Statika - 4. gyakorlat

Egyensúly

Elméleti áttekintés: Statika → egyensúly!

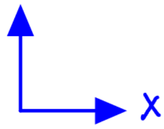
3D eset $[\underline{F};\underline{M}_A]_A = [\underline{0};\underline{0}]_A$ térben 6 db egyenlet

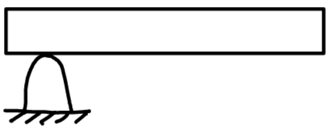
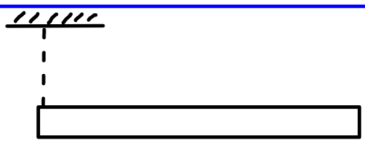
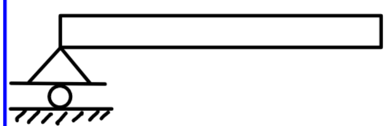
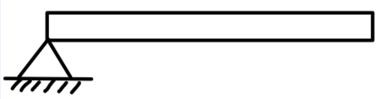
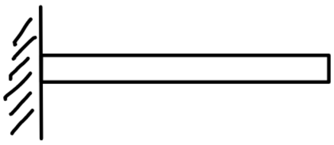
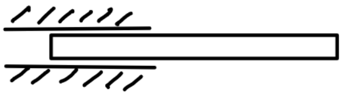
2D eset   (x és y tengely jelöli ki a síkot!)

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= 0 \\ M_{Oz} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ 3 db skalár egyenlet!}$$

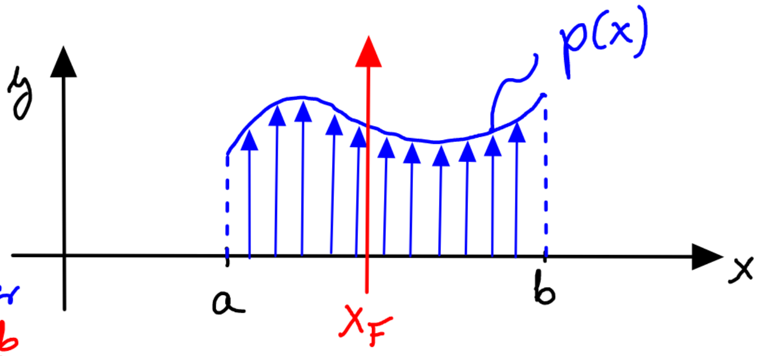
ahol: $F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$; $F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$; $M_{Oz} = \sum_{j=1}^{m} M_{jz} + \sum_{i=1}^{n} (r_i \times F_i)_z$

Kényszerek:



Típus	Rajzi jel	Gátolt mozgáslehetőség	Reakció
Támasz		$u_y = 0$ (1 db)	F_y (1 db)
Kötél		$u_y = 0$ (1 db)	F_y (1 db)
Görgős támasz		$u_y = 0$ (1 db)	F_y (1 db)
Csuklós támasz		$u_x = 0$, $u_y = 0$ (2 db)	F_x, F_y (2 db)
Befogás		$u_x = 0$, $u_y = 0$, $\varphi_z = 0$ (3 db)	F_x, F_y, M_z (3 db)
Csúszka		$u_y = 0$, $\varphi_z = 0$ (2 db)	F_y, M_z (2 db)

Megoszló erőrendszer:

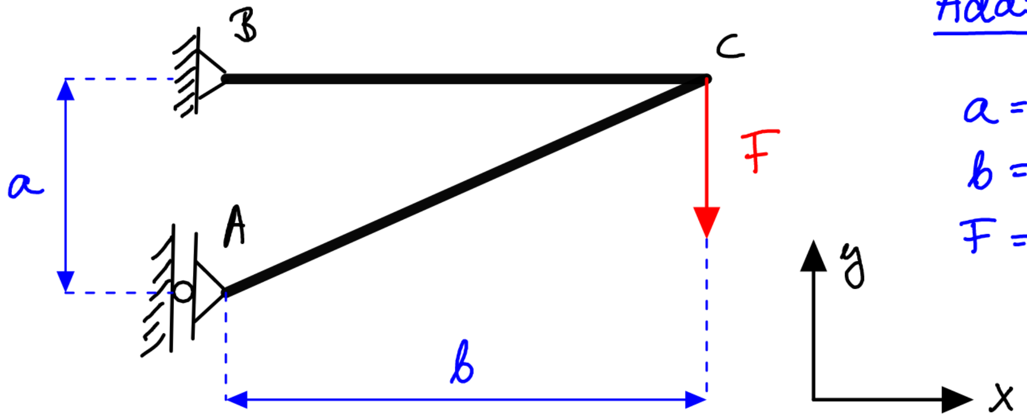


$p(x)$ - vonal mentén megoszló erőrendszer

Eredője: $F = \int_a^b p(x)\,dx$ → geometriailag a megoszló erőrendszer TERÜLETE

az eredő helye: $x_F = \dfrac{\int_a^b x\,p(x)\,dx}{F}$ → geometriailag a megoszló terhelés súlypontja

1. feladat Határozzuk meg a reakcióerőket számítással és szerkesztéssel!



