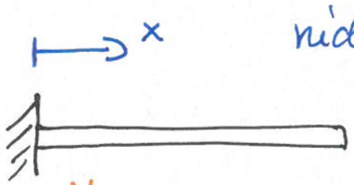
Statika - 11. hét

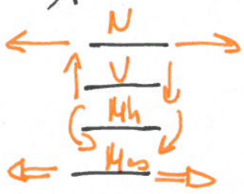
Síkgörbe rudak igénybevételei

Elméleti bevezető

• Egyenes rúd

rúdirányú koordináta





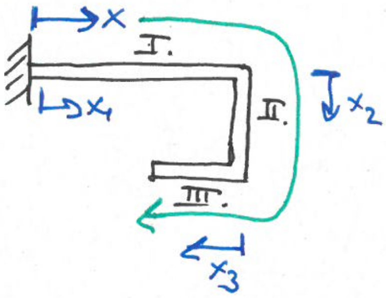
pozitív előjelkonvenció

balról indul x

$V'(x) = p(x)$

$Mh'(x) = -V(x)$

• Egyenes rúdszerkezet

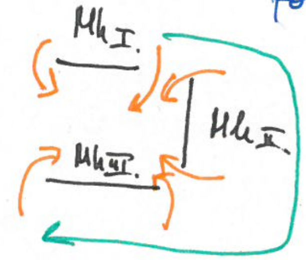


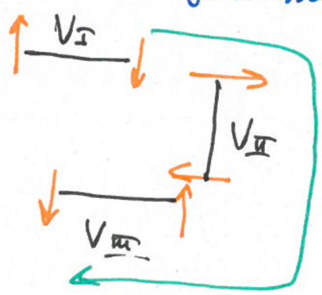
az egyes rúdszakaszoknak lehet új koordinátája (x_1, x_2, x_3)

az előjelkonvenció együtt fordul a körüljárással

balról az

pl:





$V'(x) = p(x)$

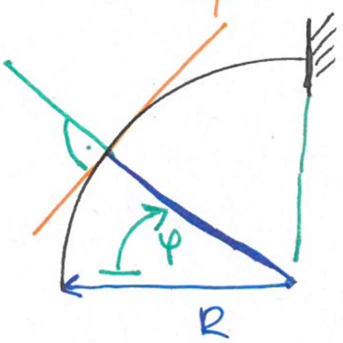
$Mh'(x) = -V(x)$ érvényes!

• Síkgörbe rudak

Olyan rúd amely nem egyenesekből áll, hanem véges görbületű rúdszakaszokból

↳ legegyszerűbb ⇒ körív R sugár

pl: normálirány



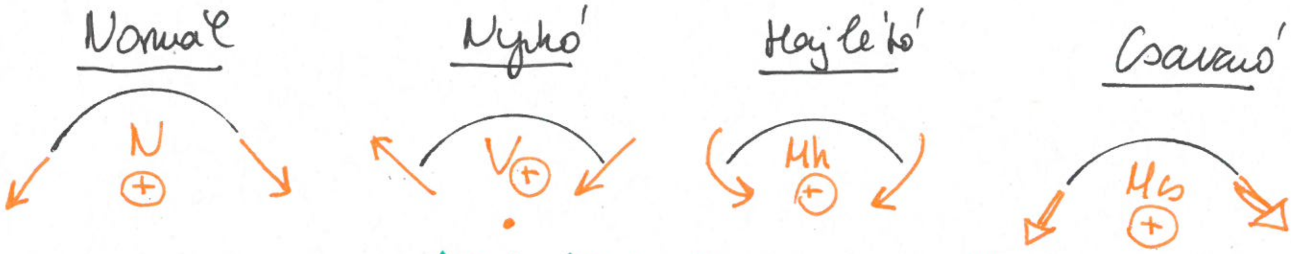
Leíró koordináta: φ

Minden km-ben az erőket rúdirányú és arra merőleges irányra kell bontani

↳ normálirány — a görbe érintője (normálerő)

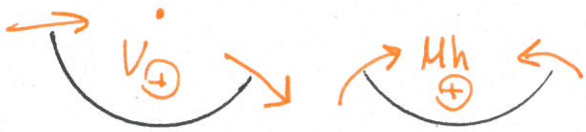
↳ sugárirány — nyíróerő

Előjelkonvenció



a körív középpontja felől nézve!

ami jobban akar görbíteni



Amennyiben φ az óramutató járásával megegyező

$$\boxed{-V(\varphi) = \frac{dM_h(\varphi)}{d(R\varphi)}}$$

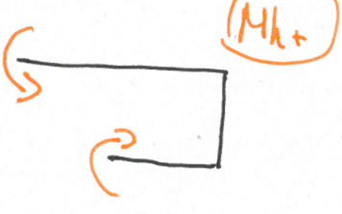
ha az óramutatóval ellentétes φ

$$\boxed{+V(\varphi) = \frac{dM_h(\varphi)}{d(R\varphi)}}$$

Hasonló előjelkonvenciót is lehet alkalmazni

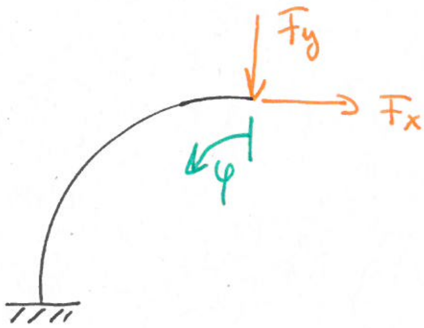
Sőt ÉRDEMES alkalmazni egyenes szakaszoknak

pl.:



ami a szelvény „görbületét" növeli!!

1. feladat Írjuk fel az alábbi negyedkörív alakú rúd igénybevételi függvényeit!



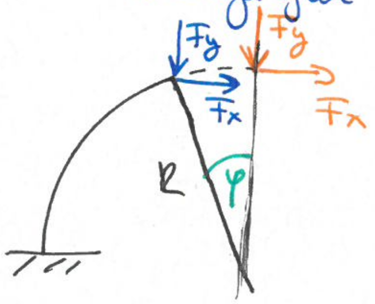
Most is szabadon dönthetünk, hogy merről megyünk!

Jobbról érdemes! → nem kell reakciót számolni!

