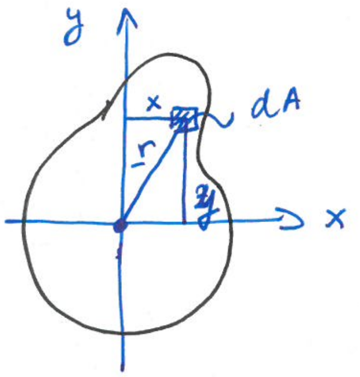
Statika - 12. hét

Keresztmetszet másodrendű nyomatéka

Elméleti összefoglaló

Keresztmetszet másodrendű nyomatéka (Area moment of inertia)



$\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Adott pontra és adott tengelyekre:

$I_x = \int_{(A)} y^2 \, dA$ } tengelyre számított

$I_y = \int_{(A)} x^2 \, dA$

$I_{xy} = \int_{(A)} xy \, dA$ – tengelypárra (tengelykeresztre)

↳ ha az egyik tengely szimm. tengely $\Rightarrow$ $\underline{I_{xy} = 0}$

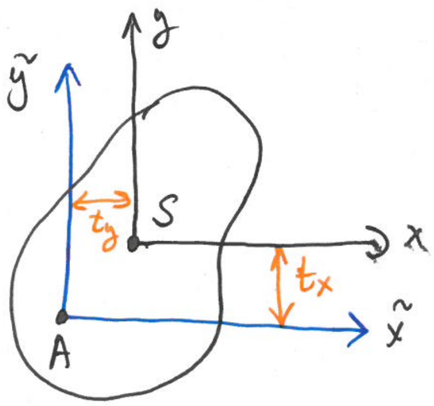
$I_p = \int r^2 dA = I_x + I_y$ – poláris

Fontos: $I_x > 0$ és $I_y > 0$

de I_{xy} lehet negatív is!

dimenzió: $[m^4]$ vagy $[mm^4]$

Steiner-tétel



Adott egy súlyponton átmenő tengelypár (x és y)

valamint ezzel párhuzamos A ponton átmenő tengelypár

$I_{\tilde{x}} = I_x + t_x^2 \cdot A$

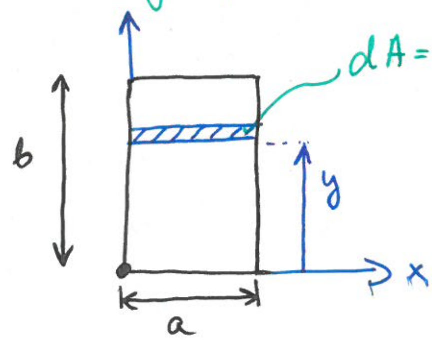
$I_{\tilde{y}} = I_y + t_y^2 \cdot A$

$I_{\tilde{x}\tilde{y}} = I_{xy} + \underbrace{t_x \cdot t_y}_{\text{előjeles mennyiség!}} \cdot A$

Fontos! Mindig a súlyponti a kisebb!

Alap síkidomok másodrendű nyomatéka

Téglalap – sarkára

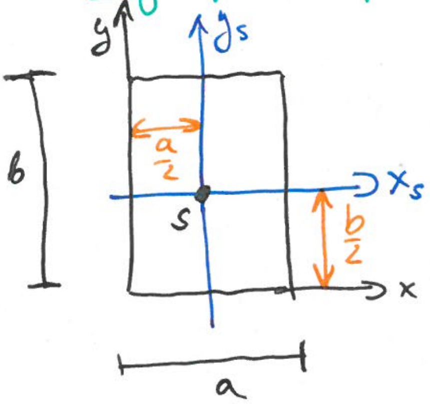


$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_0^b y^2 a\, dy = \left[a \frac{y^3}{3}\right]_0^b = \underline{\underline{\frac{ab^3}{3}}}$$

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{3}$$

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy\, dA = \int_0^a x\, dx \cdot \int_0^b y\, dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{a^2 b^2}{4}$$

