

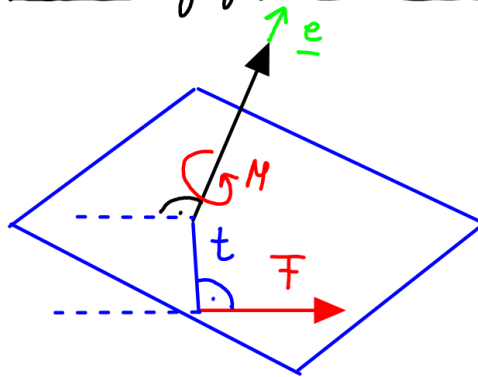
Statika - 2. gyakorlat

Alapfogalmak - Nyszwailek

Elveleli a' tekintes :

- Ero' tengelye' parhuzos szomszek

Az ero' sikjara
menoleges tengely
bolre!



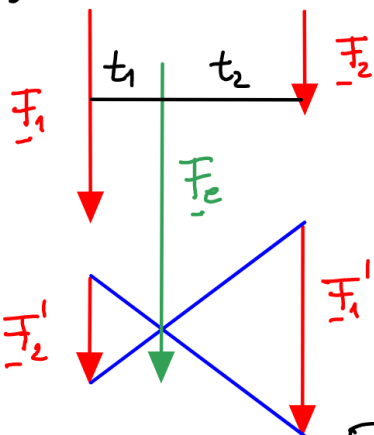
$$M = F \cdot t$$

menoleges tavolsag

$$\underline{M} = M \cdot \underline{e} \quad \text{vektoranalizis}$$

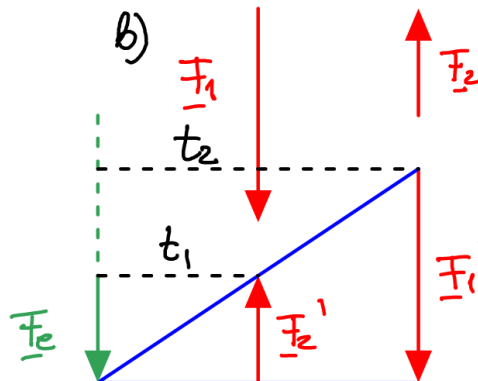
• Parhuzos mo'k mo'je

a)

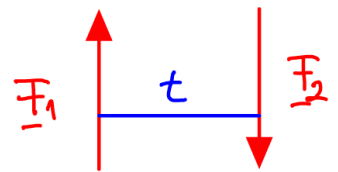


$$\boxed{F_1 t_1 = F_2 t_2}$$

b)



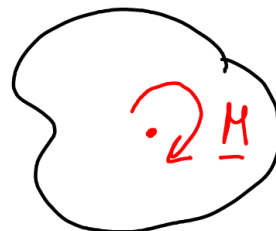
c) Ero'par



$$M = F \cdot t$$

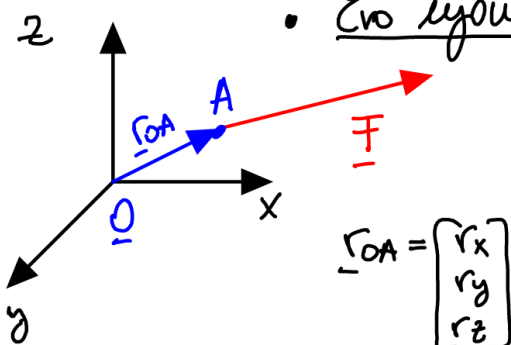
(a sikra
menoleges)

- Koncentra'tt mo'par :



