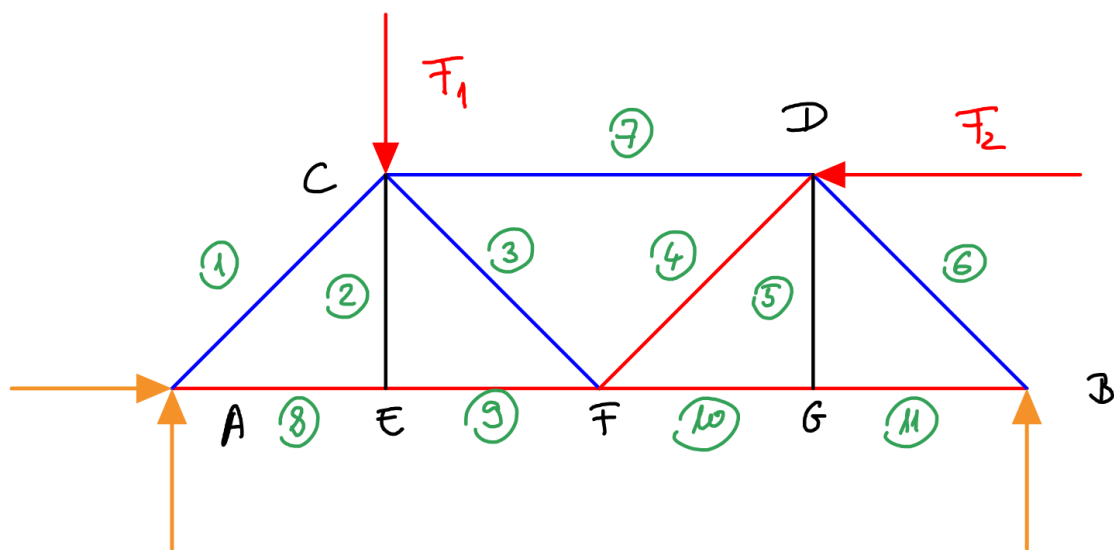
$$N_7 = -300 \text{ N}$$

$$N_8 = 150 \text{ N}$$

$$N_9 = 150 \text{ N}$$

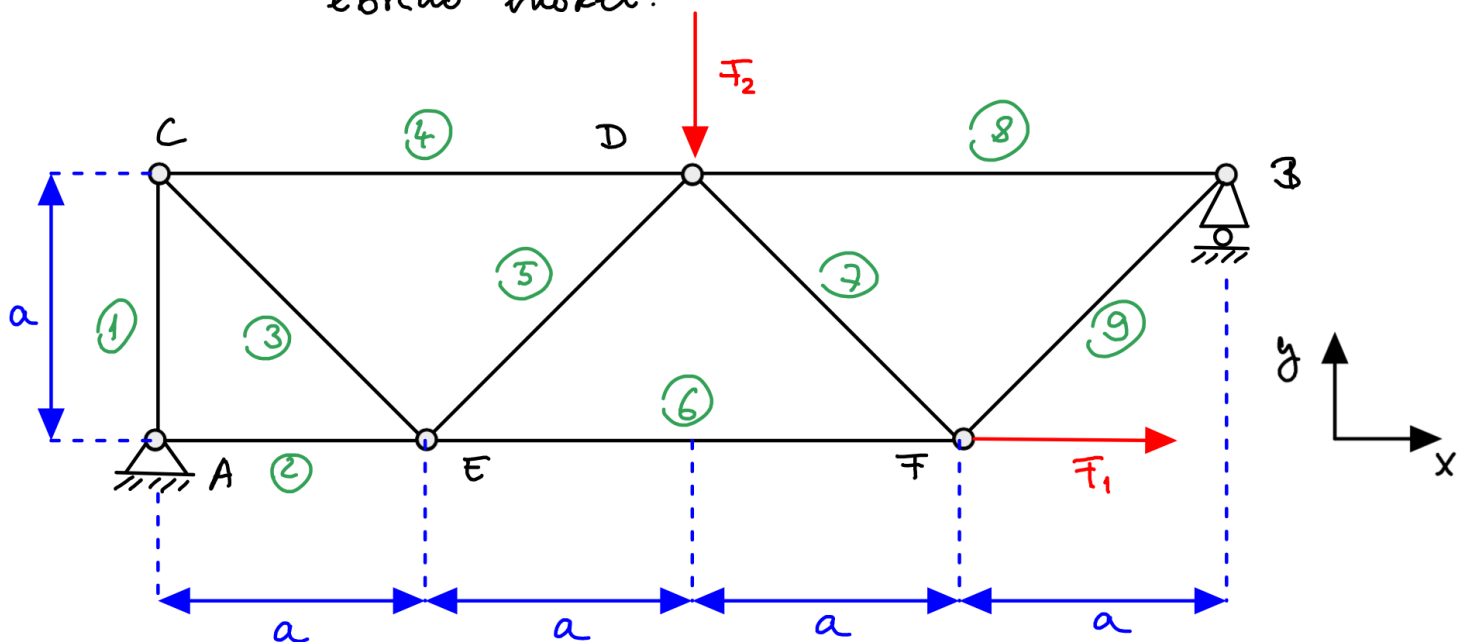
$$N_{10} = 50 \text{ N}$$

$$N_{11} = 50 \text{ N}$$



2. feladat

Határozzuk meg a metsző módszerrel a 6. és 7. rudakban ébredő erőket!

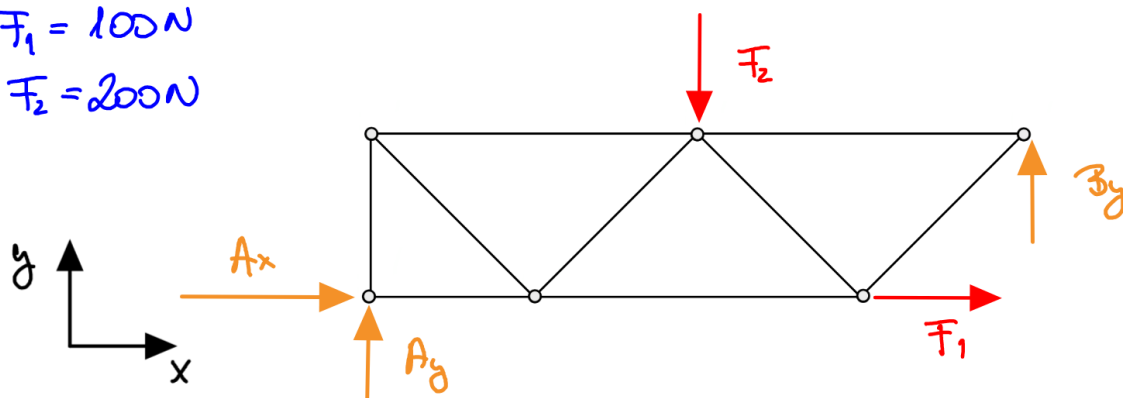


Adatok: $a = 1\text{m}$

$$F_1 = 100\text{N}$$

$$F_2 = 200\text{N}$$

Reakcióerők \rightarrow SZTA'



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + F_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - F_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -F_2 \cdot 2a + B_y \cdot 4a = 0 \quad (3)$$

$$(1): \quad A_x = -F_1 = \underline{\underline{-100\text{N}}}$$

$$(3): \quad B_y = \frac{F_2 \cdot 2a}{4a} = \frac{1}{2} F_2 = \underline{\underline{100\text{N}}}$$

