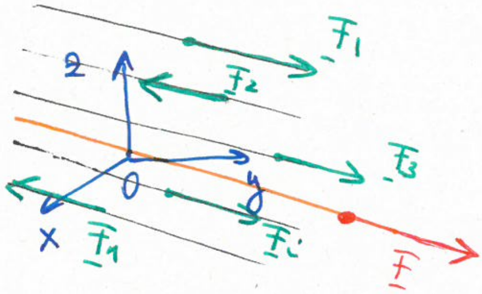
Statika - 4. gyakorlat

Súlypontszámítás

Véges sok párhuzamos erő eredője:

↳ helyettesíthető egy eredő erővel: $\underline{F}$

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$ vektori összeg



Kérdés; hol van ennek a hatásvonala?

$$\underline{r}_K = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

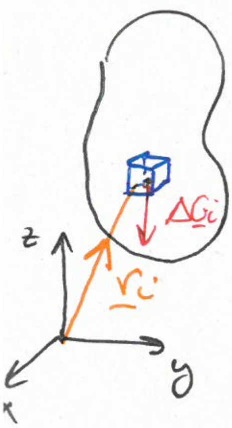
az egyes erők nagysága

Súlypontszámítás:

↳ merev test súlyereje: → véges sok súlyerő eredője

↳ a súlyerő iránya megegyezik.

$$\underline{G} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \underline{G}_i$$



a súlyerők helyettesíthetők egy darab eredővel ($\underline{G}$) amelynek támadáspontját súlypontnak nevezzük

$$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\underline{r}_i \Delta m_i}{m} \rightarrow \frac{\int_{(V)} \rho \underline{r} \, dV}{\int_{(V)} \rho \, dV} = \underline{r}_S$$

→ a sűrűség is változhat a merev testben!

új fogalom: statikai nyomaték $\underline{S}_A = \underline{r} m$

az m tömeg stat. nyomatéka A pontra

Merev test esetén

$$\underline{S}_0 = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \Delta m_i = \underline{r}_S m$$

Egyszerűsítések:

	elemi tömeg Δm_i	súlypont véges elemi részekből	súlypont végtelen elemi részekből
homogén test	$\rho \Delta V_i$ (elemi térfogat)	$\underline{r}_S = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \Delta V_i}{V}$ (teljes térf.)	$\underline{r}_S = \dfrac{\int_{(V)} \underline{r}\, dV}{V}$
homogén vonal (drót)	$\rho A \Delta s_i$ (elemi ívhossz)	$\underline{r}_S = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \Delta s_i}{S}$ (teljes ívhossz)	$\underline{r}_S = \dfrac{\int_{(S)} \underline{r}\, ds}{S}$
homogén síklemez	$\rho v \underbrace{\Delta A_i}$ (elemi térfogat)	$\underline{r}_S = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \Delta A_i}{A}$ (teljes felszín)	$\underline{r}_S = \dfrac{\int_{(A)} \underline{r}\, dA}{A}$

$$\underline{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}; \quad \underline{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} \longrightarrow$$ mindig 3 db skalár egyenlet!

Pl.: homogén lemez:

$$\underline{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} \longrightarrow \quad x_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta V_i}{V}$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta V_i}{V}$$

