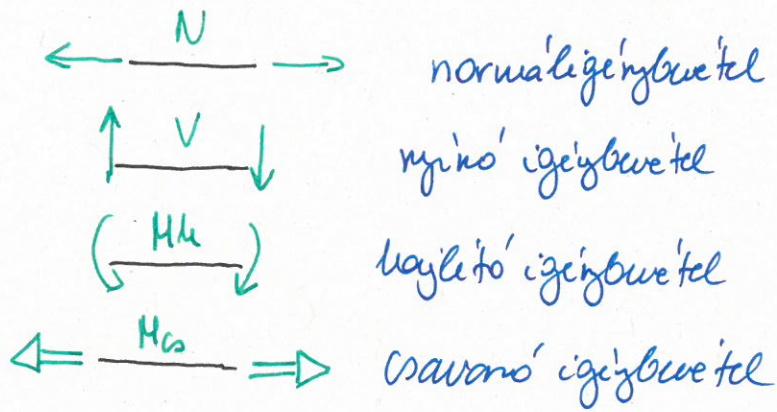


Egyenes rudak igénybevételei

Ismeretlés

Ígnybevételek és előjelkonvenció



Fontos, hogy mindig rajzoljuk oda az ígnybevételi ábra mellé az előjelkonvenciót!

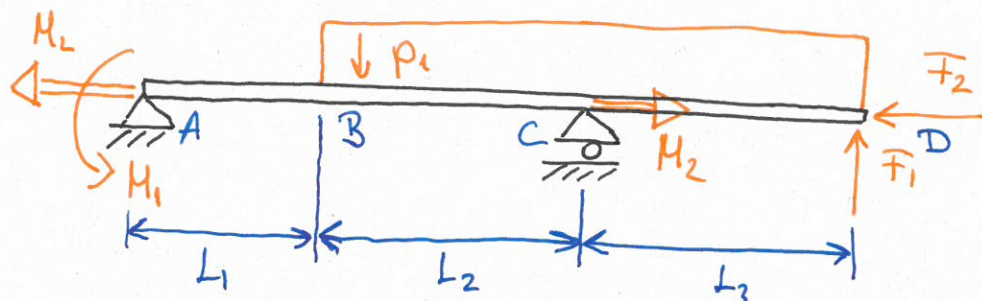
Kapcsolat az ígnybevételek között

$$\begin{aligned} p(x) &= V'(x) \\ V(x) &= -M_k'(x) \end{aligned}$$

Minden olyan szakaszon ahol nem ébred koncentrált terhelés

↓ Ha van koncentrált terhelés \Rightarrow részre kell bontani és az egyes szakaszokra külön-külön egyenletet kell felírni!

1. feladat Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és ábrákat!



Adatok

$$L_1 = 2 \text{ m}$$

$$L_2 = 3 \text{ m}$$

$$L_3 = 4 \text{ m}$$

$$F_1 = 8 \text{ kN}$$

$$F_2 = 7 \text{ kN}$$

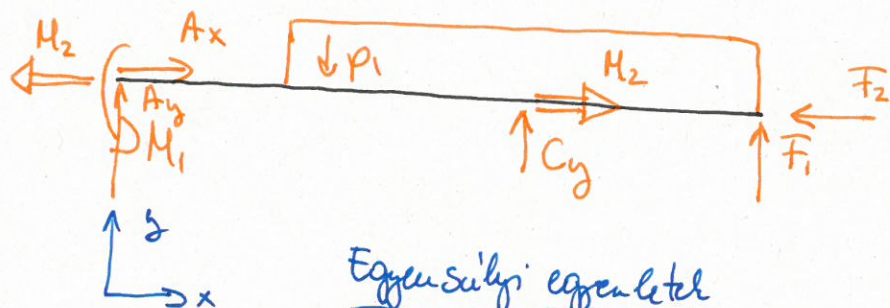
$$M_1 = 4 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 6 \text{ kNm}$$

$$p_1 = 5 \text{ kN/m}$$

1) Reakcióerők kiszámítása

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0: A_x - F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: A_y - p_1(L_2 + L_3) + C_y + F_1 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0: C_y(L_1 + L_2) + F_1(L_1 + L_2 + L_3) + M_1 - p_1(L_2 + L_3)\left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{2}\right) = 0 \quad (3)$$

