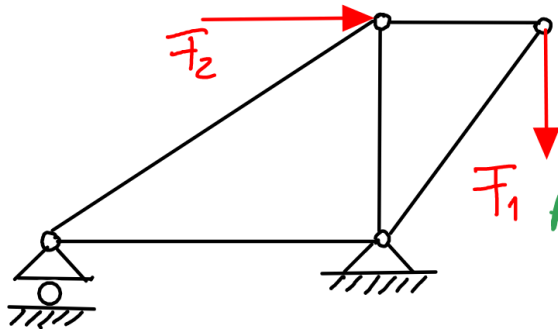


# Statika - 5. gyakorlat

## Rácsos szerkezetek

→ mechanikai modell



↳ végeiken mereven kapcsolódó merev rudak

↳ terhelés csak a csuklóokban

↳ a kapcsolatok olyanok, hogy merev marad a szerkezet!

A rudakban csak nyiróerő!

↳ ún. normáligenybevétel!

Jelölés:  $N$

Előjel konvenció:

húzott rúd (+)

nyomott rúd (-)

## Megoldási módszerek:

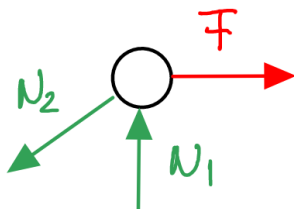
### 1) Csomóponti módszer

↳ egyensúlyi egyenlet a csuklóra

2 db egyenlet

$$\sum F_x = 0$$

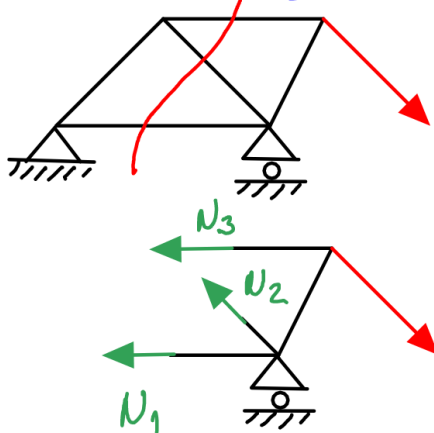
$$\sum F_y = 0$$



Fontos! Csak olyan csuklóra alkalmazzuk, ahol max. 2 db ismeretlen reakció szerepel!

Csuklóról csuklóra kell haladni!

### 2) Átmetsző módszer



↳ két részre vágjuk a szerkezetet

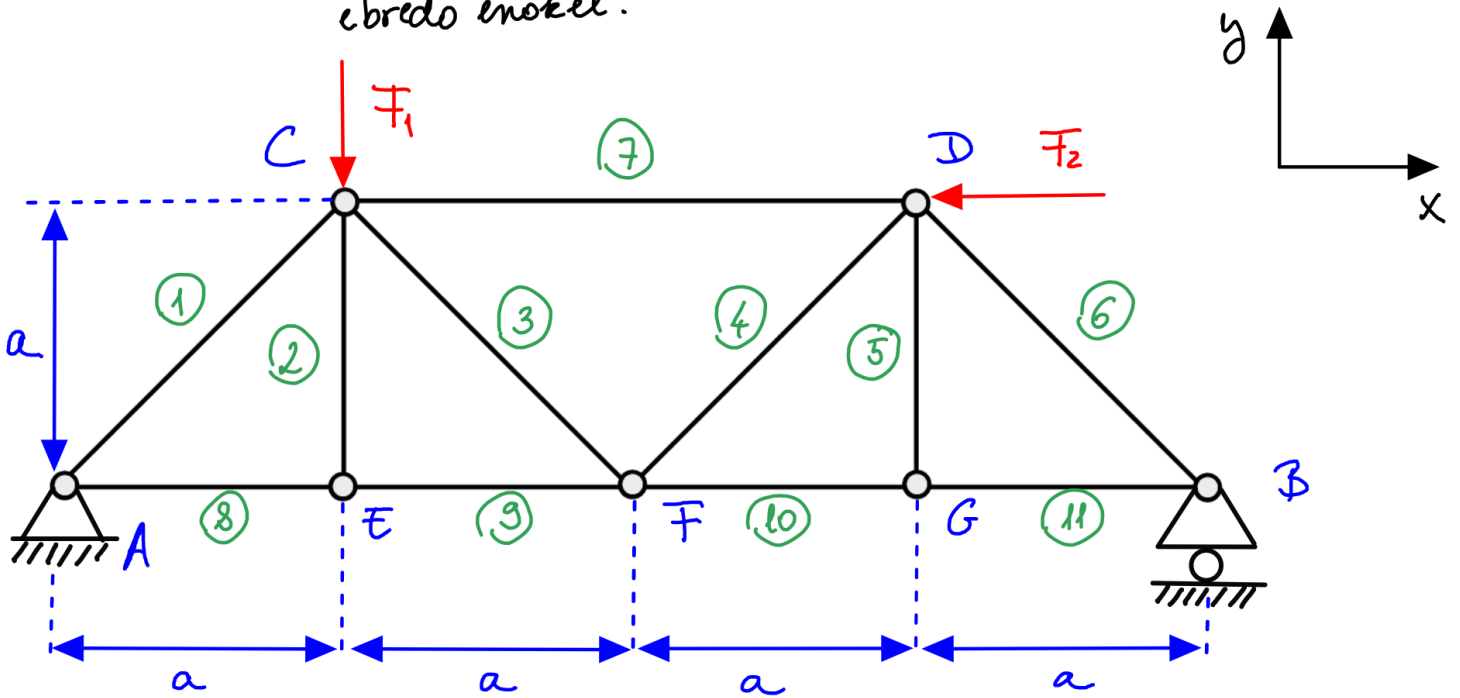
↳ elvágtatott rész helyett reakció!

↳ legfeljebb 3 rúd átmegy NYEM egy pontban metsződnék!