vektoranalizis

- Ero' szomszek

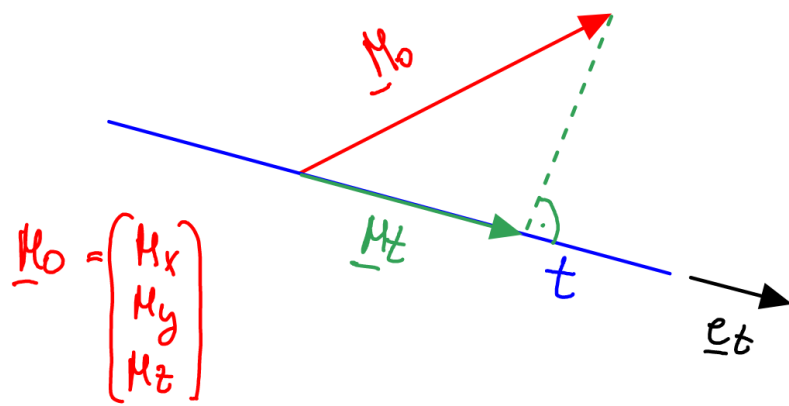


$$\underline{r_{OA}} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_O = \underline{r_{OA}} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_z r_y - F_y r_z \\ F_x r_z - F_z r_x \\ F_y r_x - F_x r_y \end{bmatrix}$$

Kereszt szorzás / Vektori szorzás!

• Tengelyre számított nyomaték:



$$\underline{M_0} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{e_t} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{M_t} = M_t \cdot \underline{e_t}$$

$$M_t = \underline{M_0} \cdot \underline{e_t}$$

skaláris szorzat

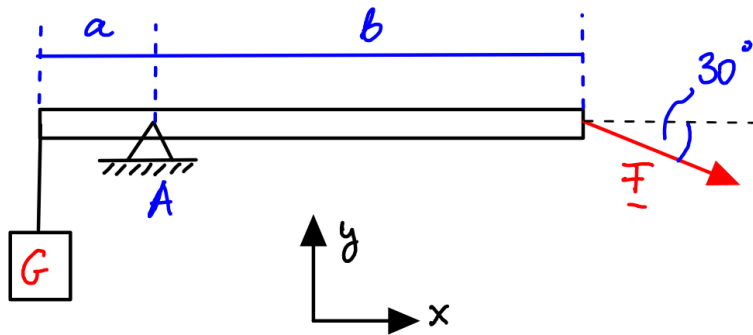
$$\underline{M_0} \underline{e_t} = M_x \cdot e_x + M_y \cdot e_y + M_z \cdot e_z$$

t irányú
egységvektor

előjeles
nagyság

1. feladat Egy súlytalannak tekintett merev rudat a $G=300\text{ N}$

súlyú teher terheli. A rúd az A pontban csuklóval rögzített. Mekkora legyen F erő nagysága, hogy egyensúly legyen?



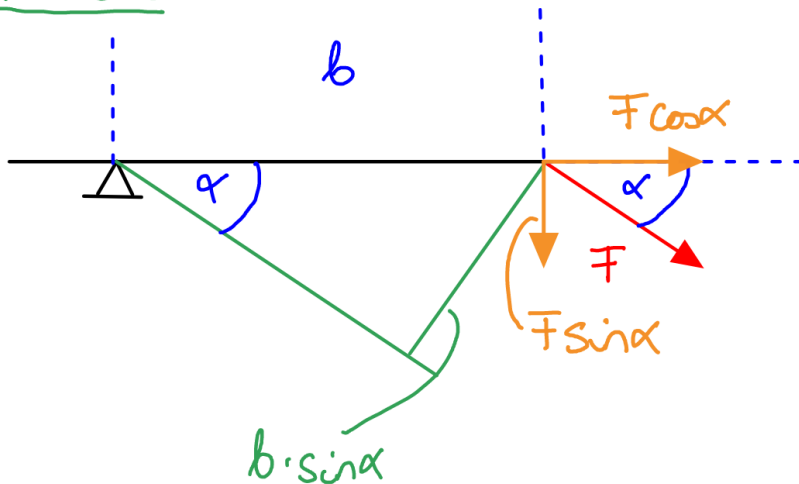
Adatok:
 $a = 2\text{ m}$
 $b = 10\text{ m}$

Megoldás: Ha egyensúly van: az A pontra számított nyomaték zérus!

