Statika – 1. gyakorlat

Alapfogalmak – Az erő

Adminisztratív információk: Berezvai Szabolcs

MM. épület I. 30. berezvai@mm.bme.hu

Honlap: www.mm.bme.hu/~berezvai

↳ órai anyagok, plusz gyakorló feladatok

Eredmények: NEPTUN !!!

Konzultációs időpont: Hétfő: 9:00 – 10:30
Szerda: 10:15 – 11:00

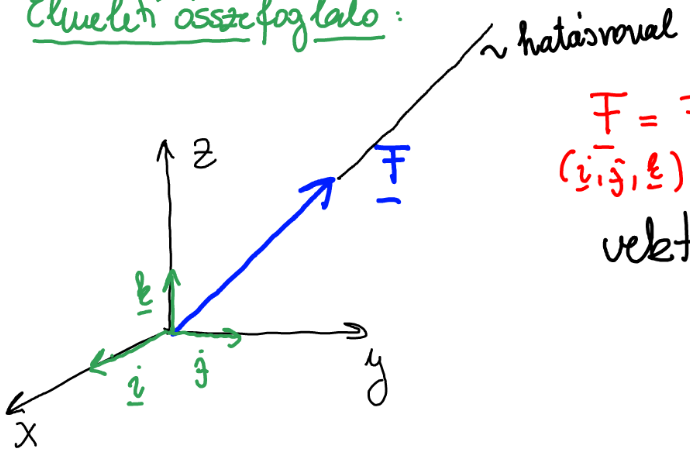
Félévi követelmények: 2 db zárthelyi (7. és 14. hét)
4 db Házi feladat

pluszpontok: MiniZH

A gyakorlaton a jelenlétet mindig ellenőrizzük!

Elmaradó órák: Nincs :)

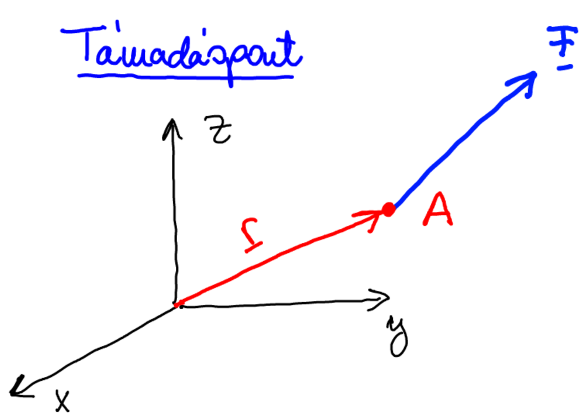
Elméleti összefoglaló:



$$\underset{(\underline{i},\underline{j},\underline{k})}{\underline{F}} = F_x\,\underline{i} + F_y\,\underline{j} + F_z\cdot\underline{k} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

vektormennyiség!

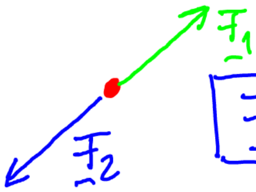
Támadáspont



Axiómák:

1) Két test kölcsönhatása → Erő és ellenerő azonos nagyság, de ellentétes értelem

2) Két erő egyensúlya
↳ Közös hatásvonal, azonos nagyság ellentétes irány!



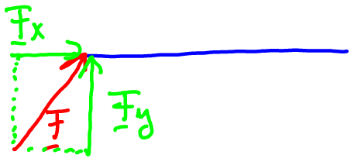
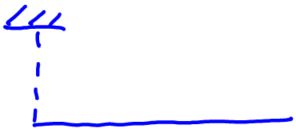
$$\boxed{\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{0}}$$

3) Erőösszeg (közös támadáspont)
↳ Eredőerő → matematikailag: vektori összeg

4) Egyensúlyi erőrendszer hozzáadása
↳ Az erő hatásvonala mentén eltolható

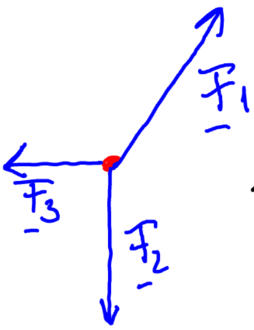
5) Helyettesíthetőség

Kényszerek:

	Rajzi jel	Reakciók
Támasz		
Csukló		
Kötél		 csak húzás!!

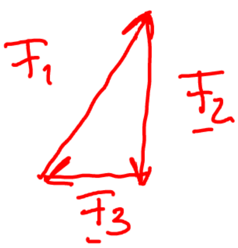
Három erő egyensúlya:

- Hatásvonalak egy pontban metsződik
- Záródó vektorháromszöget alkotnak!

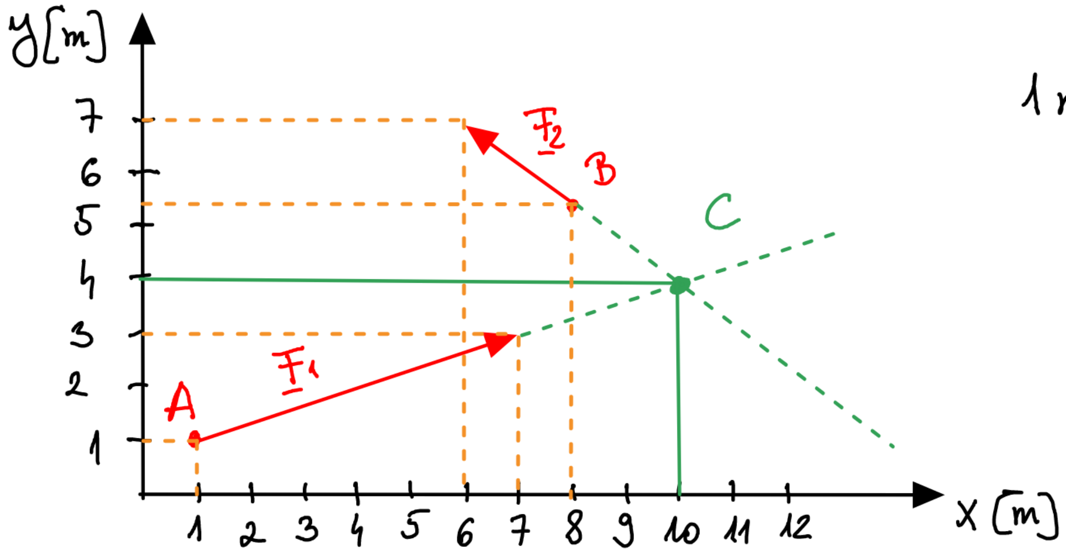


$$\boxed{\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \underline{0}}$$

Erőábra



1. feladat Egy merev testet az ábrán megadott $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ erők terhelik. Helyettesítsük a két erőt az eredőjével és adjuk meg az eredő erő hatásvonalának egy pontját!
Milyen szöget zár be az eredő erő hatásvonala az x-tengellyel?