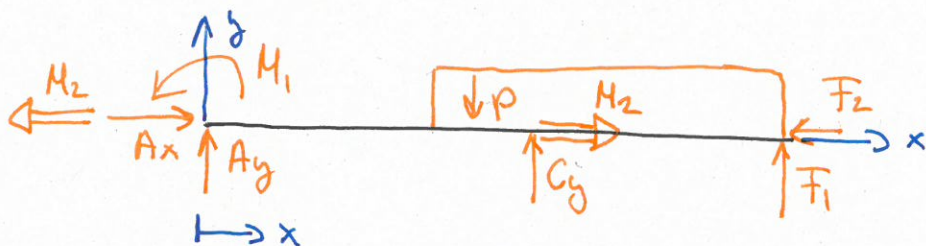
$$(1): A_x = F_2 = 7 \text{ kN} \quad (\rightarrow)$$

$$(3): C_y = \frac{p_1(L_2 + L_3)\left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{2}\right) - M_1 - F_1(L_1 + L_2 + L_3)}{L_1 + L_2} = 23,3 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

$$(2): A_y = p_1(L_2 + L_3) - C_y - F_1 = 3,7 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

Közt, hogy megvan a reakció, minden további ismert \Rightarrow igénybevételek

Az igénybevételei függést mindig a SZTA' alapján írjuk fel!



Látványos, hogy 3 részre kell osztani a rudat: $x[m]$

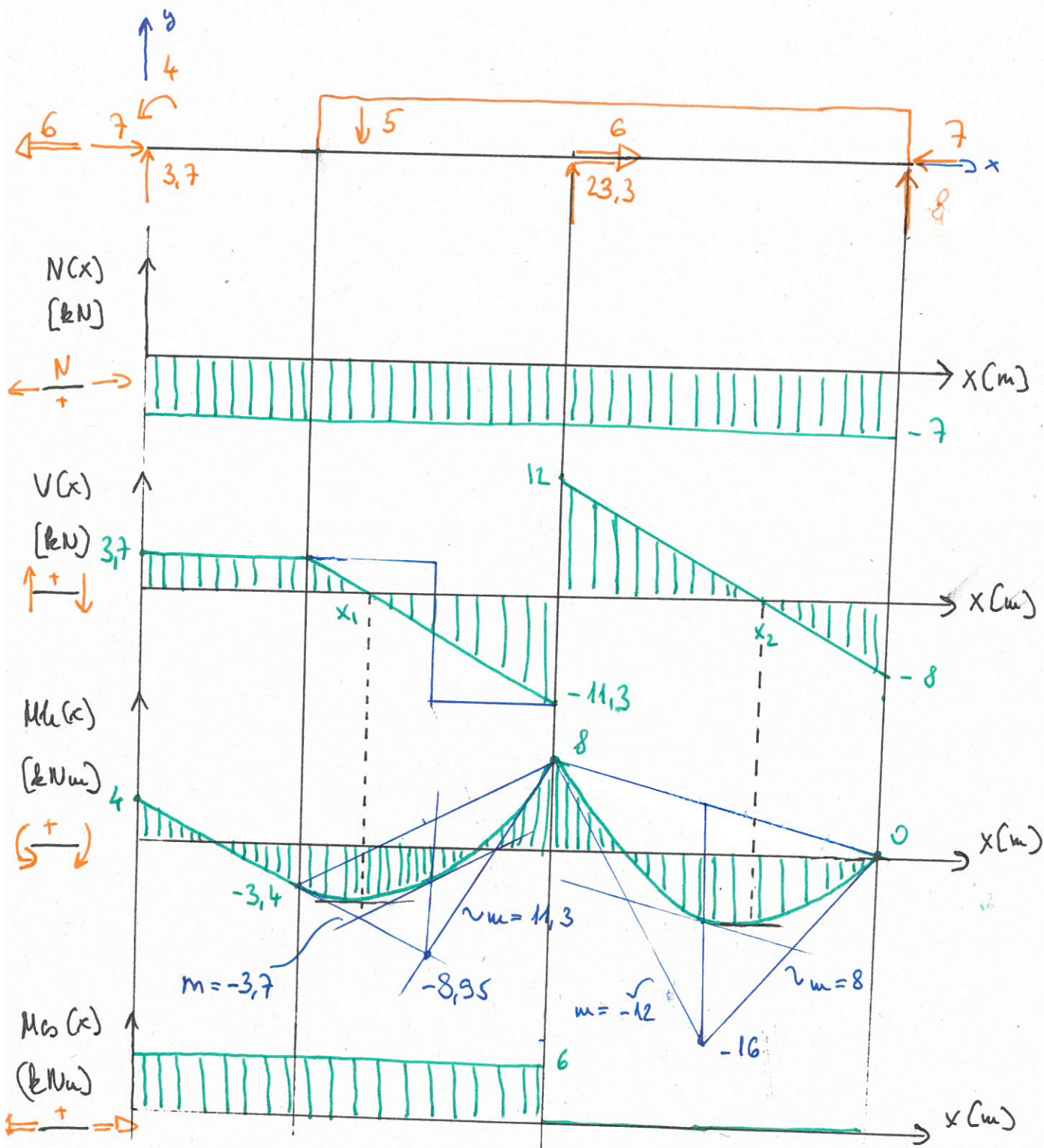
- ① $0 < x < L_1$ $0 < x < 2$
- ② $L_1 < x < L_1 + L_2$ $2 < x < 5$
- ③ $L_1 + L_2 < x < L_1 + L_2 + L_3$ $5 < x < 9$