$$\sum M_A = G \cdot a - F \cdot b \cdot \sin \alpha = 0$$

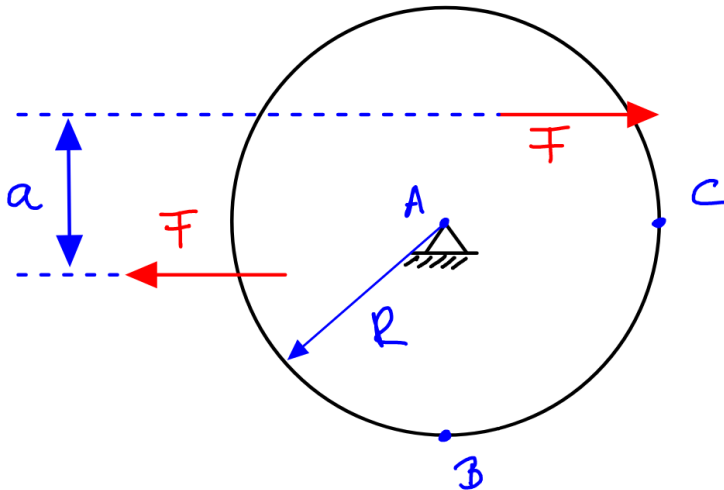
$$F = \frac{G \cdot a}{b \sin \alpha} = 120\text{ N}$$

Értékelés:



2. feladat

Az $R = 20 \text{ cm}$ sugarú körű az A ponton átmenő függőleges körül forgó. A körűt az $F = 10 \text{ N}$ nagyságú erőkből álló erőpár terheli, ahol az erők távolsága $a = 20 \text{ cm}$. Mekkora és milyen irányú Q erő kell alkalmazni a BC hatásvonalon, hogy a körű egyensúlyban maradjon?



Adatok:

$$R = 20 \text{ cm}$$

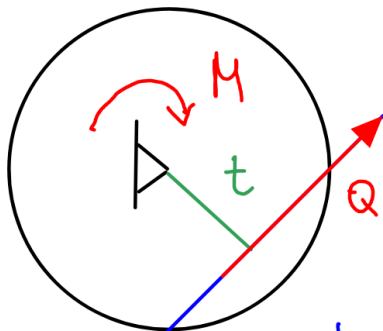
$$a = 20 \text{ cm}$$

$$F = 10 \text{ N}$$

Megoldás: Az erőpár \rightarrow bevezethető koncentrált erőpárral

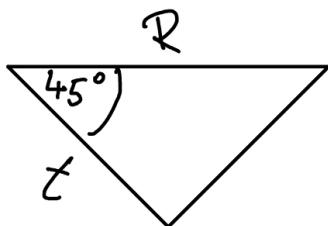
$$M = -F \cdot a = -2 \text{ Nm}$$

óramutató járásával megfelelő
 \rightarrow negatív irány



$\sim Q$ hatásvonala

Egyensúly $\rightarrow \curvearrowleft M_A = -M + Q \cdot t = 0$



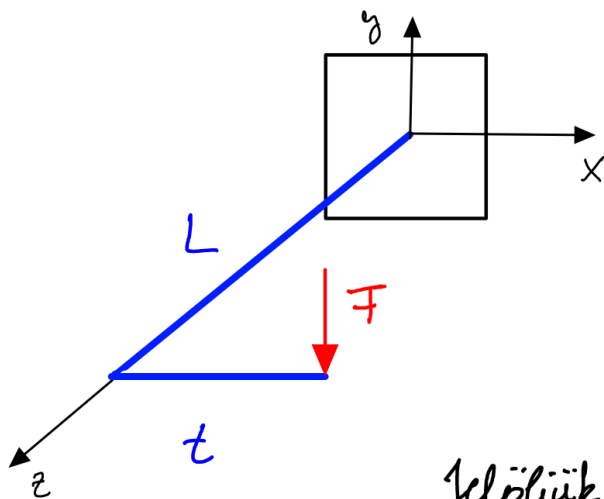
$$Q = \frac{M}{t} = \frac{M}{R \cos(45^\circ)} = \frac{\sqrt{2} M}{R}$$

$$Q = \underline{\underline{14,142 \text{ N}}}$$

3. feladat

Az $L = 2\text{ m}$ és $t = 30\text{ cm}$ -s egyenes szakaszból álló merev töröttvonalú tartó az O pontban mereven rögzített a falhoz. A tartó terhelése a végén működő y -tengellyel párhuzamos $F = 20\text{ N}$ nagyságú koncentrált erő.

Mekkora az erő forgató hatása a koordináta-tengelyek körül?