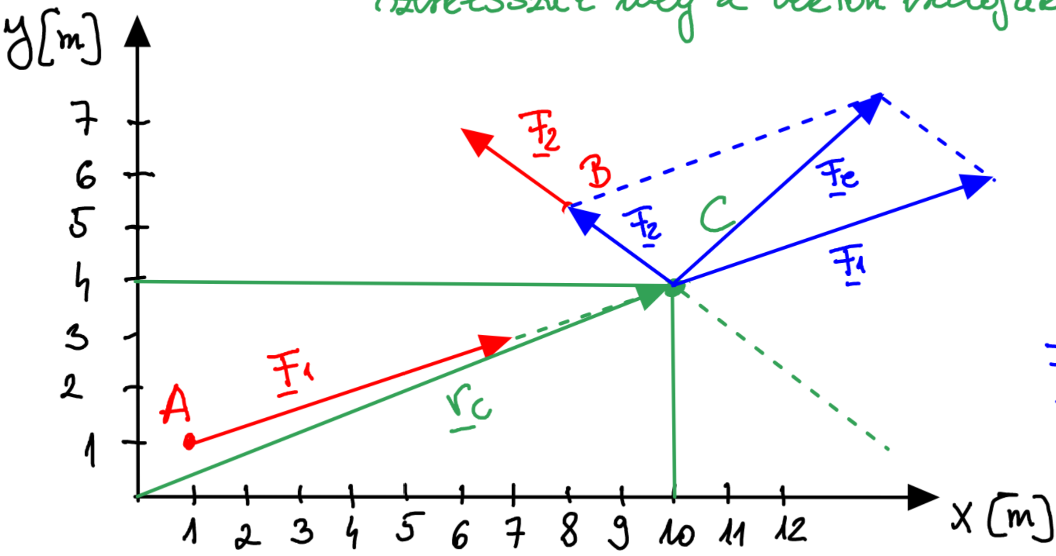
$1\,m \mathrel{\hat=} 10\,N$
↳ <u>erőlépték!</u>

1. megoldás: szerkesztéssel

① Az erők a hatásvonaluk mentén eltolhatóak
↳ Húzzuk meg a hatásvonalakat
↳ A metszéspontban tudjuk őket összegezni!

C pont koordinátája leolvasható $\boxed{C\,(10,4)}$

② Toljuk el az erőket a C pontba és szerkesszük meg a vektori eredőjüket!
↳ paralelogramma szabály!

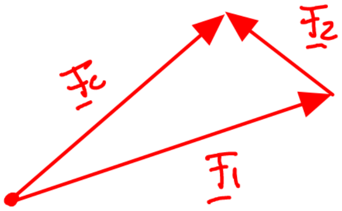


leolvasva:

$\underline{F}_e \approx \begin{bmatrix} 4 \\ 3{,}5 \end{bmatrix} [m] \rightarrow$

$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \end{bmatrix} N$

Másképpen: Erőábra $\Rightarrow$ vektorsokszög módszer



• Innen is leolvasva:

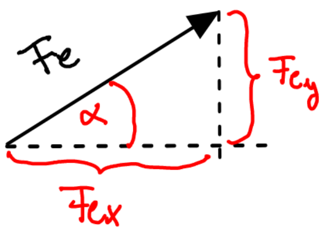
$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix}40\\35\end{bmatrix} N$$

Mekkora az eredő nagysága?

$$|\underline{F}_e| = \sqrt{F_{ex}^2 + F_{ey}^2} = \sqrt{40^2 + 35^2} = \sqrt{2825} = 53{,}15\,N$$

Tehát az eredő: $\underline{F}_e = \begin{bmatrix}40\\35\end{bmatrix} N$ Támadáspontja: $\underline{r}_c = \begin{bmatrix}10\\4\end{bmatrix} m$

Az x-tengellyel bezárt szög:



$$tg\,\alpha = \frac{F_{ey}}{F_{ex}}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{F_{ey}}{F_{ex}}\right) = arctg\left(\frac{35}{40}\right) = 41{,}19^\circ$$

2. megoldás: SZÁMOLÁSSAL

Olvassuk le az ábráról az erők támadáspontját és az erővektort:

• $\underline{r}_1 = \underline{r}_{0A} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} m$ $\quad \underline{F}_1 = \begin{bmatrix}60\\20\end{bmatrix} N$

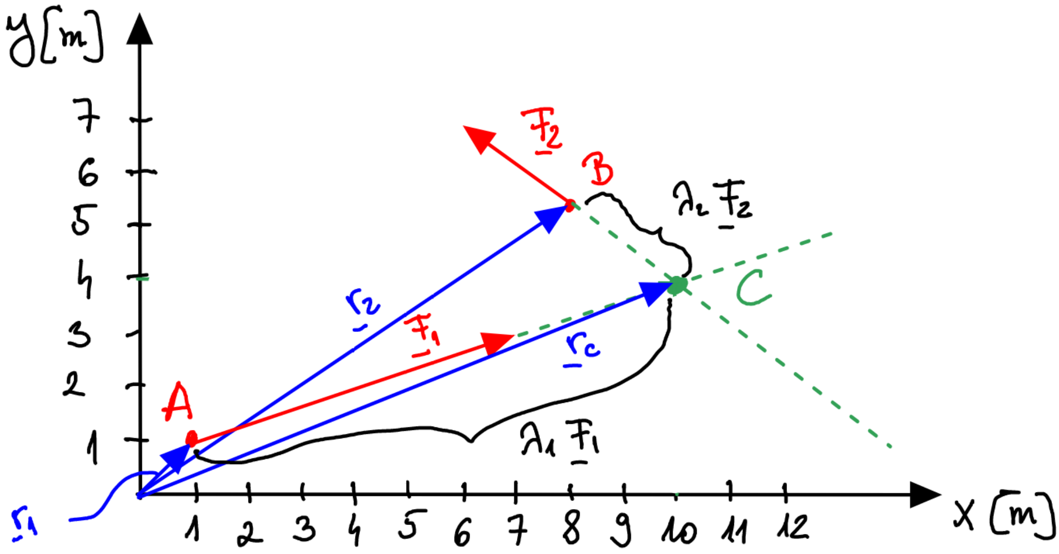
• $\underline{r}_2 = \underline{r}_{0B} = \begin{bmatrix}8\\5{,}5\end{bmatrix} m$ $\quad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix}-20\\15\end{bmatrix} N$

Az eredő

$$\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \begin{bmatrix}60\\20\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-20\\15\end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix}40\\35\end{bmatrix} N$$

Támadáspont kiszámítása



A C pontba mutató helyvektor: $\underline{r_c} = \underline{r_1} + \lambda_1 \underline{F_1} = \underline{r_2} + \lambda_2 \underline{F_2}$

$$\begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 \cdot 60 \\ 1 + \lambda_1 \cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - \lambda_2 \cdot 20 \\ 5{,}5 + \lambda_2 \cdot 15 \end{bmatrix}$$

2 egyenlet
2 ismeretlen

$$60\lambda_1 + 20\lambda_2 = 7 \quad (1)$$
$$20\lambda_1 - 15\lambda_2 = 4{,}5 \quad (2)$$

