

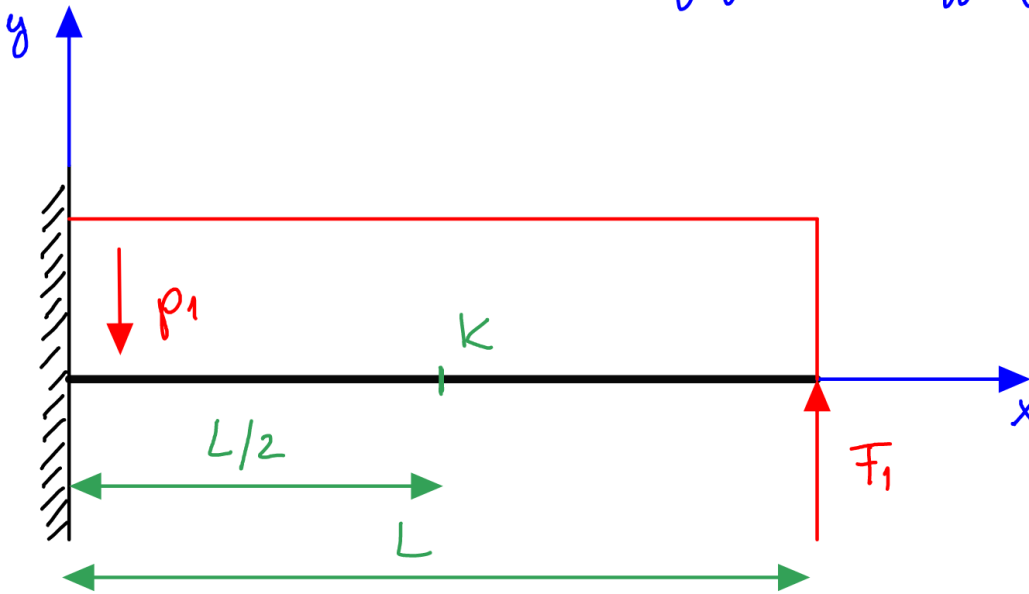
## Statika - 8. gyakorlat - I.

Ígnybevétel, ígnybevételi  
ábrák

Parabola - szerkesztés: Nézzük az előző gyakorlat 2. feladatát!

**2. feladat** Írjuk fel az ígnybevételi függvényeket és számítsuk

ki a K keresztmetszetben az ígnybevétel nagyságát!



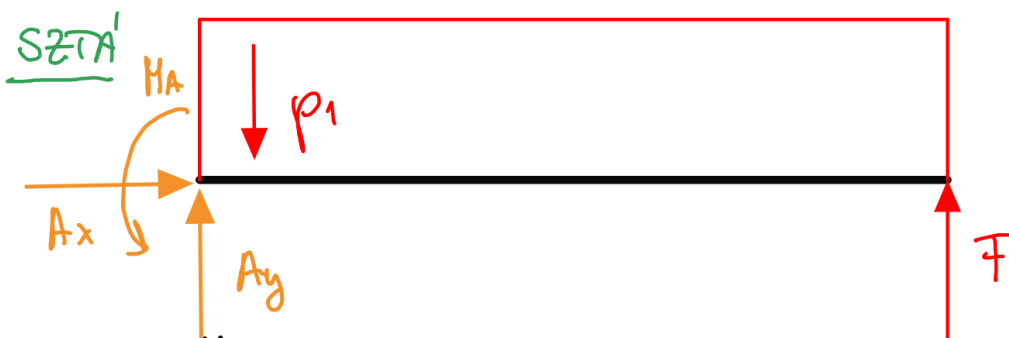
Adatok:

$$L = 4 \text{ m}$$

$$p_1 = 3 \text{ kN/m}$$

$$F = 3 \text{ kN}$$

Most mehetünk azonnal jobbról vagy kisszámoljuk a reakciókat és balról redukálunk!