$$(2): \quad A_y = F_2 - B_y = \underline{\underline{100\text{N}}}$$

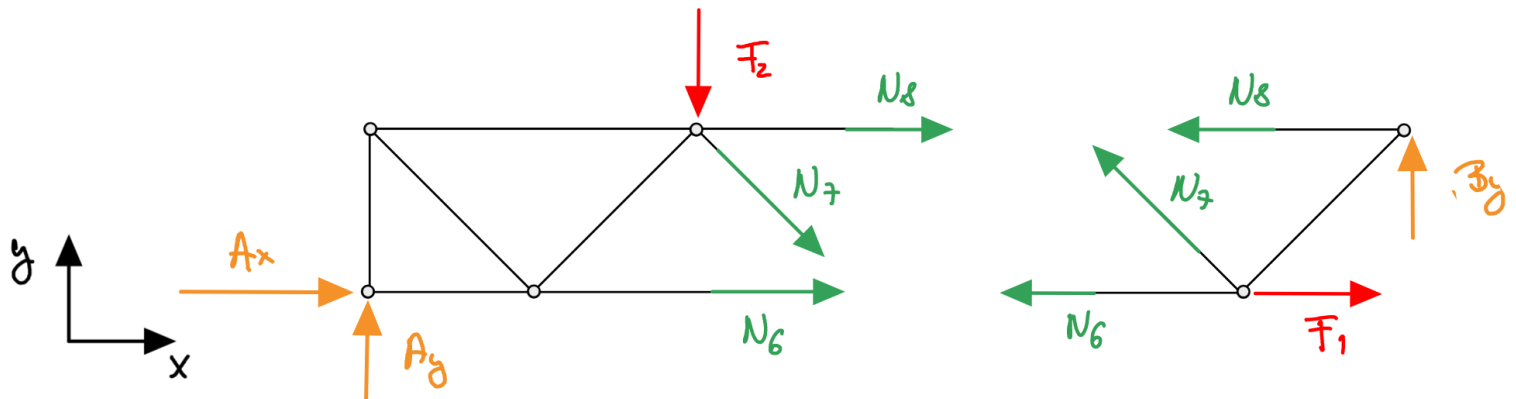
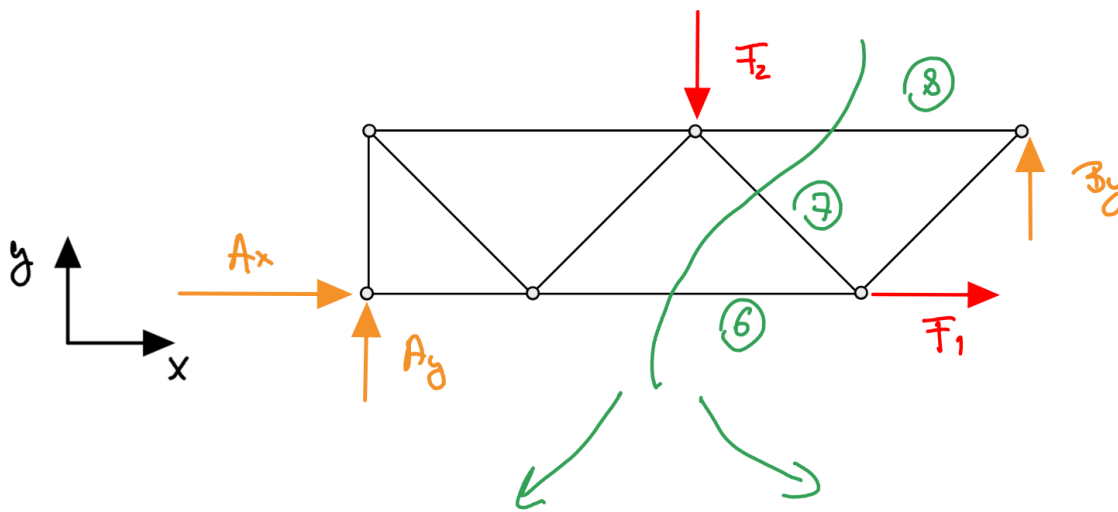
$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} -100 \\ 100 \end{bmatrix} \text{N}}}$$

$$\underline{\underline{B = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} \text{N}}}$$

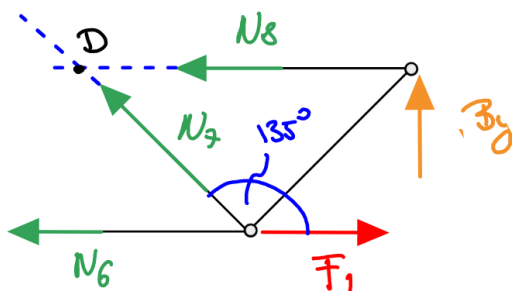
Átlagszó módoszer: így kell, hogy a készült szó megjelenjen!

Foutos, haq ne egi csuklóbau za'rdjanak!

↳ 6-7-8



Válasszuk ki az egyiket!



A nyomatéki egyenletet barokor felírhatjuk.

Ez a rész is egyensúlyban van

↓
Eigenschaften: exzessiv!

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_6 + N_{7x} - N_8 + F_1 = 0$$

$$-N_6 + N_7 \cos 135^\circ - N_8 + F_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + N_{7y} = 0$$