↳ 3 db egyensúlyi egyenlet!

# 1. feladat

Határozzuk meg csomóponti módszerrel a rudakban ébredő erőket!



Adatok:  $a = 1\text{ m}$

$F_1 = 400\text{ N}$

$F_2 = 200\text{ N}$

Feltételezzük, hogy minden rudat azonosítsuk!  
(általában számozással)

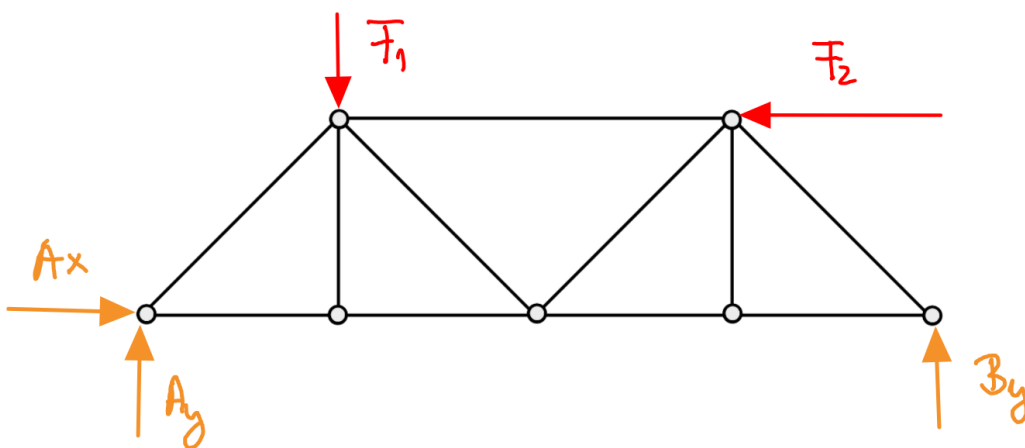
Hasonlóképpen a csomópontokat bejelölve!

## 1) Reakcióerők kiszámítása

Szabadtest ábra

SZTA!

Képzünk  $\rightarrow$  Reakcióerőket!



Mindig kell koordináta-rendszer!

Equilibrium equations:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - F_1 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -F_1 \cdot a + F_2 \cdot a + B_y \cdot 4a = 0 \quad (3)$$

(1)-ből  $\rightarrow A_x = F_2 = \underline{200N}$

(3)-ből  $\rightarrow B_y = \frac{F_1 a - F_2 \cdot a}{4a} = \frac{F_1 - F_2}{4} = \underline{50N}$

(2)-ből  $\rightarrow A_y = F_1 - B_y = \underline{350N}$

Vektorsan:  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \end{bmatrix} N$ ;  $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} N$

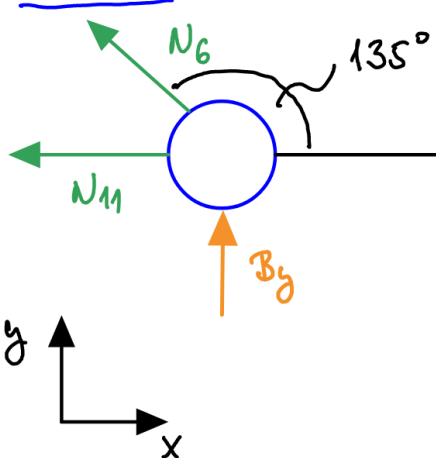
A reakciók nagysága:

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{200^2 + 350^2} = \underline{403,1 N}$$

$$B = |\underline{B}| = \underline{50 N}$$

Rúdnak kiszámítása: Csomóponti módszer (Csomópontból csomópontba haladva)  
mindig olyan csomópont kell, ahol 2 db rúdhoz ismeretlen!

B-csukló' (Az ismeretlen rúdnakét úgy vesszük fel, mintha ismert rúd lenne)



SZTA'

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{6x} - N_{11} = 0$$

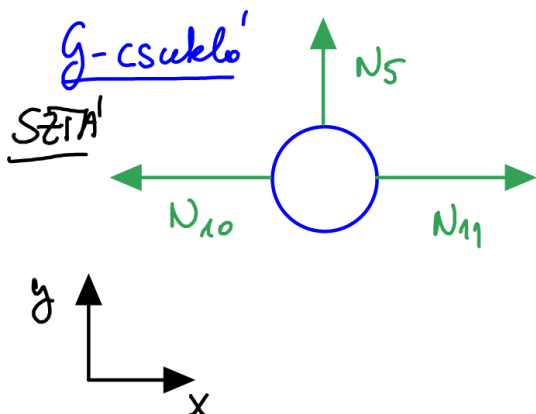
$$N_6 \cos 135^\circ - N_{11} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{6y} + B_y = 0$$

$$N_6 \sin 135^\circ + B_y = 0 \quad (2)$$

$$(2): N_6 = \frac{-B_y}{\sin 135^\circ} = -50\sqrt{2} = \underline{-70,71 N} \quad (\text{nyomott})$$

$$(1) N_{11} = N_6 \cos 135^\circ = -50\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{50 N} \quad (\text{húzott})$$



SZTA'