$\ominus$

$$60\lambda_1 - 45\lambda_2 = 13{,}5$$

$$65\lambda_2 = -6{,}5 \rightarrow \lambda_2 = -0{,}1$$

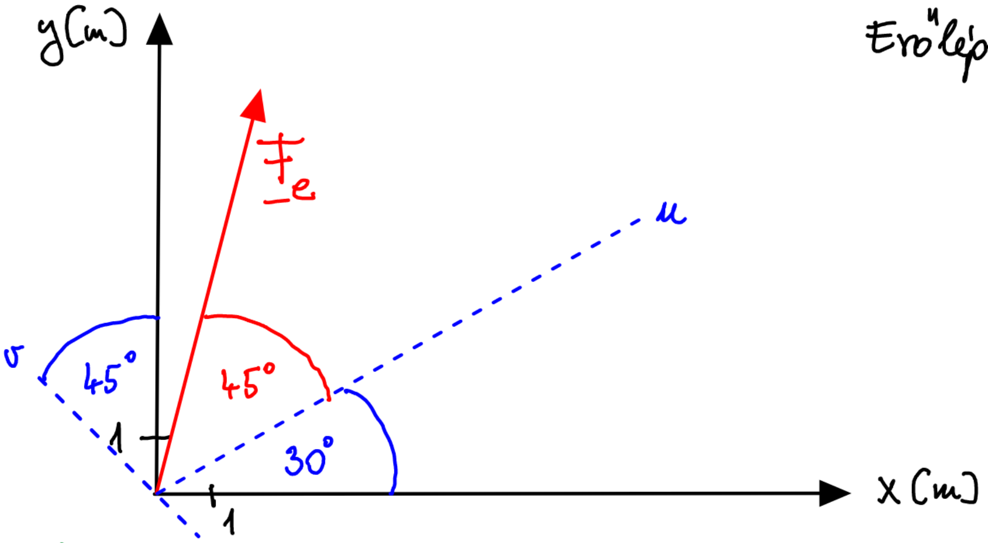
$$\lambda_1 = 0{,}15$$

Visszaírva $\underline{r_c}$-be:

$$\underline{r_c} = \underline{r_1} + \lambda_1 \cdot \underline{F_1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} \text{m}$$

2. feladat Egy merev testre ható erő iránya és értelme az ábra szerinti, nagysága $F_e = 1000$ N. Bontsuk fel az erőt a megadott u és v hatásvonalakba eső komponensekre! Írjuk fel a komponensek nagyságát!

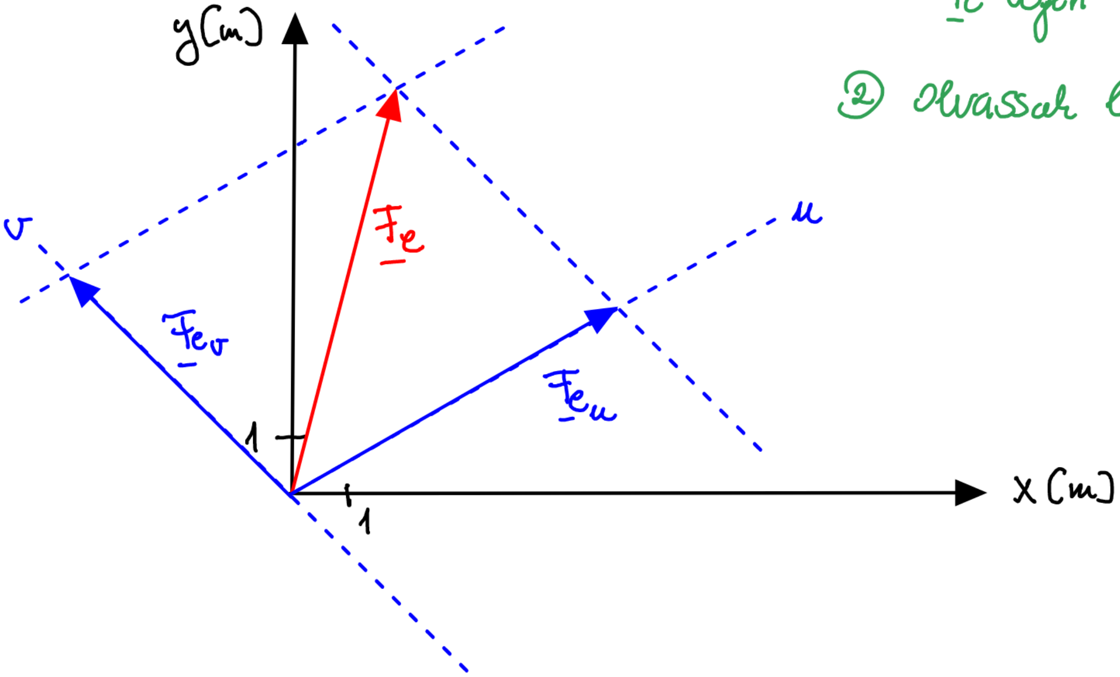
Erőlépték: $1000\,N \mathrel{\hat{=}} 7{,}7\,m$



1. megoldás: szerkesztéssel

① Húzzunk párhuzamos egyeneseket F_e végén u és v egyenesekkel

② Olvassuk le a vetületeket!



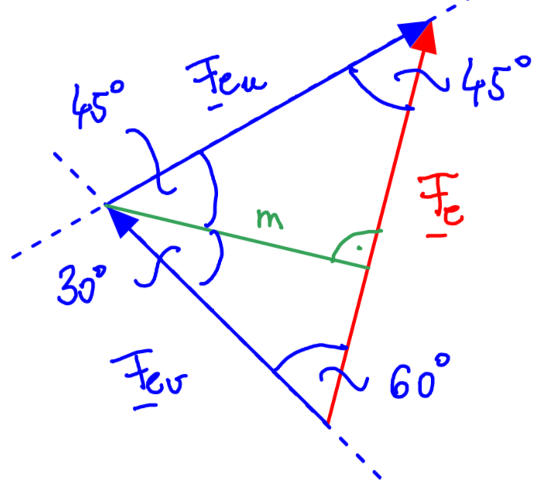
Lemérve: $|F_{eu}| \sim 6{,}89\,m \rightarrow |F_{eu}| = 896\,N$

$|F_{ev}| \sim 5{,}36\,m \rightarrow |F_{ev}| = 732\,N$

2. megoldás: számolással

↳ ugyanúgy párhuzamosakat húzunk!

↓ A komponensekre bontás miatt



$$\underline{F}_e = \underline{F}_{eu} + \underline{F}_{ev}$$

A háromszög oldalai:

$$F_e = |\underline{F}_e| = 1000 \text{ N}$$

$$F_{eu} = |\underline{F}_{eu}| \text{ és } |F_{ev}| = |\underline{F}_{ev}|$$

Geometriai egyenletek a két derékszögű háromszögből:

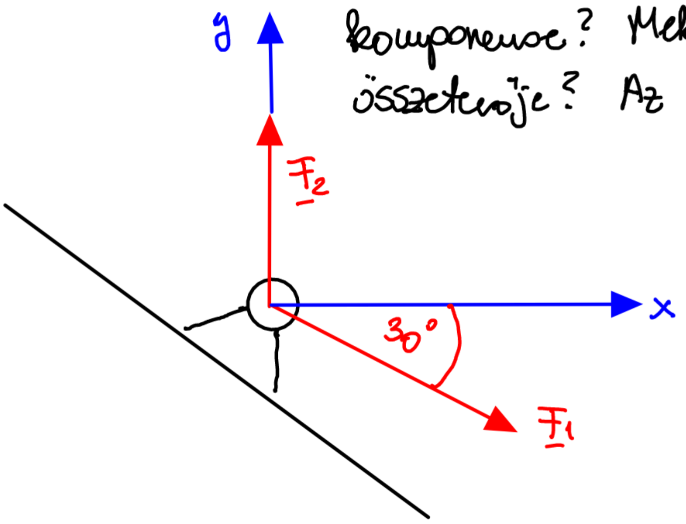
$$\left.\begin{aligned} F_e &= F_{ev} \cdot \cos 60° + F_{eu} \cdot \cos 45° \\ m &= F_{ev} \cdot \sin 60° = F_{eu} \cdot \sin 45° \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} F_e &= \frac{1}{2} F_{ev} + \frac{1}{\sqrt{2}} F_{eu} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} F_{ev} &= \frac{1}{\sqrt{2}} F_{eu} \end{aligned}$$

$$F_e = \frac{1}{2} F_{ev} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{ev} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} F_{ev}$$

↳ $F_{ev} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1} F_e = \underline{\underline{732 \text{ N}}}$

↳ $F_{eu} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot F_{ev} = \underline{\underline{897 \text{ N}}}$

3. feladat Mekkora legyen $\underline{F}_1$ erő nagysága, ha azt szeretnénk, hogy a kötélekre átadódó erőnek ne legyen függőleges komponense? Mekkora a kötélekre átadódó erő x-irányú összetevője? Az $\underline{F}_2$ erő nagysága 2 kN.