Adatok:

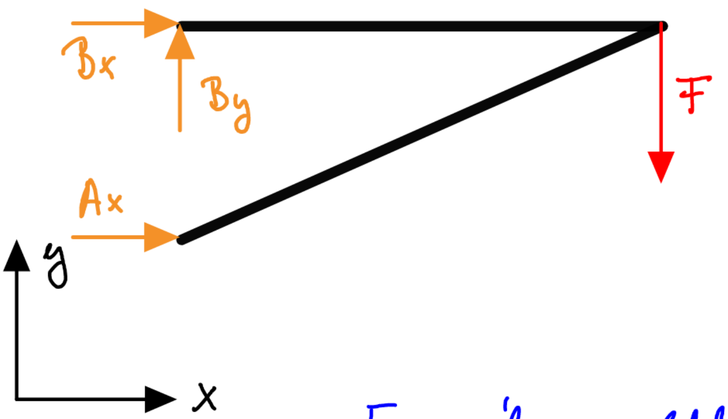
$a = 1{,}25\ m$

$b = 2{,}75\ m$

$F = 350\ N$

Számítással:

Szabadtest ábra (SZTÁ) → Kényszereket reakciókkal helyettesítjük!



Az ismeretlen reakciókat mindig a pozitív koordináta irányoknak megfelelően vesszük fel!

Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0:\quad A_x + B_x = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = 0:\quad B_y - F = 0 \quad (2)$

$\circlearrowleft \sum M_B = 0:\quad A_x \cdot a - F \cdot b = 0 \quad (3)$

↳ A nyomatéki egyenletet bárhová felírhatjuk. Célszerű úgy választani, hogy a lehető legtöbb ismeretlen reakció kiessen!

(2): $B_y = F = \underline{\underline{350\ N}}\ (\uparrow)$

(3): $A_x \cdot a = F \cdot b$

$A_x = \dfrac{F \cdot b}{a} = \underline{\underline{770\ N}}\ (\rightarrow)$

(1): $B_x = -A_x = -\underline{\underline{770\ N}}\ (\leftarrow)$ Ellentétes a felvett iránnyal!

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 770 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N \ ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -770 \\ 350 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

Lehet persze további nyomatéki egyenleteket felírni:

$$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0 \rightarrow A_x \cdot a - F b = 0$$
$$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \rightarrow -B_x \cdot a - F b = 0$$
$$\curvearrowleft \Sigma M_C = 0 \rightarrow -B_y \cdot b + A_x \cdot a = 0$$

} ezek nem mind független a $\Sigma F_x = 0$ és $\Sigma F_y = 0$ egyenletektől

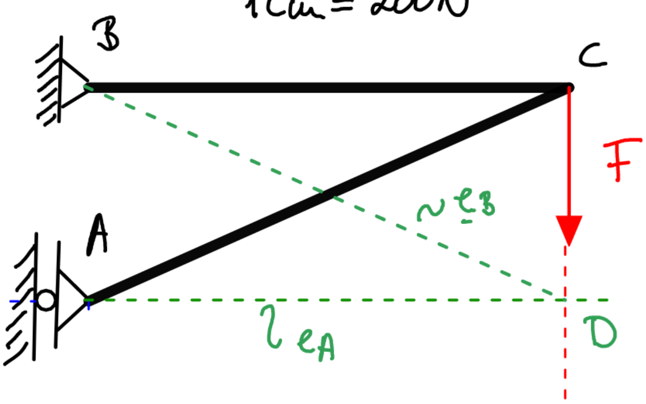
Mindig 3 db független egyenlet van!

Szerkesztéssel:

Méretarányos ábra kell!