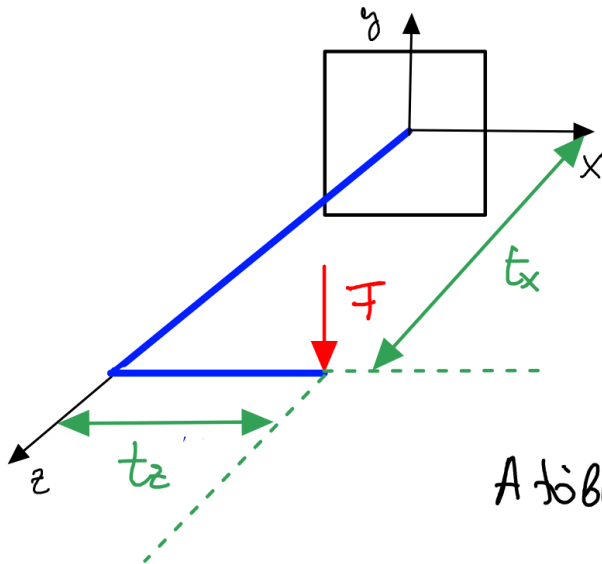
Adatok:

$$F = 20\text{ N}$$

$$L = 2\text{ m}$$

$$t = 30\text{ cm} = 0,3\text{ m}$$

Jelöljük be az F erő tengelyektől mért merőleges távolságait, azaz erőkarjait!



Csak azokra a tengelyekre kell, amely nem párhuzamos F -vel!

$$\hookrightarrow M_y = 0\text{ Nm}$$

A többi tengely esetén

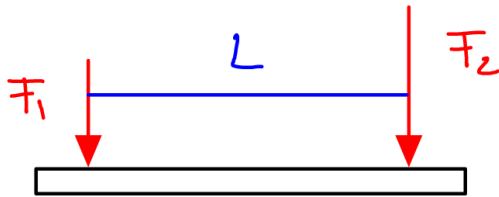
$$M_x = F \cdot t_x = F \cdot L = 40\text{ Nm}$$

$$M_z = -F \cdot t_z = -F \cdot t = -6\text{ Nm}$$

4. feladat

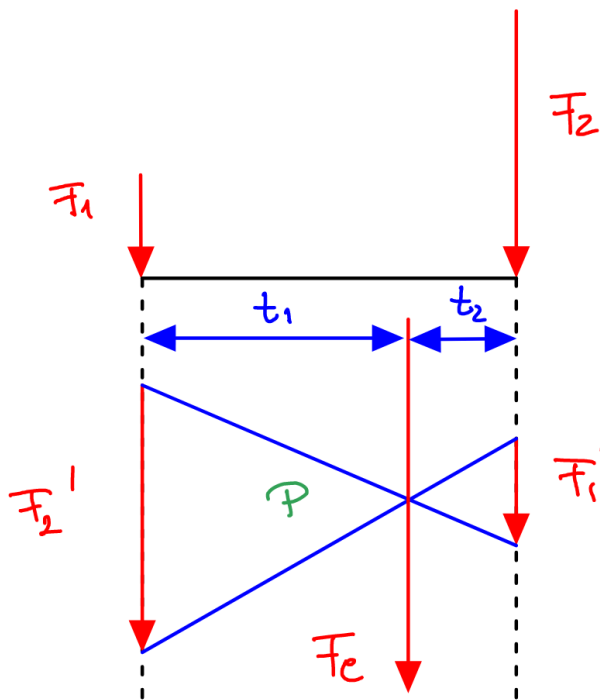
Egy merev test terhelése az egymással párhuzamos $F_1 = 4 \text{ kN}$ és $F_2 = 10 \text{ kN}$ nagyságú erők, amelyek távolsága $L = 7 \text{ m}$. Határozzuk meg szerkesztéssel és mérettáblával az eredő erő helyét és nagyságát!

Mekkora nagyságú, irányú és értelmű nyomat kell alkalmazni, hogy a test egyensúlyban legyen?



Szerkesztéssel

① Arányos ábra kell \rightarrow lépték!



