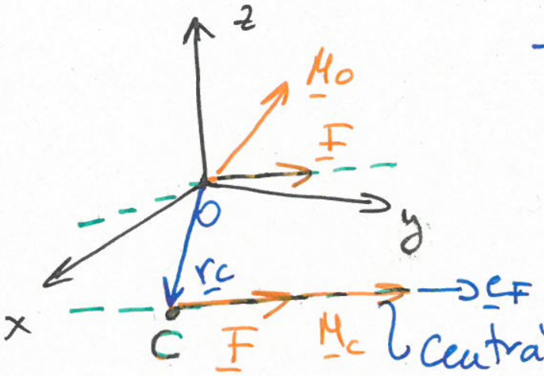
2. feladat

Centrális egyenes levezetésének bizonyítása

Az O-ban ismert: $[\underline{F}; \underline{M}_O]_O$

Tudjuk, hogy $\underline{M}_C \parallel \underline{F}$



$$\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|}$$ az egyenes irányába mutató egységvektor

Redukáljunk C-be

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \underset{\substack{\parallel \\ -\underline{r}_{OC} = \underline{r}_C}}{\underline{r}_{CO}} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_C \times \underline{F}$$

Átrendezve: $\underline{r}_C \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{M}_C \quad / \underline{F}\times$

$$\underline{F} \times (\underline{r}_C \times \underline{F}) = \underline{F} \times (\underline{M}_O - \underline{M}_C)$$

Matekból: ún. „kifejtési tétel"

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

Ezt alkalmazva:

$$\underline{r}_C \cdot (\underline{F} \cdot \underline{F}) - \underline{F} \cdot \underbrace{(\underline{F} \cdot \underline{r}_C)}_{\underline{F} \perp \underline{r}_C} = \underline{F} \times (\underline{M}_O - \underline{M}_C)$$

Ez garantálja, hogy C a legközelebbi pont!

$$\underline{r}_C \cdot \underline{F}^2 = \underline{F} \times \underline{M}_O - \underbrace{\underline{F} \times \underline{M}_C}_{0}$$

a centrális egyenesen $\underline{F} \parallel \underline{M}_C$

$$\boxed{\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{\underline{F}^2}}$$

A centrális egyenesen a koncentrált erőpár

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \underbrace{\underline{r}_{CO}}_{= -\underline{r}_{OC} = -\underline{r}_C} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_C \times \underline{F}$$

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O - \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{\underline{F}^2} \times \underline{F} = \underline{M}_O + \underbrace{\underline{F} \times \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{\underline{F}^2}}_{\text{ismét kifejtési tétel!}}$$

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \frac{1}{\underline{F}^2}\left(\underline{F}(\underline{F} \cdot \underline{M}_O) - \underline{M}_O \underbrace{(\underline{F} \cdot \underline{F})}_{\underline{F}^2}\right)$$

$$\underline{M}_C = \cancel{\underline{M}_O} + \frac{1}{\underline{F}^2}(\underline{F} \cdot \underline{M}_O) \cdot \underline{F} - \cancel{\underline{M}_O} =$$

$$\boxed{\underline{M}_C = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F}}$$