<u>Az erővektorok:</u>

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1 \cos(-30^\circ) \\ F_2 \sin(-30^\circ) \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2000 \end{bmatrix} \text{N}$$

<u>Az eredőerő:</u>

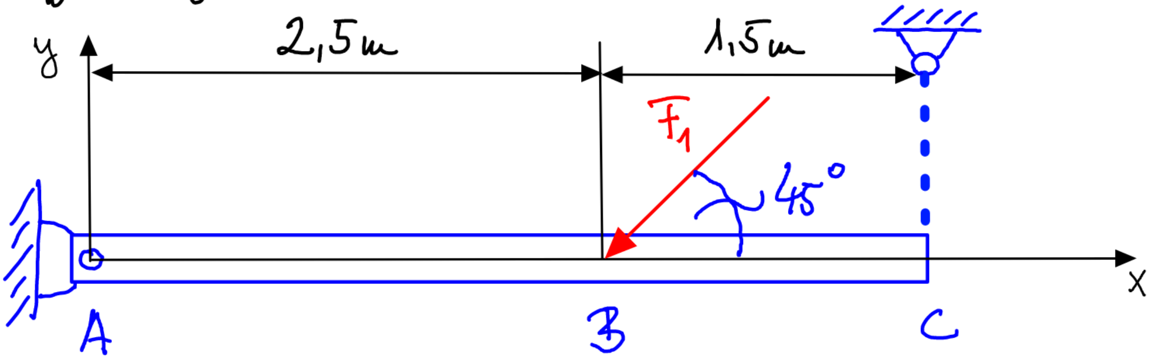
$$\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} F_1 \cos(-30^\circ) \\ F_1 \sin(-30^\circ) + F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Ebből:</u> $-\frac{1}{2} F_1 \cdot + F_2 = 0$

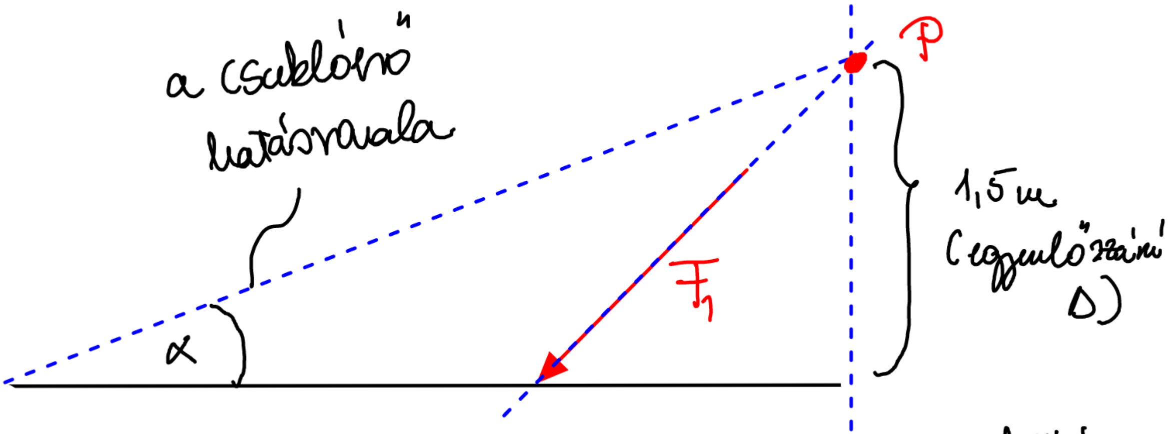
$\hookrightarrow F_1 = 2 F_2 = \underline{\underline{4000\,\text{N}}}$

$$F_e = F_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{3464{,}1\ \text{N}}}$$

4. feladat A vízszintes rúd az A helyen csuklósan van megtámasztva, C helyen pedig kötéllel van felfüggesztve. A rudat a B pontban $F_1 = 3\,kN$ nagyságú erő terheli úgy, hogy a rúd, a fonal és az erő egy síkban fekszik. A rúd és a fonal súlyától eltekintünk. Mekkora erő adódik át a rúdra az A csuklónál egyensúly esetén? Mekkora a kötélben ébredő erő?



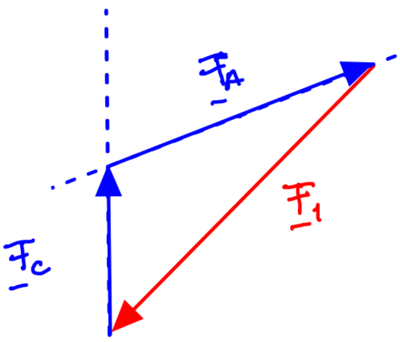
A rúdra 3 erő hat ⇒ Egyensúly, ha → zárt vektorháromszög
→ hatásvonalaik egy pontban metsződnek



$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1,5}{4}\right) = 20,56°$$

Erőábra:

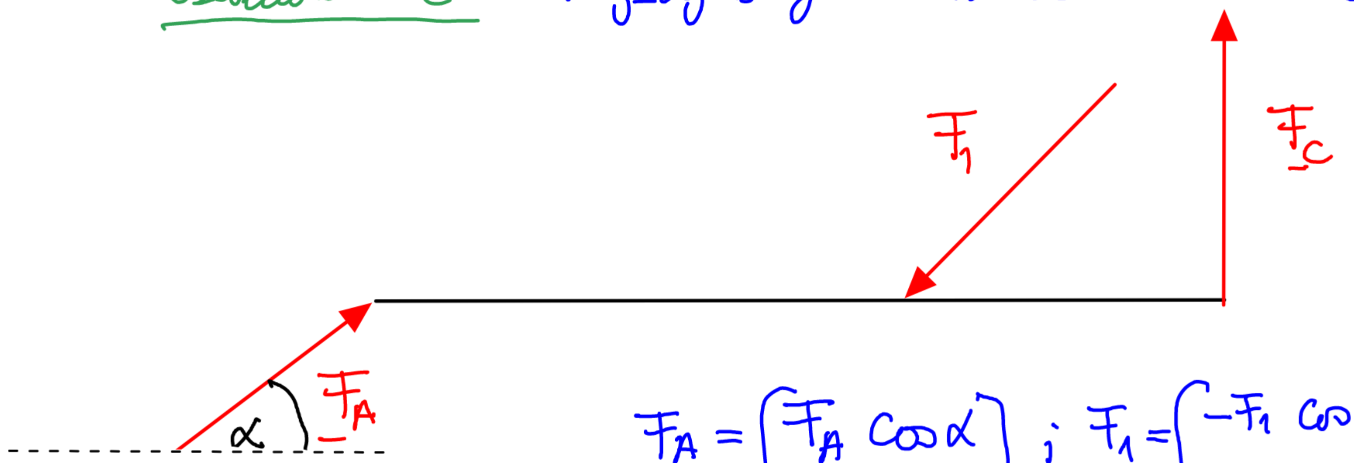
$4,5\,m \mathrel{\hat{=}} 3\,kN$



Leolvasva: $F_A = 2265,5\,N$

$F_c = 1325,8\,N$

Számítással   Rajzoljuk fel a rúdra ható erőket!