Hosszlépték:

$$1 \text{ cm} \hat{=} 1 \text{ m}$$

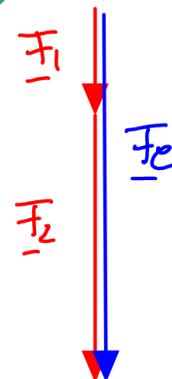
Erőlépték:

$$1 \text{ cm} \hat{=} 1 \text{ kN}$$

- ② Lehatározzuk a két nyomat a másik határvonalára
- ③ Az eredő erő helyének szerkesztése, P pont
- ④ Az eredő az erők vektori összege

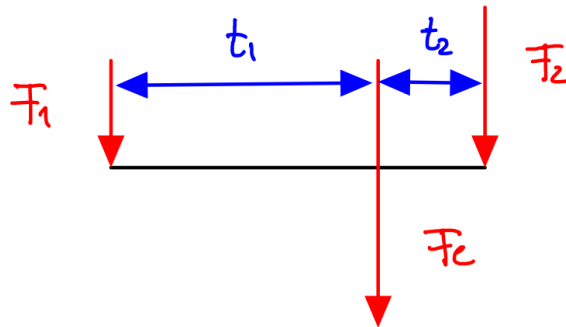
$$F_e \sim 7 \text{ cm} \rightarrow \underline{\underline{F_e = 14 \text{ kN}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 5 \text{ m} \\ t_2 = 2 \text{ m} \end{array} \right\} \text{leolvasható}$$



SZÁMOLÁSSAL

- Mivel a két erő egyirányú \rightarrow az eredőerő a két erő között helyezkedik el, a nagyobb erőhöz közelebb!



- $t_1 + t_2 = L \rightarrow t_2 = L - t_1$

- arányosság: $F_1 t_1 = F_2 \cdot t_2$

$$F_1 t_1 = F_2 (L - t_1)$$

$$(F_1 + F_2) t_1 = F_2 \cdot L$$

$$t_1 = \frac{F_2 \cdot L}{F_1 + F_2} = \underline{\underline{5\text{ m}}}$$

$$t_2 = L - t_1 = \underline{\underline{2\text{ m}}}$$

Az eredőerő: $F_e = F_1 + F_2 = \underline{\underline{14\text{ kN}}}$

Egyensúlyoz:

2 erő egyensúlya

\rightarrow Az előbb kiszámolt F_e erővel

- azonos hatásvonalú
- ellentétes irányú
- azonos nagyságú erő kell!

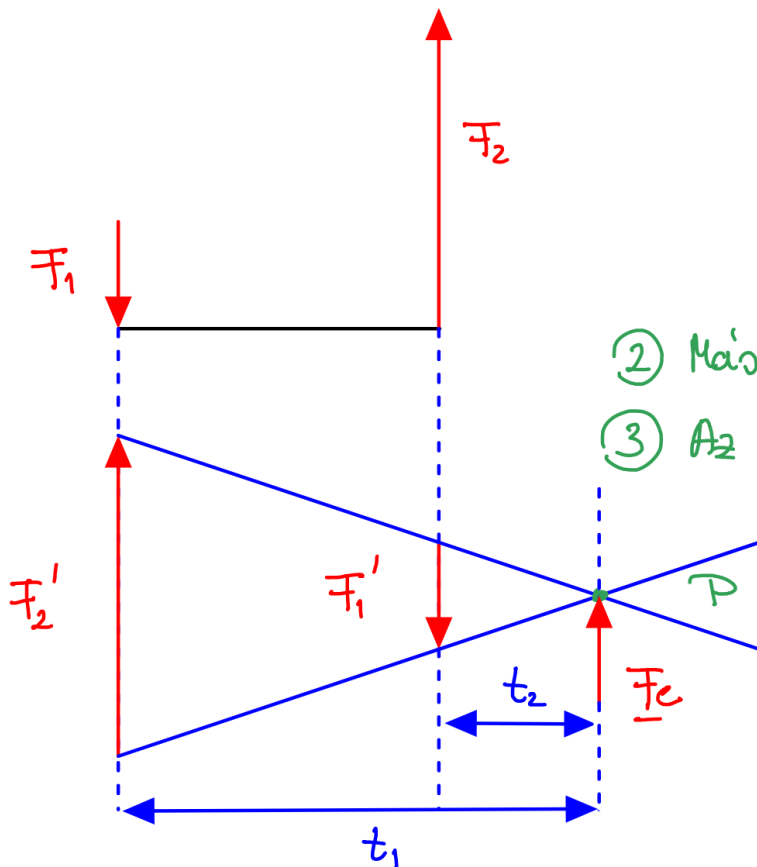
5. feladat Egy merev test terhelése az egymással párhuzamos $F_1 = 5 \text{ kN}$ és $F_2 = 15 \text{ kN}$ nagyságú erők, amelyek távolsága $L = 6 \text{ m}$. Határozzuk meg szerkesztéssel és mérettáblával az eredő erő helyét és nagyságát!

