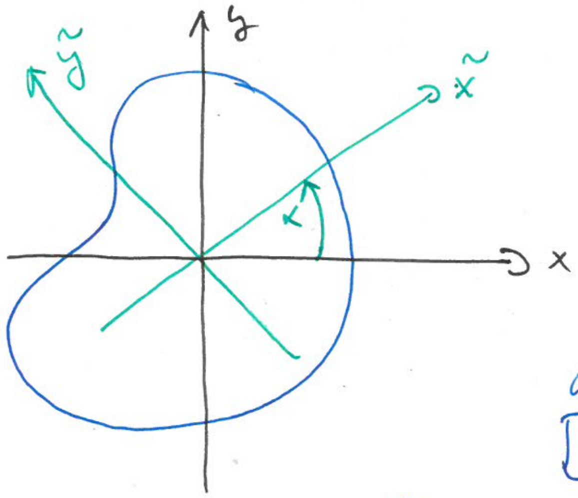
Keresztmetszetek másodrendű nyomatékai és főmásodrendű nyomatékok

Rövid elméleti összefoglaló:



Ha forgatjuk x-y koordinátarendszert akkor

I_x, I_y, I_{xy} ismert

egy $\tilde{x}$-$\tilde{y}$ koordinátarendszerbe

akkor

$$\boxed{I_{\tilde{x}\tilde{y}} = 0}$$

Ekkor az $I_{\tilde{x}}$ és $I_{\tilde{y}}$ az ún. főmásodrendű-nyomatékok

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$\boxed{I_1 > I_2}$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

1-es főtengely $\Rightarrow$ I_1 a legnagyobb másodrendű nyomaték

2-es főtengely $\Rightarrow$ I_2 a legkisebb másodrendű nyomaték

Az 1-es főirány x-tengelyhez viszonyított szöge

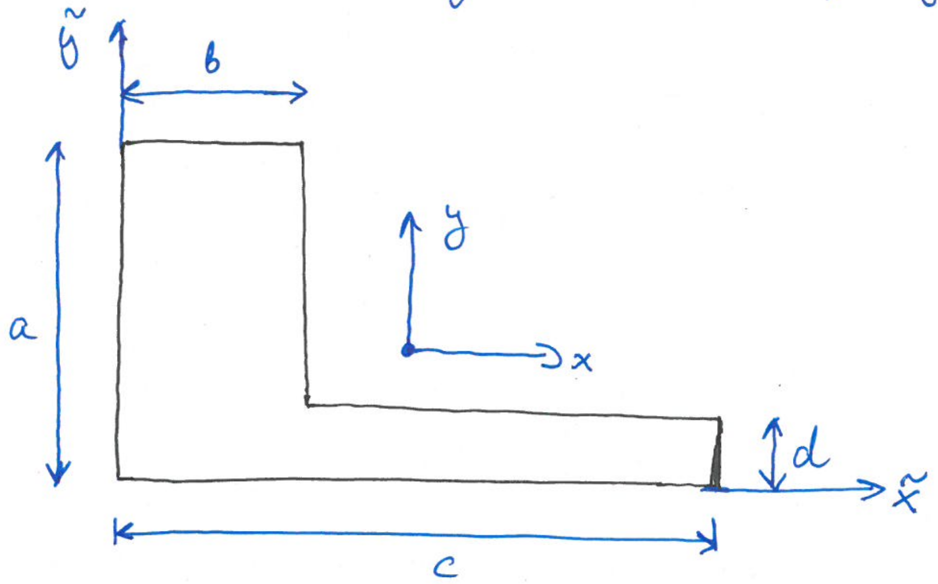
$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{I_x - I_1}{I_{xy}}\right)$$

$\alpha_1 \in [-90°, 90°]$

A 2es főirány pedig

$$\boxed{\alpha_2 = \alpha_1 + 90°}$$

1. feladat Határozzuk meg az alábbi síkidom súlyponti x és y tengelyeire a másodrendű nyomatékokat, valamint határozzuk meg a főmásodrendű nyomatékokat és a főtengelyek irányát!