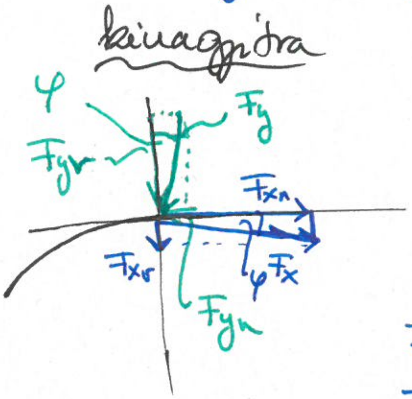
Kell egy koordináta → φ

Vizsgáljuk egy tetsz. φ szöghöz tartozó keresztmetszetet!

Redukáljuk át az erőket



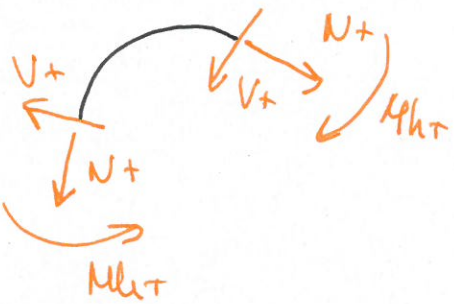
kinagyítva



bontsuk fel az erőket rúdirányú (normál) és sugárirányú (nyíró) komponensekre

$$\left.\begin{aligned} F_{xn} &= F_x \cos\varphi \\ F_{xv} &= F_x \cdot \sin\varphi \\ F_{yn} &= F_y \sin\varphi \\ F_{yv} &= F_y \cos\varphi \end{aligned}\right\} \text{ ezek a komponensek nagyságai!}$$

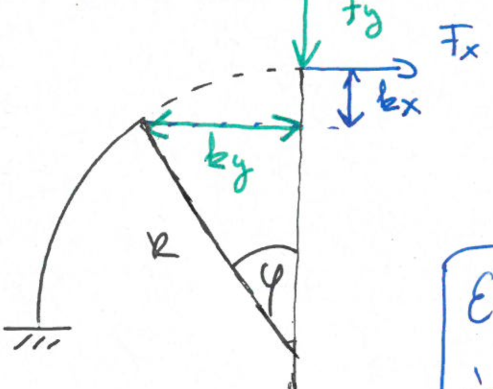
Előjelkonvenció



$$N(\varphi) = F_x \cos\varphi - F_y \sin\varphi$$

$$V(\varphi) = F_x \sin\varphi + F_y \cos\varphi$$

Hajlítónyomaték



$$k_x = R - R\cos\varphi = R(1-\cos\varphi)$$

$$k_y = R \cdot \sin\varphi$$

Mindkét erő görbíteni akarja a rudat!

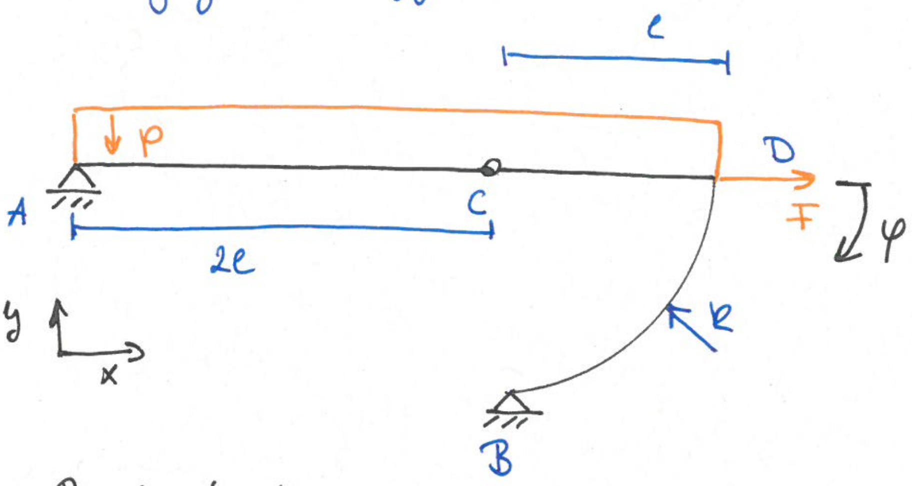
$$M_h(\varphi) = F_x R(1-\cos\varphi) + F_y R \sin\varphi$$

Érdekesség: $N(\varphi) = V'(\varphi)$

óramutatóval ellentétes φ: $\dfrac{dM_h(\varphi)}{dR\varphi} = \dfrac{1}{R} M_h'(\varphi) = V(\varphi)$

2. feladat

Határozzuk meg az alábbi tartó igénybevételi fgveit és ábráit!



Adatok:

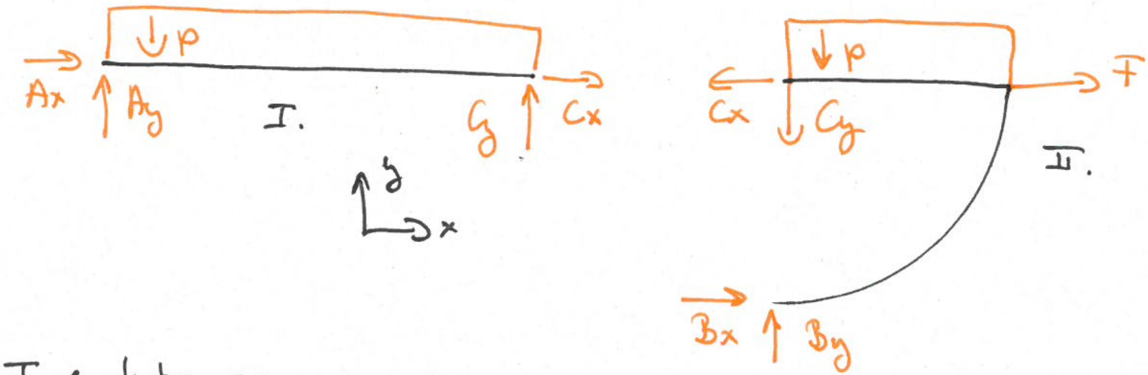
$l = 1\,m$, $R = 1\,m$ $\}$ $l = R$

$p = 2\,kN/m$

$F = 2\,kN$

Reakcióerők: A_x, A_y, B_x, B_y 4 ismeretlen!