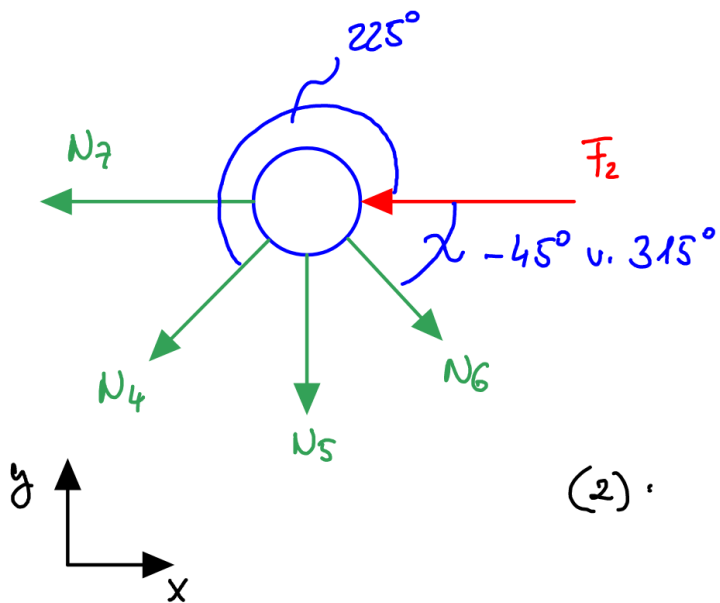
Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_{10} + N_{11} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{N_5 = 0} \quad (\text{vakrúd})$$

$$(1): N_{10} = N_{11} = \underline{50 N} \quad (\text{húzott})$$

D-csukló SZTA



Egyensúly: egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_1 + N_4 \cos 225^\circ + N_6 \cos(-45^\circ) - F_2 = 0$$

$$-N_1 + N_4 \cos 225^\circ + N_6 \cos(-45^\circ) - F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_4 \sin 225^\circ - N_5 - N_6 \sin(-45^\circ) = 0$$

$$N_4 \sin 225^\circ - N_5 + N_6 \sin(-45^\circ) = 0 \quad (2)$$

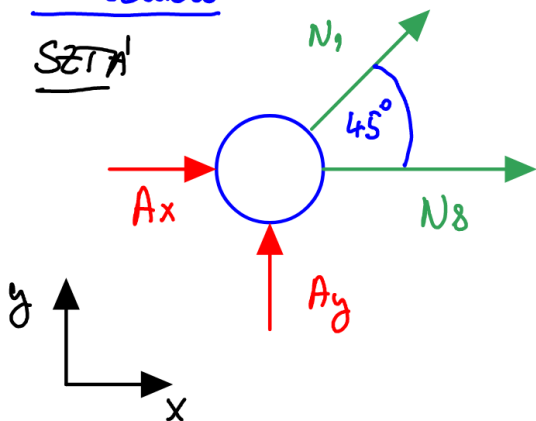
$$(2): N_4 = \frac{N_5 - N_6 \sin(-45^\circ)}{\sin 225^\circ} = \frac{50\sqrt{2}}{\sin 225^\circ} = \underline{\underline{70,71 \text{ N}}} \quad (\text{leírható})$$

$$(1): N_1 = -F_2 + N_6 \cos(-45^\circ) + N_4 \cos 225^\circ = \underline{\underline{-300 \text{ N}}} \quad (\text{nyomható})$$

Induljunk el a másik irányból is!

A-csukló

SZTA



Egyensúly: egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + N_2 + N_1 \cos 45^\circ = 0$$

$$A_x + N_2 + N_1 \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + N_1 \sin 45^\circ = 0$$

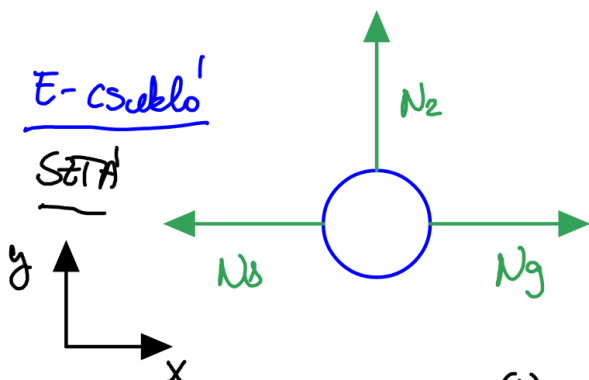
$$A_y + N_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$(2): N_1 = \frac{-A_y}{\sin 45^\circ} = \frac{-350}{\sin 45^\circ} = \underline{\underline{-494,98 \text{ N}}} \quad (\text{nyomható})$$

$$(1): N_2 = -A_x - N_1 \cos 45^\circ = \underline{\underline{150 \text{ N}}} \quad (\text{leírható})$$

E-csukló

SZTA



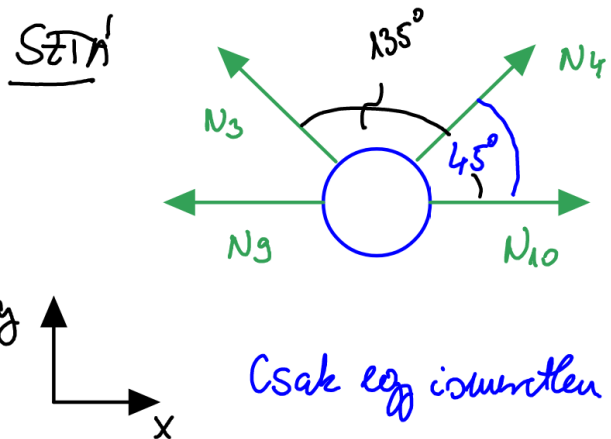
Egyensúly: egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_2 + N_3 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{N_4 = 0} \quad (\text{vakmód})$$

$$(1): N_3 = N_2 = \underline{\underline{150 \text{ N}}} \quad (\text{leírható})$$

F-csukló:



Egyenlőlet:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{10} - N_9 + N_4 x + N_3 x = 0$$

$$N_{10} - N_9 + N_4 \cos 45^\circ + N_3 \cos 135^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_4 y + N_3 y = 0$$

$$N_4 \sin 45^\circ + N_3 \sin 135^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow N_3 = \frac{-N_4 \sin 45^\circ}{\sin 135^\circ} = -50\sqrt{2} = \underline{\underline{70,71 \text{ N}}} \quad (\text{leírás})$$

Minden más ismert  $\rightarrow$  van plusz egyenlet } ellenőrzés!  
 és C pontot nem is vizsgáljuk