$1\,cm \cong 0{,}2\,m$

$1\,cm \cong 200\,N$

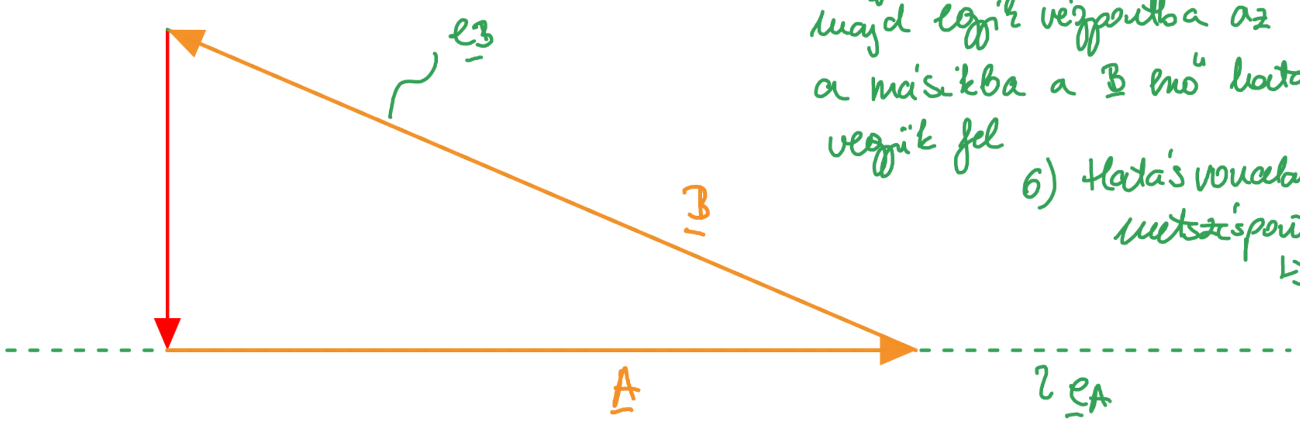


A szerkesztés lépései:

1) Méretarányos ábra + aktív erő felvétele
2) Az A reakció hatásvonala ismert (e_A)
   Az F erő hatásvonalával D pontban metsződik
3) 3 erő egyensúlya miatt e_B is átmegy D-n
   ↳ berajzoljuk e_B-t
4) Minden erő hatásvonala ismert → erőábra
5) Vegyük fel az ismert erőt (F) majd egyik végpontba az A a másikba a B erő hatásvonalát vegyük fel
6) Hatásvonalak metszéspontja ↳ leolvasni

3 erő egyensúlya:
- egy pontban metsződő hatásvonalak
- záródó vektor∆

Erőábra: $1\,cm \cong 100\,N$

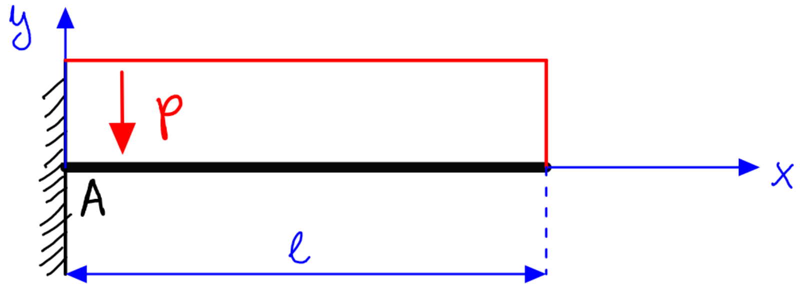


$\boxed{\text{2. feladat}}$ Számítsuk ki a reakciókat!

Adatok:

$l = 2\ m$

$p = 600\ N/m$



Helyettesítsük a megoszló erőrendszert!

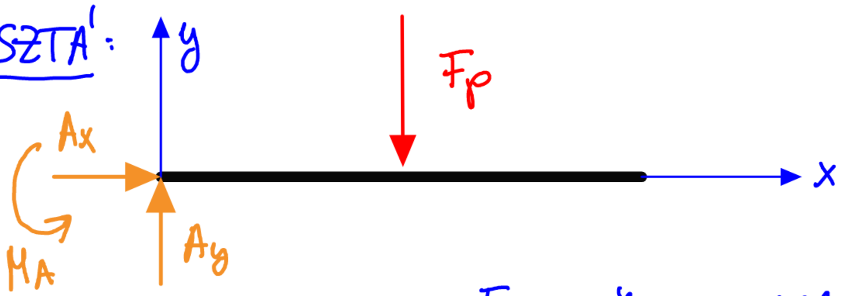
$$F_p = \int_0^l p\, dx = p \cdot l = 1200 N$$

Síkidom területe

$$x_p = \frac{\int_0^l x\, p\, dx}{F_p} = \frac{p l^2/2}{p l} = \frac{l}{2}$$

a síkidom súlypontjának a helye!

SZTA:



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0 \qquad \underline{\underline{A_x = 0}}$

$\sum F_y = 0 \qquad A_y - F_p = 0 \rightarrow A_y = F_p = \underline{\underline{1200 N}}$

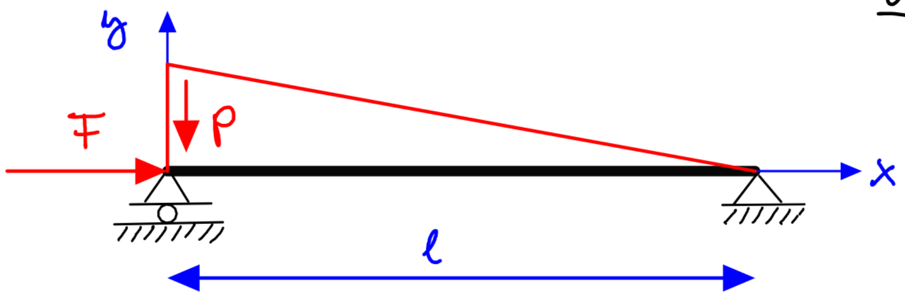
$\sum M_A = 0 \qquad M_A + F_p \cdot \frac{l}{2} = 0$

$\rightarrow M_A = -F_p \frac{l}{2} = \underline{\underline{-1200\ Nm}}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1200 \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad \underline{M_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1200 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

3. feladat

Szerkesszük meg a reakcióerőket!