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta V_i}{V}$$

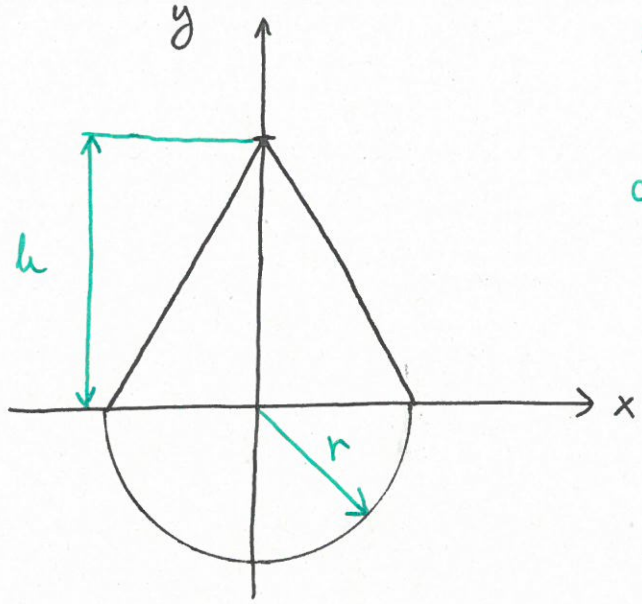
1. feladat

Határozzuk meg az ábrán látható test súlypontjának a helyét ha a test

a) két egyenes és egy félkör alakú rúdból áll

b) egy háromszög és egy félkör lemezből áll

c) egy körkúpból és félgömbből áll



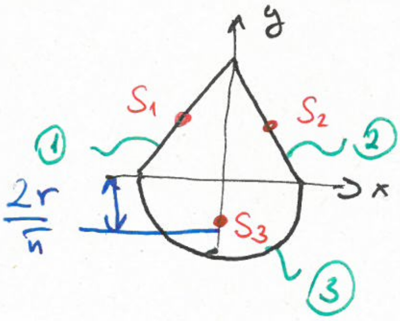
Adatok:

$r = 0,5\,m$

$h = 1\,m$

a) $$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} \underline{r}_i s_i}{S}$$ $\longrightarrow$ 3 részre osztjuk a testet

1. egyenes rúd
2. egyenes rúd
3. félkör alakú rúd



További egyszerűsítés: síkfeladat

a z-koordinátával nem kell foglalkozni!

1. $\underline{r}_{S1} = \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r/2 \\ h/2 \end{bmatrix}$

2. $\underline{r}_{S2} = \begin{bmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r/2 \\ h/2 \end{bmatrix}$

3. $\underline{r}_{S3} = \begin{bmatrix} x_{S3} \\ y_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2r/\pi \end{bmatrix}$ Táblázatból

Kellenek még a rúdhosszak:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{h^2+r^2} = \sqrt{1,25} = 1,118\ \mathrm{m} \\ l_2 &= l_1 = 1,118\ \mathrm{m} \\ l_3 &= r\pi = 1,571\ \mathrm{m} \end{aligned}\right\} \rightarrow L = \sum_{i=1}^{3} l_i = \underline{\underline{3,807\ \mathrm{m}}}$$

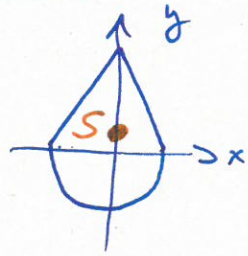
Behelyettesítve a fenti képletbe:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{Si}\, l_i}{\sum_{i=1}^{3} l_i} = \frac{x_{S1} l_1 + x_{S2} l_2 + x_{S3} l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{-\frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2} + \frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2} + 0}{\sqrt{r^2+h^2} + \sqrt{r^2+h^2} + r\pi}$$

$$\underline{\underline{x_S = 0\ \mathrm{m}}} \qquad (\text{szimmetria!})$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_{Si}\, l_i}{\sum_{i=1}^{3} l_i} = \frac{y_{S1} l_1 + y_{S2} l_2 + y_{S3} l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{\frac{h}{2}\sqrt{r^2+h^2} + \frac{h}{2}\sqrt{r^2+h^2} - \frac{2r}{\pi}\cdot r\pi}{\sqrt{r^2+h^2} + \sqrt{r^2+h^2} + r\pi} =$$

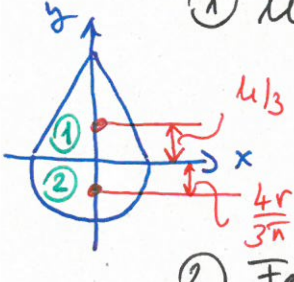
$$= \frac{h\sqrt{r^2+h^2} - 2r^2}{2\sqrt{r^2+h^2} + r\pi} = \underline{\underline{0,162\ \mathrm{m}}}$$



azaz: $\underline{\underline{\underline{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,162 \end{bmatrix} \mathrm{m}}}$

b) Az összefüggés levezetése: $\underline{r}_S = \dfrac{\sum_{i=1}^{2} \underline{r}_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$ Ismét síkfeladat!