Téglalap – súlypontra



(x_s, y_s) a súlyponti KR)

$$I_{x_s} = I_x - \left(\frac{-b}{2}\right)^2 \cdot A = I_x - \frac{b^2}{4} \cdot ab = \frac{ab^3}{3} - \frac{ab^3}{4} = \underline{\underline{\frac{ab^3}{12}}}$$

$$I_{y_s} = I_y - \left(\frac{-a}{2}\right)^2 \cdot A = I_y - \frac{a^2}{4} \cdot ab = \frac{ba^3}{3} - \frac{ba^3}{4} = \underline{\underline{\frac{ba^3}{12}}}$$

$$I_{x_s y_s} = I_{xy} - \left(\frac{-a}{2}\right)\left(\frac{-b}{2}\right) ab = \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b^2}{4} = \underline{\underline{0}}$$

↳ mivel x_s és y_s is szimmetria tengely!

A párhuzamos tengelyek eltolása:

$t_x = -\frac{b}{2}$ (negatív előjel)

$t_y = -\frac{a}{2}$ (negatív előjel)

Négyzet – ugyanaz mint a téglalap csak $\boxed{a=b}$

- $I_x = \frac{a^4}{3}$

  $I_y = \frac{a^4}{3}$

  $I_{xy} = \frac{a^4}{4}$

  a bal alsó sarokra

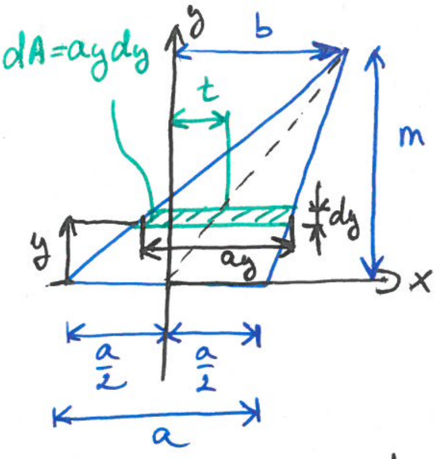
- $I_{x_s} = \frac{a^4}{12}$

  $I_{y_s} = \frac{a^4}{12}$

  $I_{x_s y_s} = 0$

  súlypontra!

Háromszög



ay változik a háromszög magassága irányában

$$\boxed{a_y = a - \frac{a}{m} y}$$

Ellenőrizzük: $a_y(0) = a - \frac{a}{m}\cdot 0 = \underline{\underline{a}}$
$a_y(m) = a - \frac{a}{m}\cdot m = \underline{\underline{0}}$ ✓

Most induljunk el definíció szerint

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_0^m y^2 a_y \, dy = \int_0^m y^2 \left(a - \frac{a}{m} y\right) dy =$$

$$= \int_0^m y^2 a - \frac{a}{m} y^3 \, dy = \left[a \frac{y^3}{3}\right]_0^m - \left[\frac{a}{m}\frac{y^4}{4}\right]_0^m =$$

$$= \frac{am^3}{3} - \frac{am^4}{4m} = \frac{am^3}{3} - \frac{am^3}{4} = \underline{\underline{\frac{am^3}{12}}}$$

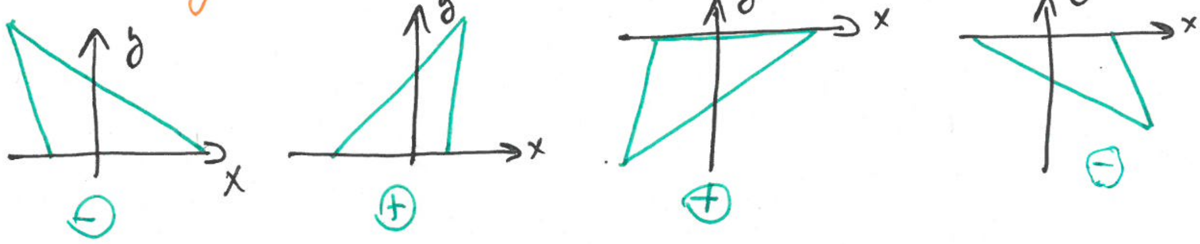
Tengelypárra $t = \frac{b}{m} y$

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy \, dA = \int_0^m t \cdot y \, a_y \, dy = \int_0^m \frac{b}{m} y^2 \left(a - \frac{a}{m} y\right) dy$$