Tablázatosan írjuk fel az igénybevételei függést!

igénybevételei függ.	① $0 < x < L_1$	② $L_1 < x < L_1 + L_2$	③ $L_1 + L_2 < x < L_1 + L_2 + L_3$
$N(x)$	$-A_x$	$-A_x$	$-A_x \quad (-F_2)$
$V(x)$	A_y	$A_y - p(x - L_1)$	$A_y + C_y - p(x - L_1)$ vagy $-F_1 + p(L_1 + L_2 + L_3 - x)$
$M(x)$	$M_1 - A_y x$	$M_1 - A_y x + \frac{p(x - L_1)^2}{2}$	$M_1 - A_y x + \frac{p(x - L_1)^2}{2} - C_y(x - (L_1 + L_2))$ vagy $-F_1(L_1 + L_2 + L_3 - x) + \frac{p(L_1 + L_2 + L_3 - x)^2}{2}$
$M_0(x)$	M_2	M_2	0

Igyékonyteli ábraé megválaszása

4



Nyiróerő:

$$V(0) = A_y = 3,7 \text{ kN}$$

$$V(L_1)_- = A_y = 3,7 \text{ kN}$$

$$V(L_2)_+ = A_y = 3,7 \text{ kN}$$

$$V(L_1+L_2)_- = A_y - pL_2 = -11,3 \text{ kN}$$

$$V(L_1+L_2)_+ = A_y - pL_2 + C_y = 12 \text{ kN}$$

$$V(L_1+L_2+L_3) = -F_1 = -8 \text{ kN}$$

Hajlítónyomaték

$$M_h(0) = M_1 = 4 \text{ kNm}$$

$$M_h(L_1) = M_1 - A_y L_1 = -3,4 \text{ kNm}$$

$$M_h(L_1+L_2) = \dots = 8 \text{ kNm}$$

$$M_h(L_1+L_2+L_3) = 0 \text{ kNm}$$

Parabolaszerkesztés lépései (a ± első parabola példáján)

5

① kezdő és végso érintők felírása

↳ nyújtósnak

$$M_h'(L_1) = -V(L_1) = -3,7 \text{ kN}$$

$$M_h'(L_1+L_2) = -V(L_1+L_2) = 11,3 \text{ kN}$$

② Érintők metszéspontjainak kiszámítása

$$M_h(L_1 + \frac{L_2}{2}) = M_h(L_1) - V(L_1) \cdot \frac{L_2}{2} = -8,95 \text{ kN}$$

③ Ív megrajzolása, majd eltolása az érintők metszéspontja és a ív közötti távolság felzárjába

