Dinamika 10. gyakorlat

Síkbeli dinamikai feladatok

Elméleti összefoglaló: merev test dinamikája

$$\underline{I} = m\underline{v}_S \qquad \underline{\Pi}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \cdot \underline{\omega}$$

Din. alaptétele: $[\dot{\underline{I}}, \underline{D}_A]_A = [\underline{F}; \underline{M}_A]$

↓ súlypontra:

$$[\dot{\underline{I}}; \dot{\underline{\Pi}}_S]_S = [\underline{F}; \underline{M}_S]_S$$

ahol $\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S$

Kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2} m \underline{v}_S^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}}_S \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}}_O \underline{\omega}$$

↓ álló pontra!

Merev testek síkmozgása:

↳ kinematikailag $\underline{\omega}(t) \parallel \underline{e}$, $\underline{\varepsilon}(t) \parallel \underline{e}$ } az anyagi pontok (x, y) síkban mozognak

↳ dinamikailag $\underline{\Pi}_S \parallel \underline{e}$

↳ mi kell ehhez

$$\underline{\Pi}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{xz} \cdot \omega \\ -D_{yz} \cdot \omega \\ \Theta_z \cdot \omega \end{bmatrix}$$

ha $\underline{\Pi}_S \parallel \underline{e}$

↳ $-D_{xz} = 0$

↳ $-D_{yz} = 0$

} azaz $\underline{e}$ – tehetetlenségi főirány is!!

Következmény (CSAK SÍKFELADATNÁL)

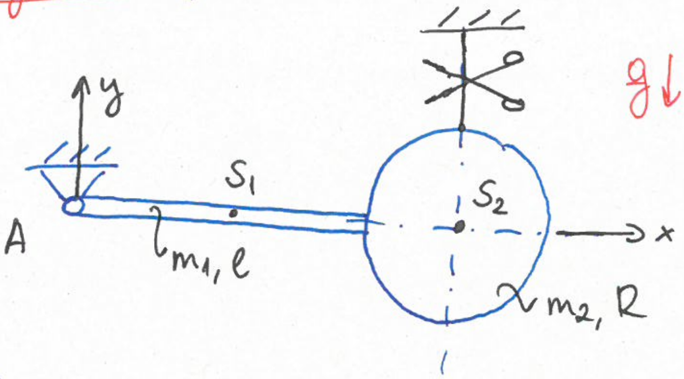
$$\dot{\underline{\pi}}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underbrace{\underline{\omega} \times \underline{\pi}_S}_{\underline{0}}$$

Síkfeladat esetén súlypontra az ún. Newton-Euler egyenletek (dinamika alaptétele) $\left[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\pi}}_S\right]_S = \left[\underline{F}, \underline{M}_S\right]_S$

3 db komponens egyenlet: (x,y síkra)

$$\left.\begin{aligned} x:&\ m \cdot a_{Sx} = \Sigma F_x \\ y:&\ m \cdot a_{Sy} = \Sigma F_y \\ z:&\ \Theta_{Sz} \cdot \varepsilon_z = \Sigma M_{Sz} \end{aligned}\right\}$$ ezeket kell felírni és megoldani!

1. feladat „Palacsintasütő"



Adatok

$m_1 = 4$ [kg]

$m_2 = 3$ [kg]

$l = 0,8$ [m]

$R = 0,3$ [m]

A fenti szerkezetet a $t_0 = 0$ időpillanatban átvágjuk.

Kérdések:

1) Mekkora az A csuklóban ébredő reakció az elvágás pillanatában?

2) Milyen sebességállapotban halad át a függőleges helyzetben

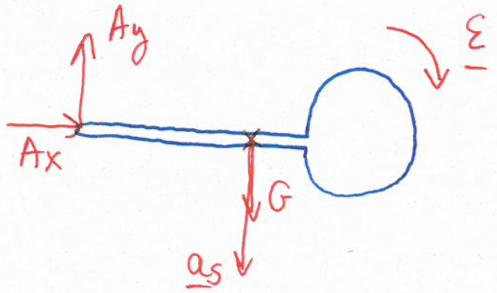
3) Mutassuk meg, hogy tényleg síkfeladatnak tekinthetjük azaz $\underline{\underline{\Theta}}_S \cdot \underline{\omega} = \underline{\Pi}_S \parallel \underline{\varepsilon}$, (azaz, $\underline{\varepsilon}$ tehetetlenségi főirány)

1) Súlypont meghatározása

$$\underline{r}_S = \frac{m_1 \underline{r}_{S1} + m_2 \underline{r}_{S2}}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \cdot \begin{bmatrix} l/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \cdot \begin{bmatrix} l+R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{m_1 l/2 + m_2(l+R)}{m_1 + m_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_S = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [m]}$$