Bontsuk ketté a szerkezetet (részekre bontás elve!)



I.-es teste az egyensúlyi egyenletek

$\sum F_x = 0 \quad A_x + C_x = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = 0 \quad A_y + C_y - p \cdot 2l = 0 \quad (2)$

$\sum M_C = 0 \quad -A_y \cdot 2l + p \cdot 2l^2 = 0 \quad (3)$

II-es teste

$\sum F_x = 0 \quad F - C_x + B_x = 0 \quad (4)$

$\sum F_y = 0 \quad -C_y - pl + B_y = 0 \quad (5)$

$\sum M_C = 0 \quad -\frac{pl^2}{2} + B_x \cdot l = 0 \quad (6)$

↳ (3): $A_y = \frac{p \cdot 2l^2}{2l} = \underline{\underline{2\,kN}}$ (↑) ↳ (6): $B_x = \frac{pl^2}{2l} = \frac{pl}{2} = \underline{\underline{1\,kN}}$ (→)

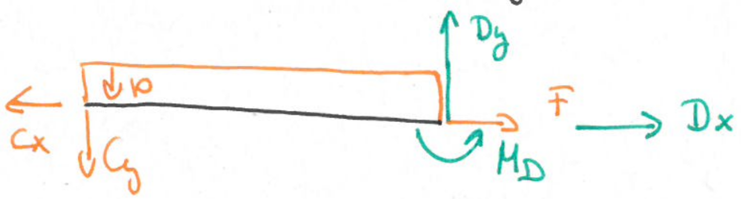
↳ (2): $C_y = p2l - A_y = \underline{\underline{2\,kN}}$ (↑) ↳ (4): $C_x = B_x + F = \underline{\underline{3\,kN}}$ (→)

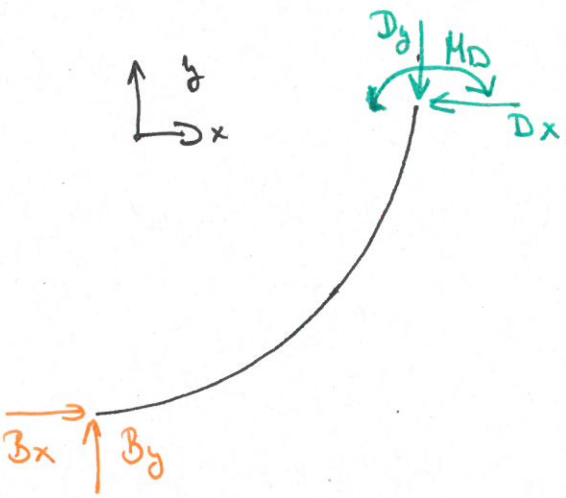
↳ (5): $B_y = pl + C_y = \underline{\underline{4\,kN}}$ (↑) ↳ (1): $A_x = -C_x = -\underline{\underline{3\,kN}}$ (↓)

C_x, C_y az egyenes rúdon!

Azaz: $\underline{A} = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ kN $\quad \underline{B} = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ kN $\quad \underline{C} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ kN

Bontsuk szét a görbe rúdból álló részt is





A negyedkörre felírva az EE-t:

$\sum F_x = 0 \quad B_x - D_x = 0$

$\sum F_y = 0 \quad B_y - D_y = 0$

$\sum M_D = 0 \quad -M_D - B_y \cdot \ell + B_x \cdot \ell = 0$

$D_x = B_x = 1$ kN $(\leftarrow)$ A görbe rúdon

$D_y = B_y = 4$ kN $(\downarrow)$

$M_D = B_y\ell - B_x\ell = -3$ kNm $(\curvearrowleft)$

Igénybevételi fgvek:

I es rúd $\quad x \in [0, 2\ell]$ m

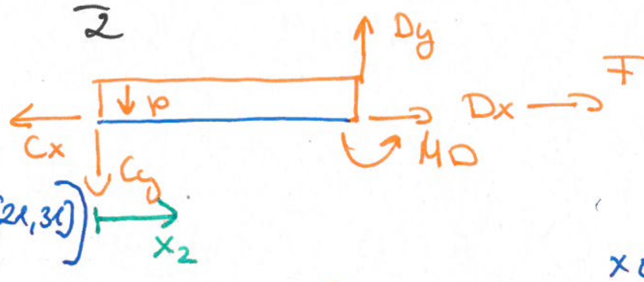
$N_1(x) = -A_x = -(-3) = 3$ kN

$V_1(x) = A_y - px = 2 - 2x$

$Mh_1(x) = -A_y x + \frac{px^2}{2} = -2x + \frac{2x^2}{2}$

II es rúd vízszintes szakasz

$x_2 \in [0, \ell]$

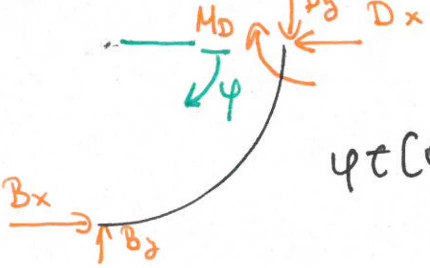


$N_2(x_2) = C_x = 3$ kN $\left(= N_1(x) \quad x \in [2\ell, 3\ell]\right)$

$V_2(x_2) = -C_y - p x_2 = -2 - 2x_2$ $\quad$ vagy $\quad N_2(x) = A_y - px = 2 - 2x \quad x \in [2\ell, 3\ell)$

$Mh_2(x_2) = C_y x_2 + p\frac{x_2^2}{2} = 2 \cdot x_2 + x_2^2$ $\quad$ vagy $\quad Mh_2(x) = -A_y x + \frac{px^2}{2} = -2x + x^2$

III es rúd – görbe



$N_3(\varphi) = -D_y \cos\varphi - D_x \sin\varphi = -4\cos\varphi - \sin\varphi$

$V_3(\varphi) = D_y \sin\varphi - D_x \cos\varphi = 4\sin\varphi - \cos\varphi$

$\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\quad Mh_3(\varphi) = -M_D - D_y R(1 - \cos\varphi) + D_x R \sin\varphi =$