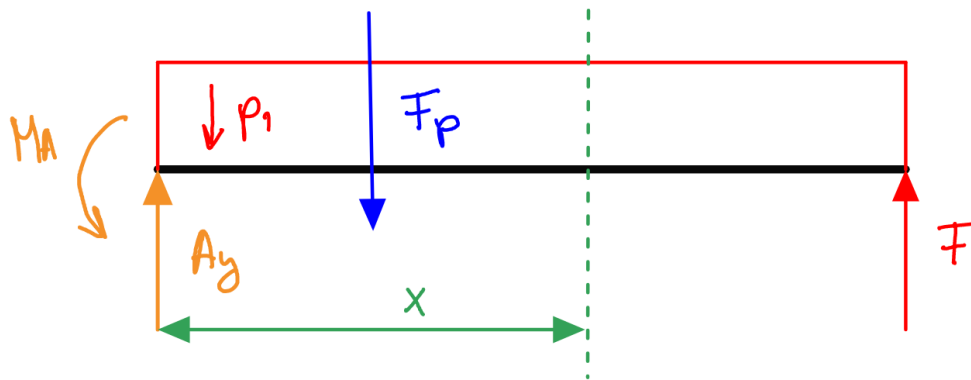
Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: \boxed{A_x = 0}$$

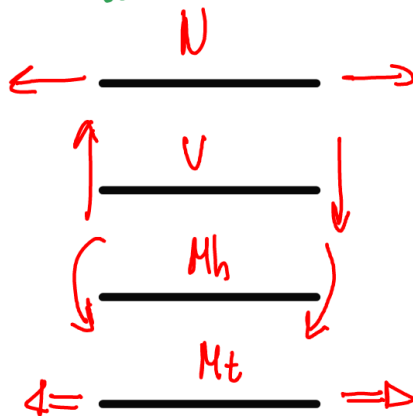
$$\sum F_y = 0: A_y + F - p_1 L = 0 \quad \Rightarrow A_y = p_1 L - F = \underline{9 \text{ kN}} (\uparrow)$$

$$\sum M_A = 0: M_A + F \cdot L - p_1 L \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow M_A = p_1 \frac{L^2}{2} - F \cdot L = \underline{12 \text{ kNm}} \curvearrowright$$

Érdekes felrajzolni a testre ható erőket!



Válasszuk ki egy keresztmetszetet! Mivel a midszakaszon belül nincs koncentrált erő és nyomaték  
 ↳ egy szakasz elég!



Balról

Jódról

$N(x)$	0	0
$V(x)$	$A_y - p x$ $V(x) = 9 - 3x$ ← méterben kn	$-F + p(L-x)$ $V(x) = -3 + 12 - 3x = 9 - 3x$ kn
$M_b(x)$	$-A_y x + \frac{p x^2}{2} + M_A$ $M_b(x) = -9x + \frac{3}{2} x^2 + 12$ ← méterben knm	$-F(L-x) + p \frac{(L-x)^2}{2}$ $M_b(x) = -3(4-x) + \frac{3(16-8x+x^2)}{2}$ $= -12 + 3x + 24 - 12x + \frac{3}{2} x^2$ $= \frac{3}{2} x^2 - 9x + 12$ ← méterben knm
$M_t(x)$	0	0

Teljesít a függvények:

$$p(x) = -p$$

$$V(x) = A_y - px$$

$$M_k(x) = \frac{px^2}{2} - A_y x + M_A$$

Ellenőrizze a derivátók kapcsolatát!

$$V'(x) = -p = p(x) \checkmark$$

$$M_k'(x) = px - A_y = -V(x) \checkmark$$

- keresztmetszet:

$$N_k = 0$$

$$M_{tk} = 0$$

$$V_k = V(L/2) = 9 - 3 \cdot 2 = \underline{\underline{3 \text{ kN}}}$$

$$M_{kx} = M_k(L/2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 12 = \underline{\underline{0 \text{ kNm}}}$$