Az eredmények:

$$N_1 = -494,98 \text{ N}$$

$$N_2 = 0 \text{ N}$$

$$N_3 = -70,71 \text{ N}$$

$$N_4 = 70,71 \text{ N}$$

$$N_5 = 0 \text{ N}$$

$$N_6 = -70,71 \text{ N}$$

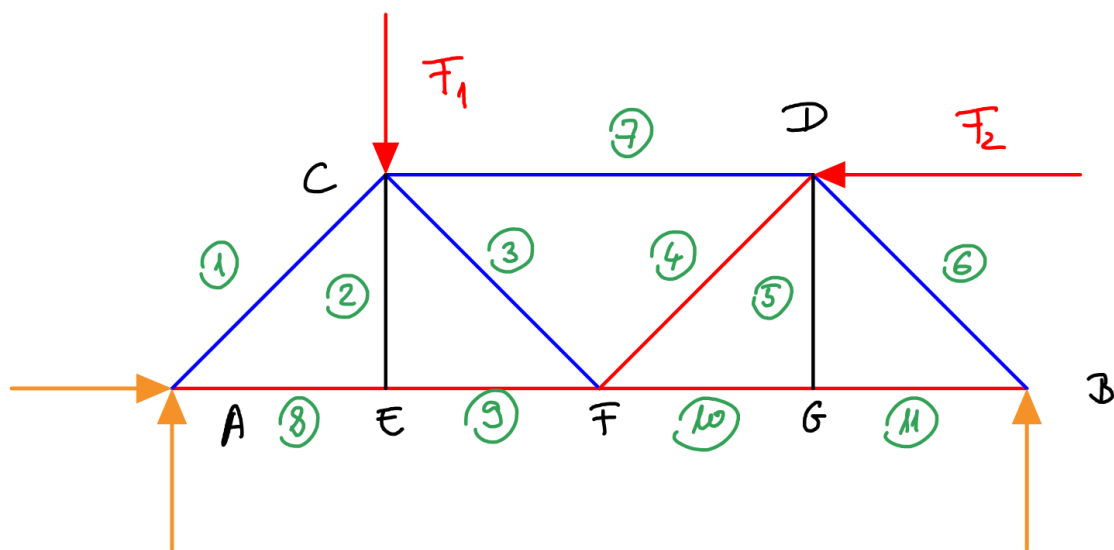
$$N_7 = -300 \text{ N}$$

$$N_8 = 150 \text{ N}$$

$$N_9 = 150 \text{ N}$$

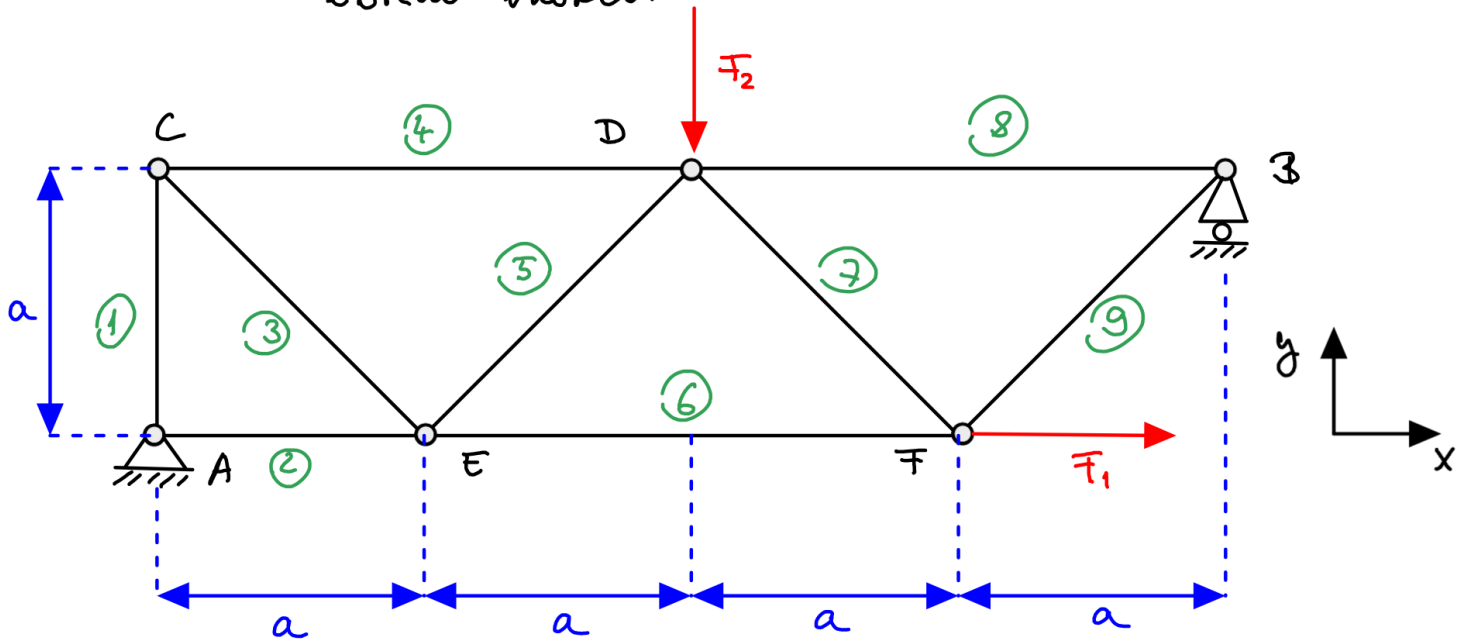
$$N_{10} = 50 \text{ N}$$

$$N_{11} = 50 \text{ N}$$



## 2. feladat

Határozzuk meg a metsző módszerrel a 6. és 7. rudakban ébredő erőket!