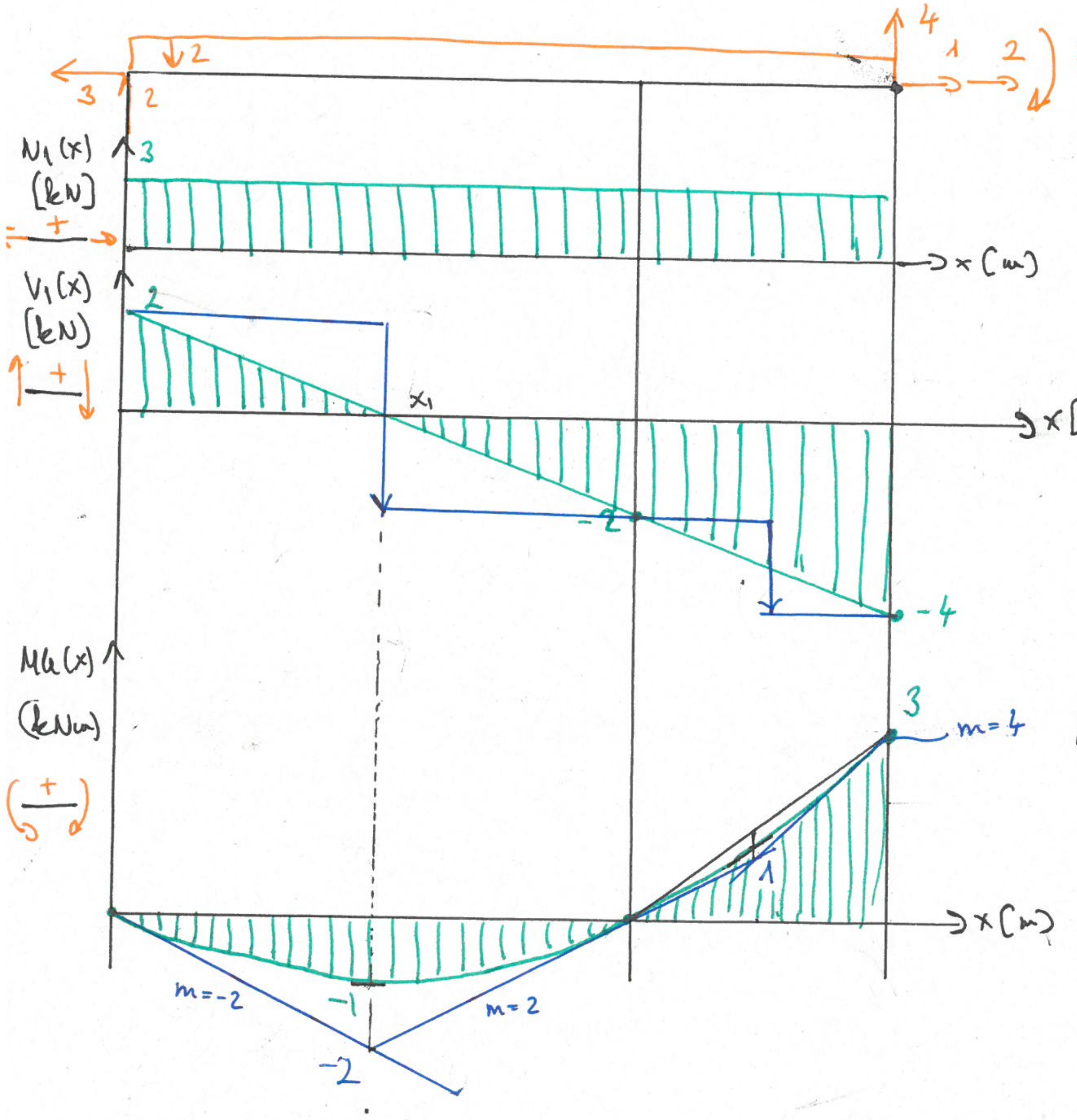
$= 3 - 4(1 - \cos\varphi) + \sin\varphi$

Igénybevételi ábrák

Végül észre, hogy nem muszáj két fgv-t definiálni az egyenes részszakaszokra ha $x_2=(x-2)$-t visszahelyettesítünk $N_2(x_2)$, $V_2(x_2)$ és $Mh_2(x_2)$ fgv be $N_1(x)$, $V_1(x)$ és $Mh_1(x)$ adódik

- $N_2(x-2) = 3 = N_1(x)$
- $V_2(x-2) = -2-2(x-2) = -2-2x+4 = 2-2x = V_1(x)$
- $Mh_2(x-2) = 2(x-2)+(x-2)^2 = 2x-4+x^2-4x+4 = -2x+x^2 = Mh_1(x)$

Tehát $N_1(x)$, $V_1(x)$ és $Mh_1(x)$ az $x\in[0,3\ell]$ tartományon érvényesek!



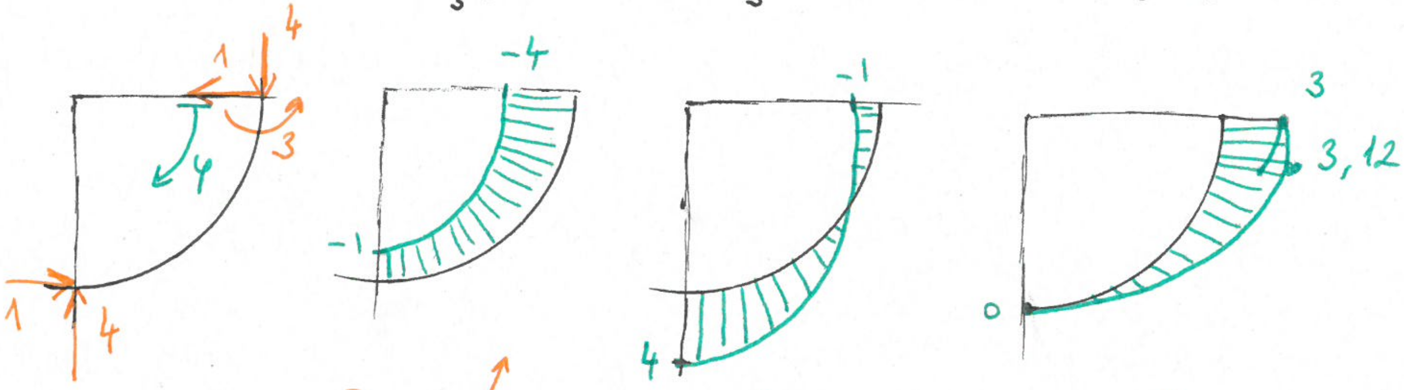
$V(x_1)=0$

$x_1=1\,m$

$Mh(x_1) = -1\,kNm$

Síkgörbe mid esetén

$N_3(\varphi)$ [kN] $V_3(\varphi)$ [kN] $Mh_3(\varphi)$ (kNm)