SZTÁ



$$\underline{a}_S = \underbrace{\underline{a}_A}_{=0} + \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix}} \times \underline{r}_{AS} - \underbrace{\omega^2 \underline{r}_{AS}}_{=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r_S \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dinamika alaptétele: $\left[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\Pi}}_S\right]_S = \left[\underline{F}; \underline{M}_S\right]_S$

vagy tartósan álló pontra

$m = m_1 + m_2$

$\left[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\Pi}}_A\right]_A = \left[\underline{F}; \underline{M}_A\right]_A$

$m \cdot \underline{a}_S = \underline{F}$

$x: \boxed{0 = A_x}$

$y: (m_1+m_2)\cdot a_{S_y} = A_y - (m_1+m_2) g$

$\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{D}_A = \underline{M}_A$

$z: \Theta_{A_z} \varepsilon = r_S (m_1+m_2) g$

A_x, A_y, ε ismeretlen

3 egy + 3 ismeretlen

DE kell még Θ_{A_z}

Tehetetlenségi nyomatéki mátrix

rúd $l >> R$; korong $l << R$

$R_{rúd} << l$

$$\underline{\underline{\Theta}}_{S_1 rúd} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 R_{rúd}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{4} m_1 R_{rúd}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m R_{rúd}^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m_1 l^2 \end{bmatrix}$$

$h << R$

$$\underline{\underline{\Theta}}_{S_2 korong} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} m_2 h^2 + \frac{1}{4} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_2 h^2 + \frac{1}{4} m_2 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m_2 R^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_2 R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m_2 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m_2 R^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_A = \underline{\underline{\Theta}}_{S_1 rúd} + \underline{\underline{\Theta}}_{S_1 A} + \underline{\underline{\Theta}}_{S_2 korong} + \underline{\underline{\Theta}}_{S_2 A}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_{S_1 A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\Theta}}_{S_2 A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2(l+R)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2(l+R)^2 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 0$
$z_1 = 0$
$x_1 = \frac{l}{2}$

$y_2 = 0$
$z_2 = 0$
$x_2 = (l+R)$

$$\underline{\underline{\Theta_A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_2 R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \frac{l^2}{4} + \frac{1}{4} m_2 R^2 + m_2 (l+R)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (l+R)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0675 & 0 & 0 \\ 0 & 4,551 & \\ 0 & 0 & 4,618 \end{bmatrix} (kgm^2)$$

rúd végére: $\underline{\underline{\frac{1}{3} m l^2}}$

$$\Theta_{Az} = \underline{\underline{4,618 \, (kgm^2)}}$$

Visszatérve a dinamika alaptételéhez

x: $0 = A_x$

y: $(m_1 + m_2) a_{Sy} = A_y - (m_1 + m_2) g$

z: $\Theta_{Az} \varepsilon = r_{Sy} (m_1 + m_2) g$

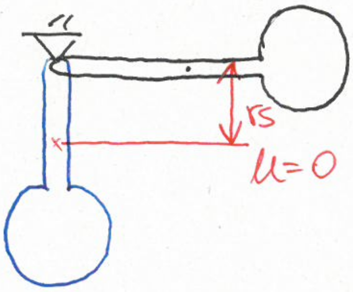
$$\hookrightarrow \varepsilon = \frac{r_{Sy} (m_1 + m_2) g}{\Theta_{Az}} = \underline{\underline{10,41 \left(\frac{rad}{s^2}\right)}} \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10,41 \end{bmatrix} \left(\frac{rad}{s^2}\right)$$

$$\hookrightarrow a_{Sy} = -r_S \varepsilon = -7,286 \left(\frac{m}{s^2}\right) \qquad \underline{a_S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7,286 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$A_y = (m_1 + m_2) a_{Sy} + (m_1 + m_2) g = \underline{\underline{17,67 \, (N)}} \uparrow \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 17,67 \\ 0 \end{bmatrix} [N]$$

Mekkora a sebességállapot függőleges helyzetben?

↳ Munkatétel: $T_2 - T_1 = W_{12}$



$$T_2 = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\underline{\Theta_A}} \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2} \Theta_{Az} \cdot \omega^2$$

$$T_1 = 0$$

$$W_{12} = W_{12}^G = -(U_2 - U_1) = \underline{\underline{(m_1 + m_2) g \, r_S}}$$

$$\frac{1}{2} \Theta_{Az} \omega^2 = (m_1 + m_2) g \, r_S$$

$$\hookrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 (m_1 + m_2) g r_S}{\Theta_a}} = \underline{\underline{4,563 \left[\frac{rad}{s}\right]}}$$

Ebből: $\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4{,}153 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$

$$\underline{v_S} = \underbrace{\underline{v_A}}_{=\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r_{AS}} = \begin{bmatrix} -r_S \cdot \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}193 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Ellenőrizzük, hogy tényleg dinamikai szempontból is szükséges-e (?) [illegible] van:

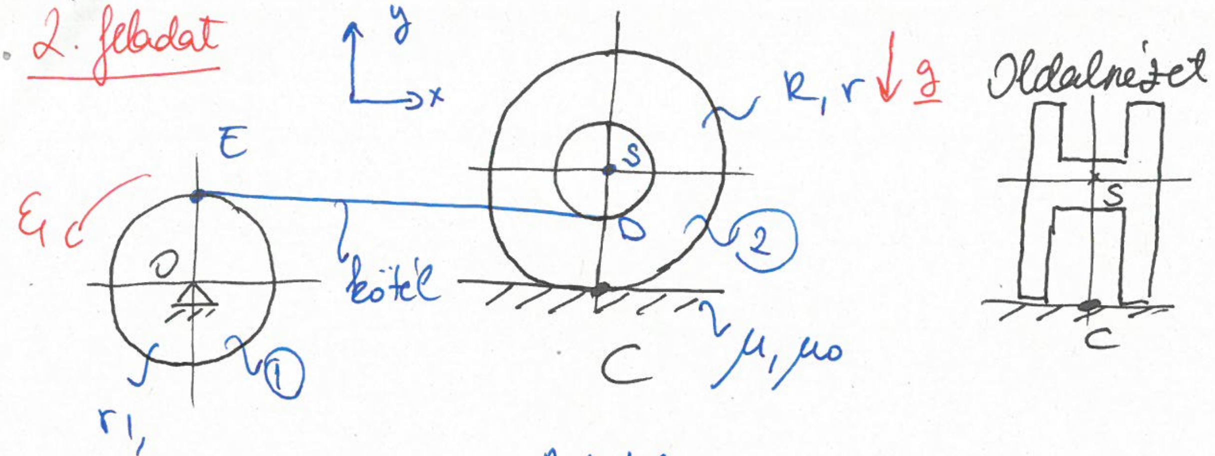
$$\underline{\underline{\Theta}}_{SA} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m_2 R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{1}{4} m_2 R^2 + m_2 (R+l)^2 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (R+l)^2 \end{bmatrix}$$

↑ diagonális ⇒ (x, y, z) főirányokba mutatnak.

Mekkora a 2es helyzetben $\underline{\Pi}_A = ?$

$$\underline{\Pi}_A = \underline{\underline{\Theta}}_A \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{Az} \cdot \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -19{,}178 \end{bmatrix} \left(\frac{kg\,m^2}{s}\right)$$

2. feladat



Adatok:

$R = 0{,}45\,[m]$ $\quad$ $\varepsilon_1 = 3\,\left[\frac{rad}{s}\right]$ = áll $\quad$ $\mu_0 = 0{,}25$

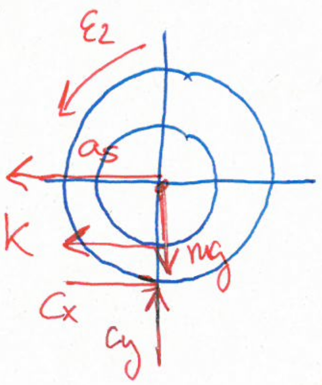
$r = 0{,}15\,[m]$ $\quad$ $m = 70\,[kg]$ $\quad$ $\mu = 0{,}2$

$r_1 = 0{,}25\,[m]$ $\quad$ $\Theta_{Sz} = 4{,}375\,[kgm^2]$

Az alábbi kereket egy kötél segítségével egy tárcsával húzzuk. A $t_0 = 0$ időpillanatban a szerkezet nyugalomból indul ε_1 szöggyorsulással.

Feladat: $\underline{K}$ kötélerő? $\underline{C}$ kényszererő?

1) SZTÁ (A 2-es teste)



Tfh a kerék gördül.

$$\boxed{\frac{S}{N} < \mu_0}$$ gördülés din. feltétele

Dinamika alaptétele:

$$\left(\dot{\underline{I}} \,;\, \dot{\underline{D}}_S\right)_S = \left[\underline{F} \,;\, \underline{M}_S\right]_S$$

a komponens egyenletek

(1) $\quad x: \; -m a_S = -K + C_x$

(2) $\quad y: \; 0 = -mg + C_y$

(3) $\quad z: \; \Theta_{Sz} \cdot \varepsilon_2 = -Kr + C_x R$

5 ismeretlen de csak 3 egyenlet

- Gördülés kinematikája

$$\underline{a}_S = \underline{a}_C + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{CS} - \omega_2^2 \underline{r}_{CS}$$

$$\begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_C \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} - \omega_2^2 \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - R\cdot\varepsilon_2 \\ a_C - \omega_2^2 R \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4) $\boxed{a_S = R\varepsilon_2}$ A gördülésből! + 1 egyenlet