Két részre osztjuk



① háromszög

$$\underline{r}_{S1} = \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h/3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \frac{2rh}{2} = rh = 0,5\ \mathrm{m}^2$$

② Félkör

$$\underline{r}_{S2} = \begin{bmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4r/3\pi \end{bmatrix} \qquad A_2 = \frac{r^2\pi}{2} = 0,393\ \mathrm{m}^2$$

Helyettesítsük vissza

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_{Si}\cdot A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0\cdot rh + 0\,\frac{r^2\pi}{2}}{rh + \frac{r^2\pi}{2}} = \underline{\underline{0\ m}}$$

(szimmetria)

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_{Si}\cdot A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{h}{3}\cancel{r}h - \frac{4r}{3\cancel{\pi}}\,\frac{r^{\cancel{2}}\cancel{\pi}}{2}}{\cancel{r}h + \frac{r^{\cancel{2}}\pi}{2}} = \frac{2h^2 - 4r^2}{6h + 3r\pi}$$

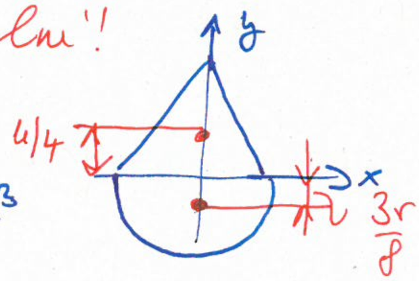
$$y_S = \underline{\underline{0{,}0933\ m}} \longrightarrow \underline{r}_S = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0933 \end{bmatrix} m}}$$

c) Térfogatok

$$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} \underline{r}_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{2} V}$$

→ Szimmetrikus az x-y síkra

→ nem kell z-koordinátával számolni!



Két részre osztjuk

① Kúp $\quad \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ h/4 \end{bmatrix}$; $V_1 = \frac{r^2\pi\cdot h}{3} = 0{,}262\ m^3$

② Félgömb $\quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{8} r \end{bmatrix}$; $V_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{2r^3\pi}{3} = 0{,}524\ m^3$

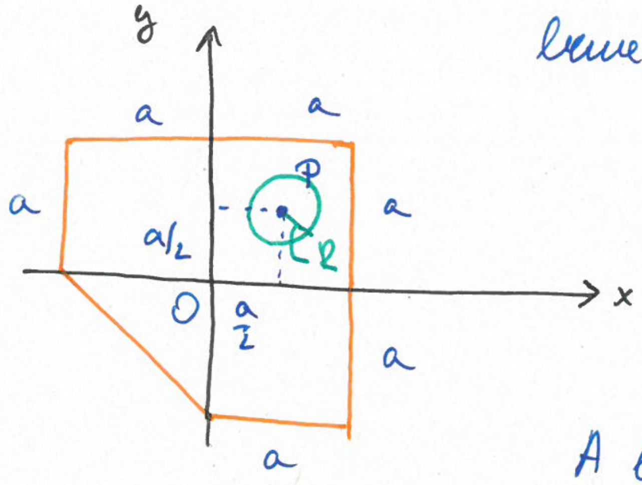
Behelyettesítve

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} r_i V_i}{\sum_{i=1}^{2} V_i} = \frac{0\cdot\frac{r^2\pi h}{3} + 0\cdot\frac{2r^3\pi}{3}}{\frac{r^2\pi h}{3} + \frac{2r^3\pi}{3}} = \underline{\underline{0\ m}}$$

$$\underline{r}_S = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}03125 \end{bmatrix} m}}$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} \underline{r}_i V_i}{\sum_{i=1}^{2} V_i} = \frac{\frac{h}{4}\cdot\frac{r^2\pi\cdot h}{3} - \frac{3}{\cancel{8}_4} r \,\frac{\cancel{2}r^3\pi}{\cancel{3}}}{\frac{r^2 h\pi}{3} + \frac{2r^3\pi}{3}} = \frac{h^2 - 3r^2}{4h + 8r} = \underline{\underline{0{,}03125\ m}}$$