$\varphi \in [0, 90°]$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$V_3(\varphi^*) = 0$$

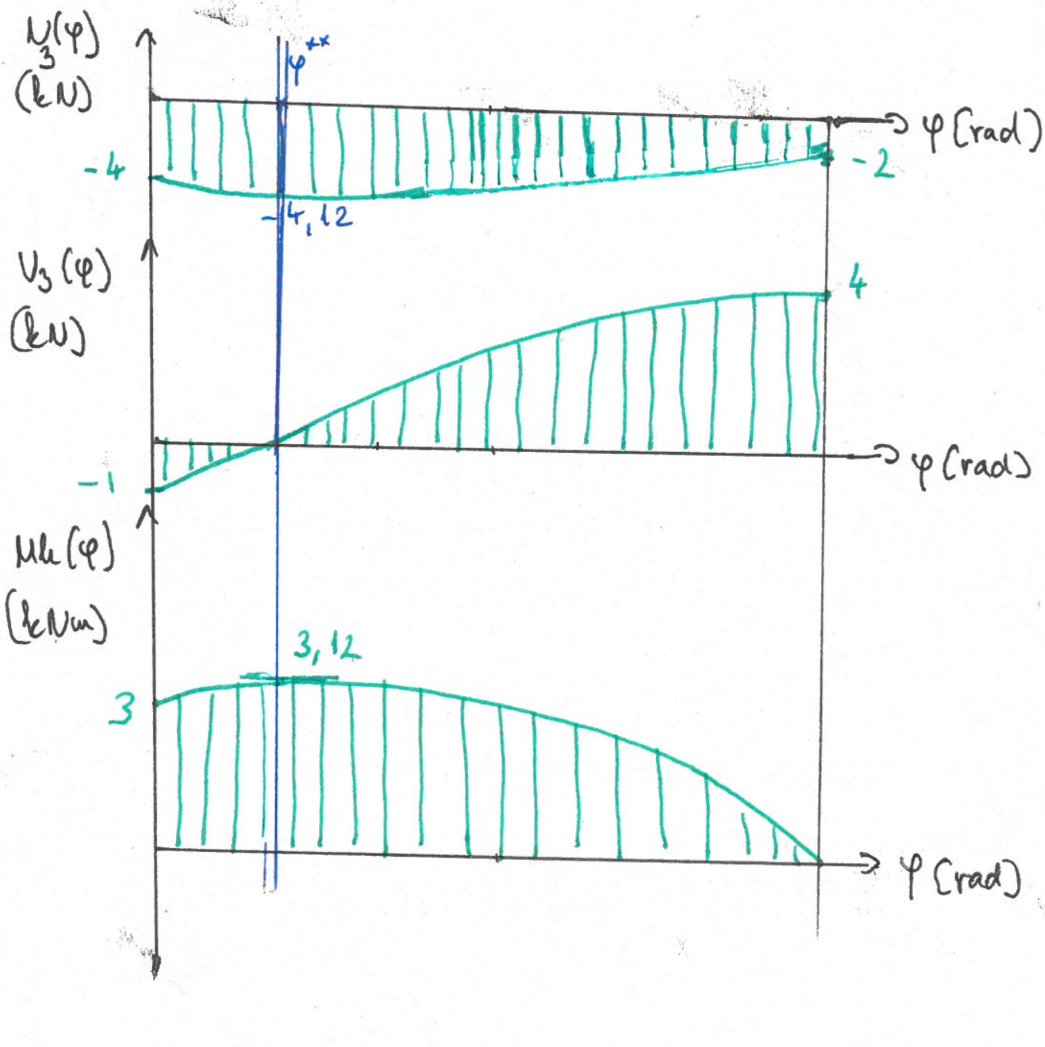
$$Mh_3(\varphi^*) = \underline{\underline{3,12\ \text{kNm}}}$$

$$V_3(\varphi^*) = -\cos\varphi^* + 4\sin\varphi^* = 0$$

$$\varphi^* = \text{arctg}\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{14°}} = 0,25\ \text{rad}$$

$$\varphi^* = \varphi^{**}$$

Ezt lehet ábrázolni úgy, hogy ki van terítve:

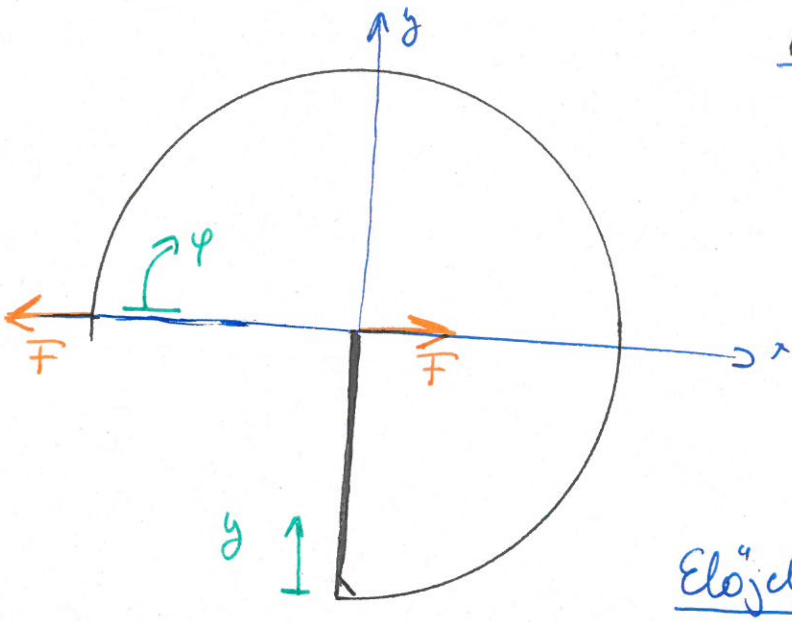


$\varphi^{**} = 0,25$ rad

$N(\varphi^{**}) = -4,12$ kN

3. feladat

Írjuk fel a vázolt tartó igénybevételi függvényeit és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