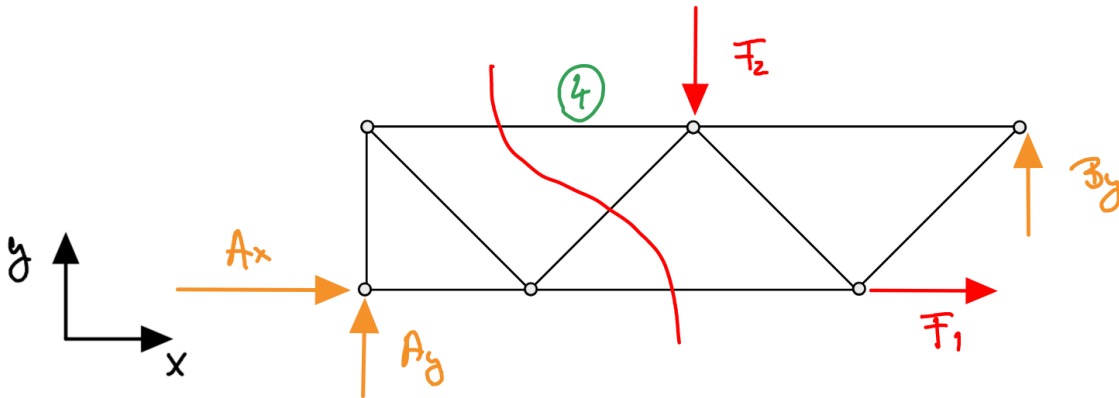
$$B_y + N_7 \sin 135^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum H_D = 0 \Rightarrow 3_y \cdot 2a + F_1 \cdot a - N_G \cdot a = 0 \quad (3)$$

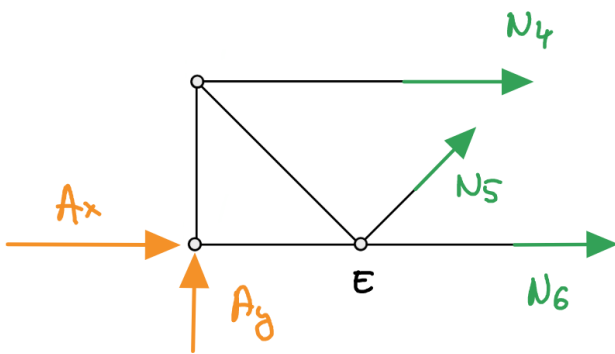
$$(3): N_6 = \frac{B_y 2a + F_1 a}{a} = 2 B_y + F_1 = \underline{\underline{300N}} \text{ (check)}$$

$$(2) \quad N_7 = \frac{-B_y}{\sin 135^\circ} = \underline{\underline{-141,42 \text{ N}}} \text{ (nyomott)}$$

Gyakorlás: SZÁMÍTSUK KI N_4 NEDENŐT!



Egyensúly-egyenletek:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + N_4 + N_6 + N_{5x} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + N_{5y} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow -A_y \cdot a - N_4 \cdot a = 0 \quad (3)$$

Köst csak N_4 kell:

$$(3): \quad N_4 = \frac{-A_y a}{a} = -A_y = \underline{\underline{-100 \text{ N}}} \text{ nyomott!}$$

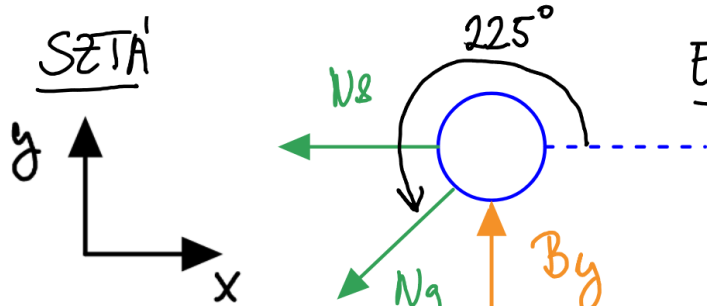
Másik megoldás \rightarrow Csomóponti módszer!

\hookrightarrow Csomóponttól csomópontra haladva

\hookrightarrow Csak olyan csomópont ahol 2 db ismeretlen
még van

\hookrightarrow 2 db egyensúlyi egyenlet!

B-csukló'



Az ismeretlen méréseket húzottként feltételezzük

Egyensúlyi egyenletek

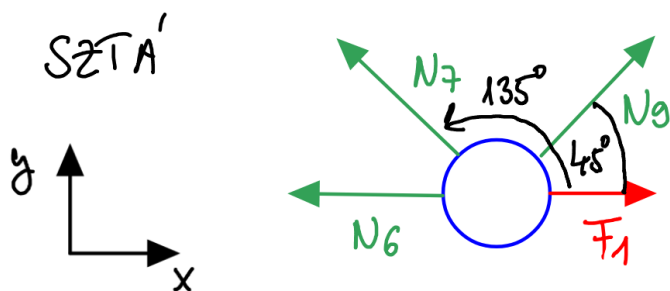
$$\sum F_x = 0: \quad -N_8 + N_{gx} = 0$$
$$-N_8 + N_g \cos 225^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad B_y + N_{gy} = 0$$
$$B_y + N_g \sin 225^\circ = 0$$

$$\hookrightarrow N_g = \frac{-B_y}{\sin 225^\circ} = 142,41 \text{ N (húzott)}$$

$$\hookrightarrow N_8 = N_g \cos 225^\circ = -100 \text{ N (nyomott)}$$

F-csukló'