Hekkora nagyságú, irányú és értelmű mórt kell alkalmazni, hogy a test egyensúlyban legyen?



Szerkesztéssel

① Arányos ábra



Leolvassa: $F_e = 10 \text{ kN}$
 $t_1 = 9 \text{ m}$
 $t_2 = 3 \text{ m}$

Hosszlepték

$$1 \text{ cm} \hat{=} 1 \text{ m}$$

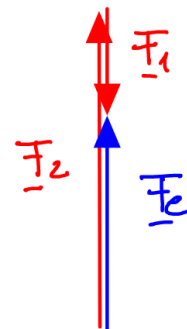
Erőlepték

$$1 \text{ cm} \hat{=} 2,5 \text{ kN}$$

② Másoljuk át az erőket

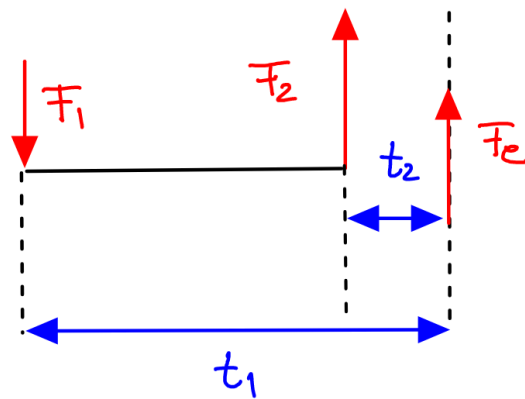
③ Az eredő erő hatásvonalának szerkesztése (P)

④ Eredő erő szerkesztése



SZÁMOLÁSSAL

↳ Két ellentétes irányú erő \rightarrow Az eredő kívül lesz a nagyobb erő mellett



Egyenletek: $t_1 - t_2 = L \rightarrow t_1 = L + t_2$

$$\underline{F_1 \cdot t_1 = F_2 \cdot t_2}$$

$$F_1 (L + t_2) = F_2 \cdot t_2$$

$$F_1 \cdot L = (F_2 - F_1) t_2$$

$$t_2 = \frac{F_1 \cdot L}{F_2 - F_1} = 3\text{m}$$

$$t_1 = L + t_2 = 6\text{m}$$

Az eredőerő $F_e = F_2 - F_1 = \underline{\underline{10\text{ kN}}}$

Egyensúlyoz:

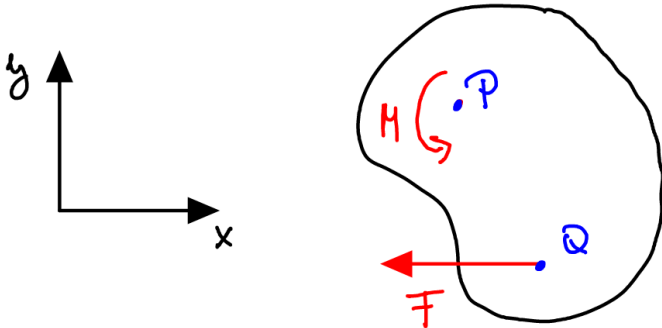
2 erő egyensúlya

↳ Az előbb kiszámolt F_e erővel

- azonos hatásvonalú
- ellentétes irányú
- azonos nagyságú erő kell!

6. feladat

Az ábrán vázolt síkbeli merev testet a P pontban működő $M = 3 \text{ kNm}$ nagyságú koncentrált erőpár és a Q pontban ható $F = 10 \text{ kN}$ nagyságú vízszintes erő terheli. Határozzuk meg az erőrendszer egyenlőre való eszt!