④ Parabolaír szerkesztése

Szerzőpontok

M_h szerzőpontja ha $M_h'(x) = 0$

ahol ahol $V(x) = 0$

2. szakaszon

$$V(x_1) = 0 = A_y - p(x_1 - L_1) = 0$$

$$x_1 = \frac{A_y + pL_1}{p} = 2,74 \text{ m}$$

$$M_h(x_1) = M_1 - A_y x_1 + p \frac{(x_1 - L_1)^2}{2} = \underline{\underline{-4,88 \text{ kNm}}}$$

$$M_h''(x) = -p(x) > 0$$

lok. min

3. szakaszon

$$V(x_2) = 0 = A_y + C_y - p(x_2 - L_1) = 0$$

$$x_2 = \frac{A_y + C_y + pL_1}{p} = \underline{\underline{7,4 \text{ m}}}$$

$$M_h(x_2) = M_1 - A_y x_2 + p \frac{(x_2 - L_1)^2}{2} - C_y (x_2 - (L_1 + L_2)) = \underline{\underline{-6,4 \text{ kNm}}}$$

$$M_h''(x) = -p(x) > 0$$

lok. min.

A hajlítóanyagok zérusértékei

① Szakaszon

$$M_k(x_3) = 0 = M_1 - A_y x_3 = 0$$

$$x_3 = \frac{M_1}{A_y} = \underline{\underline{1,08 \text{ m}}}$$

② Szakaszon

$$M_k(x_4) = 0 = M_1 - A_y x_4 + \frac{p(x_4 - L_1)^2}{2} = 0$$

numérikusan: $\frac{5}{2} x_4^2 - 13,7 x_4 + 14 = 0$

másodfoku egyenlet

$$x_{4_1} = 1,359 \text{ m}$$

$$x_{4_2} = 4,12 \text{ m}$$

X Nem jó
nem ②-nc
csik ✓

③ Szakaszon

$$M_k(x_5) = 0 = M_1 - A_y x_5 + \frac{p(x_5 - L_1)^2}{2} - G_y(x_5 - (L_1 + L_2)) = 0$$

numérikusan: $\frac{5}{2} x_5^2 - 37x + 130,5 = 0$

$$\rightarrow x_{5_1} = 5,8 \text{ m}$$

$$\rightarrow x_{5_2} = 9 \text{ m}$$

} mindkettő jó

Tehát a hajlítóanyagok zérusértékei

$$x_3 = 1,08 \text{ m}$$

$$x_4 = 4,12 \text{ m}$$

$$x_5 = 5,8 \text{ m}$$

$$x_6 = 9 \text{ m}$$

2. feladat

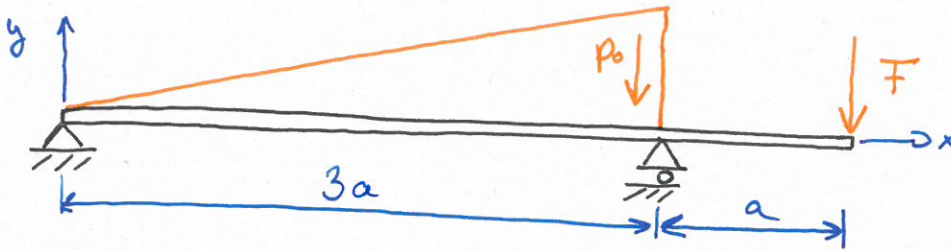
Határozzuk meg az igénybevételi függvényt és ábrákat!

Adatok:

$$a = 0,3 \text{ m}$$

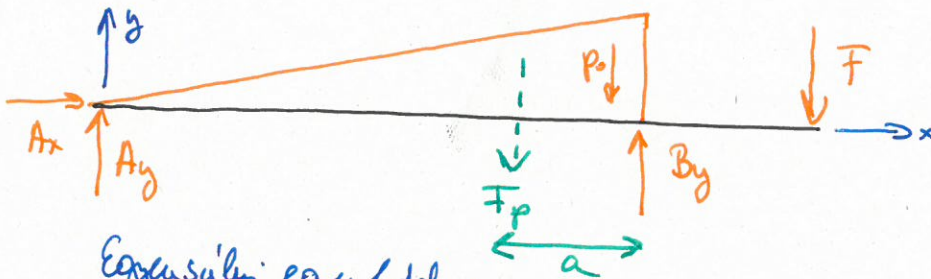
$$F = 1 \text{ kN}$$

$$p_0 = 4 \text{ kN/m}$$



① Reakcióerők

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \quad \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + B_y - F - \frac{p_0 \cdot 3a}{2} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -\frac{p_0 \cdot 3a}{2} \cdot 2a + B_y \cdot 3a - F \cdot 4a = 0$$