Adott: F, R

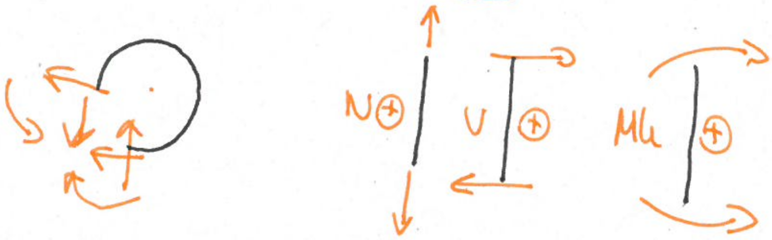
Két szakaszra kell osztani a tartót

①: $\varphi \in [0, 270°]$

$\varphi \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

②: $y \in [0, R]$

Előjelkonvenció



Az egyenes rúd előjelkonvencióját úgy válasszuk, hogy illeszkedjen a görbe rúdhoz!

Görbe rúd (balról)

$N_1(\varphi) = F\sin\varphi$

$V_1(\varphi) = F\cos\varphi$

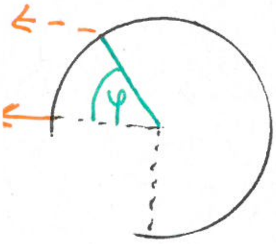
$Mh_1(\varphi) = -FR\sin\varphi$

Egyenes rúd (jobbról) / fentről

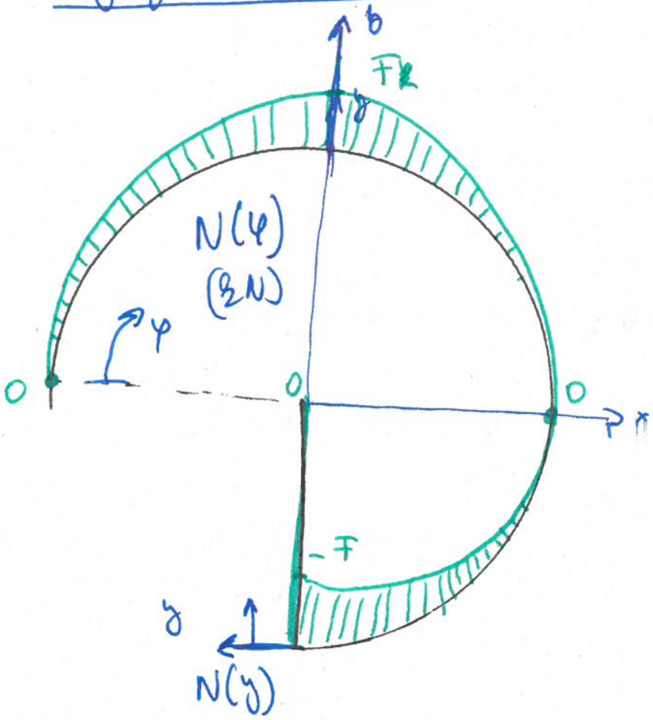
$N_2(y) = 0$

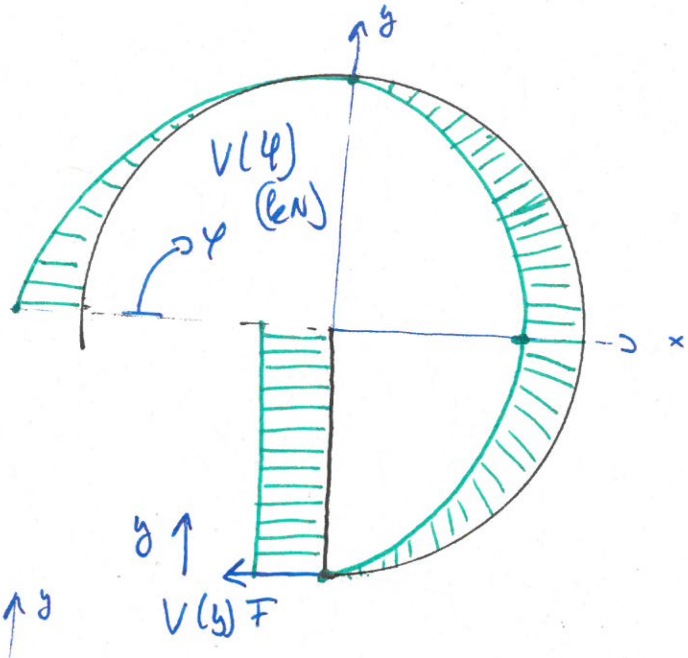
$V_2(y) = F$

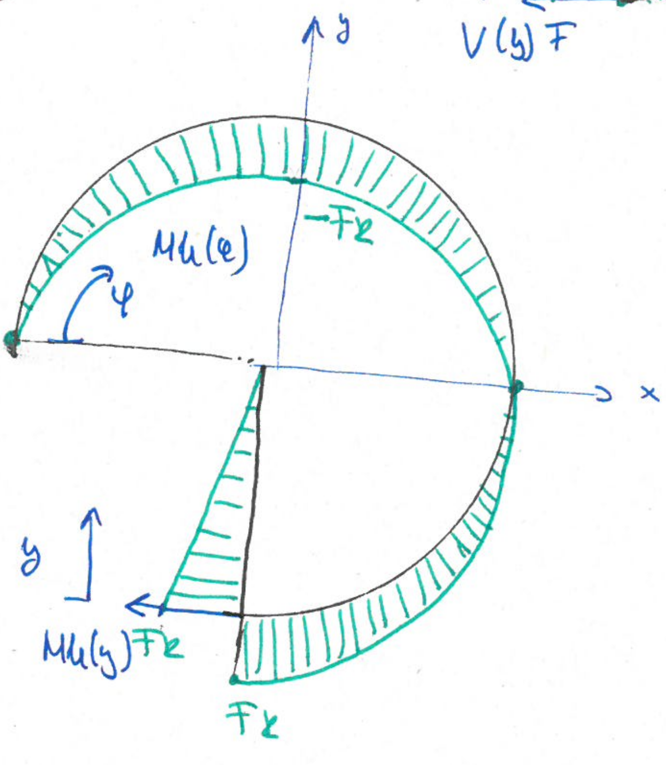
$Mh_2(y) = F(R-y)$

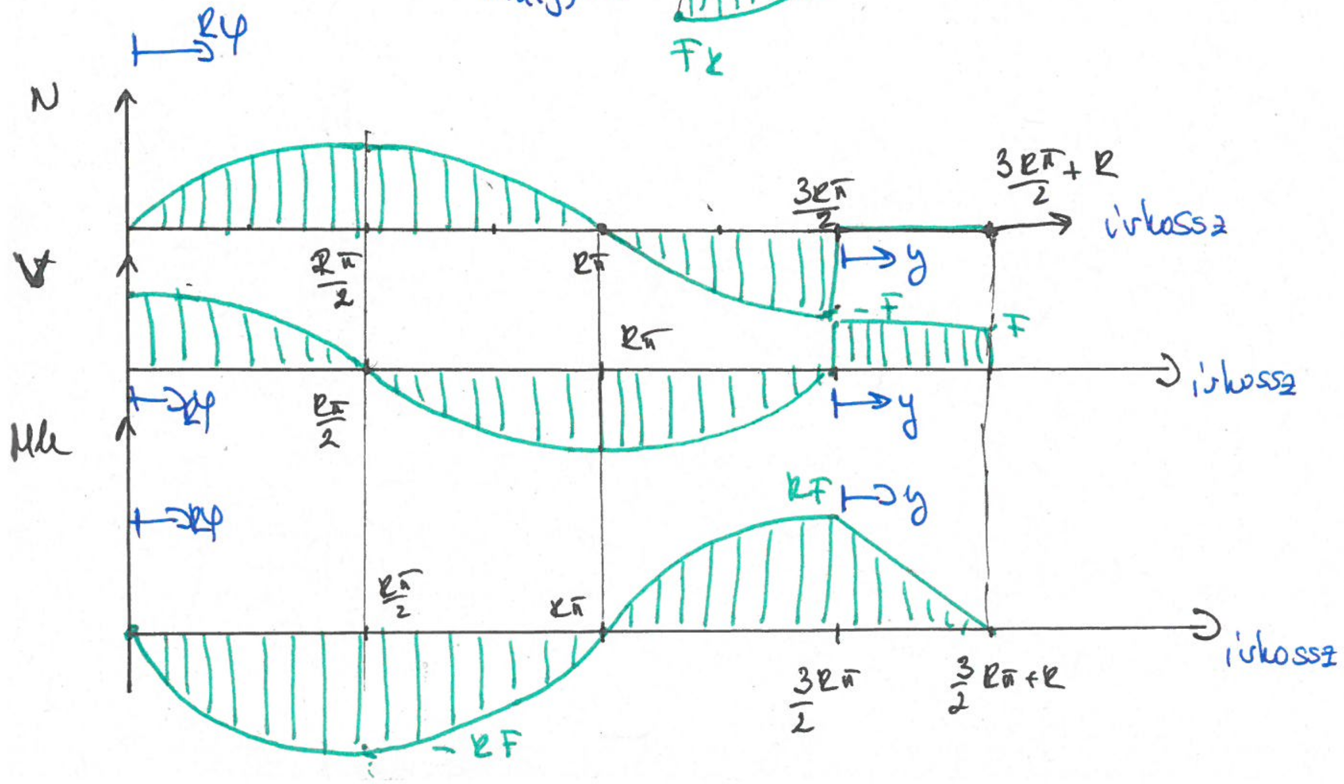


Igénybevételi ábrák



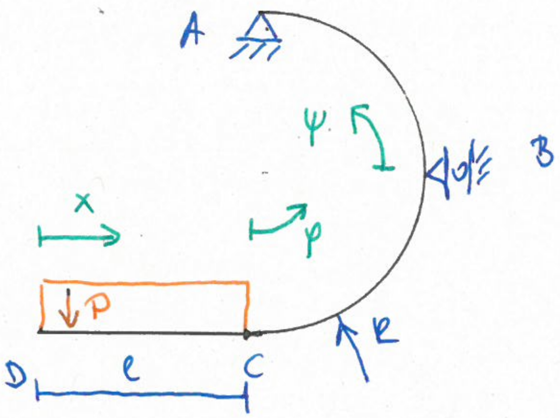






4. feladat

Írjuk fel a vázolt tartó igénybevételi fgveit!



Adatok:

$l = 0{,}3\,m$

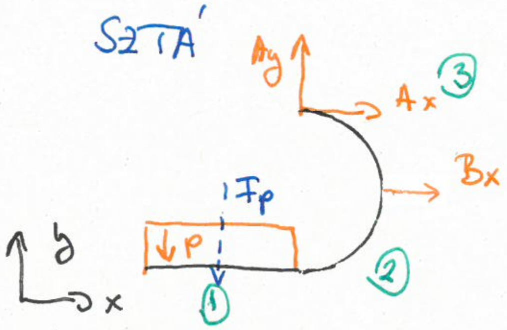
$R = 0{,}2\,m$

$p = 3\,kN/m$

3 szakaszra kell majd osztani

Reakciók