$$\underline{F_A} = \begin{bmatrix} F_A \cos\alpha \\ F_A \sin\alpha \end{bmatrix} ; \quad \underline{F_1} = \begin{bmatrix} -F_1 \cos 45^\circ \\ -F_1 \sin 45^\circ \end{bmatrix}$$

$$\underline{F_C} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_C \end{bmatrix}$$

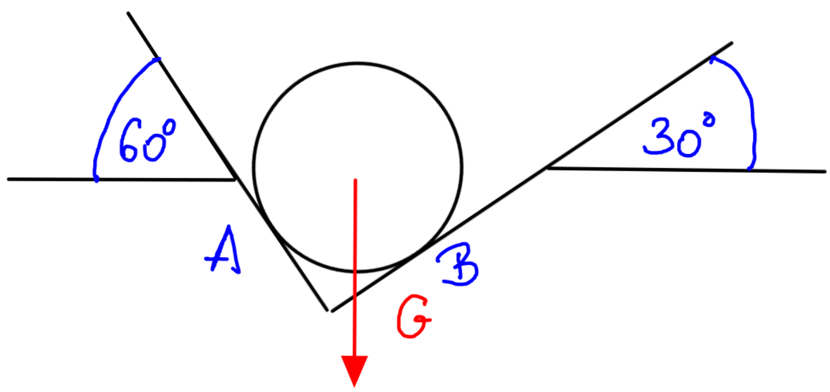
$$\underline{F_e} = \underline{F_A} + \underline{F_C} + \underline{F_1} = \begin{bmatrix} F_A \cos\alpha - F_1 \cos 45^\circ \\ F_A \sin\alpha + F_C - F_1 \sin 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow F_A = \dfrac{F_1 \cos 45^\circ}{\cos\alpha} = \underline{\underline{2265,5\ N}}$

$\hookrightarrow F_C = F_1 \sin 45^\circ - F_A \sin\alpha = \underline{\underline{1325,83 N}}$

$$\left.\right\} \quad \underline{F_A} = \begin{bmatrix} 2121,32 \\ 795,49 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F_C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1325,83 \end{bmatrix} N$$

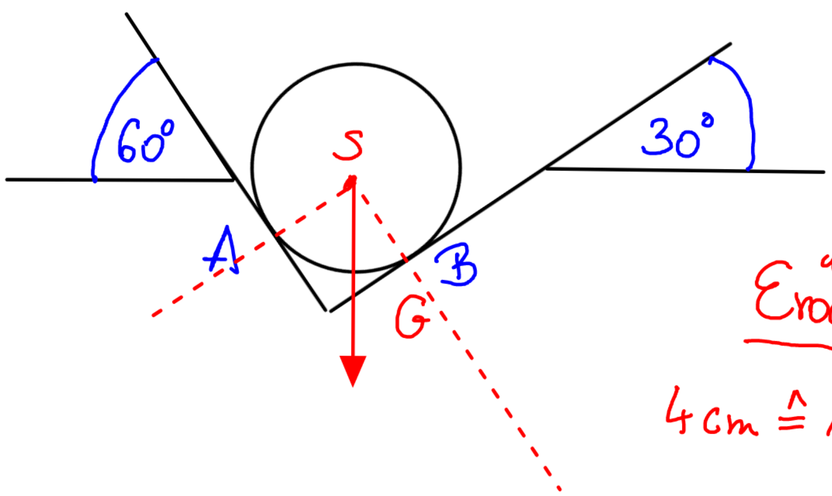
5. feladat Két teljesen sima a rajz síkjára merőleges síklap által alkotott vályúba $G = 10\ N$ súlyú korongot helyezünk. Határozzuk meg az A és B falakról átadódó erőket! Mekkora minimális F nagyságú vízszintes erőt kell működtetni a korong súlypontjába, hogy az A falban a reakcióerőt zérusra csökkentsük? Mekkora akkor a B falban ébredő reakcióerő?



Megoldás: A korongra 3 erő hat → egyensúly

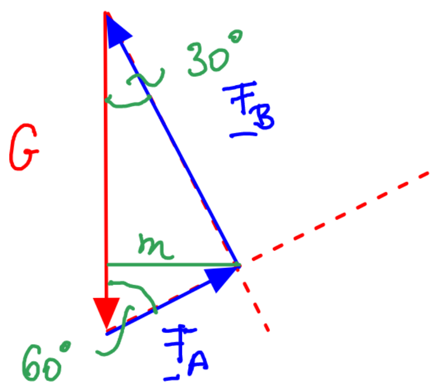
↳ záródó vektor △

↳ hatásvonalaik egy pontban metsződnek



Erőábra

$4\ cm \hat{=} 10N$



Leolvasva:

$F_A = 5N$

$F_B = 8{,}66N$

Számolással:

$$\left.\begin{aligned} m = F_A \cdot \sin 60° &= F_B \cdot \sin 30° \\ F_A \cos 60° + F_B \cos 30° &= G \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} F_A &= \frac{1}{2} F_B \rightarrow \sqrt{3} F_A = F_B \\ \frac{1}{2} F_A + \frac{\sqrt{3}}{2} F_B &= G \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}F_A + \frac{3}{2}F_A = G$$

$$2F_A = G \rightarrow \frac{G}{2} = F_A = \underline{\underline{5N}}$$

$$F_B = \sqrt{3}F_A = \underline{\underline{8{,}66\,N}}$$

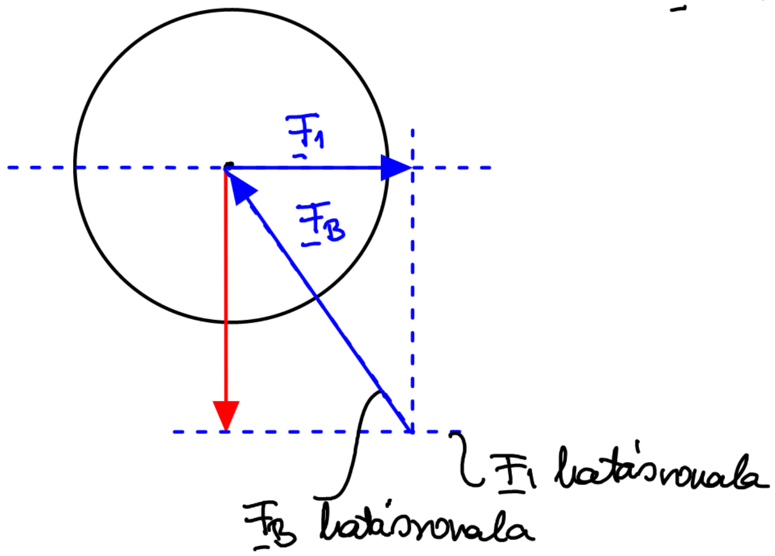
Vektorosan:

$$\underline{F_A} = \begin{bmatrix} F_A \cos 30^\circ \\ F_A \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}33 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{F_B} = \begin{bmatrix} F_B \cos 120^\circ \\ F_B \sin 120^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}33 \\ 7{,}5 \end{bmatrix} N$$