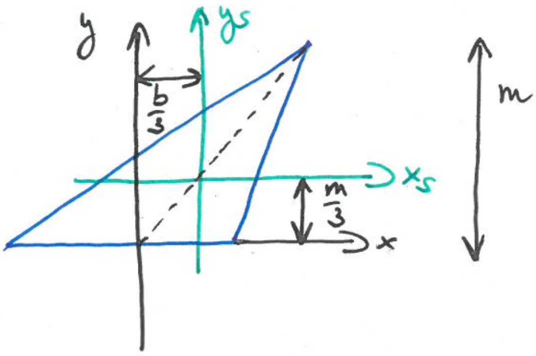
$$= \frac{ab}{m} \int_0^m y^2 - \frac{y^3}{m} \, dy = \frac{ab}{m}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4m}\right]_0^m = \frac{ab}{m}\left(\frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4m}\right)$$

$$= \frac{ab}{m}\left(\frac{m^3}{3} - \frac{m^3}{4}\right) = \frac{ab}{m}\cdot\frac{m^3}{12} = \underline{\underline{\frac{abm^2}{12}}}$$

Fontos! I_{xy} előjele függ attól, hogy a csúcs hol helyezkedik el!



Háromszög súlypontra



- $I_{x_s} = I_x - \left(\frac{m}{3}\right)^2 \cdot A_\Delta = \frac{am^3}{12} - \frac{m^2}{9} \cdot \frac{am}{2}$

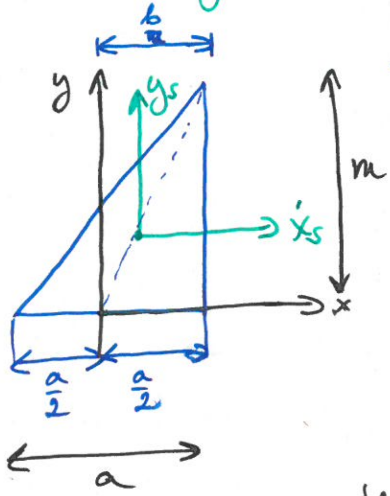
$$I_{x_s} = \frac{am^3}{12} - \frac{am^3}{18} = \underline{\underline{\frac{am^3}{36}}}$$

- $I_{x_s y_s} = I_{xy} - \left(-\frac{b}{3}\right)\left(-\frac{m}{3}\right)\frac{a \cdot m}{2} = \frac{abm^2}{12} - \frac{abm^2}{18}$

$$I_{x_s y_s} = \underline{\underline{\frac{abm^2}{36}}}$$

Derékszögű háromszögre

$\boxed{b = \frac{a}{2}}$ áll fenn!



- $I_x = \frac{am^3}{12}$

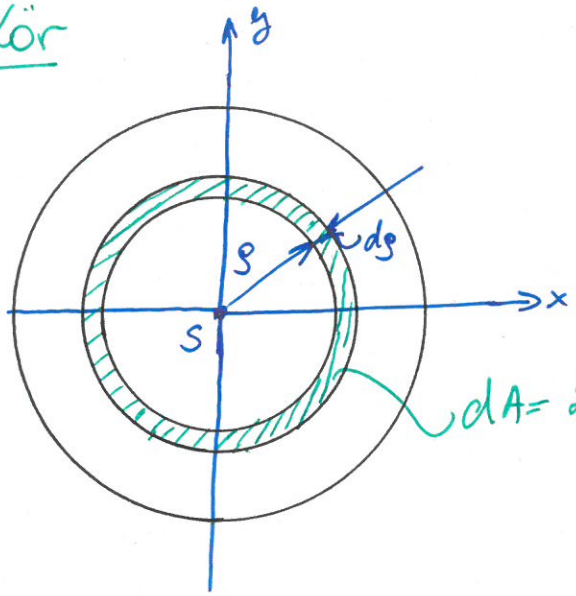
$$I_y = \frac{ma^3}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{a\left(\frac{a}{2}\right)m^2}{12} = \frac{a^2m^2}{24}$$