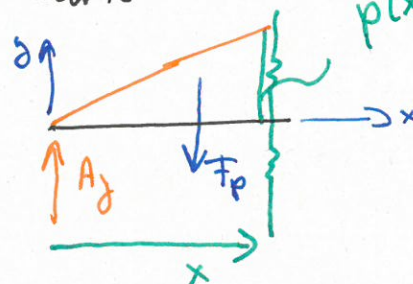
$$B_y = \frac{F \cdot 4a + \frac{p_0 \cdot 6a^2}{2}}{3a} = \underline{\underline{2,533 \text{ kN}}} \quad (\uparrow)$$

$$A_y = \frac{p_0 \cdot 3a}{2} + F - B_y = \underline{\underline{0,267 \text{ kN}}} \quad (\uparrow)$$

Két szakaszra kell osztani a tartót:

① $0 < x < 3a$

② $3a < x < 4a$



$$p(x) = \frac{p_0}{3a} \cdot x$$

Az ①-es szakasz pontjaiban

Az igénybeveteli függvény

$N(x) = 0$
 $M_0(x) = 0$ } ezeket ki kellene írni nem hirtelen fel

	① $0 < x < 3a$	② $3a < x < 4a$	
$V(x)$	$A_y - \left(\frac{p_0}{3a} \cdot x\right) \frac{x}{2}$	F	$V_1(3a) = -1,533 \text{ kN}$ $V_2(3a) = +1 \text{ kN}$
$M(x)$	$-A_y x + \left(\frac{p_0}{3a} x\right) \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$	$F(4a - x)$	$M_{h1}(3a) = 0,3 \text{ kNm}$

Numerikus

$$V_1(x) = 0,267 - 2,22 x^2 \text{ kNm}$$

$$M_{h1}(x) = -0,267x + 0,74 x^3 \text{ kNm}$$

Tényleg teljesül a deriválási szabály!

$$V_2(x) = 1 \text{ kN}$$

$$M_{h2}(x) = 1,2 - x \text{ kNm}$$

Zérushelyek

$$V_1(x_1) = 0$$

$$0,267 - 2,22 x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{0,267}{2,22}} = \underline{\underline{0,35 \text{ m}}}$$

$$M_{h1}(x_2) = 0$$

$$-0,267 x_2 + 0,74 x_2^3 = 0$$

$$x_2(-0,267 + 0,74 x_2^2) = 0$$

$$\underline{\underline{x_2 = 0 \text{ m}}}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{0,267}{0,74}} = \underline{\underline{0,6 \text{ m}}}$$