2. feladat Mekkora R sugarú kört kell az alábbi lemez P pontjába fúrni, hogy a lemez súlypontja az O-ban legyen?

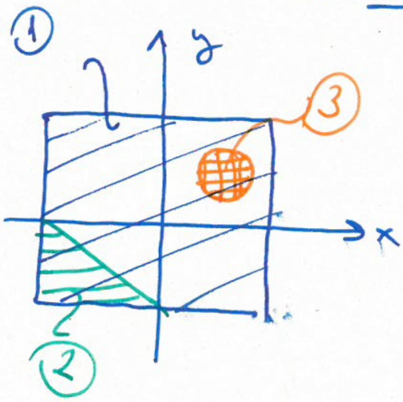


$\downarrow$

lemez: $$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} \underline{r}_i A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i}$$

A lemez előáll, mint egy négyzet lemezből kivonjuk a bal alsó háromszög lemezt és a kört

3 elem:



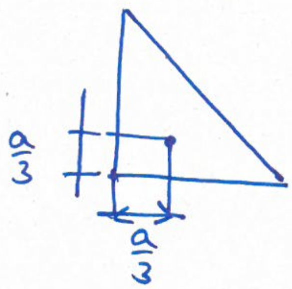
① Négyzet

$$\underline{r}_{S1} = \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m}$$

$$A_1 = (2a)^2 = 4a^2$$

② háromszög

$$\underline{r}_{S2} = \begin{bmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a/3 \\ -2a/3 \end{bmatrix} \text{m}$$



$$A_2 = \frac{a^2}{2}$$

③ Kör: $$\underline{r}_{S3} = \begin{bmatrix} x_{S3} \\ y_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = R^2\pi$$

A súlypont x_S koordinátája

$$x_S = \frac{x_{S1} A_1 - x_{S2} A_2 - x_{S3} A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{0 \cdot 4a^2 - \left(-\frac{2}{3}a\right)\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} R^2\pi}{4a^2 - \frac{a^2}{2} - R^2\pi} = 0$$

azaz:

$$x_S = \frac{\frac{a^3}{3} - \frac{a R^2 \pi}{2}}{4a^2 - \frac{a^2}{2} - R^2 \pi} = 0$$

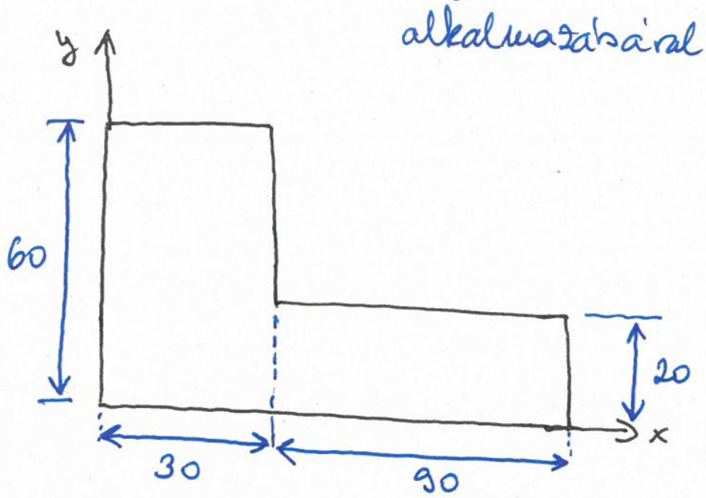
$$\frac{a^3}{3} - \frac{a R^2 \pi}{2} = 0$$

$$\frac{a^{\cancel{3}\,2}}{3} = \frac{\cancel{a}\,\pi}{2} R^2 \;\rightarrow\; R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\, a$$