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0: \quad F_1 + N_{gx} + N_{7x} - N_6 = 0$$

$$F_1 + N_g \cos 45^\circ + N_7 \cos 135^\circ - N_6 = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad N_{gy} + N_{7y} = 0$$

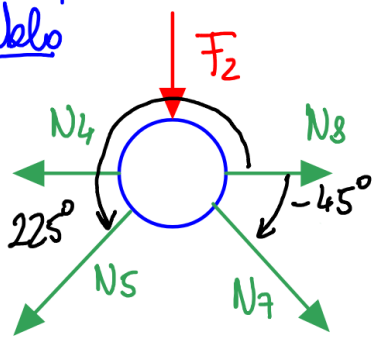
$$N_g \sin 45^\circ + N_7 \sin 135^\circ = 0$$

$$\hookrightarrow N_7 = \frac{-N_g \sin 45^\circ}{\sin 135^\circ} = -142,41 \text{ N (nyomott)}$$

$$\hookrightarrow N_6 = F_1 + N_g \cos 45^\circ + N_7 \cos 135^\circ = 300 \text{ N (húzott)}$$

D-csukló

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: N_8 + N_7 \cos(-45^\circ) + N_5 \cos(225^\circ) - N_4 = 0$$

$$N_8 + N_7 \cos(-45^\circ) + N_5 \cos(225^\circ) - N_4 = 0$$

$$\sum F_y = 0: -F_2 + N_7 \sin(-45^\circ) + N_5 \sin(225^\circ) = 0$$

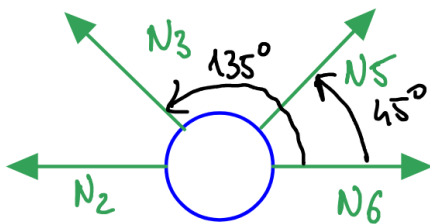
$$-F_2 + N_7 \sin(-45^\circ) + N_5 \sin(225^\circ) = 0$$

$$\hookrightarrow N_5 = \frac{F_2 - N_7 \sin(-45^\circ)}{\sin(225^\circ)} = -141,42 \text{ N (nyomott)}$$

$$\hookrightarrow N_4 = N_8 + N_7 \cos(-45^\circ) + N_5 \cos(225^\circ) = -100 \text{ N (nyomott)}$$

E-csukló

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0: N_6 + N_5 \cos(45^\circ) + N_3 \cos(135^\circ) - N_2 = 0$$

$$N_6 + N_5 \cos(45^\circ) + N_3 \cos(135^\circ) - N_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_5 \sin(45^\circ) + N_3 \sin(135^\circ) = 0$$

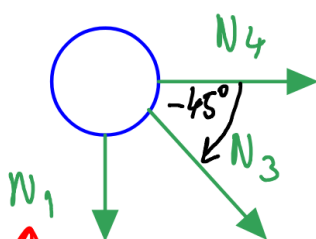
$$N_5 \sin(45^\circ) + N_3 \sin(135^\circ) = 0$$

$$\hookrightarrow N_3 = -\frac{N_5 \sin(45^\circ)}{\sin(135^\circ)} = 141,42 \text{ N (húzott)}$$

$$\hookrightarrow N_2 = N_6 + N_3 \cos(135^\circ) + N_5 \cos(45^\circ) = 100 \text{ N (nyomott)}$$

C-csukló

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0: N_4 + N_3 \cos(-45^\circ) = 0$$

$$N_4 + N_3 \cos(-45^\circ) = 0 \quad \checkmark \text{ stimmel}$$

$$\sum F_y = 0: -N_1 + N_3 \sin(-45^\circ) = 0$$

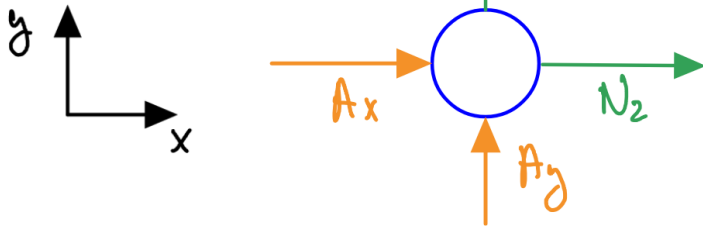
$$\hookrightarrow N_1 = N_3 \sin(-45^\circ) = -100 \text{ N (nyomott)}$$

Csak ez ismeretlen!