Vízszintes $\underline{F_1}$ erőt alkalmazva:

$\underline{F_1}$ erő hatásvonala vízszintes



Erőegyensúly:

$$\underline{F_1} + \underline{F_B} + \underline{G} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_B \cos(120^\circ) \\ F_B \sin(120^\circ) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$\hookrightarrow$ $F_B \sin(120^\circ) - G = 0$

$\hookrightarrow$ $F_B = \dfrac{G}{\sin(120^\circ)} = \underline{\underline{11{,}55N}}$

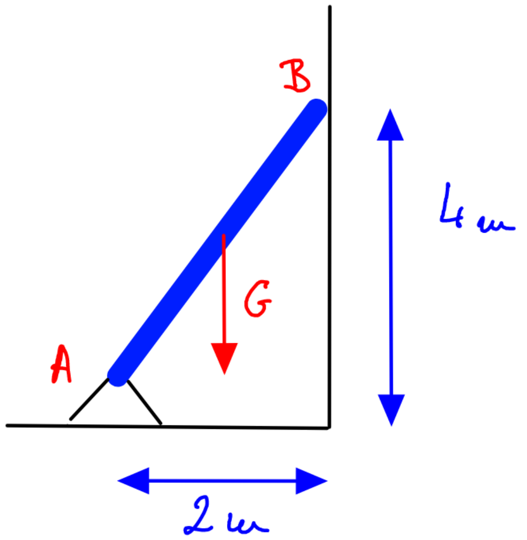
$\hookrightarrow$ $F_1 = -F_B \cos(120^\circ) = \underline{\underline{5{,}77N}}$

Tehát:

$$\underline{F_1} = \begin{bmatrix} 5{,}77 \\ 0 \end{bmatrix} N \; ; \quad \underline{F_B} = \begin{bmatrix} -5{,}77 \\ 11{,}55 \end{bmatrix} N$$

6. feladat

A $G = 500\ N$ súlyú rúd A vége csuklósan rögzített, B vége a sima falnak támaszkodik. Határozzuk meg a reakcióerőket!

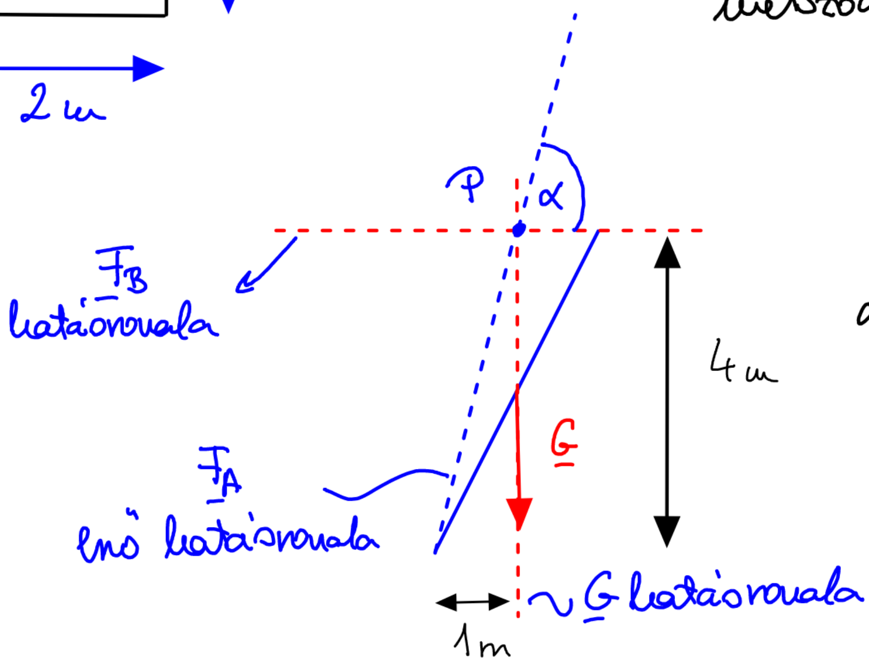


A B pontban csak a falra merőleges reakcióerő ébredhet!

↳ A rúdra 3 erő hat + egyensúly

↳ záródó vektor △

↳ hatásvonalaik egy pontban metsződnek

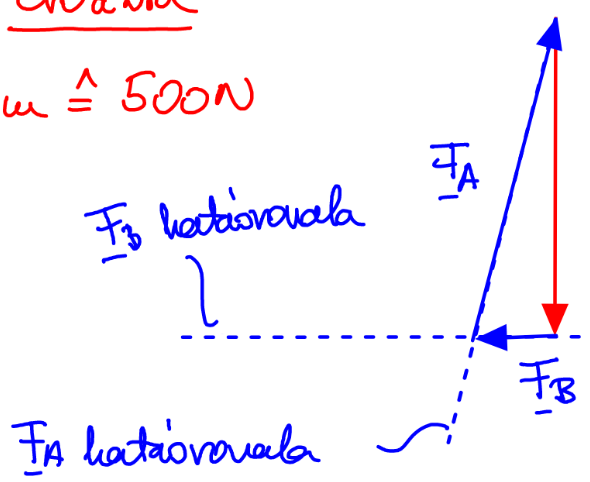


$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{1}\right)$$

$$\alpha = 75{,}96°$$

Erőábra

$4\ cm \mathrel{\hat{=}} 500 N$

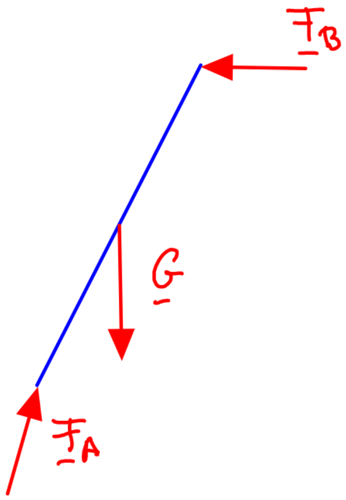


Leolvasva:

$F_B \sim 4{,}123\ cm \longrightarrow F_B = 515{,}4\ N$

$F_A \sim 1\ cm \longrightarrow F_A = 125\ N$

Számítással: A rúdra ható erők.



$$\underline{F}_B = \begin{bmatrix} -F_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} F_A \cos\alpha \\ F_A \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_e = \underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{G} = \underline{0} \quad \left\} \quad \begin{aligned} F_A \cos\alpha - F_B &= 0 \\ F_A \sin\alpha - G &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$F_A = \frac{G}{\sin\alpha} = \underline{\underline{515{,}388\,N}}$$

$$F_B = F_A \cos\alpha = \underline{\underline{125\,N}}$$

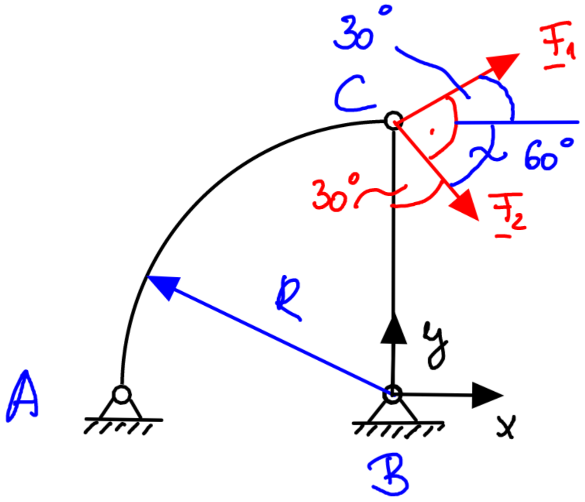
A reakcióerők:

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} F_A \cos\alpha \\ F_A \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 500 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{F}_B = \begin{bmatrix} -F_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -125 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

7. feladat

A negyedkörív alakú AC és a függőleges egyenes BC merev rudak csuklósan kapcsolódnak egymáshoz, valamint csuklósan vannak rögzítve A és B pontban. A szerkezetet $F_1 = 700\,N$ és $F_2 = 1200\,N$ nagy erők terhelik. Határozza meg $\underline{F}_A$ és $\underline{F}_B$ reakcióerőket!