Adatok:

$a = 40$ mm

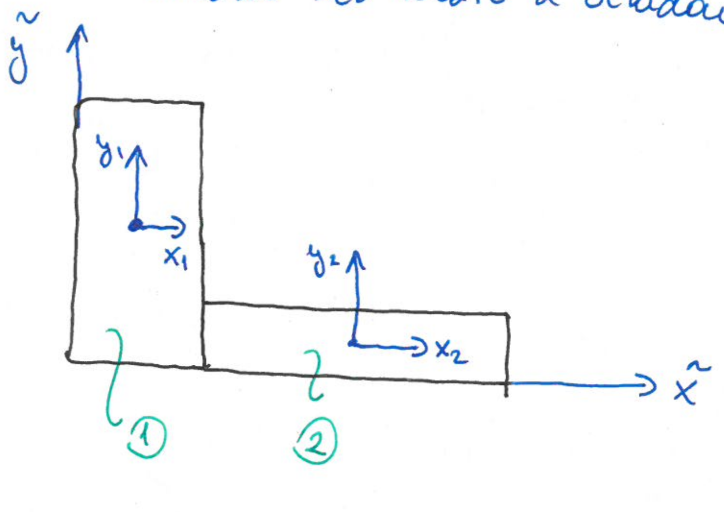
$b = 20$ mm

$c = 80$ mm

$d = 10$ mm

- Határozzuk meg a rendszer súlypontját

Osszuk két részre a síkidomot



1-es test

$A_1 = a \cdot b = 800 \text{ mm}^2$

$$\underline{S}_1 = \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b/2 \\ a/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \text{mm}$$

2es-test

$A_2 = (c-b) \cdot d = 600 \text{ mm}^2$

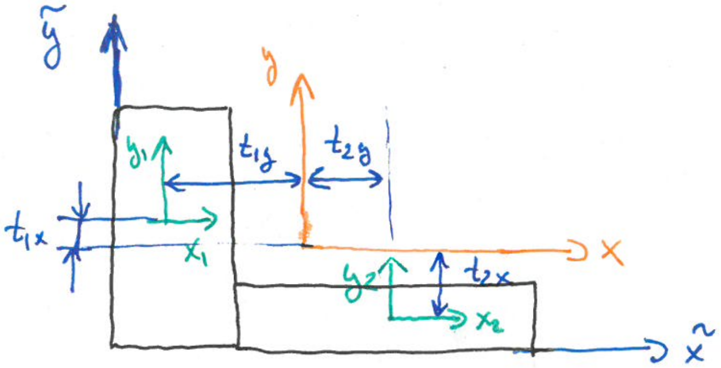
$$\underline{S}_2 = \begin{bmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c-b)/2 + b \\ d/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 5 \end{bmatrix} \text{mm}$$

A súlypont koordinátái ($\tilde{x}, \tilde{y}$ KR-ben)

$$x_S = \frac{x_{S1} A_1 + x_{S2} A_2}{A_1 + A_2} = 27{,}14 \text{ mm}$$

$$y_S = \frac{y_{S1} A_1 + y_{S2} A_2}{A_1 + A_2} = 13{,}57 \text{ mm}$$

• Másodrendű nyomatékok számítása



1es test

$A_1 = 800\ mm^2$

$I^{(1)}_{x_1} = \dfrac{b \cdot a^3}{12} = 106\,666{,}67\ mm^2$

$I^{(1)}_{y_1} = \dfrac{a \cdot b^3}{12} = 26\,666{,}67\ mm^2$

$I^{(1)}_{x_1 y_1} = 0$ (szimmetria tengely)

$t_{1x} = y_S - y_{S_1} = -6{,}43\ mm$

$t_{1y} = x_S - x_{S_1} = 17{,}14\ mm$

2es test

$A_2 = 600\ mm^2$

$I^{(2)}_{x_2} = \dfrac{(c-b)\, d^3}{12} = 5000\ mm^4$

$I^{(2)}_{y_2} = \dfrac{(c-b)^3 d}{12} = 180000\ mm^4$

$I^{(2)}_{x_2 y_2} = 0$ (szimmetria)

$t_{2x} = y_S - y_2 = 8{,}57\ mm$

$t_{2y} = x_S - x_{S_2} = -22{,}86\ mm$

Steiner-tétellel

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = I_{x_1}^{(1)} + t_{1x}^2 A_1 + I_{x_2}^{(2)} + t_{2x}^2 A_2 = \underline{\underline{188\,809{,}52\ mm^4}}$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = I_{y_1}^{(1)} + t_{1y}^2 A_1 + I_{y_2}^{(2)} + t_{2y}^2 A_2 = \underline{\underline{755\,238{,}1\ mm^4}}$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} = \underbrace{I_{x_1 y_1}^{(1)}}_{=0} + t_{1x} t_{1y} A_1 + \underbrace{I_{x_2 y_2}^{(2)}}_{=0} + t_{2y} t_{2x} A_2 = \underline{\underline{-205\,714{,}29\ mm^4}}$$

Poláris: $I_p = I_x + I_y = \underline{944\,047{,}62\ mm^4}$

- Főmásodrendű nyomatékok

Levezetés után:

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2} = \underline{\underline{822\,065 \text{ mm}^4}}$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2} = \underline{\underline{121\,985 \text{ mm}^4}}$$

$\boxed{I_1 > I_2}$!