A-csukló

→ ez csak ellenőrzés!

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: N_2 + A_x = 0$$

$$100 + (-100) = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum F_y = 0: A_y + N_1 = 0$$

$$100 + (-100) = 0 \quad \checkmark$$

Összefoglalva:

$$N_1 = -100 \text{ N}$$

nyomott

$$N_2 = 100 \text{ N}$$

húzott

$$N_3 = 141,42 \text{ N}$$

húzott

$$N_4 = -100 \text{ N}$$

nyomott

$$N_5 = -141,42 \text{ N}$$

nyomott

$$N_6 = 300 \text{ N}$$

húzott

$$N_7 = -141,42 \text{ N}$$

nyomott

$$N_8 = -100 \text{ N}$$

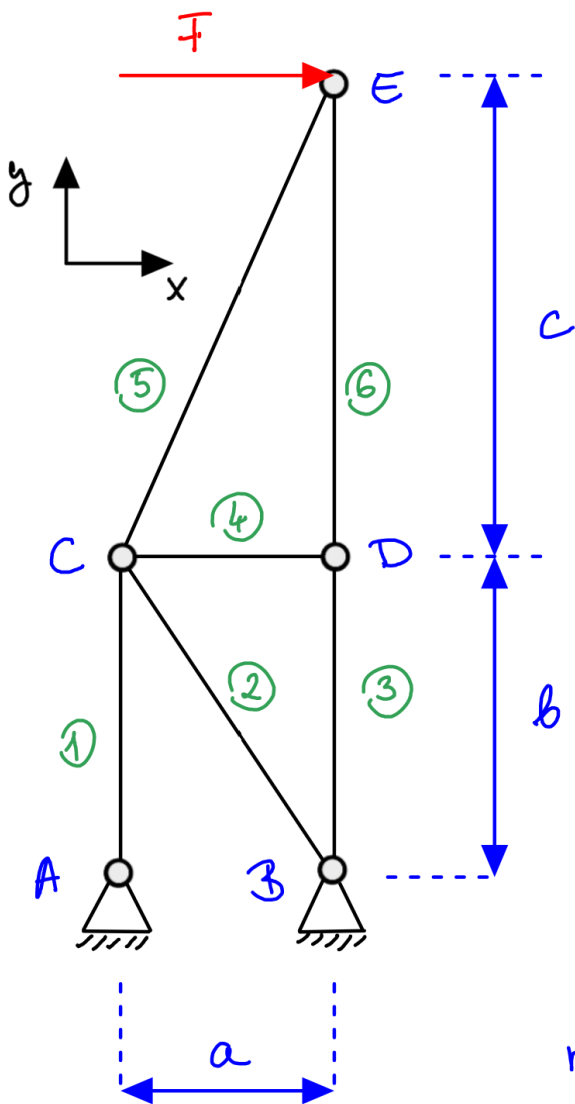
nyomott

$$N_9 = 141,42 \text{ N}$$

húzott

3. feladat

Határozzuk meg a rúdlában előforduló nyíróerőket és reakciókat csomóponti módszerrel!



Adatok:

$$a = 1 \text{ m}$$

$$b = 2 \text{ m}$$

$$c = 3 \text{ m}$$

$$F = 1000 \text{ N}$$

Probléma: SZTH'

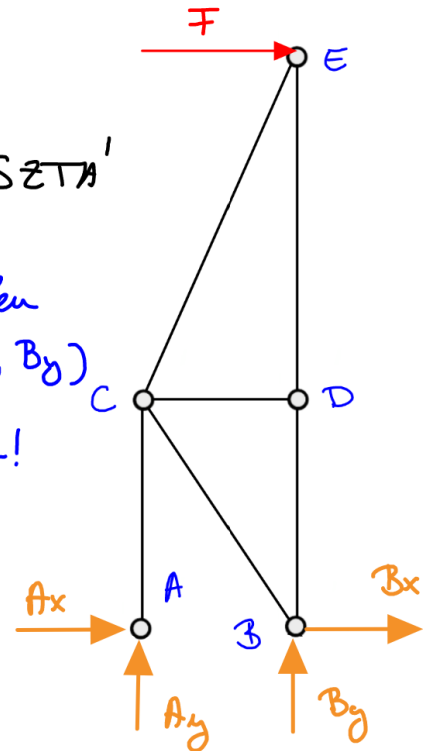
4 db ismeretlen

(A_x, A_y, B_x, B_y)

de 3 egyenlet!