Adatok: $l = 2\,m$

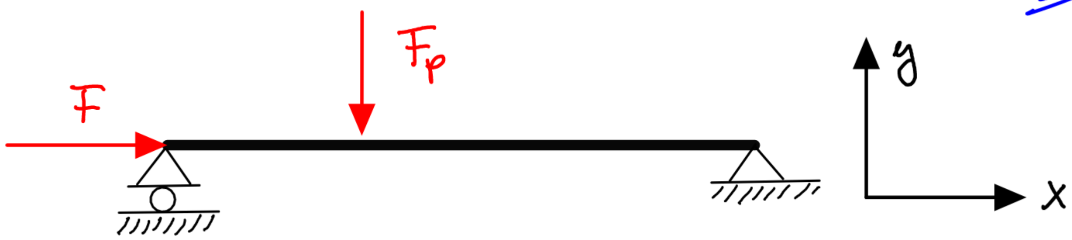
$p = 1{,}2\ kN/m$

$F = 600\,N$

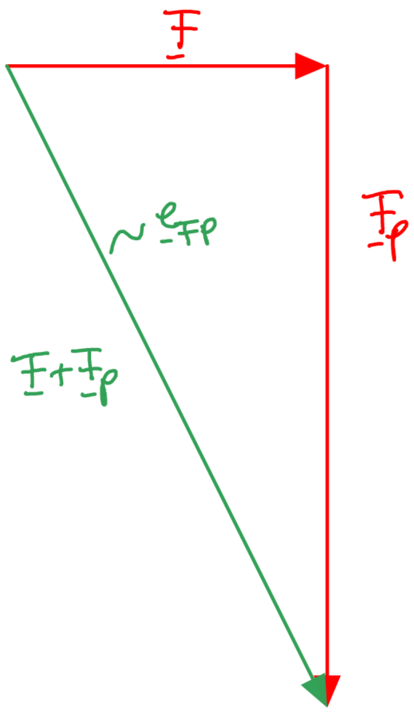
Helyettesítsük a megoszló erőrendszert: $F_p = \frac{pl}{2} = 1{,}2\ kN$

$x_p = \frac{l}{3} = \frac{2}{3}\ m$

(háromszög terület és súlypont)



Szerkesztéssel: $1\ cm \mathrel{\hat{=}} 200N$



1) 4 erő szerepel (F, F_p, A, B) vegyük a két aktív terhelés eredőjét!

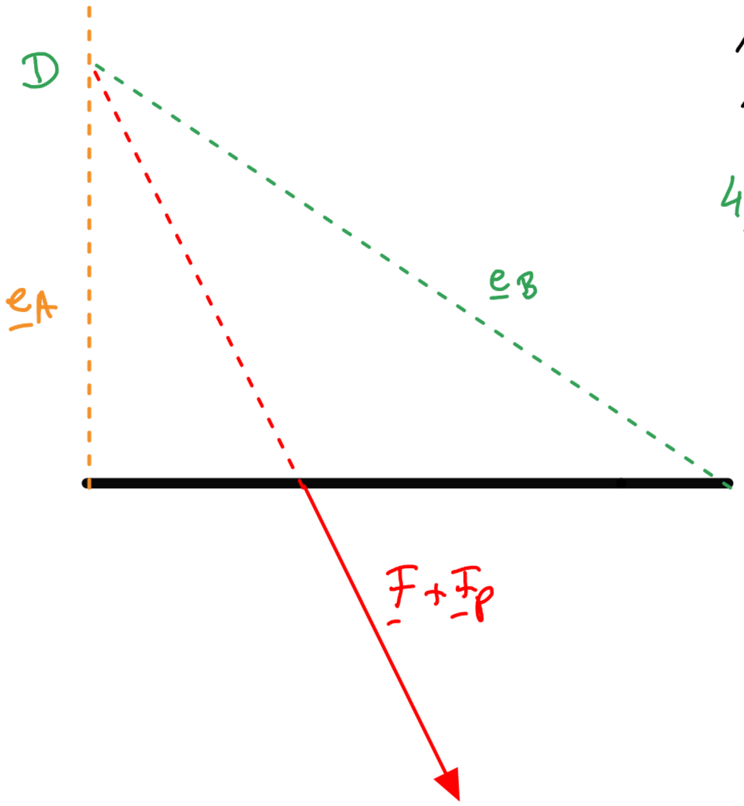
F és F_p hatásvonala a C ponton metsződik

2) Szerkesszük ki F és F_p eredőjét a paralelogramma szabály segítségével

3) Rajzoljuk szerkezeti ábrát

↓

$F + F_p$ erők eredőjét vegyük fel a C pontba!