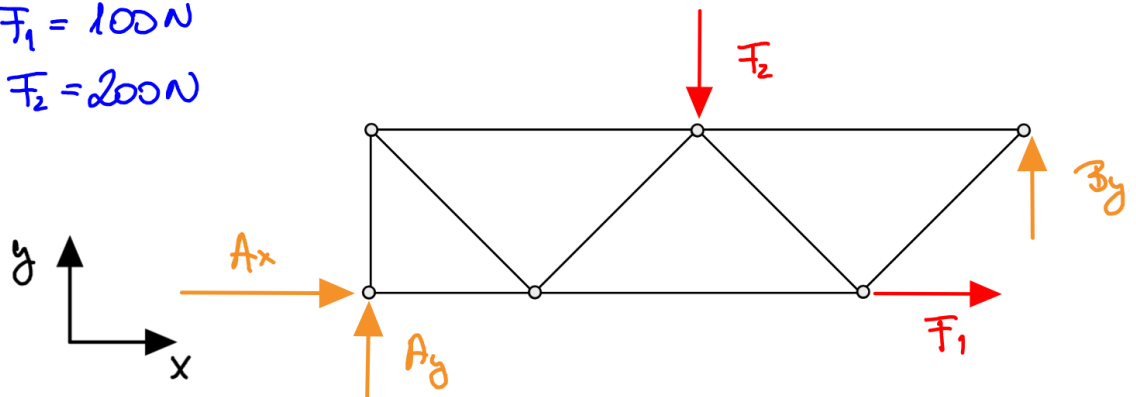


Adatok:  $a = 1\text{m}$

$$F_1 = 100\text{N}$$

$$F_2 = 200\text{N}$$

Reakcióerők  $\rightarrow$  SZTA'



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + F_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - F_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -F_2 \cdot 2a + B_y \cdot 4a = 0 \quad (3)$$

$$(1): \quad A_x = -F_1 = \underline{\underline{-100\text{N}}}$$

$$(3): \quad B_y = \frac{F_2 \cdot 2a}{4a} = \frac{1}{2} F_2 = \underline{\underline{100\text{N}}}$$

$$(2): \quad A_y = F_2 - B_y = \underline{\underline{100\text{N}}}$$

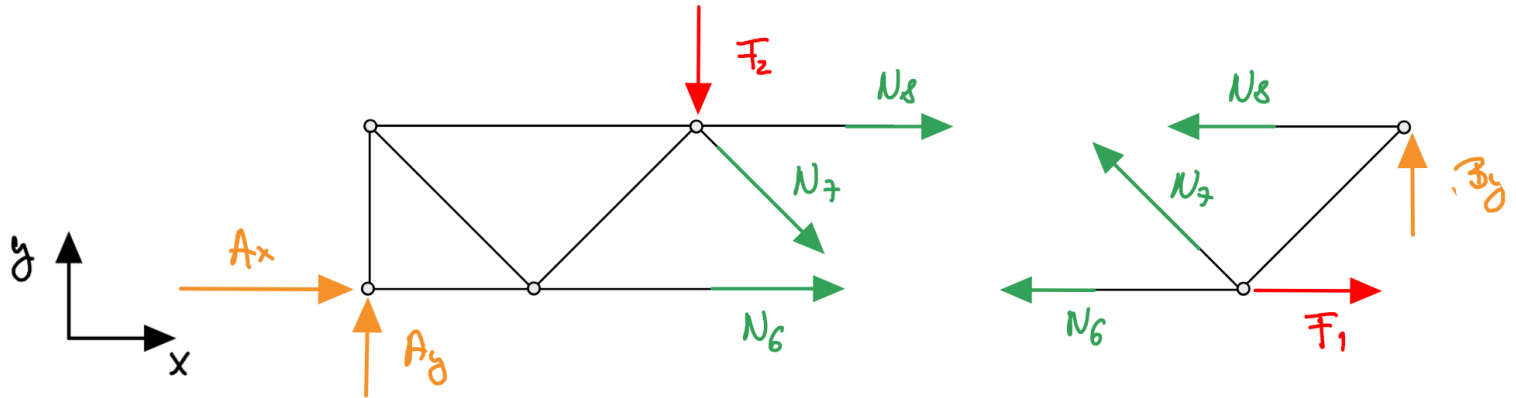
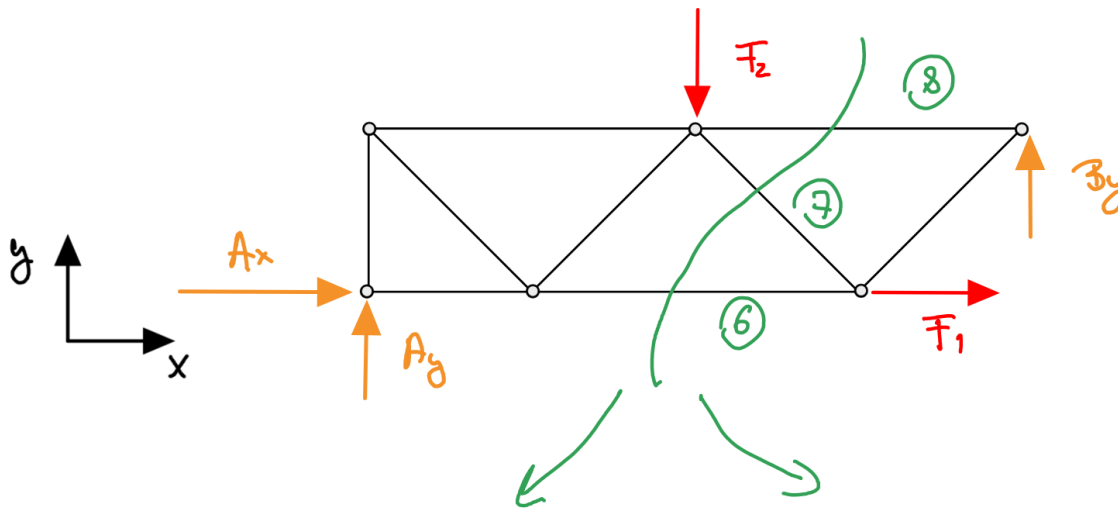
$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} -100 \\ 100 \end{bmatrix} \text{N}}}$$

$$\underline{\underline{B = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} \text{N}}}$$