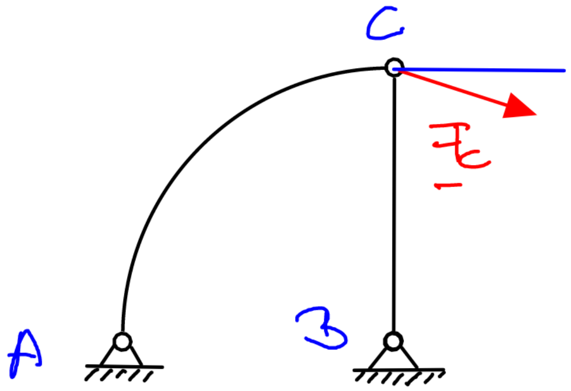


Vezessük be $\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{F}_C$-t

↳ A két aktív erőt helyettesítsük egy erővel.

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1 \cos(30°) \\ F_1 \sin(30°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 606{,}22 \\ 350 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} F_2 \cos(-60°) \\ F_2 \sin(-60°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ -1039{,}23 \end{bmatrix} N$$



Ezekből:

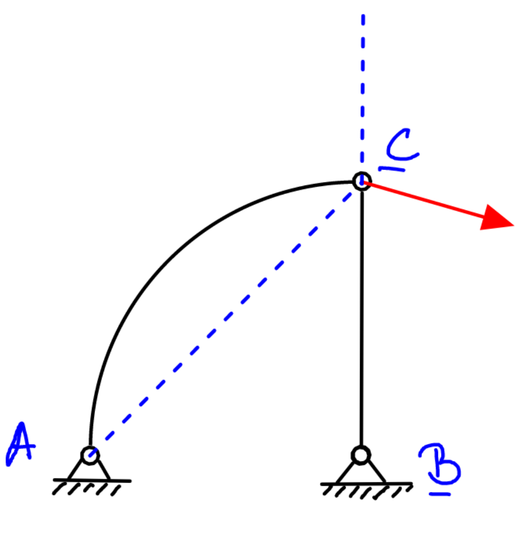
$$\underline{F}_C = \begin{bmatrix} 606{,}22 \\ 350 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 600 \\ -1039{,}23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1206{,}22 \\ -689{,}23 \end{bmatrix} N$$

Az x-tengellyel bezárt szög

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-689{,}23}{1206{,}22}\right) = -29{,}74°$$

vagy másképp: $\alpha = 330{,}26°$

$$|\underline{F}_C| = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = \underline{\underline{1389{,}24\,N}}$$

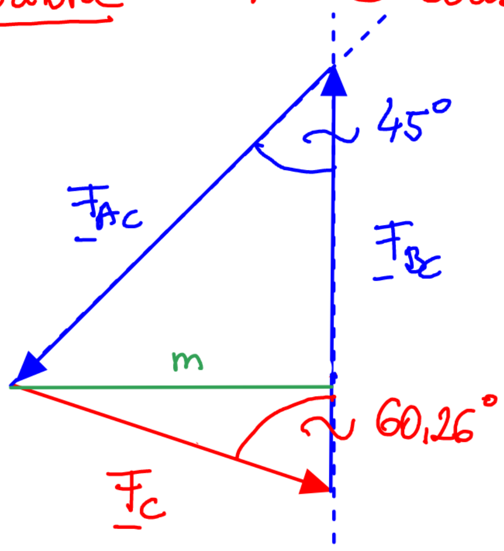


Tudjuk, hogy AC rúdon nincs terhelés

↳ A reakcióerők rúdirányúak!

Hasonlóan BC rúdról is csak BC irányú erő adódhat át!

Erőábra A C csuklóra ható erők



$F_{AC} = |\underline{F}_{AC}|$

$F_{BC} = |\underline{F}_{BC}|$

$F_C = |\underline{F}_C|$

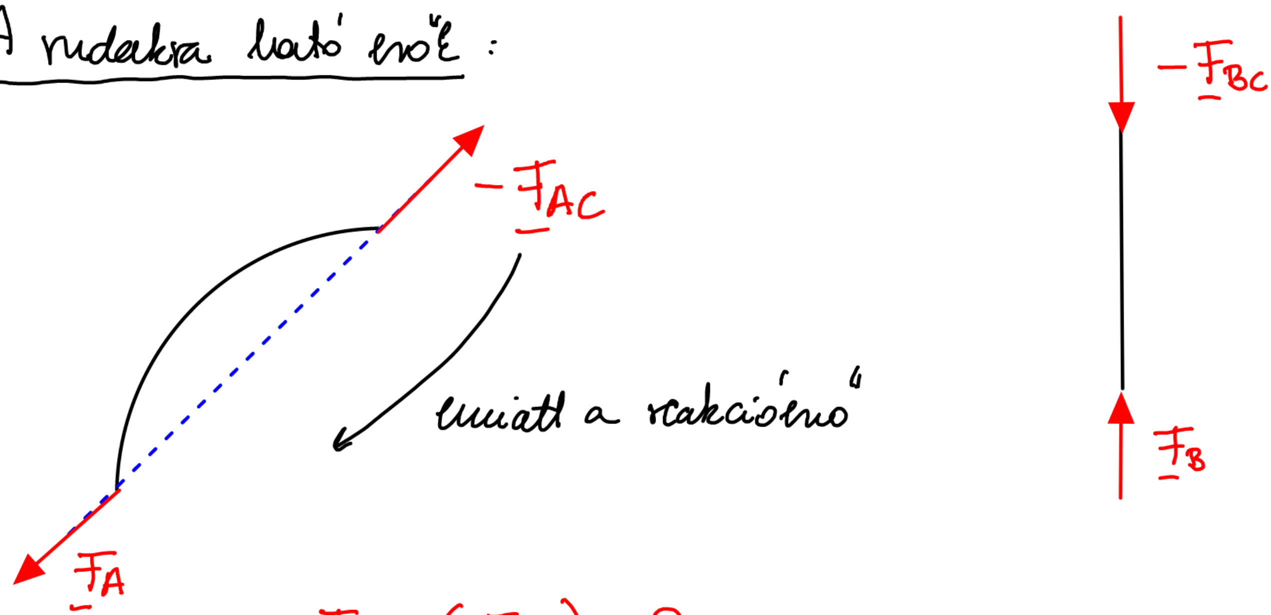
A geometriai egyenletekből:

$$\left.\begin{aligned} F_{AC} \cdot \sin 45^\circ &= F_C \cdot \sin 60{,}26^\circ \\ F_{BC} &= F_{AC} \cos 45^\circ + F_C \cdot \cos 60{,}26^\circ \end{aligned}\right\}$$

$$\hookrightarrow F_{AC} = \frac{F_C \cdot \sin 60{,}26^\circ}{\cos 45^\circ} = \underline{\underline{1705{,}9\ N}}$$

$$\hookrightarrow F_{BC} = F_{AC} \cos(45^\circ) + F_C \cos(60{,}26^\circ) = \underline{\underline{1895{,}41}}$$

