Statika - 3. hét

Pluszfeladatok

1. pluszfeladat

Adott két erőrendszer

I. $\underline{r}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ m $\quad \underline{F}_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ N

$\underline{r}_2' = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ m $\quad \underline{M}_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ Nm

$\underline{r}_3' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ m $\quad \underline{F}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ N

II. $\underline{r}_1'' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ m $\quad \underline{F}_1'' = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ N

$\underline{r}_2'' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{M}_1'' = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$ Nm

a) Ellenőrizzük, hogy a két erőrendszer egyenértékű-e

b) Határozzuk meg az 1es erőrendszernek az origón átmenő $\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ irányú tengelyre vett nyomatékát!

Megoldás

Számítsuk ki mindkét erőrendszer eredőjét az origóra! $\left[\underline{F}', \underline{M}_0'\right]_0$ és $\left[\underline{F}'', \underline{M}_0''\right]_0$

$$\underline{F}' = \sum_{i=1}^{2} \underline{F}_i' = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$\underline{F}'' = \sum_{i=1}^{1} \underline{F}_i'' = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Az erők stimmelnek!

• $\underline{M}_O' = \sum_{j=1}^{1} \underline{M}_j' + \sum_{i=1}^{2} \underline{r}_i' \times \underline{F}_i' = \underline{M}_1' + \underline{r}_1' \times \underline{F}_1' + \underline{r}_3' \times \underline{F}_2'$

$$\underline{r}_1' \times \underline{F}_1' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ -2-1 \\ -2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

$$\underline{r}_3' \times \underline{F}_2' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3-0 \\ 0+6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_O' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

• $\underline{M}_O'' = \underline{M}_1'' + \underline{r}_1'' \times \underline{F}_1''$

$$\underline{r}_1'' \times \underline{F}_1'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4-0 \\ 0+8 \\ 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

$$\underline{M}_O'' = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

Stimmel

Mivel $[\underline{F}'; \underline{M}_O']_O = [\underline{F}''; \underline{M}_O'']_O$ → A két erőrendszer egyenértékű

b) az egyenes irányvektora

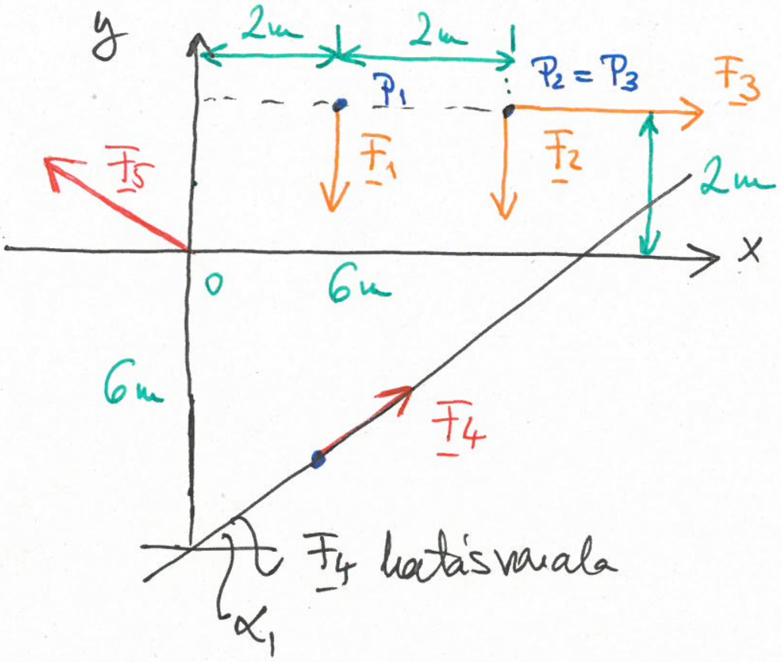
$$\underline{e}_n = \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_n = (\underline{M}_O \cdot \underline{e}_n) \cdot \underline{e}_n = \underbrace{\left(1 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{2}{3}\right)}_{0} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Tehát $\underline{M}_n = \underline{0}$ → Ennek a nyomatéknak nincs az $\underline{n}$ tengelyre vetülete → merőleges rá!

2. pluszfeladat

Egyensúlyozzuk az alábbi síkbeli erőrendszert az alábbi $\underline{F}_4$ és $\underline{F}_5$ koncentrált erőkkel! Adott $\underline{F}_4$ hatásvonala és $\underline{F}_5$ támadáspontja!



$F_1 = 12\ N$

$F_2 = 6\ N$

$F_3 = 24\ N$

Megoldás

Az ismeretlen $\underline{F}_5$ és $\underline{F}_4$ erő felírható: $\underline{F}_5 = \begin{bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ 0 \end{bmatrix}$ valamint

$\underline{F}_4 = \begin{bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \\ 0 \end{bmatrix}$ DE! ismerjük $\underline{F}_4$ irányát és az ezt leíró α_1 szöget

$$tg\,\alpha_1 = \frac{6}{6} = 1 \rightarrow \alpha_1 = 45^\circ$$

$\Downarrow$

$F_{4x} = F_{4y}$ azaz $\underline{F}_4 = \begin{bmatrix} F_{4x} \\ F_{4x} \\ 0 \end{bmatrix}$

Ha egyensúly van ⇒ bármely pontra számított statikai vektorkettős zérus

↳ írjuk fel az O pontra:

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{5} \underline{F_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{5x} \\ F_{5y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{4x} \\ F_{4x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Túl sok ismeretlen!

$$\underline{M_O} = \sum_{i=1}^{5} \underline{r_i} \times \underline{F_i} = \underline{r_1} \times \underline{F_1} + \underline{r_2} \times \underline{F_2} + \underline{r_3} \times \underline{F_3} + \underline{r_4} \times \underline{F_4} + \underbrace{\underline{r_5} \times \underline{F_5}}$$

nem tudjuk
fel lehet venni
egy pontját
át egyenesnek

$\underline{r_5} = \underline{0}$

Pl: $P(0,-6) \Rightarrow \underline{r_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{r_1} \times \underline{F_1} + \underline{r_2} \times \underline{F_2} + \underline{r_3} \times \underline{F_3} + \underline{r_4} \times \underline{F_4}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{4x} \\ F_{4x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M_O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -48 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6F_{4x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -96 + 6F_{4x} \end{bmatrix}$$

azaz $\underline{M_O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -96 + 6F_{4x} \end{bmatrix} = \underline{0} \longrightarrow F_{4x} = 16\ N$

$$\hookrightarrow \boxed{\underline{F_4} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} N}$$

Visszaírva $\underline{F}$-be:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 24 + F_{4x} + F_{5x} \\ -18 + F_{4x} + F_{5y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 + F_{5x} \\ -2 + F_{5y} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0} \Longrightarrow \begin{matrix} F_{5x} = -40\ N \\ F_{5y} = 2\ N \end{matrix}$$

$$\boxed{\underline{F_5} = \begin{pmatrix} -40 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} N}$$