Súlyponti xs-ys tengelyre

- $I_{x_s} = \frac{am^3}{36}$
- $I_{y_s} = \frac{ma^3}{36}$
- $I_{x_s y_s} = \frac{a\left(\frac{a}{2}\right)m^2}{36} = \underline{\underline{\frac{a^2m^2}{72}}}$

Kör



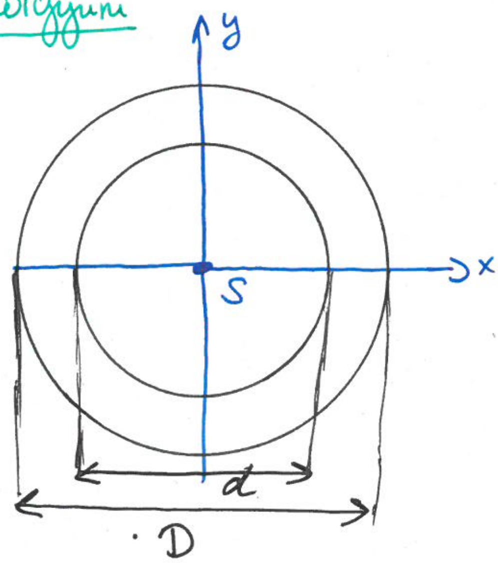
Most amit könyen ki tudunk számolni
⇓ poláris inercia
(poláris másodrendű nyomaték)

$$I_p = \int_{(A)} r^2 dA = \int_0^r \varrho^2 2\pi \varrho \, d\varrho = $$
$$= 2\pi \int_0^r \varrho^3 d\varrho = 2\pi \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^r = \underline{\underline{\frac{d^4 \pi}{32}}}$$

A kör szimmetrikus: $I_x = I_y$ → $\boxed{I_{xy} = 0}$

Mivel: $I_p = I_x + I_y = 2 I_x$
⇓
$$\boxed{I_x = \frac{d^4 \pi}{64}}$$

Körgyűrű



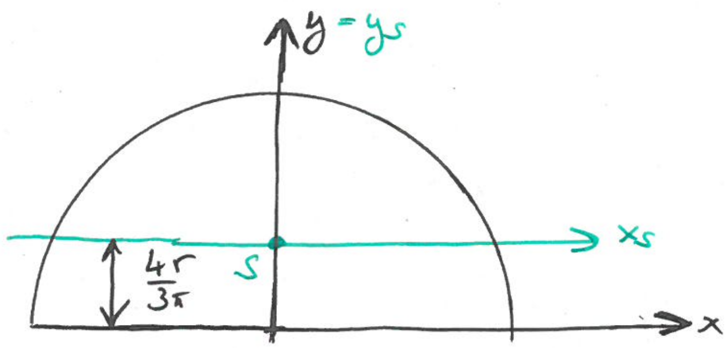
Ki lehet vonni egymásból

$$I_x = I_y = \frac{D^4 \pi}{64} - \frac{d^2 \pi}{64} = \underline{\underline{\frac{(D^4 - d^4)\pi}{64}}}$$

$I_{xy} = 0$ ⇒ mert szimmetriatengelyek!

$$I_p = 2 \cdot I_x = \underline{\underline{\frac{(D^4 - d^4)\pi}{32}}}$$

Félkörlemez



- Az (x-y) tengelyre a teljes körből

$$I_x = \frac{1}{2}\frac{d^4\pi}{64} = \frac{d^4\pi}{128} = \frac{r^4\pi}{8}$$

$$I_y = \frac{r^4\pi}{8}$$

$$I_{xy} = 0$$ (mert y szimmetria tengely)