Nem tudunk reakciókat számolni!

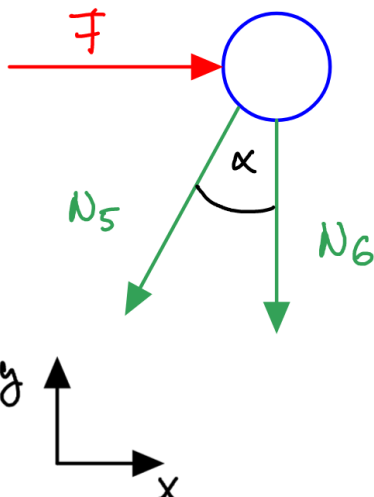


Csomóponti módszer:

Honnan indulhatunk?

↳ max 2 db ismeretlen \Rightarrow E pont

E csukló SZTH'



$$\alpha = \arctg\left(\frac{a}{c}\right) = 18,435^\circ$$

Egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F + N_5 \cos(270^\circ - \alpha) = 0$$

$$F + N_5 \cos(270^\circ - \alpha) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_6 + N_5 \sin(270^\circ - \alpha) = 0$$

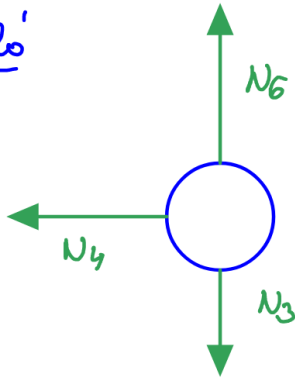
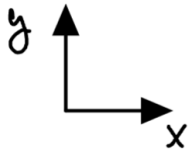
$$-N_6 + N_5 \sin(270^\circ - \alpha) = 0 \quad (2)$$

$$(1): N_5 = \frac{-F}{\cos(270^\circ - \alpha)} = 3162,28 \text{ N (húzóerő)}$$

$$(2): N_6 = N_5 \sin(270^\circ - \alpha) = -3000 \text{ N (nyomóerő)}$$

D csukló

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek:

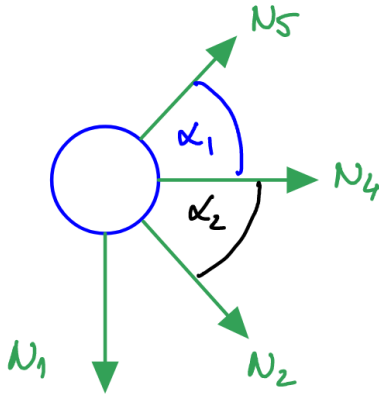
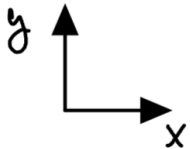
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N_4 = 0} \text{ (vakumid.)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_6 - N_3 = 0$$

$$\rightarrow N_3 = N_6 = -3000 \text{ N (nyomóerő)}$$

C csukló

SZTA'



$$\alpha_1 = \arctg\left(\frac{c}{a}\right) = 71,565^\circ$$

$$\alpha_2 = \arctg\left(\frac{a}{b}\right) = 63,435^\circ$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_4 + N_5 \cos \alpha_1 + N_2 \cos(-\alpha_2) = 0$$

$$N_4 + N_5 \cos \alpha_1 + N_2 \cos(-\alpha_2) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -N_1 + N_2 \sin(-\alpha_2) + N_5 \sin \alpha_1 = 0$$

$$-N_1 + N_2 \sin(-\alpha_2) + N_5 \sin \alpha_1 = 0 \quad (2)$$

$$(1): N_2 = \frac{-N_4 - N_5 \cos \alpha_1}{\cos(-\alpha_2)} = -2236,08 \text{ N (nyomóerő)}$$

$$(2): N_1 = N_2 \sin(-\alpha_2) + N_5 \sin \alpha_1 = 5000 \text{ N (húzóerő)}$$