Adatok:

$$M = 3 \text{ kNm}$$

$$F = 10 \text{ kN}$$

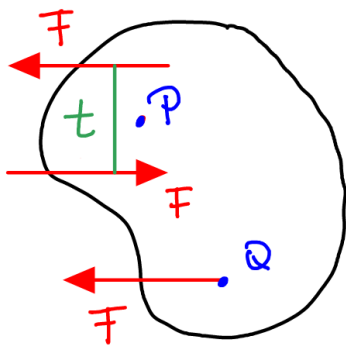
Megoldás: Síkbeli erők és erőpárak eredője \rightarrow 1 db erő

Ez párhuzamos az eredőerővel

\rightarrow most F -fel!

Írjuk fel M -et két F nagyságú erőpár segítségével

\rightarrow Mekkora kell t -nek lennie?

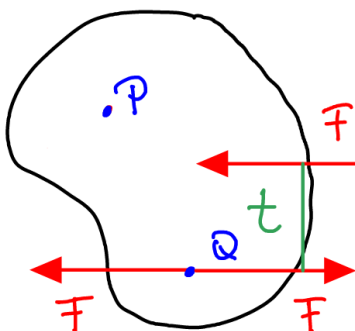


$$M = F \cdot t$$

$$\rightarrow t = \frac{M}{F} = \underline{\underline{0,3 \text{ m}}}$$

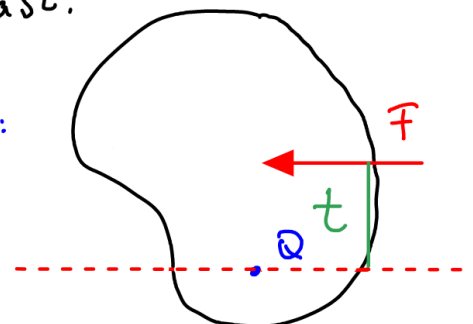
• Az erőpár szabadon áthelyezhető:

\rightarrow Innen a Q pontban lévő két erő kiejti egymást!



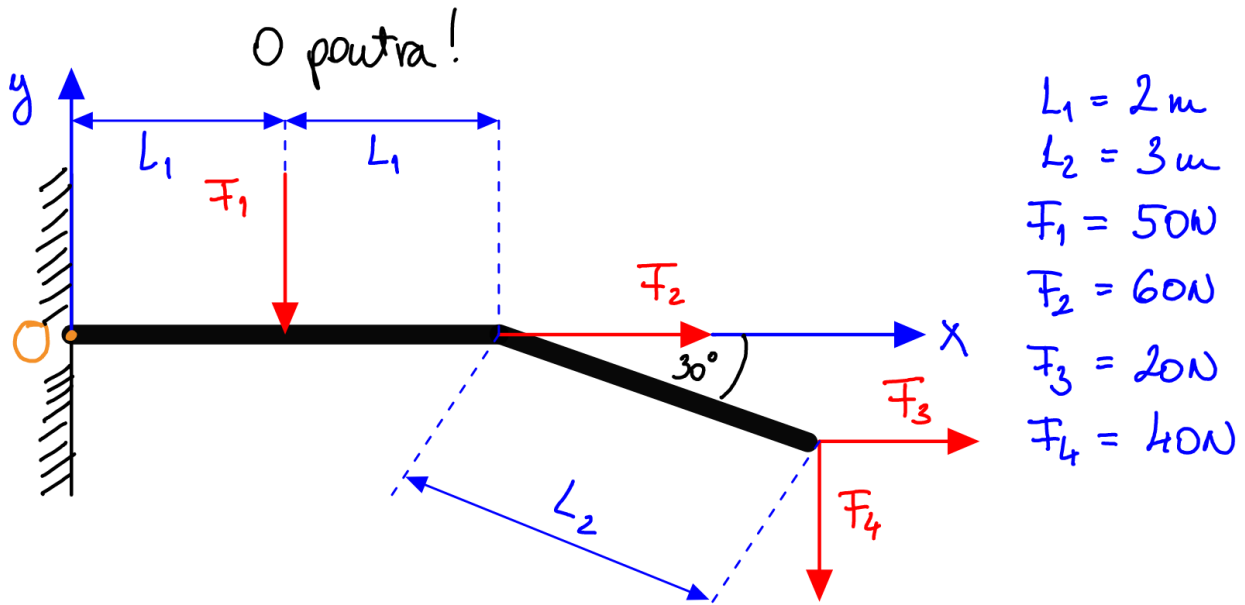
Tehát az eredő:

$$\underline{\underline{t = 0,3 \text{ m}}}$$

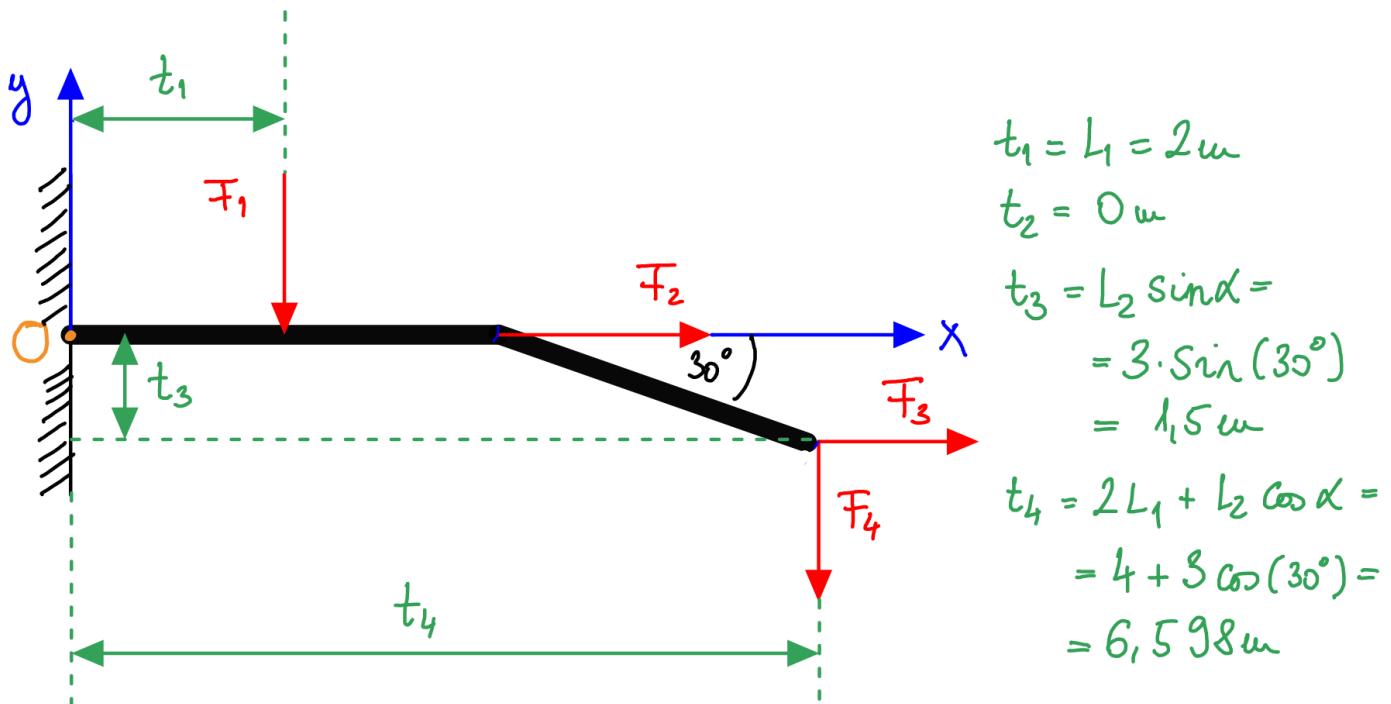


7. feladat

Határozza meg az ábrán látható rúdra ható, 4 erőből álló erőrendszer eredő nyomatékát az O pontra!



Vegyük fel az egyes erők munkaraját az O-ponthoz képest!



$$\begin{aligned} \sum M_O &= -F_1 \cdot t_1 + F_2 \cdot t_2 + F_3 \cdot t_3 - F_4 \cdot t_4 = \\ &= -50 \cdot 2 + 60 \cdot 0 + 20 \cdot 1,5 - 40 \cdot 6,598 = -333,92 \text{ Nm} \end{aligned}$$