A súlypontra (Steiner-tétel)

$$I_{ys} = I_y = \frac{d^4\pi}{128} = \frac{r^4\pi}{8}$$

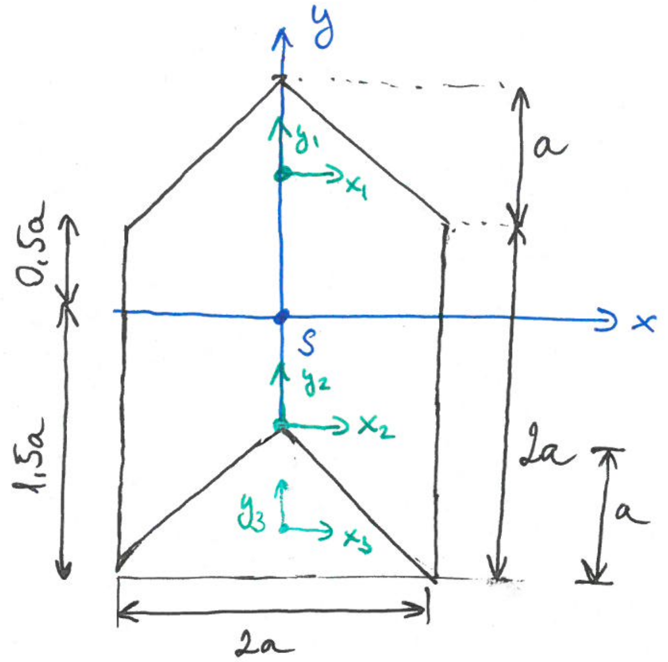
$$I_{xs} = I_x - \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 A = \frac{r^4\pi}{8} - \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{r^2\pi}{2} = \frac{r^4\pi}{8} - \frac{16r^2}{9\pi^2}\cdot\frac{r^2\pi}{2}$$

$$I_{xs} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 = \left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi}\right) d^4$$

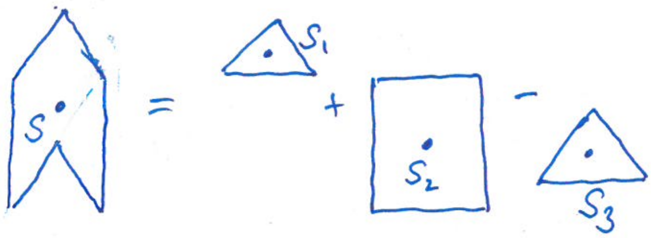
$I_{xsys} = 0$ mert ys szimmetriatengely!

1. feladat Határozzuk meg az alábbi összetett keresztmetszet másodrendű nyomatékait a súlypontra illesztett x-y koordináta-rendszerben!

I_x és I_{xy}

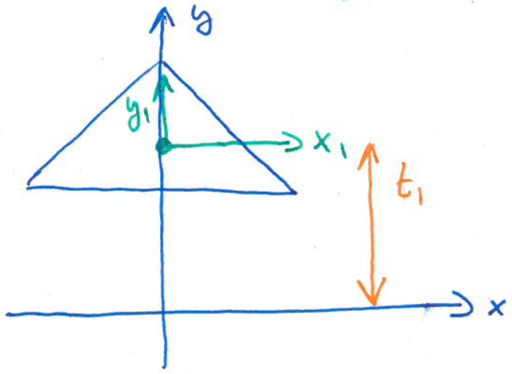


Osszuk fel a feladatot



Vizsgáljuk az egyes alakzatok másodrendű nyomatékait saját súlypontjaikban!

Felső háromszög



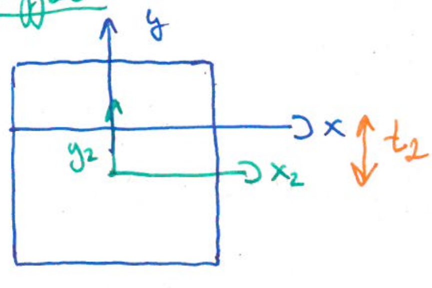
$$A_1 = \frac{2a \cdot a}{2} = a^2$$

$$t_1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{-5a}{6}$$ (előjelesen x_1-hez)

$$I_{x_1} = \frac{2a \cdot a^3}{36} = \frac{a^4}{18}$$

$I_{x_1y_1} = 0$ (mert y-szimmetriatengely)