Húzóerők mértéke ismert:

$$N_1 = 5000 \text{ N}$$

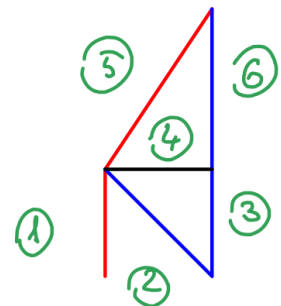
$$N_2 = -2236,08 \text{ N}$$

$$N_3 = -3000 \text{ N}$$

$$N_4 = 0 \text{ N}$$

$$N_5 = 3162,28 \text{ N}$$

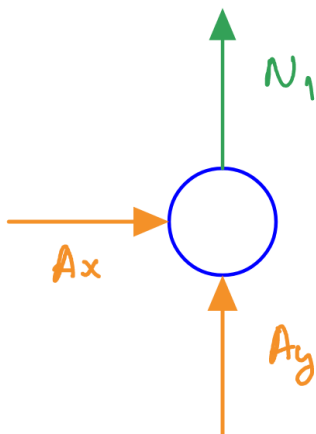
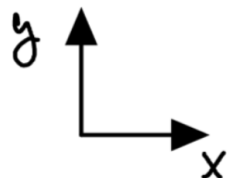
$$N_6 = -3000 \text{ N}$$



A és B reakciókat A és B csuklóból!

A csukló

SZTH'



Egyensúlyi egyenletek:

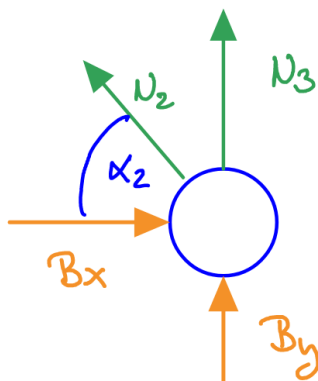
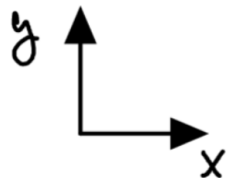
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 + A_y = 0$$

$$\rightarrow A_y = -N_1 = \underline{\underline{-5000 \text{ N}}}$$

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 0 \\ -5000 \end{pmatrix} \text{ N}}}$$

B csukló



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x + N_{2x} = 0$$

$$B_x + N_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + N_3 + N_{2y} = 0$$

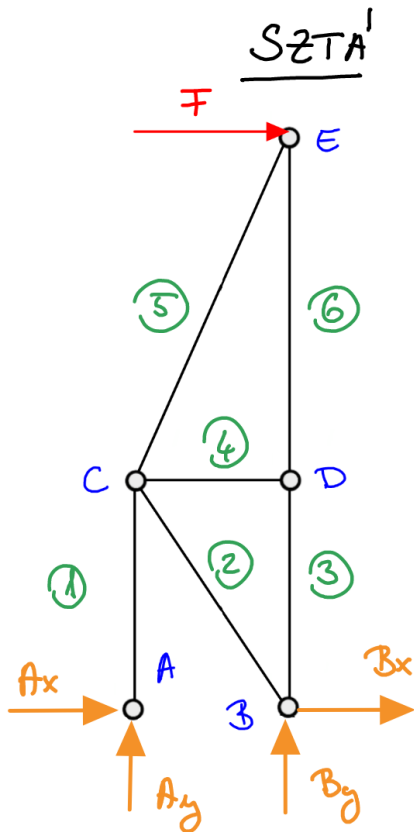
$$B_y + N_3 + N_2 \sin(180^\circ - \alpha_2) = 0 \quad (2)$$

$$(1): B_x = -N_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = \underline{\underline{-1000 \text{ N}}}$$

$$(2): B_y = -N_3 - N_2 \sin(180^\circ - \alpha_2) = \underline{\underline{5000 \text{ N}}}$$

$$\underline{\underline{B = \begin{pmatrix} -1000 \\ 5000 \end{pmatrix} \text{ N}}}$$

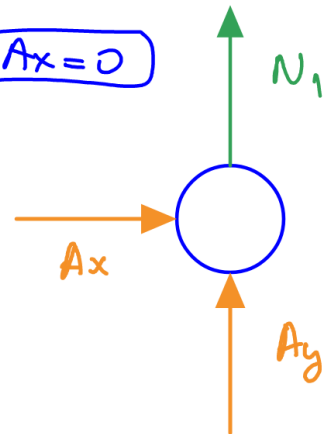
Másik megoldás:



Vegyük észre: Az ①-es rúdban
nincs irányú mo' \rightarrow Függőleges

Az A csomópontban: (lásd fenn)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$



Hár csak 3 db ismeretlen

$$\boxed{A_y, B_x, B_y}$$



Megoldható az egyensúlyi egyenletekből

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x + F = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot a - F(b+c) = 0$$

$$\hookrightarrow B_y = \frac{F(b+c)}{a} = \underline{\underline{5000 \text{ N}}}$$

$$\hookrightarrow A_y = \underline{\underline{-5000 \text{ N}}}$$

$$\hookrightarrow B_x = -F = \underline{\underline{-1000 \text{ N}}}$$