Szélbeszámítás

$$M_{h1}(x_3) \text{ szél, ha } M_{h1}'(x_3) = 0 \Rightarrow V_1(x_3) = 0$$

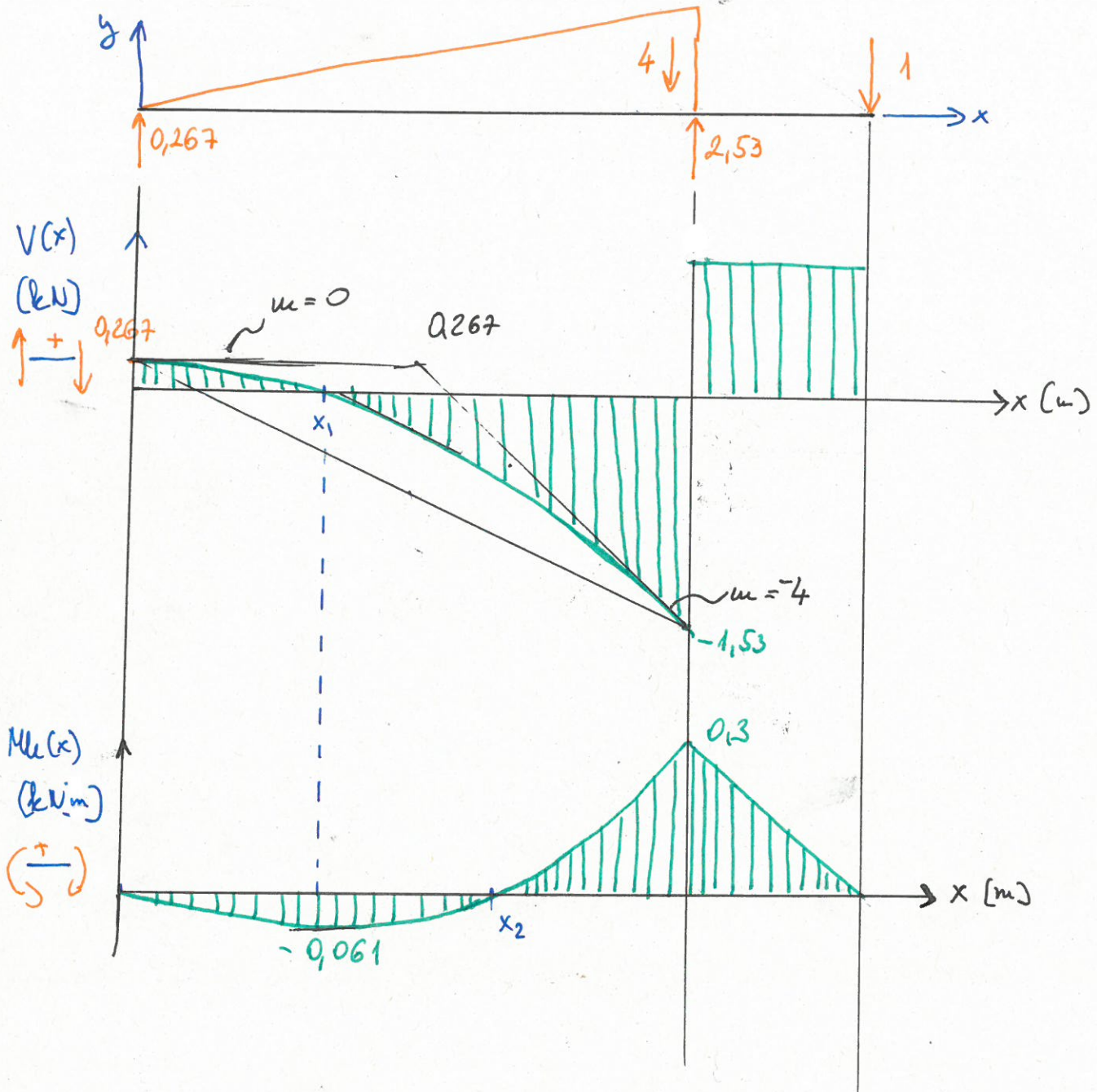
$$x_3 = x_1 = \underline{\underline{0,35 \text{ m}}}$$

$$M_{h1}(x_1) = -0,061 \text{ kNm}$$

mivel $M_{h1}''(x_1) = -p(x_1) > 0$
 lok. min!

lgyüzbeveteli ábra:

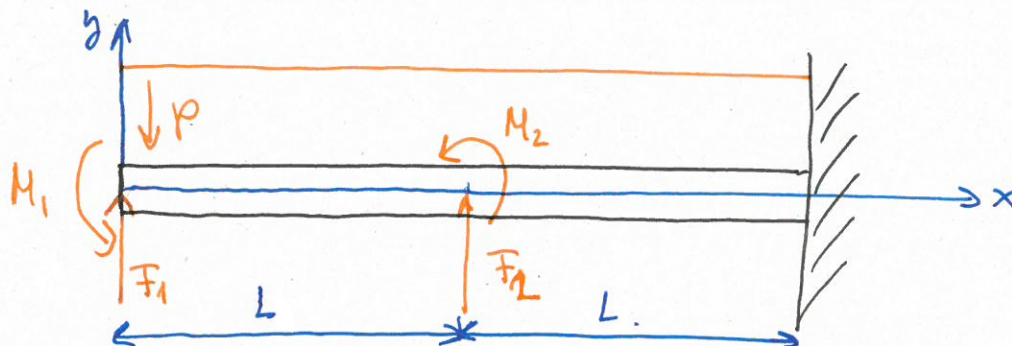
9



3. feladat

Határozzuk meg az egybevetheti függést és ábrákat!