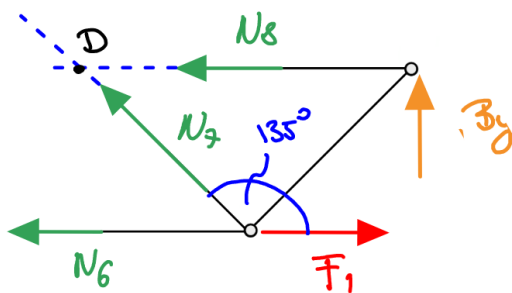
Átlatszóró módszer: légy kell, hogy a kerselt mőke megjeljenek!

Főútos, hogy ne egy csuklóban zárdójanak!

↳ 6-7-8



Válasszuk ki az egyikeket!



A nyomatéki egyenletet bárholra felírhatjuk.

Ez a rész is egyensúlyban van



Egyensúly: egyenletek!

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow -N_6 + N_7 \cos 135^\circ - N_8 + F_1 = 0 \\ &-N_6 + N_7 \cos 135^\circ - N_8 + F_1 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + N_7 \sin 135^\circ = 0$$

$$B_y + N_7 \sin 135^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow B_y \cdot 2a + F_1 \cdot a - N_6 \cdot a = 0 \quad (3)$$

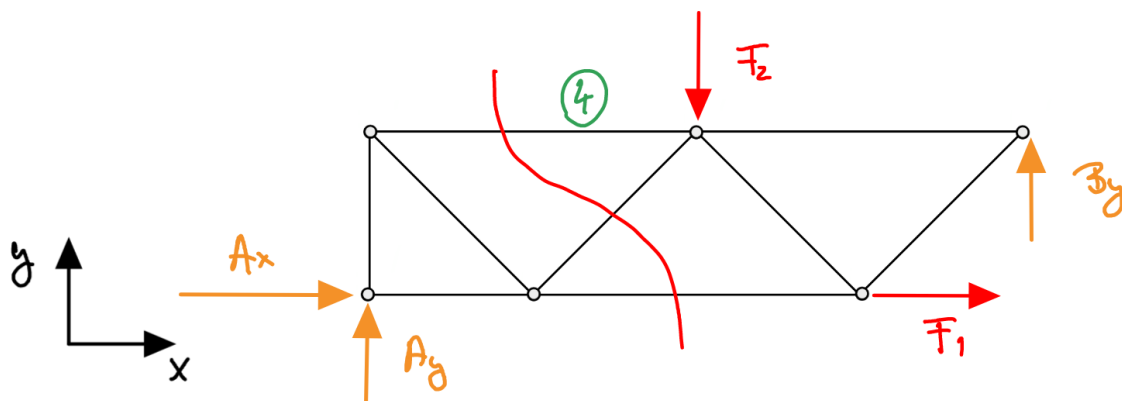
$$(3): N_6 = \frac{B_y \cdot 2a + F_1 \cdot a}{a} = 2B_y + F_1 = \underline{\underline{300 \text{ N}}} \text{ (húzóerő)}$$

$$(2) N_7 = \frac{-B_y \cdot a}{\sin 135^\circ} = \underline{\underline{-141,42 \text{ N}}} \text{ (nyomóerő)}$$

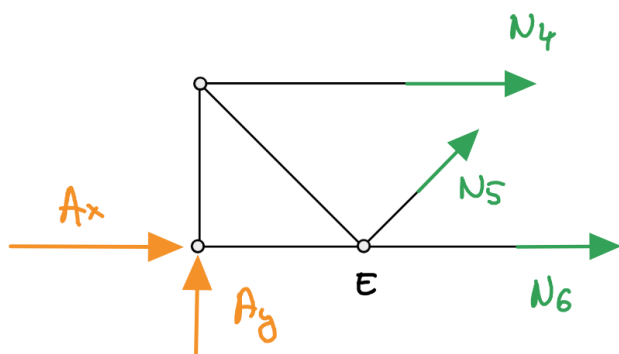




Gyakorlás: Számítsuk ki  $N_4$  nederőét!



Egyensúly-egyenletek:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + N_4 + N_6 + N_{5x} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + N_{5y} = 0 \quad (2)$$

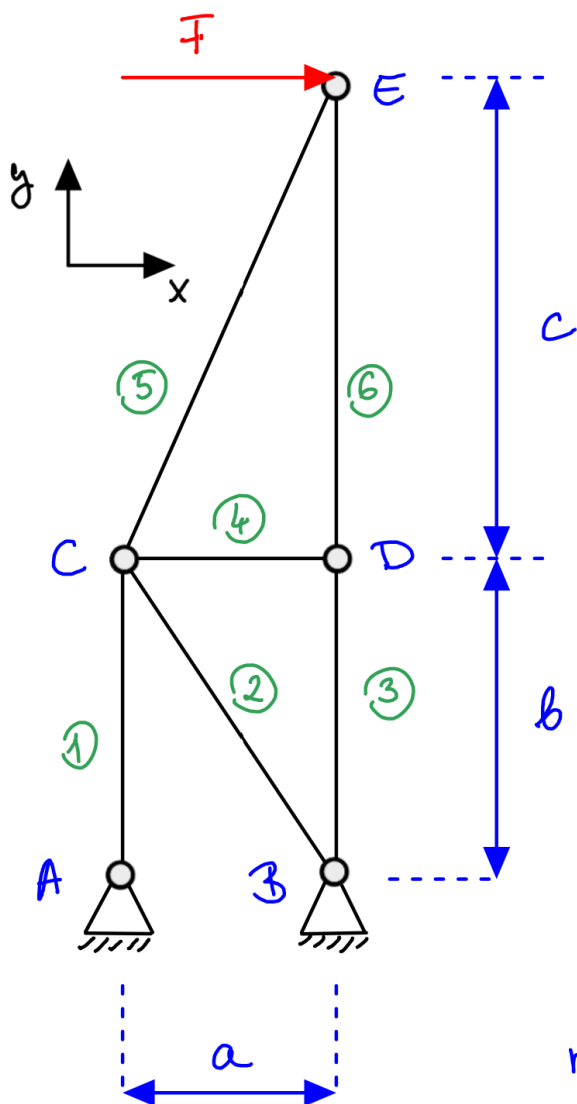
$$\sum M_E = 0 \rightarrow -A_y \cdot a - N_4 \cdot a = 0 \quad (3)$$