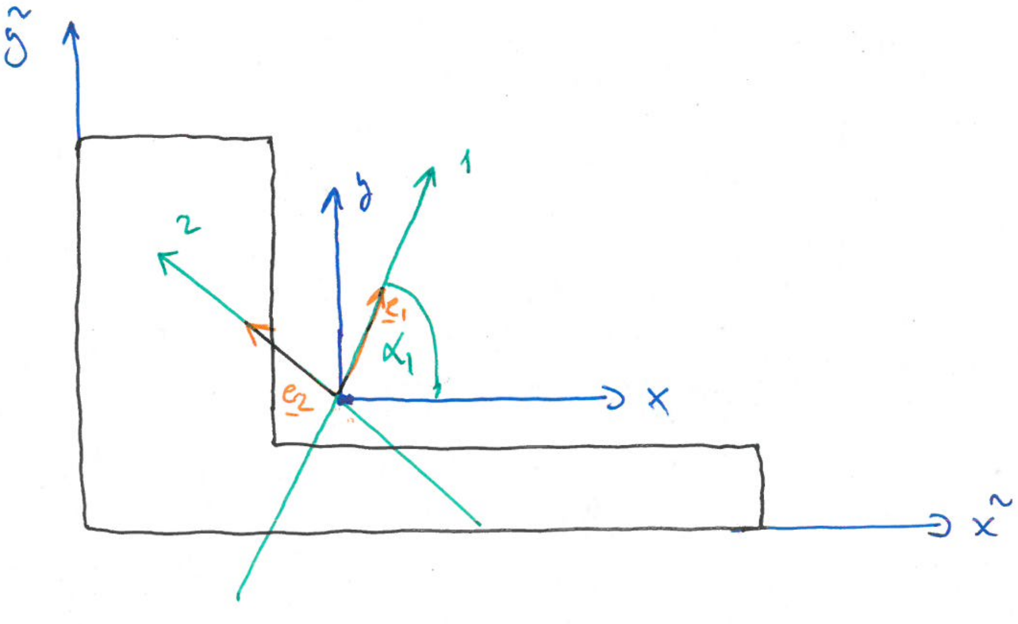
Az 1es főirány és az x-tengely szöge:

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{I_x - I_1}{I_{xy}}\right) = 1{,}256 \text{ rad} = \underline{\underline{72^\circ}}$$

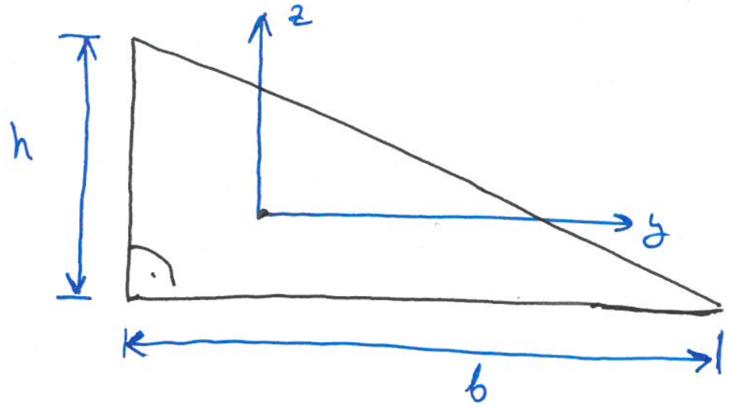
megadhatjuk az egységvektorokat is

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0{,}951 \\ 0{,}309 \end{bmatrix}}}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1 = 162^\circ \implies \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0{,}309 \\ 0{,}951 \end{bmatrix}}}$$



2. feladat Határozzuk meg az alábbi ábrán látható derékszögű háromszög másodrendű nyomatékait és a főmásodrendű nyomatékokat paraméteresen!