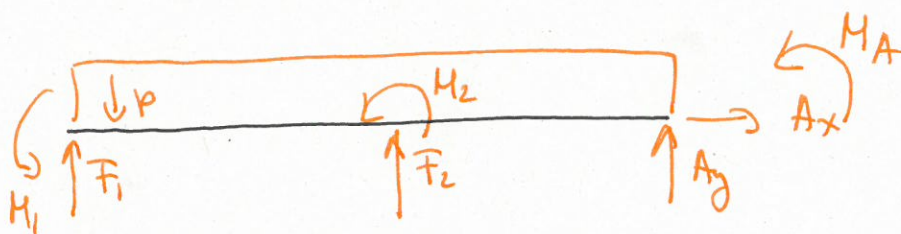
Adatok:



$$\begin{aligned} p &= 50 \text{ kN/m} \\ L &= 2 \text{ m} \\ F_1 &= 50 \text{ kN} \\ F_2 &= 50 \text{ kN} \\ M_1 &= 20 \text{ kNm} \\ M_2 &= 20 \text{ kNm} \end{aligned}$$

① Reakciók

Közt erre nem lenne feltétlenül szükség! (bárhol fel lehet venni mindkettőt!)



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \quad \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_1 + F_2 + A_y - p \cdot 2L = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_1 + p \cdot 2L \cdot L + M_2 - F_1 \cdot 2L - F_2 \cdot L + M_A = 0$$

$$A_y = p \cdot 2L - F_1 - F_2 = 100 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$M_A = F_1 \cdot 2L + F_2 \cdot L - M_1 - M_2 - 2pL^2 = -140 \text{ kNm} (\downarrow)$$

Két szakaszra kell osztani a tartót:

① $0 < x < L$

② $L < x < 2L$

Az igénybevételi függőket a SÁTH' alapján írjuk fel!

11

$$\left. \begin{array}{l} N(x)=0 \\ M_0(x)=0 \end{array} \right\} \text{ ezeket nem tüntetjük fel}$$

	① $0 < x < L$	② $L < x < 2L$
$V(x)$	$F_1 - px$	$F_1 - px + F_2$
$M(x)$	$M_1 - F_1 x + \frac{px^2}{2}$	$M_1 + M_2 - F_1 x + \frac{px^2}{2} - F_2(x-L)$