1 cm ≙ 0,2 m
1 cm ≙ 400N

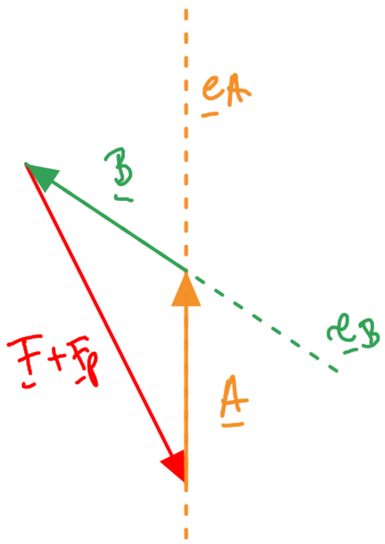
4) Szerkezeti ábra
↳ aktív erő hatásvonala
↳ reakciók hatásvonala
↳ D pont

5) 3 erő egyensúlya miatt B reakció hatásvonala is át kell, hogy menjen D-n!
↳ e_B hatásvonala!

6) Erőábra:
• $F + F_p$ vektort felvenni
egyik végén A, a másikon B hatásvonalával párhuzamost húzni!

7) Reakciók leolvasása!

1 cm ≙ 400N



$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 800 \end{bmatrix} N \quad ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -600 \\ 400 \end{bmatrix} N$$

SZÁMÍTÁSSAL:

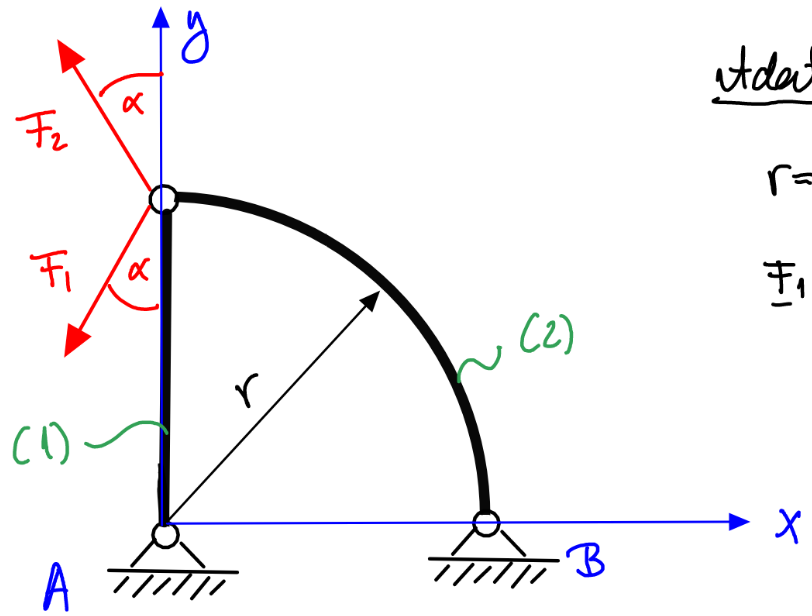
SZTÁ:

$\sum F_x = 0$: $\quad F + B_x = 0 \longrightarrow B_x = -F = -600N$

$\sum F_y = 0$: $\quad A_y + B_y - F_p = 0 \longrightarrow B_y = F_p - A_y = 400N$

$\sum M_B = 0$: $\quad -A_y \cdot l + F_p \cdot \frac{2}{3} l = 0 \rightarrow A_y = \frac{F_p \frac{2}{3} l}{l} = \frac{\frac{pl}{2} \cdot \frac{2}{3} l}{l} = \frac{pl}{3} = 800N$

4. feladat Az ábrán látható szerkezet egy egyenes és egy negyedkör alakú görbe rúdból áll, melyek a C pontban csuklóval kapcsolódnak egymáshoz. Határozzuk meg a reakcióerőket!



Adatok:

$r = 0,4\,m$

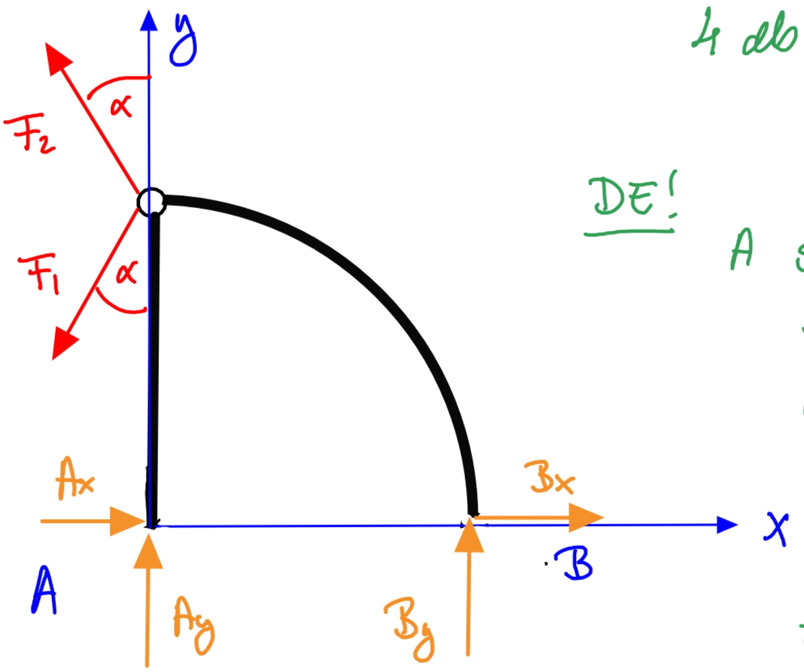
$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -250 \\ -250\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -150 \\ 150\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} N$$