SZTÁ



$\sum F_x = 0 \qquad A_x + B_x = 0$

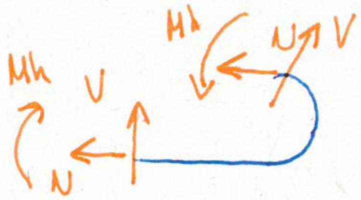
$\sum F_y = 0 \qquad A_y - pl = 0$

$\sum M_A = 0 \qquad B_x \cdot R + p \cdot l \frac{l}{2} = 0$

$A_y = pl = \underline{\underline{0{,}9\,kN}}\ (\uparrow)$

$B_x = -\frac{pl^2}{2R} = -0{,}675\,kN\ (\leftarrow)$

$A_x = -B_x = 0{,}675\,kN\ (\rightarrow)$

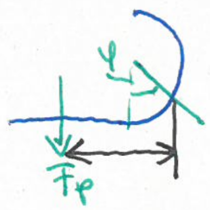


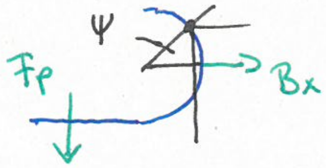
$F_p = pl$

$F_p = 0{,}9\,kN$

Igénybevételi fgvek

	① $0<x<l$	② $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$	③ $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$
N	$N_1(x) = 0$	$N_2(\varphi) = pl\sin\varphi$	$N_3(\varphi) = pl\cos\varphi + B_x\sin\varphi$
V	$V_1(x) = -px$	$N_2(\varphi) = -pl\cos\varphi$	$V_3(\varphi) = pl\sin\varphi - B_x\cos\varphi$
Mh	$Mh_1(x) = -\frac{px^2}{2}$	$Mh_2(\varphi) = -pl\left(\frac{l}{2} + R\sin\varphi\right)$	$Mh_3(\varphi) = -pl\left(\frac{l}{2} + R\cos\varphi\right) - B_x R\sin\varphi$