$$V_1(L) = -50 \text{ kN}$$

$$V_2(L) = 0 \text{ kN}$$

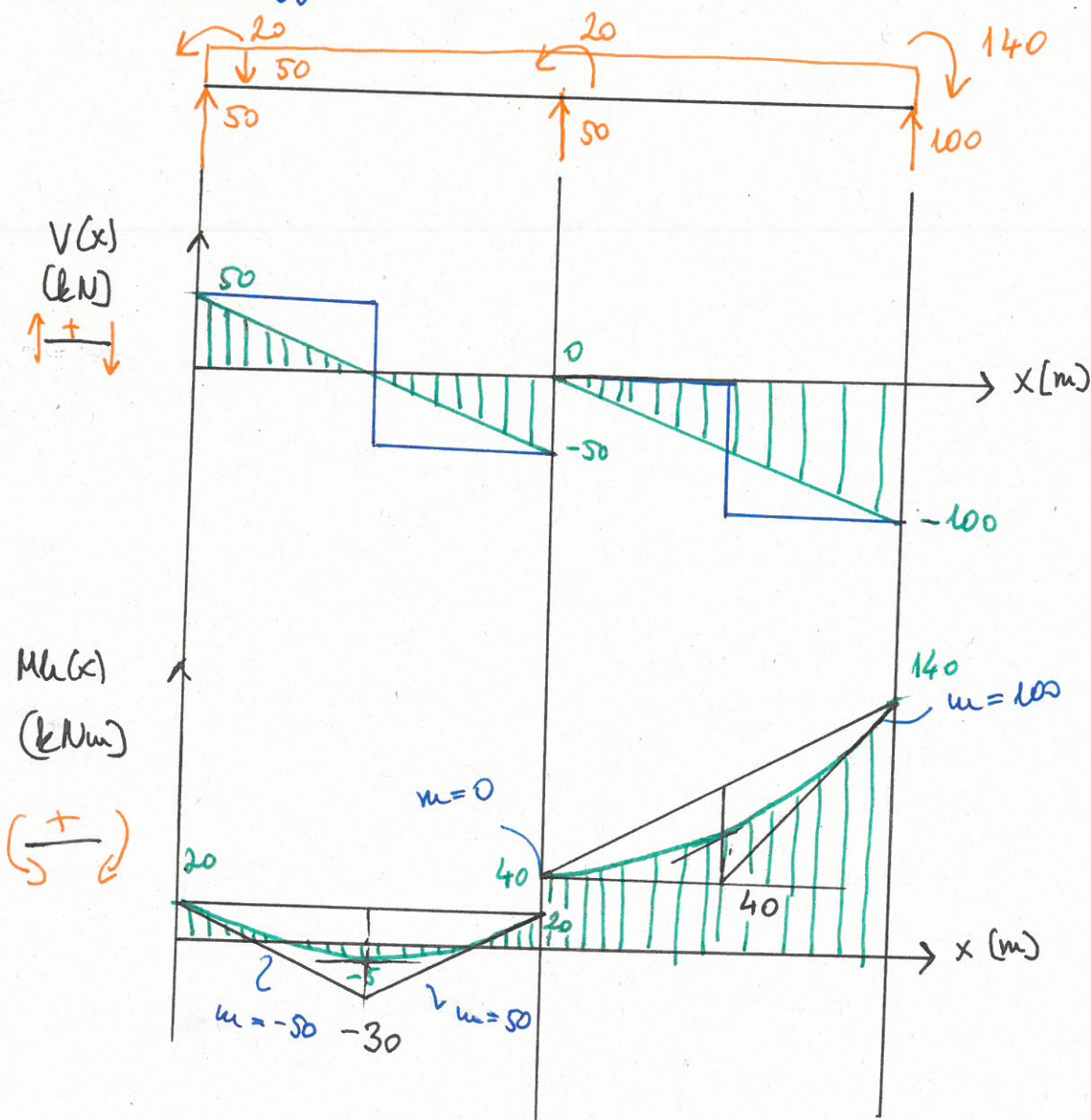
$$V_2(2L) = -100 \text{ kN}$$

$$M_{H1}(L) = 20 \text{ kNm}$$

$$M_{H2}(L) = 40 \text{ kNm}$$

$$M_{H2}(2L) = 140 \text{ kNm}$$

igénybevételi függő



Fémszelvény:

$$V_1(x_1) = 0$$

$$F_1 - p x_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{F_1}{p} = \underline{\underline{1 \text{ m}}}$$

$$V(x_2) = 0$$

$$F_1 - p x_2 + F_2 = 0$$

$$x_2 = \frac{F_1 + F_2}{p} = \underline{\underline{2 \text{ m}}}$$

$$M_{H_1}(x^*) = 0$$

$$M_1 - F_1 x^* + \frac{p x^{*2}}{2} = 25x^{*2} - 50x^* + 20 = 0$$

$$x_1^* = \underline{\underline{0,553 \text{ m}}}$$

$$x_2^* = \underline{\underline{1,447 \text{ m}}}$$

$$M_{H_2}(\tilde{x}) = 0$$

$$M_1 + M_2 - F_1 x + \frac{p x^2}{2} - F_2 (x - L) = 25\tilde{x}^2 - 100\tilde{x} + 140 = 0$$

nincs megoldás!

Szélsőérték

$$\bullet M_{H_1}'(x_1) = -V_1(x_1) = 0 \Rightarrow \text{itt lehet szé!}$$

$$M_{H_1}''(x_1) = -p(x_1) > 0 \quad \text{lok. m.h.}$$

$$M_{H_1}(x_1) = \underline{\underline{-5 \text{ kNm}}}$$

$$\bullet M_{H_2}'(x_2) = -V_2(x_2) \Rightarrow \text{itt lehet szé!}$$

$$M_{H_2}''(x_2) = -p(x_2) > 0 \quad \text{lok. m.h.}$$

$$M_{H_2}(x_2) = \underline{\underline{40 \text{ kNm}}}$$