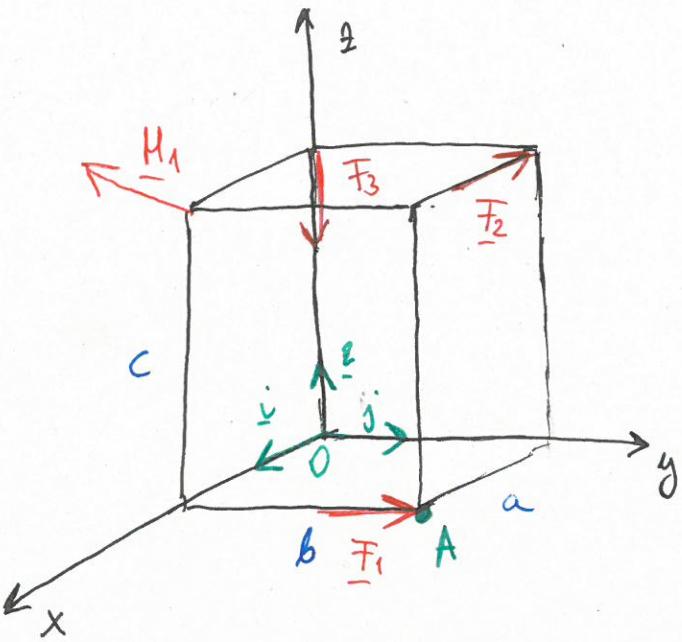
3. feladat — Gyakorló feladat otthonra!



Adatok:

$a = 2\,m$

$b = 1\,m$

$c = 3\,m$

$F_1 = 10\,kN$

$F_2 = 5\,kN$

$F_3 = 2\,kN$

$\underline{M}_1 = 10\underline{i} + 10\underline{k}\ kNm$

Feladatok:

a) $[\underline{F}, \underline{M}_O]_O$

b) $[\underline{F}, \underline{M}_A]_A$

c) Igazoljuk, hogy tényleg skalárinvariáns!

d) Centrális egyenes és annak erődője!

e) Hogyan egészítsük ki az erőrendszert az O pontban, hogy egyensúlyi legyen?

Megoldás

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} m$$

a) A redukált az O pontra!

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{3} \underline{F_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$\underline{M_O} = \sum_{j=1}^{1} \underline{M_j} + \sum_{i=1}^{3} \underline{r_i} \times \underline{F_i} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 35 \end{bmatrix}}} \text{kNm}$$

$$\underline{r_1} \times \underline{F_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

$$\underline{r_2} \times \underline{F_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

$\underline{r_3} \times \underline{F_3} = \underline{0}$ mert $\underline{r_3} \parallel \underline{F_3} \parallel \underline{k}$

$[\underline{F}, \underline{M_O}]_O$ már ismert!

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$\underline{M_O} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 35 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

b) A redukált az A pontra:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \text{kN}$$ (Az eredőerő nem változik!)

$$\underline{M_A} = \underline{M_O} + \underline{r_{AO}} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -25 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 12 \\ -19 \\ 10 \end{bmatrix}}} \text{kNm}$$

$$\underbrace{\underline{r_{AO}}}_{= -r_1} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -20-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -25 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

Tehát ismert $[\underline{F}, \underline{M_O}]_O$ is!

c) Invariáns ellenőrzése

- $\underline{F} \cdot \underline{M_O} = (-5)10 + 10(-15) - 2 \cdot 35 = -270\,(\text{kN})^2\text{m}$
- $\underline{F} \cdot \underline{M_A} = (-5) \cdot 12 + 10(-19) - 2 \cdot 10 = -270\,(\text{kN})^2\text{m}$

✓ OK!

d) Centrális egyenes

a legközelebbi pontja

$$\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{\underline{F}^2}$$

$$\underline{F}^2 = \underline{F} \cdot \underline{F} = (-5)^2 + 10^2 + (-2)^2 = 129 (kN)^2$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_O = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -5 & 10 & -2 \\ 10 & -15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 350 - 30 \\ -20 + 175 \\ 75 - 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 155 \\ -25 \end{bmatrix} (kN)(kNm)$$

Behelyettesítve:

$$\underline{r}_C = \frac{1}{129} \cdot \begin{bmatrix} 320 \\ 155 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}48 \\ 1{,}20 \\ -0{,}19 \end{bmatrix} m$$

A centrális egyenes egyenletéhez kell $\underline{e}_F$

$$\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|} = \frac{1}{\sqrt{129}} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}44 \\ 0{,}88 \\ -0{,}176 \end{bmatrix} (-)$$

$$\underline{r}(\lambda) = \underline{r}_C + \lambda \cdot \underline{e}_F = \begin{bmatrix} 2{,}48 - 0{,}44\lambda \\ 1{,}2 + 0{,}88\lambda \\ -0{,}19 - 0{,}176\lambda \end{bmatrix} m$$

Eredő a centrális egyenesen $[\underline{F}; \underline{M}_C]_C$

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \underline{r}_{CO} \times \underline{F}$$

vagy

$$\underline{M}_C = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F} = \frac{-270}{129} \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}46 \\ -20{,}93 \\ 4{,}18 \end{bmatrix} kNm$$

e) Ahhoz, hogy egyensúly legyen $-[\underline{F}, \underline{M}_O]_O$ erő rendszert kell elhelyezni