Négyzet



$$A_2 = (2a)^2 = 4a^2$$

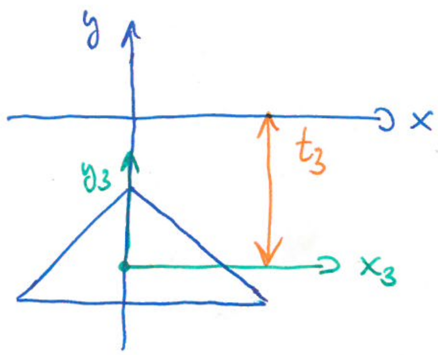
$t_2 = \frac{a}{2}$ (előjelesen x_2-höz képest)

$$I_{x_2} = \frac{(2a)(2a)^3}{12} = \frac{4a^4}{3}$$

Szimm.

$$\boxed{I_{x_2y_2} = 0}$$

Alsó háromszög



$$A_3 = \frac{2a \cdot a}{2} = a^2$$

$$t_3 = \frac{3}{2}a - \frac{a}{3} = \frac{7}{6}a \quad (x_3 \text{ hoz képest!})$$

$$I_{x_3} = \frac{(2a)\,a^3}{36} = \frac{a^4}{18}$$

$$I_{x_3y_3} = 0 \quad (\text{szimmetria miatt})$$

Most Steiner-tétellel számítsuk ki a részegységek másodrendű nyomatékát a közös súlyponti tengelyre!

$$I_x^{(1)} = I_{x_1} + t_1^2 A_1 = \frac{a^4}{18} + \left(\frac{-5a}{6}\right)^2 \cdot a^2 = \frac{a^4}{18} + \frac{25}{36}a^2 = \underline{\underline{\frac{3}{4}a^4}}$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2} + t_2^2 A_2 = \frac{4a^4}{3} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 4a^2 = \frac{4a^4}{3} + \frac{4a^4}{4} = \underline{\underline{\frac{7}{3}a^4}}$$

$$I_x^{(3)} = I_{x_3} + t_3^2 A_2 = \frac{a^4}{18} + \left(\frac{7}{6}a\right)^2 a^2 = \frac{a^4}{18} + \frac{49a^4}{36} = \frac{17}{12}a^4$$

Tehát a teljes km.-re

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = \frac{3}{4}a^4 + \frac{7}{3}a^4 - \frac{17}{12}a^4 = \underline{\underline{\frac{5a^4}{3}}}$$