Rövidvég: ( $x=L$ )

$$V(L) = 9 - 3 \cdot 4 = -3 \text{ kN}$$

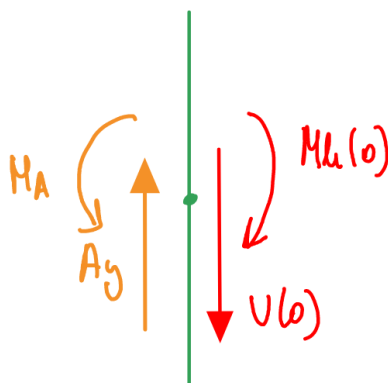
$$M_k(L) = \frac{3}{2} \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 12 = 0 \text{ kNm}$$

} megfelel annak, amit a  
"nincs jobb végén lévő" terhelés  
ad

Befogás: ( $x=0$ )

$$V(0) = 9 \text{ kN}$$

$$M_k(0) = 12 \text{ kNm}$$



Tényleg egyezik!

1. egyenleteli ábrák:

$V(x) = 9 - 3x \rightarrow$  könnyen ábrázolható  $\rightarrow$  lineáris egyenes

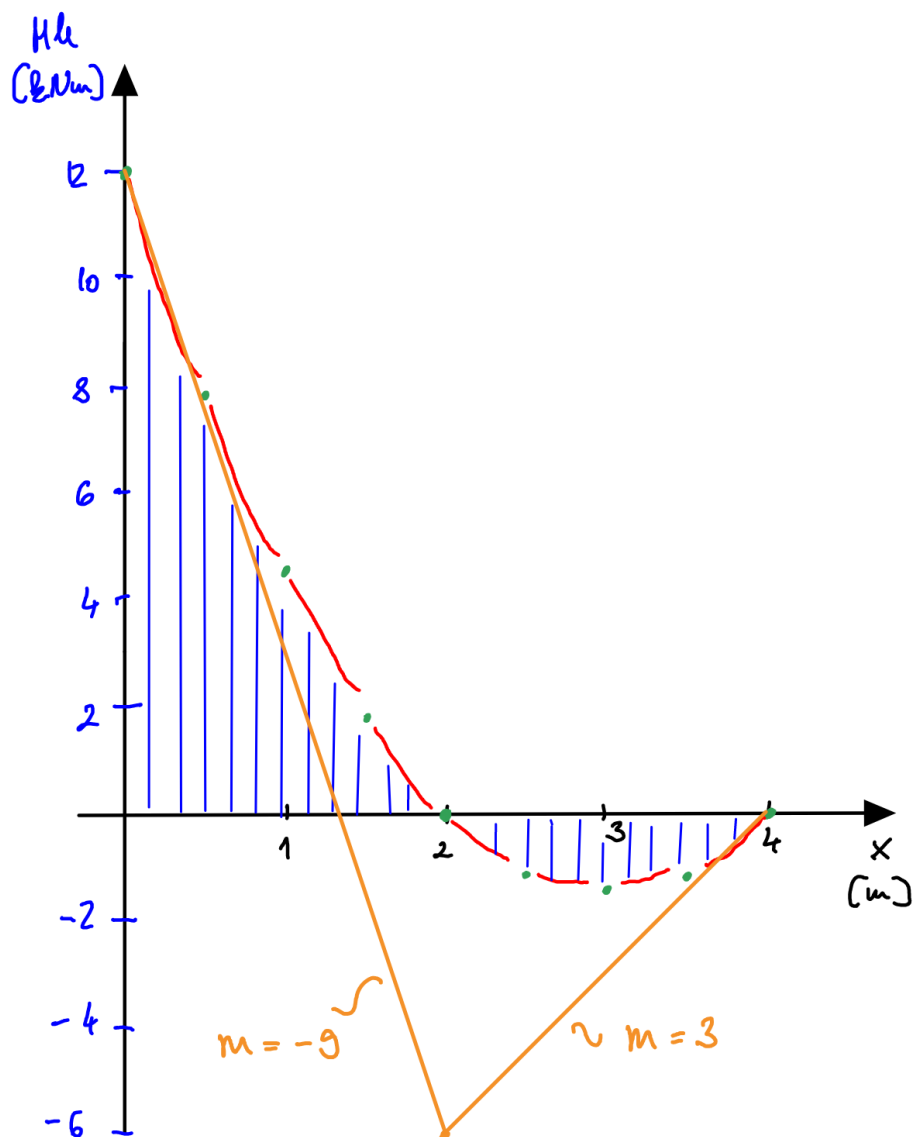
$\rightarrow$  legendo 2 pontban kiszámolni