Előző óra alapján láttuk, hogy derékszögű háromszögre

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{36}$$

$$I_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

Főmásodrendű nyomatékok:

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} = \frac{\frac{bh^3}{36} + \frac{hb^3}{36}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{bh^3}{36} - \frac{b^3h}{36}\right) + 4\left(\frac{b^2h^2}{72}\right)^2}$$

$$= \frac{bh^3 + hb^3}{72} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{bh^3 - b^3h}{36}\right)^2 + 4\left(\frac{b^4h^4}{72^2}\right)} = \frac{bh^3 + hb^3}{72} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(bh^3 - b^3h)^2}{36^2} + \frac{b^4h^4}{36^2}}$$

$$= \frac{bh(h^2+b^2)}{72} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2h^2(h^2-b^2)^2}{36^2} + \frac{b^4h^4}{36^2}} = \frac{bh(h^2+b^2)}{72} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bh}{36}\sqrt{(h^2-b^2)^2 + h^2b^2}$$

$$= \frac{bh}{72}\left[h^2+b^2+\sqrt{h^4 - 2h^2b^2 + b^4 + h^2b^2}\right] = \frac{bh}{72}\left[h^2+b^2+\sqrt{h^4 - h^2b^2 + b^4}\right]$$

Hasonlóképpen

$$I_2 = \frac{bh}{72}\left[h^2+b^2-\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}\right]$$

Az 1-es főtengely és az y-tengely által bezárt szög:

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{I_y - I_1}{I_{xy}}\right)$$

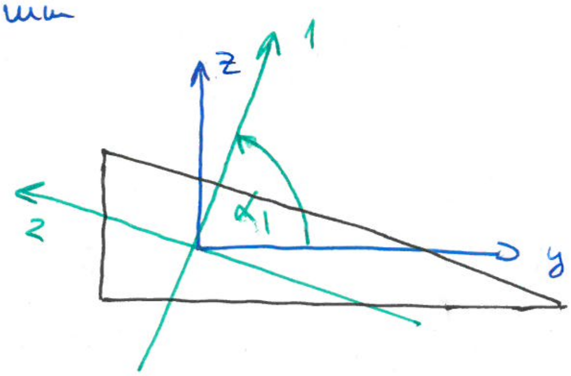
$$\frac{I_y - I_1}{I_{xy}} = \frac{\frac{bh^3}{36} - \left(\frac{bh^3}{72} + \frac{b^3h}{72} + \frac{bh}{72}\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}\right)}{-\frac{h^2b^2}{72}} =$$

$$= \frac{\frac{bh^3}{72} - \frac{hb^3}{72} - \frac{bh}{72}\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}}{-\frac{h^2b^2}{72}} = \frac{-h^2+b^2+\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}}{hb}$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-h^2+b^2+\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}}{hb}\right)$$

Numerikus példa: $b = 75\ mm$

$h = 30\ mm$

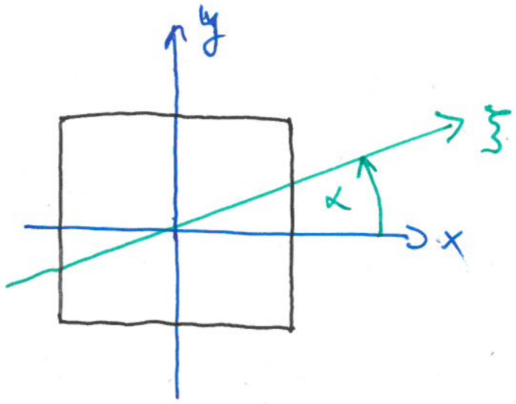


$I_1 = 367\,488{,}95\ mm^4$

$I_2 = 40\,363{,}55\ mm^4$

$\alpha_1 = 1{,}3486\ rad = 77{,}27°$

3. feladat Határozzuk meg az a élhosszúságú négyzet súlypontján átmenő ξ tengelyre a síkidom másodrendű nyomatékát!



Az x-y koordinátarendszerben

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \frac{a^4}{12} \\ I_y &= \frac{a^4}{12} \end{aligned}\right\} \quad I_x = I_y$$

$I_{xy} = 0 \rightarrow$ szimmetria miatt!

A ξ-tengelyre:

$$I_\xi = I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - 2 \underbrace{I_{xy}}_{=0} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$= I_x \cos^2\alpha + \underbrace{I_y}_{I_x = I_y} \sin^2\alpha = I_x (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = I_x = \frac{a^4}{12}$$

Tehát $\boxed{I_\xi = \frac{a^4}{12} = I_x}$ → α szögtől függetlenül I_ξ értéke nem változik

⇒ minden tengely főtengely!