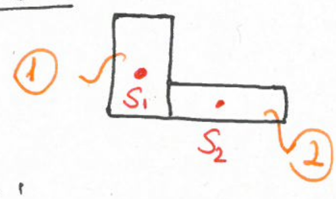
Megjegyzés: Ha felírjuk y_S-t ugyanezt kell kapni!

3. feladat

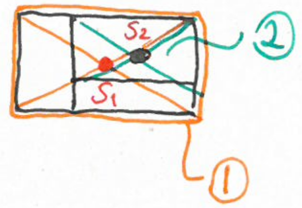
Határozzuk meg az ábrán látható síkidom súlypontjának a helyét két különböző felosztás alkalmazásával!



1-es felosztás



2-es felosztás



1-es felosztás

$$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} \underline{r}_i A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$$

$\hookrightarrow \underline{r}_{S_1} = \begin{bmatrix} x_{S_1} \\ y_{S_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix}$ mm $\quad A_1 = 30 \cdot 60 = 1800$ mm^2

$\hookrightarrow \underline{r}_{S_2} = \begin{bmatrix} x_{S_2} \\ y_{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 10 \end{bmatrix}$ mm $\quad A_2 = 90 \cdot 20 = 1800$ mm^2

A súlypont

$$x_S = \frac{x_{S_1} A_1 + x_{S_2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{15 \cdot 1800 + 75 \cdot 1800}{3600} = 45 \text{ mm}$$

$$y_S = \frac{y_{S_1} A_1 + y_{S_2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{30 \cdot 1800 + 10 \cdot 1800}{3600} = 20 \text{ mm}$$

2-es felosztás:

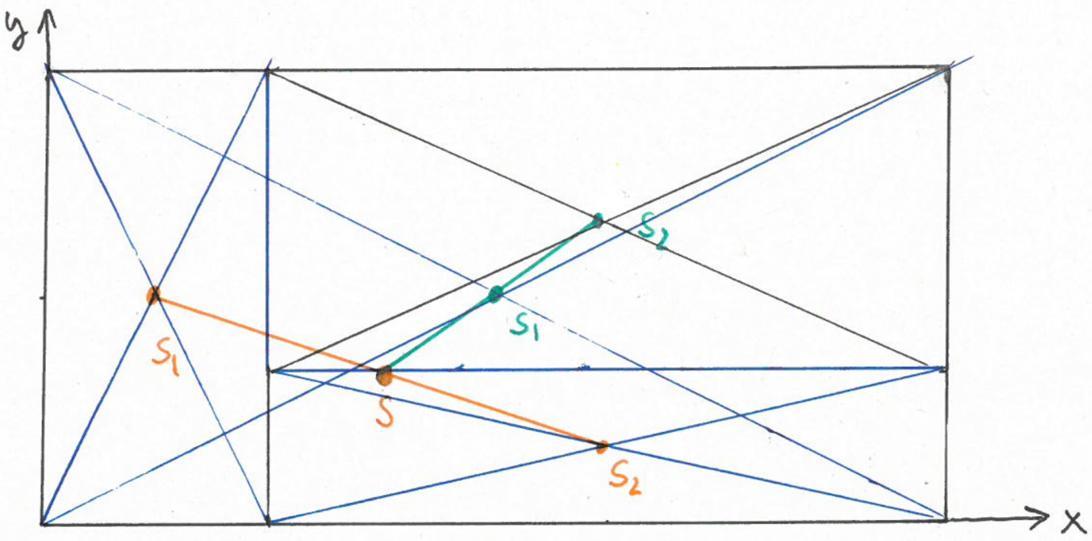
$\hookrightarrow \underline{r}_{S_1} = \begin{bmatrix} x_{S_1} \\ y_{S_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \end{bmatrix}$ mm $\quad A_1 = 120 \cdot 60 = 7200$ mm^2