$M_k(x) = \frac{3}{2}x^2 - 9x + 12 \rightarrow$  Parabola

$\rightarrow$  nemtriviális ábrázolni

1. megoldás: Sok pontban kiszámolni

$x$ (m)	$M_k$ (kNm)
0	12
0,5	7,875
1	4,5
1,5	1,875
2	0
2,5	-1,125
3	-1,5
3,5	-1,125
4	0



Vegyük észre:

Érintők meredeksége:

$$M_k'(x) = 3x - 9$$

$$M_k'(x)|_{x=0} = -9$$

$$M_k'(x)|_{x=4} = 3$$

}  $\rightarrow$  Tudjuk, hogy  $M_k'(x) = -V(x) = 3x - 9$

$\rightarrow$  Tehát ahol  $V(x)$  zérus

$\rightarrow M_k(x) \rightarrow$  szélsőérték

## 2. megoldás : Nyíró ízigénybevétel alapján

Tudjuk..  $M_k'(x) = -V(x)$

$$\frac{dM_k}{dx} = -V(x)$$

$$\int \cdot dx$$

formalizáció „beszorzunk”

$$dM_k = -V dx$$

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x}$$

→ egy ismét  $x_0$  ponttól  $\Delta x$ -nyit balra balra

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dM_k = - \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} V dx$$

$M_k$  változása

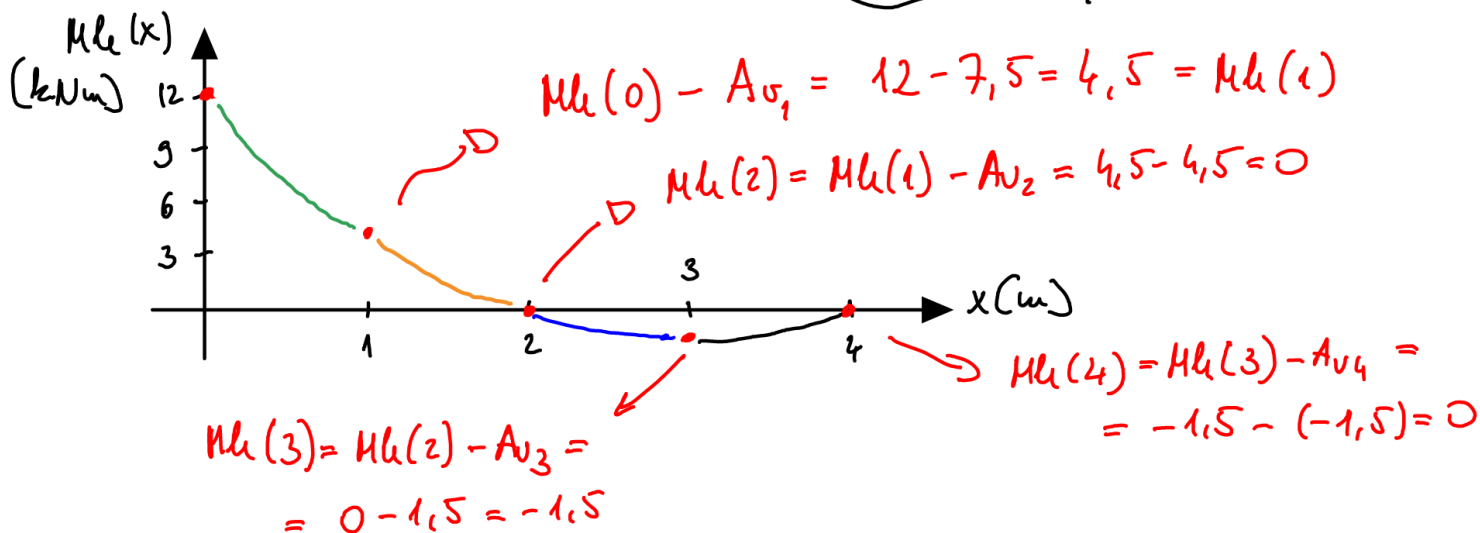
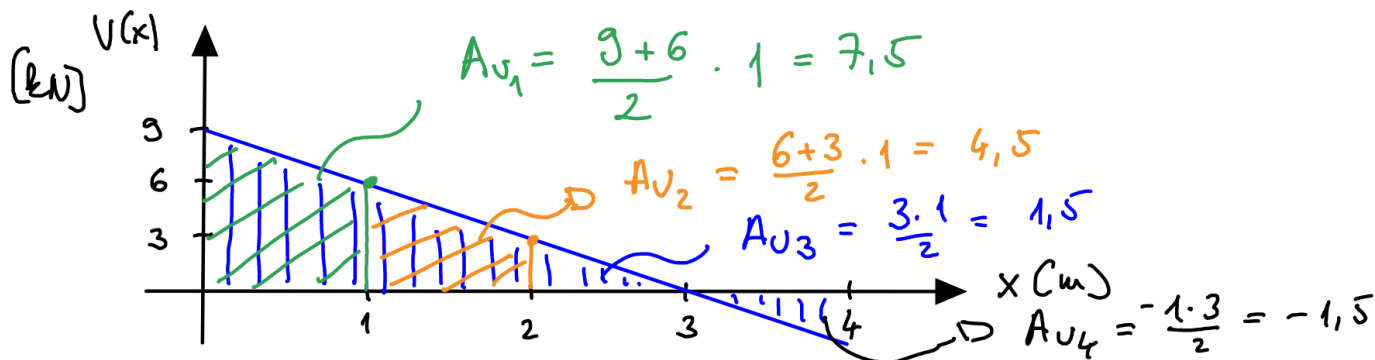
$$M_k(x_0 + \Delta x) - M_k(x_0) = - \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} V dx$$