A rudakra ható erők:



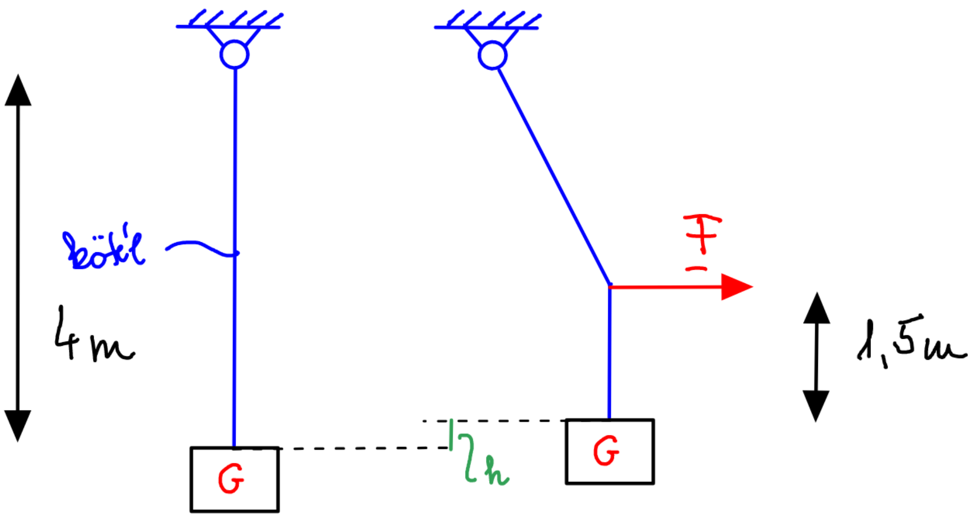
- $\underline{F}_A + (-\underline{F}_{AC}) = \underline{0}$

$$\underline{F}_A = \underline{F}_{AC} = \begin{bmatrix} F_{AC} \cos 225^\circ \\ F_{AC} \sin 225^\circ \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1206{,}22 \\ -1206{,}22 \end{bmatrix} N}}$$

- $\underline{F}_B + (-\underline{F}_{BC}) = \underline{0}$

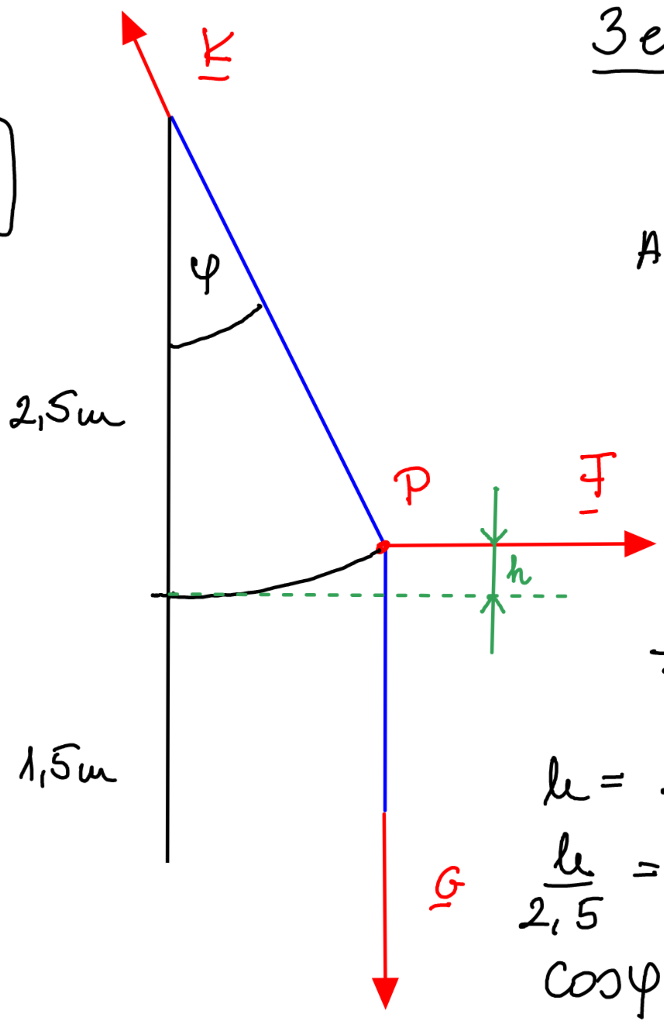
$$\underline{F}_B = \underline{F}_{BC} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1895{,}45 \end{bmatrix} N}}$$

8. feladat A $G = 1500\,N$ súlyú terhet a súlytalannak tekinthető kötél tartja, amelynek hosszváltozását elhanyagoljuk. Mekkora $\underline{F}$ erőt kell alkalmazni a megadott helyen, hogy a terhet 10 cm-rel megemeljük. Írjuk fel paraméteresen az F/G arány változását a h függvényében!



Megoldás Rajzoljuk fel a kötélre ható erőket!

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -K\sin\varphi \\ K\cos\varphi \end{bmatrix}$$



3 erő hat a kötélre

↳ $\underline{F}$, $\underline{G}$ és $\underline{K}$

↳ kényszer

A P pontban kell metsződniük

Fejezzük ki h-t

$$h = 2{,}5 - 2{,}5\cos\varphi$$

$$\frac{h}{2{,}5} = 1 - \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{h}{2{,}5}$$

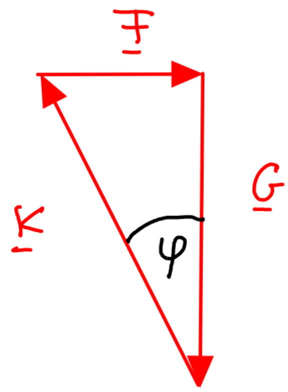
Kifejezve φ-t: $\varphi = \arccos\left(1-\frac{h}{2,5}\right)$

Behelyettesítve $h = 0,1\,m$-t

$\Downarrow$

$$\varphi = \arccos(0,96) = \underline{\underline{16,26^\circ}}$$

Erőábra



Erőegyensúly:

$$\underline{K} + \underline{G} + \underline{F} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -K\sin\varphi \\ K\cos\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$K = \frac{G}{\cos\varphi} = 1562,5\,N$$

$$F = K\sin\varphi = G\,\mathrm{tg}\,\varphi = \underline{\underline{437,5\,N}}$$

$\frac{F}{G}$ arány kifejezése:

$$\frac{F}{G} = \mathrm{tg}(\varphi) = \mathrm{tg}\left(\arccos\left(1-\frac{h}{2,5}\right)\right)$$

Felhasználva: $\mathrm{tg}(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\frac{F}{G} = \frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{h}{2,5}\right)^2}}{1-\frac{h}{2,5}} = \frac{\sqrt{5h-h^2}}{2,5-h}$$