$\hookrightarrow \underline{r}_{S_2} = \begin{bmatrix} x_{S_2} \\ y_{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 40 \end{bmatrix}$ mm $\quad A_2 = 90 \cdot 40 = 3600$ mm^2

$$x_S = \frac{x_{S_1} A_1 - x_{S_2} A_2}{A_1 - A_2} = \frac{60 \cdot 7200 - 75 \cdot 3600}{7200 - 3600} = 45 \text{ mm}$$

$$y_S = \frac{y_{S_1} A_1 - y_{S_2} A_2}{A_1 - A_2} = \frac{30 \cdot 7200 - 40 \cdot 3600}{7200 - 3600} = 20 \text{ mm}$$

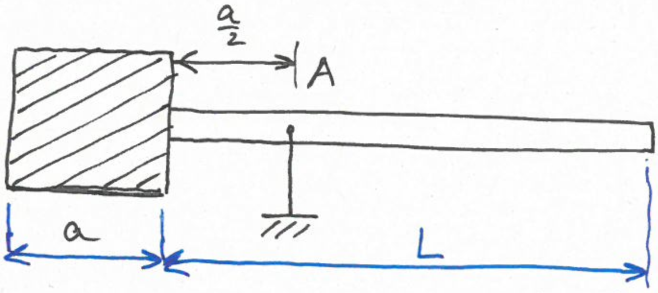
Ábrázoljuk a kiszámított súlypontokat



4. feladat

Az ábrán látható sonaupó az a élhosszúságú acél kockából és L hosszú négyzet km-ű fa rúdból áll. A keresztmetszet mérete „b".

Mekkora legyen L, hogy az A pontban alátámasztva egyensúly legyen?



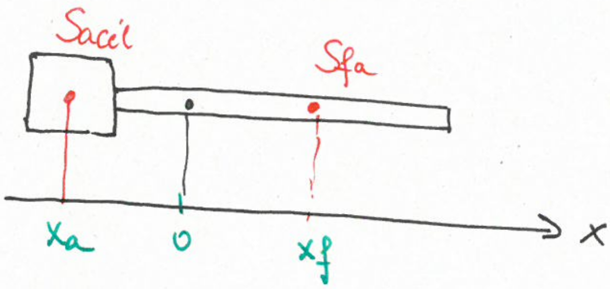
Adatok: $a = 12\ cm$

$b = 40\ mm$

$\rho_{acél} = 7800\ kg/m^3$

$\rho_{fa} = 600\ kg/m^3$

Rajzoljuk be a rendszert alkotó elemek súlypontjait!



Vegyünk fel egy koordináta rendszert!

A szerkezet egyensúlyban van → Az A pontra számított statikai nyomaték zérus

$$S_A = x_a \cdot m_a + x_f \cdot m_f = 0$$

ahol:

$$x_a = -a = -0{,}12\ m$$

$$m_a = \rho_a \cdot V_a = \rho_a \cdot a^3 = 13{,}478\ kg$$

$$x_f = \frac{L}{2} - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(L-a)$$

$$m_f = \rho_f \cdot A_f \cdot L = \rho_f \cdot b^2 \cdot L$$

Visszaírva:

$$S_A = x_a \cdot m_a + x_f \cdot m_f = -\rho_a a^4 + \frac{1}{2}(L-a)\rho_f b^2 L$$

$$= \frac{1}{2}\rho_f b^2 L^2 - \frac{1}{2}\rho_f b^2 a L - \rho_a a^4 = 0$$

$\Downarrow$ behelyettesítve

$$0,48 L^2 - 0,0576 L - 1,617 = 0$$

$$\boxed{L_1 = 1,896 \text{ m}}$$ ✓

$$L_2 = -1,776 \text{ m}$$ ↯