Numerikusan

①	②	③
$0<x<l$	$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$	$0<\psi<\frac{\pi}{2}$
$N_1(x)=0$	$N_2(\varphi)=0{,}9\sin\varphi$	$N_3(\psi)=0{,}9\cos\psi-0{,}675\sin\psi$
$V_1(x)=-3x$	$V_2(\varphi)=-0{,}9\cos\varphi$	$V_3(\psi)=0{,}9\sin\psi+0{,}675\cos\psi$
$Mh_1(x)=-\frac{3}{2}x^2$	$Mh_2(\varphi)=-0{,}135-0{,}18\sin\varphi$	$Mh_3(\psi)=-0{,}135-0{,}18\cos\psi+0{,}135\sin\psi$

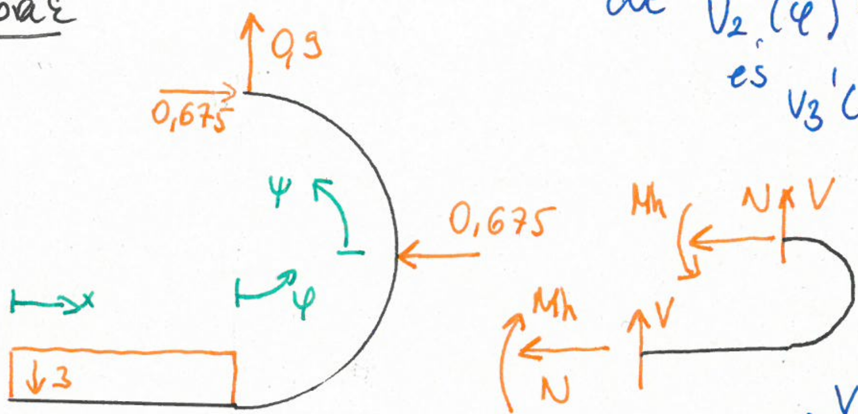
Mivel óramutató járásával ellentétes

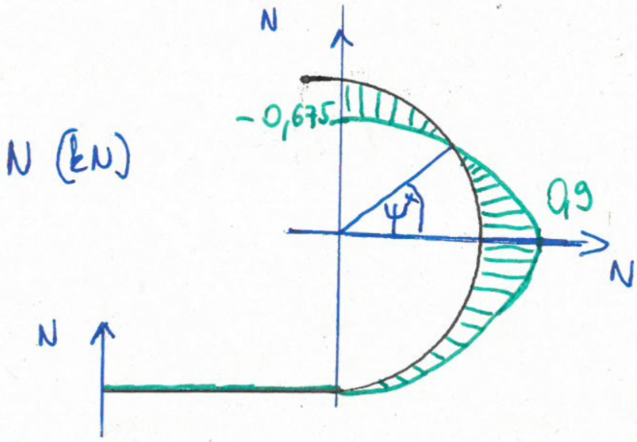
$$Mh_2'(\varphi)=V_2(\varphi) \quad \text{és} \quad Mh_3'(\psi)=V_3(\psi)$$

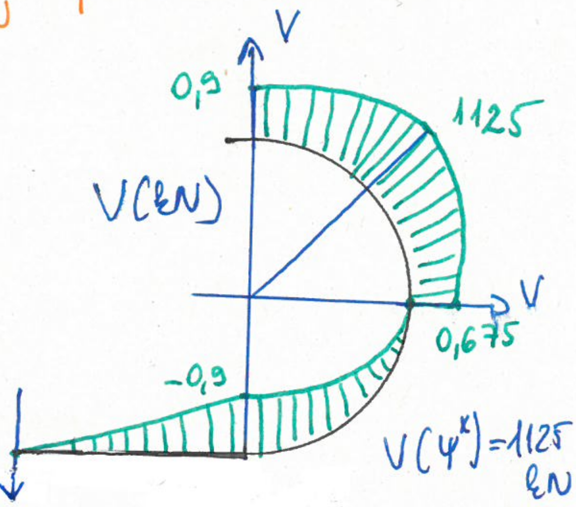
de $V_2'(\varphi)=N_2(\varphi)$

és $V_3'(\psi)=N_3(\psi)$

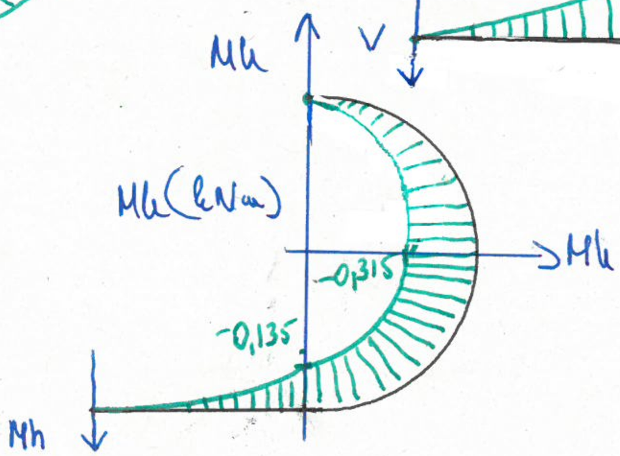
Igénybevételi ábrák







$V(\psi^*)=1125$ kN



$N(\psi^*)=0$

$\psi^*=\text{arctg}\left(\frac{0{,}9}{0{,}675}\right)=53{,}16^\circ$

$\psi^*=0{,}92$ rad