Írjuk fel a csuklók koordinátáit!

$$\underline{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m; \quad \underline{r}_B = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m; \quad \underline{r}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

SZTÁ



4 db ismeretlen reakció

⇓

3 db egyenlet!

DE!

A szerkezet valójában 3 db testből áll

(1)-es rúd; (2)-es rúd

\+ csukló

↓

A rudakra csak a végén hat erő

↳ egyensúlyban kell lennie!

2 erő egyensúlya → ↳ közös hatásvonal

Tehát: $\underline{A}$ erő az (1)-es rúd irányába mutat
$\underline{B}$ erő pedig a negyedkör két végpontját összekötő szakasz irányába!

$$\underline{A} = \lambda_A \underline{r}_{AC}, \quad \text{ahol} \quad \underline{r}_{AC} = \underline{r}_C - \underline{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{B} = \lambda_B \underline{r}_{BC}, \quad \text{ahol} \quad \underline{r}_{BC} = \underline{r}_C - \underline{r}_B = \begin{bmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0$: $$F_{1x} + F_{2x} + B_x = 0$$
$$F_{1x} + F_{2x} - r\lambda_B = 0 \quad (1)$$

$\sum F_y = 0$: $$F_{1y} + F_{2y} + A_y + B_y = 0$$
$$F_{1y} + F_{2y} + \lambda_A r + \lambda_B r = 0 \quad (2)$$

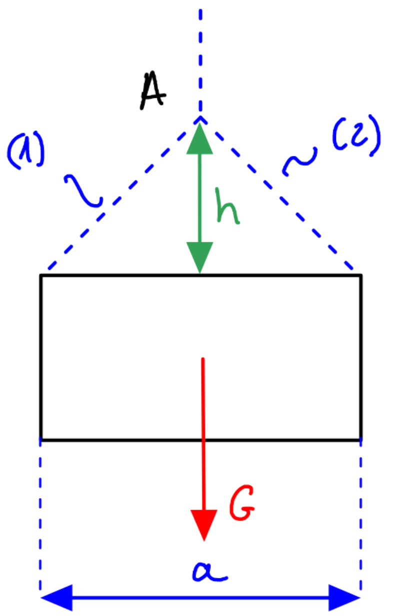
(1): $$\lambda_B = \frac{F_{1x} + F_{2x}}{r} = -1000 \frac{N}{m}$$

$$\hookrightarrow \underline{B} = \lambda_B \cdot \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} 400 \\ -400 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

(2): $$\lambda_A = \frac{-F_{1y} - F_{2y} - \lambda_B r}{r} = 1433 \frac{N}{m}$$

$$\hookrightarrow \underline{A} = \lambda_A \underline{r}_{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 573{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

5. feladat Az ábrán látható teher megemelésére szolgáló köteleket legfeljebb $K = 800\,N$ nagyságú húzóerő terheli. Mekkora legyen a kötés h magassága, hogy a 3 méter széles 1000 N súlyú láda levegőben tartásakor ne szakadjon el a kötél?

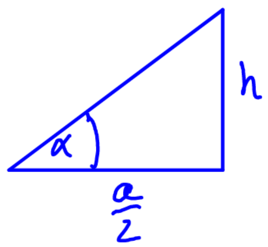


Adatok:

$G = 1000\,N$

$a = 3\,m$

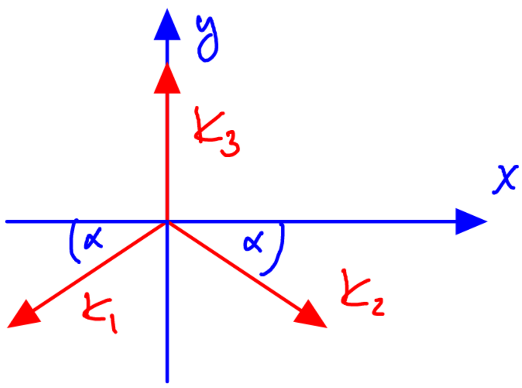
$K_{max} = 800\,N$



$$tg\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}$$

A rendszer egyensúlyban van → A pontra egyensúlyi egyenletek

SZTÁ:



Mivel a teljes súlyt K_3 tartja

↓

$$\underline{\underline{K_3}} = G = 1000\,N$$

$$\sum F_x = 0: \quad K_2 \cos\alpha - K_1 \cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad K_3 - K_2 \sin\alpha - K_2 \sin\alpha = 0$$

(1) $K_1 = K_2$ → legnagyobb érték:

$$K = K_1 = K_2 = \underline{\underline{800\,N}}$$

(2) $K_3 - K\sin\alpha - K\sin\alpha = 0$

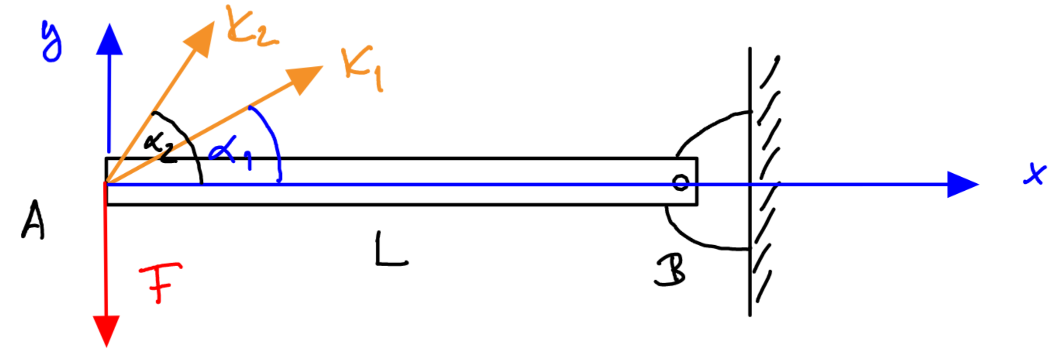
↳ $\sin\alpha = \frac{K_3}{2K} = 0{,}625$

↳ $\alpha = \underline{\underline{38{,}66^\circ}}$

A fenti egyenletből:

$$h = \frac{a}{2}\,tg\alpha = \underline{\underline{1{,}2\,m}}$$

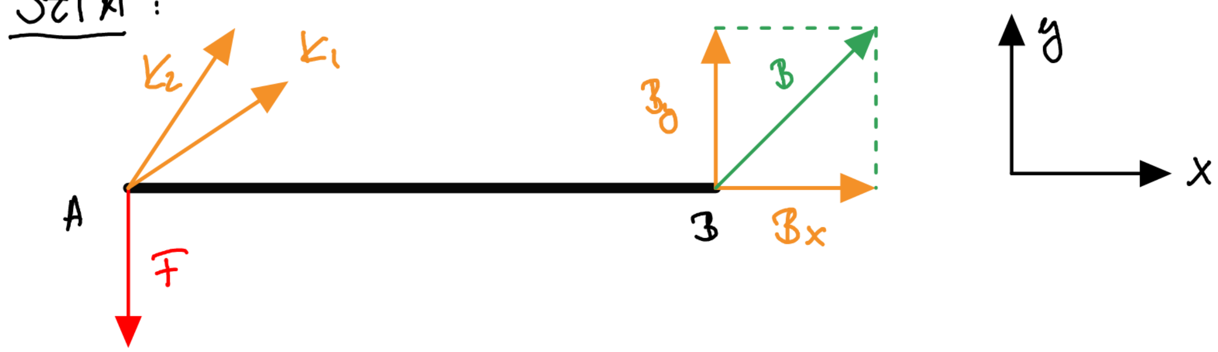
6. feladat Az AB rúd B vége csuklósan meg van támasztva. Az A végén két kötél húzóerőt fejt ki. Milyen nagyságú függőleges F erőt kell alkalmazni, hogy a rúd vízszintes helyzete egyensúlyi legyen?



Adatok:

$K_1 = 1000\,N$
$K_2 = 500\,N$
$\alpha_1 = 30°$
$\alpha_2 = 60°$
$L = 2\,m$

SZTÁ:



Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket:

$$\Sigma F_x = 0: \quad K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 + B_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad B_y + K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 - F = 0$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad B_y \cdot 2 = 0 \rightarrow \boxed{B_y = 0}$$

$$\hookrightarrow B_x = -K_1 \cos\alpha_1 - K_2 \cos\alpha_2 = \underline{-1116\,N} \quad (\leftarrow)$$