Köst csak  $N_4$  kell:

$$(3): \quad N_4 = \frac{-A_y a}{a} = -A_y = \underline{\underline{-100\text{N}}} \quad \text{nyomott!}$$

### 3. feladat

Határozzuk meg a rúdlában előforduló nyíróerőket és reakciókat csomóponti módszerrel!



Adatok:

$$a = 1 \text{ m}$$

$$b = 2 \text{ m}$$

$$c = 3 \text{ m}$$

$$F = 1000 \text{ N}$$

Probléma: SZTH'

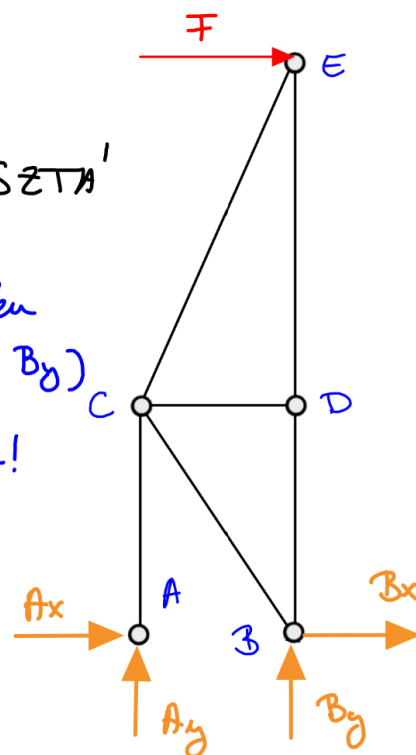
4 db ismeretlen

$(A_x, A_y, B_x, B_y)$

de 3 egyenlet!



Nem tudunk reakciókat számolni!



Csomóponti módszer:

Honnan indulhatunk?

↳ max 2 db ismeretlen  $\Rightarrow$  E pont

E csukló SZTH'

$$\alpha = \arctg\left(\frac{a}{c}\right) = 18,435^\circ$$

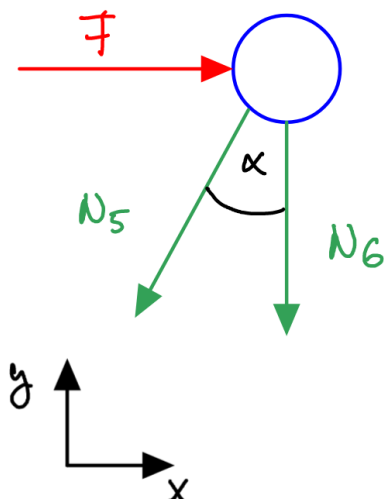
Egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F + N_5 \cos \alpha = 0$$

$$F + N_5 \cos(270^\circ - \alpha) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_6 + N_5 \sin \alpha = 0$$

$$-N_6 + N_5 \sin(270^\circ - \alpha) = 0 \quad (2)$$

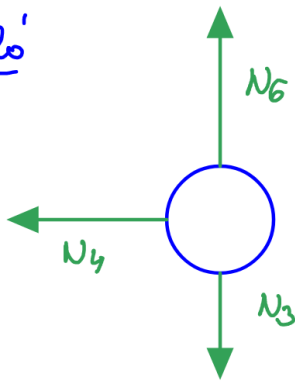
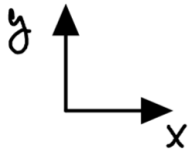


$$(1): N_5 = \frac{-F}{\cos(270^\circ - \alpha)} = 3162,28 \text{ N (kúszott)}$$

$$(2): N_6 = N_5 \sin(270^\circ - \alpha) = -3000 \text{ N (nyomott)}$$

D csukló

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek:

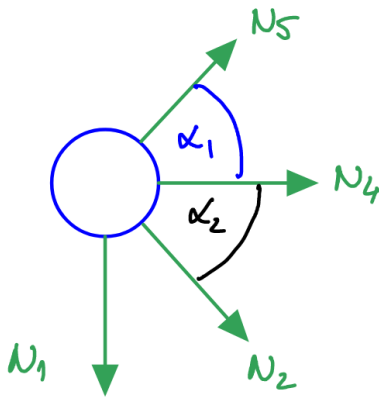
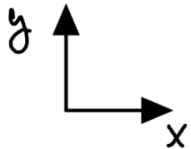
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N_4 = 0} \text{ (vakumid)}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_6 - N_3 = 0$$

$$\rightarrow N_3 = N_6 = -3000 \text{ N (nyomott)}$$

C csukló

SZTA'



$$\alpha_1 = \arctg\left(\frac{c}{a}\right) = 71,565^\circ$$

$$\alpha_2 = \arctg\left(\frac{a}{b}\right) = 63,435^\circ$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_4 + N_5 \cos \alpha_1 + N_2 \cos(-\alpha_2) = 0$$

$$N_4 + N_5 \cos \alpha_1 + N_2 \cos(-\alpha_2) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -N_1 + N_2 \sin(-\alpha_2) + N_5 \sin \alpha_1 = 0$$

$$-N_1 + N_2 \sin(-\alpha_2) + N_5 \sin \alpha_1 = 0 \quad (2)$$

$$(1): N_2 = \frac{-N_4 - N_5 \cos \alpha_1}{\cos(-\alpha_2)} = -2236,08 \text{ N (nyomott)}$$

$$(2): N_1 = N_2 \sin(-\alpha_2) + N_5 \sin \alpha_1 = 5000 \text{ N (kúszott)}$$