- Kinematikai feltétel: $\boxed{a_{Dx} = a_{Ex}}$ A kötél miatt

$$a_{Ex} = -r_1 \varepsilon_1$$

$a_{Dx} = -(R-r)\cdot\varepsilon_2 \rightarrow$ a gördülés miatt

$$\hookrightarrow -r_1\varepsilon_1 = -(R-r)\varepsilon_2$$

$\underline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$ $\hookrightarrow$ $\varepsilon_2 = \dfrac{r_1\varepsilon_1}{R-r} = 2{,}5\left(\frac{rad}{s^2}\right)$ (5) + 1 egyenlet

$\hookrightarrow$ (4)-be: $a_S = R\varepsilon_2 = 1{,}125$ ~~$\frac{rad}{s}$~~ $\left(\frac{m}{s^2}\right)$ $\underline{a}_S = \begin{bmatrix} -1{,}125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{m}{s^2}\right)$

$\hookrightarrow$ (1)-be: $C_x = K - ma_S$

$\hookrightarrow$ (2): $\bullet\ C_y = mg = 686{,}7\,[N]$

$\hookrightarrow$ (3) $\Theta_S\varepsilon_2 = -Kr + (K - ma_S)R$

$$\Theta_S\varepsilon_2 + ma_S R = (R-r)K$$

$$\hookrightarrow K = \frac{\Theta_S\varepsilon_2 + ma_S R}{R-r} = 154{,}583\,(N)$$

$$\hookrightarrow C_x = 75{,}83\,(N)$$

Ellenőrizni KELL, hogy gördül-e! Ez eddig csak feltevés volt!

$$\frac{S}{N} = \frac{C_x}{C_y} < \mu_0$$

$\frac{C_x}{C_y} = 0{,}11 < 0{,}25 = \mu_0 \Rightarrow$ Tényleg gördül!

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -154{,}583 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (N) \quad ; \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 75{,}83 \\ \cancel{1504{,}583} \\ 0 \end{bmatrix} (N) \rightarrow 686{,}7$$

Most módosítsuk a feladatot!

$\varepsilon_1 = 10 \left[\frac{rad}{s^2}\right]$ megint tegyük fel, hogy gördül!

↳ A fenti számolást végigcsinálva:

$\varepsilon_2 = 8{,}33 \left[\frac{rad}{s^2}\right]$; $a_S = 3{,}75 \left[\frac{m}{s^2}\right]$; $K = 515{,}3$ [N]

$C_x = 251{,}8$ (N) ; $C_y = 686{,}2$ (N)

$\frac{C_x}{C_y} = \underline{0{,}366 > \mu_0}$ Nem teljesül a gördülés feltétele

$\Rightarrow$ Csúszik!

Nem igaz, hogy

$\cancel{a_S = R\varepsilon_2}$

DE! $C_x = \mu C_y$ $(S = \mu N)$

- $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$

x: $-m a_S = -K + C_x$ (1)

y: $0 = -mg + C_y$ (2)

$C_x = \mu C_y$ (3)

- $\underline{D}_S = \underline{M}_S$

$\Theta_S \varepsilon_2 = -Kr + C_x \cdot R$ (4)

5 ismeretlen, 4 egyenlet

Kinematikai feltétel:

$a_S = a_{Dx} + r\varepsilon_2 = r_1\varepsilon_1 + r\varepsilon_2$ (5) $\quad$ +1 egyenlet

a_{Dx} ↑ $r_1\varepsilon_1$ (ugyanaz jön ki ha felírjuk: $\underline{a}_S = \underline{a}_D + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{DS} - \omega_2^2 \underline{r}_{DS}$)

(5) → (1)

$$-m(\cancel{a_{cm}}\, r_1 \varepsilon_1 + r\varepsilon_2) = -K + C_x$$

$$\hookrightarrow K = C_x + m(r_1\varepsilon_1 + r\varepsilon_2)$$

ε_2t (4) be:

$$\Theta_s \varepsilon_2 = -(C_x + m(r_1\varepsilon_1 + r\varepsilon_2))r + C_x \cdot R$$

$$(\Theta_s + mr^2)\varepsilon_2 = \underline{\underline{-C_x r - m r_1 r \varepsilon_1 + C_x R}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{C_x(R-r) - m r r_1 \varepsilon_1}{\Theta_s + m r^2} = \underline{\underline{2,51 \left(\frac{rad}{s^2}\right)}}$$

$$C_y = mg = 686,7 (N)$$

$$\hookrightarrow C_x = \mu C_y = 137,34 (N)$$

$$\underline{\underline{K = 338,7 (N)}}$$

Tehát a második eset:

$$\underline{\underline{\underline{K} = \begin{bmatrix} -338,7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (N)}} \quad ; \quad \underline{\underline{C = \begin{bmatrix} 137,34 \\ 686,7 \\ 0 \end{bmatrix} (N)}}$$