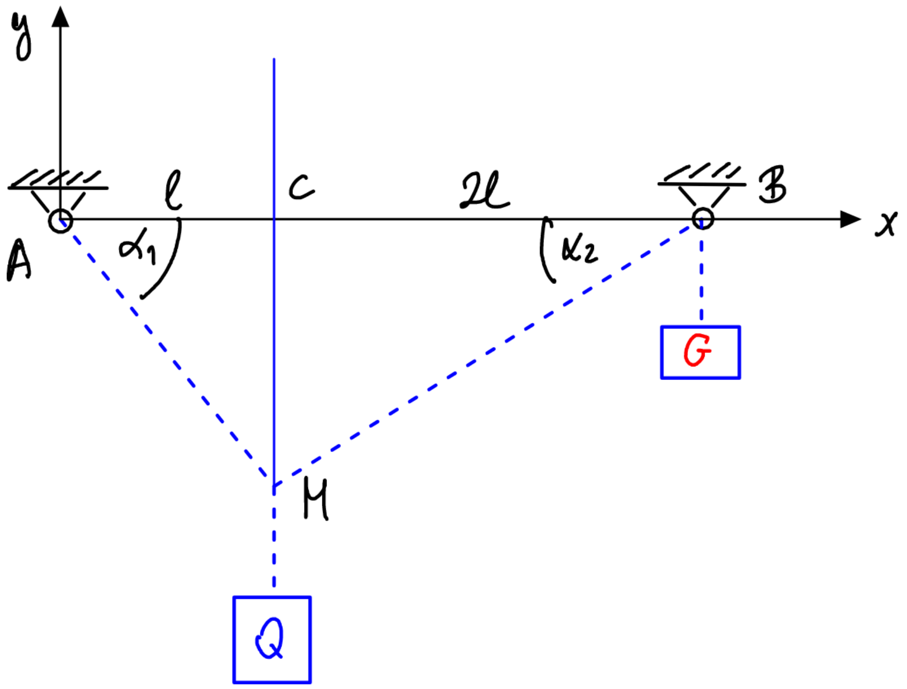
$$\hookrightarrow F = K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 = \underline{933\,N} \quad (\downarrow)$$

Másképp: Vegyük észre, hogy 3 erő hatásvonala (F, K_1, K_2) egy ponton megy át. → Ha a B erő hatásvonala nem itt menne át

↳ nem lehetne egyensúly → B hatásvonala átmegy A ponton

↳ $\underline{B_y = 0}$

7. feladat Egy teljesen vékony kötél végét az A csuklóhoz kötjük, másik végére, miután a B pontban a konzolon átvezettük, G súlyt akasztunk. A kötélen $\overline{AM} = 2\ell$ távolságban $Q = 1000$ N teher lóg egy karikához kapcsolva. Határozzuk meg a G súly nagyságát, ha a szerkezet az ábra szerinti állapotban egyensúlyban van.



Adatok:

$Q = 1000\,N$
$\overline{AM} = 2\ell$
$\overline{AC} = \ell$
$\overline{CB} = 2\ell$

- $\overline{CM}$ → Pithagorasz-tételből: $\overline{CM} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{4\ell^2 - \ell^2} = \sqrt{3}\,\ell$
- $\overline{BM}$ → szintén Pithagorasszal: $\overline{BM} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{CM}^2} = \sqrt{4\ell^2 + 3\ell^2} = \sqrt{7}\,\ell$

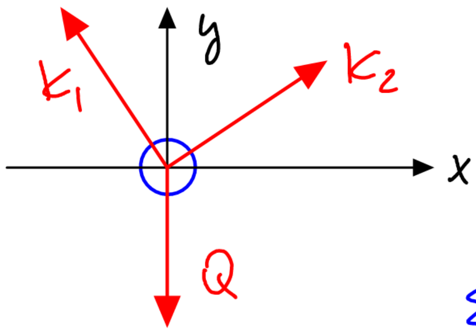
Ebből:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_2 &= \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} = \frac{\sqrt{3}\ell}{\sqrt{7}\ell} = \sqrt{\frac{3}{7}} = 0{,}655 \\ \cos\alpha_2 &= \frac{\overline{CB}}{\overline{BM}} = \frac{2\ell}{\sqrt{7}\ell} = \sqrt{\frac{4}{7}} = 0{,}756 \end{aligned}\right\} \quad \alpha_2 = 40{,}91^\circ$$

valamint:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_1 &= \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \frac{\sqrt{3}\ell}{2\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha_1 &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = \frac{\ell}{2\ell} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{\alpha_1 = 60^\circ}}$$

Rajzoljuk fel a karika SZTÁ-ját!



Tudjuk, hogy $K_2 = G$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow K_2 \cos\alpha_2 - K_1 \cos\alpha_1 = 0$$

$$G \cos\alpha_2 - K_1 \cos\alpha_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 - Q = 0$$

$$K_1 \sin\alpha_1 + G \sin\alpha_2 - Q = 0 \quad (2)$$

(1): $$G = \frac{K_1 \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \rightarrow (2)$$

$$K_1 \sin\alpha_1 + \frac{K_1 \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \sin\alpha_2 - Q = 0$$

$$K_1 \left(\sin\alpha_1 + \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \sin\alpha_2 \right) - Q = 0$$

$$K_1 = \frac{Q}{\sin\alpha_1 + \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \sin\alpha_2} = \underline{\underline{770\,N}}$$

Ebből: $$G = \frac{K_1 \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \underline{\underline{509{,}26\,N}}$$