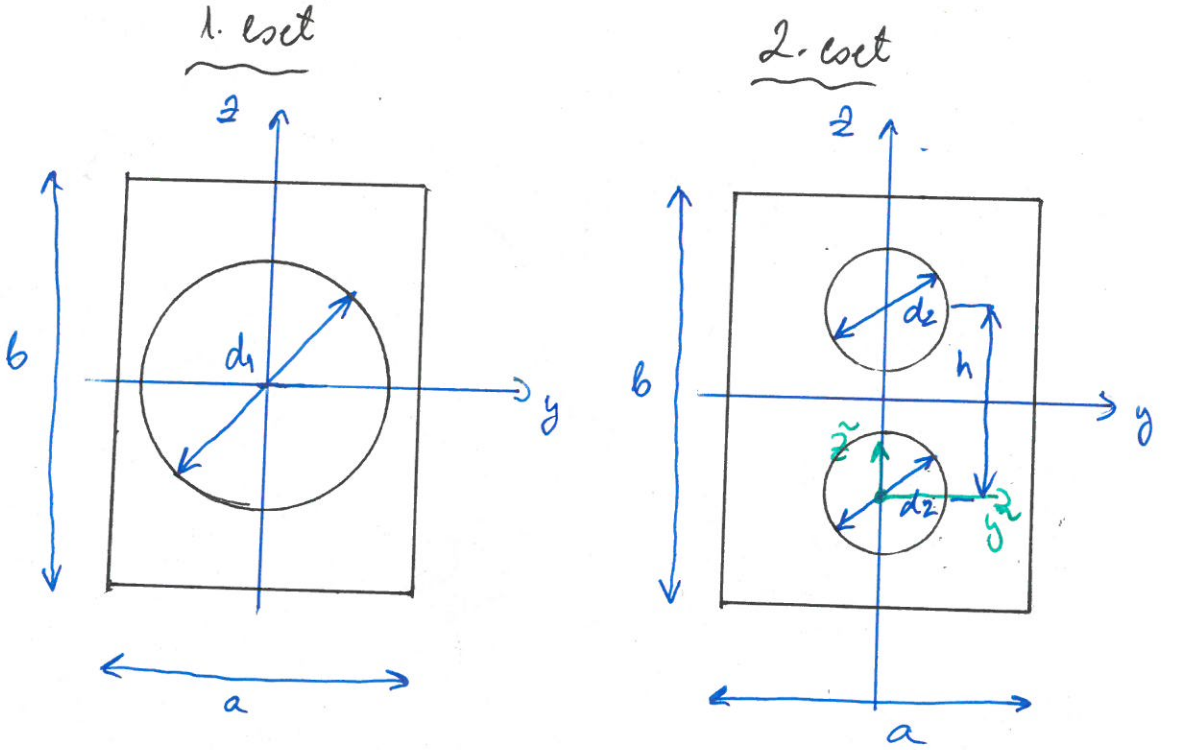
Tengelypárra

$$I_{x_1y_1} = 0 \;;\; I_{x_2y_2} = 0 \;;\; I_{x_3y_3} = 0$$

$\Downarrow$ szimmetria miatt

$$\boxed{I_{xy} = 0}$$

2. feladat Hogyan változik egy 240×300-as téglalap területe és y-tengelyre számított másodrendű nyomatéka, ha egy 200 mm-es furat helyett 2db 100 mm-es furatot vágunk?



Adatok

$a = 240$ mm
$b = 300$ mm
$d_1 = 200$ mm
$d_2 = 100$ mm
$h = 150$ mm

Területek

$$A_1 = a \cdot b - \frac{d_1^2 \pi}{4} = 40584{,}1\ \text{mm}^2$$

$$A_2 = ab - \frac{2 d_2^2 \pi}{4} = 56292\ \text{mm}^2$$

$$\Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = 1{,}387$$

38,7 %-kal nőtt

Másodrendű nyomatékok

- $$I_{y_1} = I_{y\square} - I_{y\circ} = \frac{ab^3}{12} - \frac{d_1^4 \pi}{64} = 4{,}6146 \cdot 10^8\ \text{mm}^4$$

- $$I_{z_1} = I_{z\square} - I_{z\circ} = \frac{a^3 b}{12} - \frac{d_1^4 \pi}{64} = 2{,}67 \cdot 10^8\ \text{mm}^4$$

• $I_{y2} = I_{y\square} - 2I_{y\circ} = I_{y\square} - 2\left(I_y + t^2 \frac{d_2^2 \pi}{4}\right)$

$I_y'' = \frac{d_2^4 \pi}{64}$ míg $t = \frac{h}{2}$

Visszaírva:

• $I_{y2} = \frac{ab^3}{12} - 2\left(\frac{d_2^4 \pi}{64} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{d_2^2 \pi}{4}\right) = 4{,}4182\ 10^8\ mm^4$

Hasonlóan z-tengelyre is, de $\boxed{t_z = 0}$ Nem kell Steiner-tétel!

• $I_{z2} = \frac{a^3 b}{12} - 2\frac{d_2^4 \pi}{64} = 3{,}35 \cdot 10^8\ mm^4$

$\frac{I_{y2}}{I_{y1}} = 0{,}9575 \Longrightarrow 4{,}25\%$-kal csökken

$\frac{I_{z2}}{I_{z1}} = 1{,}257 \Rightarrow 25{,}7\%$ kal nőtt

Tengelypárra számított:

Mindkét esetben z-tengely szimmetria tengely

$I_{yz_1} = 0$ és $I_{yz_2} = 0$