Külső nyakok ismertetése:

$$N_1 = 5000 \text{ N}$$

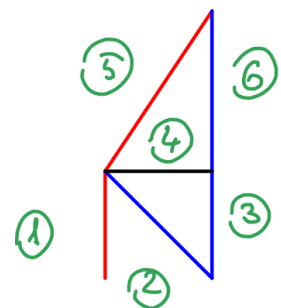
$$N_2 = -2236,08 \text{ N}$$

$$N_3 = -3000 \text{ N}$$

$$N_4 = 0 \text{ N}$$

$$N_5 = 3162,28 \text{ N}$$

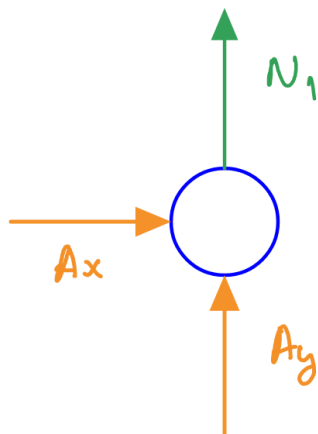
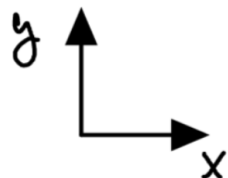
$$N_6 = -3000 \text{ N}$$



A és B reakciókat A és B csuklóból!

A csukló

SZTH'



Egyszerű egyenletek:

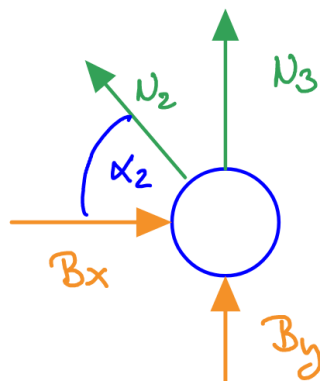
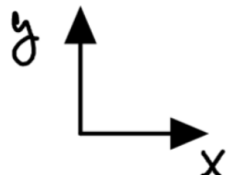
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 + A_y = 0$$

$$\rightarrow A_y = -N_1 = \underline{\underline{-5000 \text{ N}}}$$

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 0 \\ -5000 \end{pmatrix} \text{ N}}}$$

B csukló



Egyszerű egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x + N_{2x} = 0$$

$$B_x + N_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + N_3 + N_{2y} = 0$$

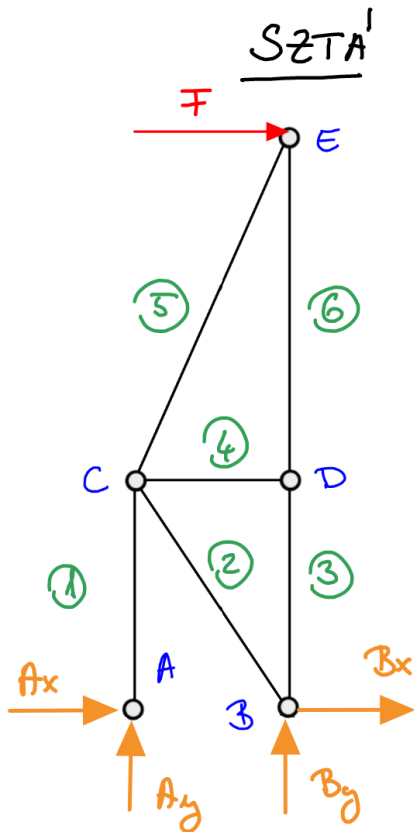
$$B_y + N_3 + N_2 \sin(180^\circ - \alpha_2) = 0 \quad (2)$$

$$(1): B_x = -N_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = \underline{\underline{-1000 \text{ N}}}$$

$$(2): B_y = -N_3 - N_2 \sin(180^\circ - \alpha_2) = \underline{\underline{5000 \text{ N}}}$$

$$\underline{\underline{B = \begin{pmatrix} -1000 \\ 5000 \end{pmatrix} \text{ N}}}$$

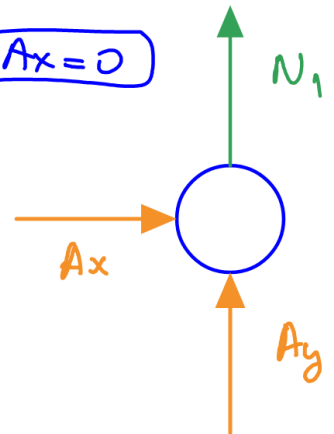
## Másik megoldás:



Vegyük észre: Az ①-es rúdban  
nincs irányú mo'  $\rightarrow$  Függőleges

Az A csomópontban: (lásd fenn)

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$



Hár csak 3 db ismeretlen

$$\boxed{A_y, B_x, B_y}$$



Megoldható az egyensúlyi egyenletekből

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x + F = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot a - F(b+c) = 0$$

$$\hookrightarrow B_y = \frac{F(b+c)}{a} = \underline{\underline{5000 \text{ N}}}$$

$$\hookrightarrow A_y = \underline{\underline{-5000 \text{ N}}}$$

$$\hookrightarrow B_x = -F = \underline{\underline{-1000 \text{ N}}}$$