A  $V(x)$  függvény alatti terület

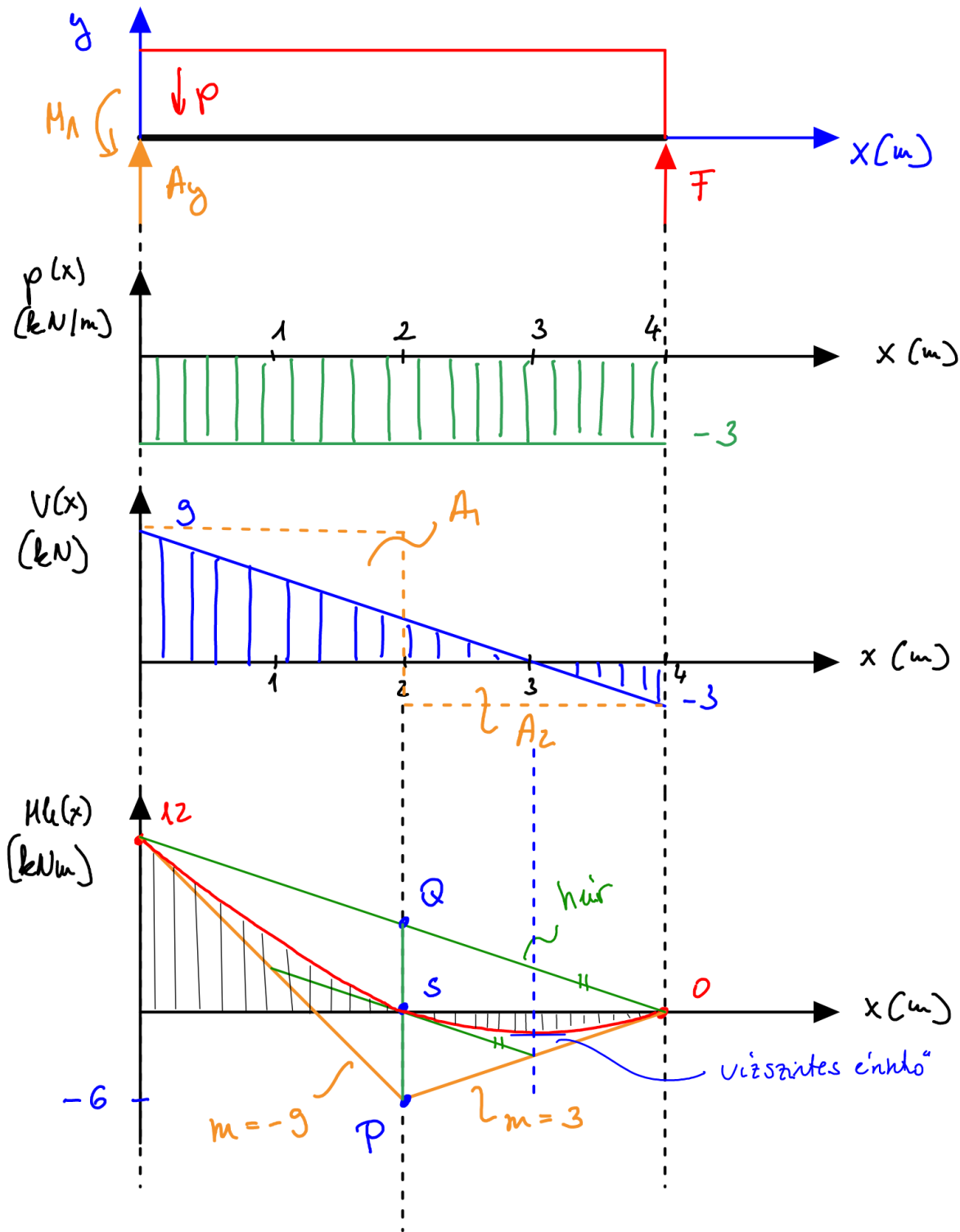
$A_v$

→ előjeles terület

$$M_k(x_0 + \Delta x) = M_k(x_0) - A_v$$



Hogyan szerkesztjük az igénybevéti ábrát?



①  $p(x)$  és  $V(x)$  felrajzolása, segítségül a lineáris  $V(x)$  tartomány feléire!

② Vegyük fel  $M(x)$  kezdő és végső értékeit!

$$M(0) = 12 \text{ kNm}$$

$$M(4) = 0 \text{ kNm}$$

③ Érintő be rajzolása

$$\hookrightarrow M'(0) = -V(0) = -9$$

$$\hookrightarrow M'(4) = -V(4) = 3$$

#### ④ Érintők metszéspontjának kiszámítása

Rajzoljunk két téglalapot a  $U(x)$  függvény két feltartományára  
↳ magasság a kezdő és a végérték

$$A_1 = 9 \cdot 2 = 18$$

$$A_2 = (-3) \cdot 2 = -6$$

↳ Segédpont: Mh kezdőértékeiből vonjuk le  $A_1$ -et  
 $12 - 18 = -6 \rightarrow$  az érintők metszéspontja

↳ Nem muszáj ismerni a végpontot:

$$Mh(L) = P - A_2 = -6 - (-6) = \underline{\underline{0}}$$

#### ⑤ Húzzuk be a húst $Mh(0)$ és $Mh(L)$ közé

↳ legyen  $Q$  pont a szakasz felénél lévő pontja a húsnak

⑥ Felvesszük meg a  $PQ$  szakaszt  $\rightarrow$  Felközpont „S”

⑦ Húzzuk párhuzamosot a húrral az S pontban

↳ ez lesz a parabola érintője!

⑧ Rajzoljuk meg a parabolát

↳ Kezdő és végpontban adott az érintő

↳ S pontban is adott

↳ Ha van  $U(x) = 0 \rightarrow$  ott szélsőérték

↳  $Mh(x)$  nek vízszintes érintője van

Feltétel: Amit fel kell tüntetni  $\rightarrow$  az érintők és a P pont!

ki kell számolni a hajtást!