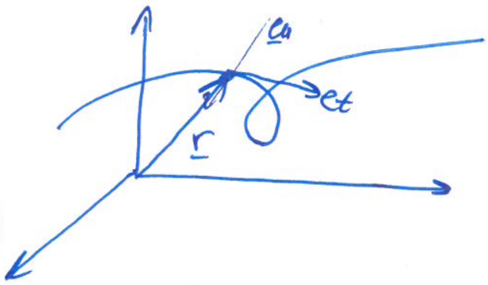
Dinamika 1. gyakorlat

Anyagi pont mozgása

Elméleti összefoglaló



↳ anyagi pont („m tömeggel")

↳ $\underline{r}(t)$ – mozgástörvény

↳ $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$ sebesség vektor

↳ $\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$ – gyorsulásvektor

$s(t)$ – befutási törvény → (ívhossz-fgv) (skalár)!!

Kísérő triéder $\underline{e}_t; \underline{e}_n; \underline{e}_b$

$v(t) = \dot{s}(t)$ pályasebesség

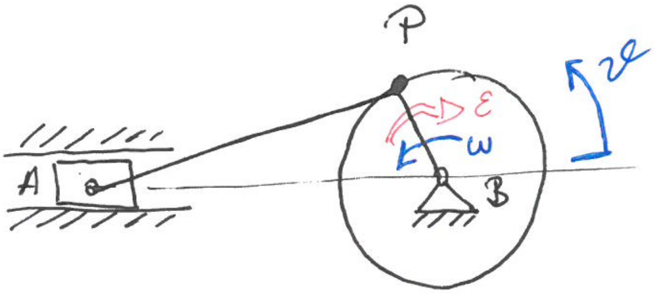
$\underline{a}(t) = a_t \cdot \underline{e}_t + a_n \cdot \underline{e}_n$

$a_t = \ddot{s}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$ ~ görbületi sugár

1. példa

Mechanikai modell



a rudak merevek!

Mennyi a szabadságfok?

1 DoF (BP) mivel egyértelműen meghatározza a csuszka helyzetét is!

BP mivel körpályán mozog

Adatok:

$t_0 = 0\,[s]$ $\vartheta_0 = 30\,[°]$ $R = 0{,}5\,[m]$

$t_1 = 7\,[s]$

$\omega_0 = 10\,[rad/s]$

$\varepsilon = -2\,[rad/s^2] = \text{áll} = \varepsilon(t)$

Mi fog történni?

↳ LASSUL a mozgás, majd elindul a másik irányba

Feladatok:

1) A t_1 időpontban milyen szöghelyzetben lesz a P pont
2) A t_1 időpillanatban milyen irányú lesz P mozgása
3) Rajzolja meg a foronómiai görbéket és az $a_n(t)$ fgvt!

$\int dt \uparrow$

$$\varphi(t)$$
$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = \varepsilon(t)$$

$\downarrow \frac{d}{dt}$

$\varepsilon(t)$ ismert!

kezdeti pillanatban

$$\omega(t) = \int \varepsilon(t)\,dt + \omega_0$$
$$\boxed{\omega(t) = \varepsilon \cdot t + \omega_0}$$
$$\varphi(t) = \int \omega(t) + \varphi_0 = \boxed{\frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} + \omega_0 \cdot t + \varphi_0}$$

Helyettesítsünk vissza:

$$\omega(t) = -2 \cdot t + 10 \; [rad/s]$$
$$\varphi_P(t) = -\frac{2 \cdot t^2}{2} + 10t + \frac{\pi}{6} \; [rad]$$
$$\varphi_P(t_1) = -2 \cdot \frac{7^2}{2} + 10 \cdot 7 + \frac{\pi}{6} = 21{,}5236 = 1233{,}21\,(°)$$
$$= 3 \cdot 360° + 153{,}211\,(°)$$

A mozgás irányát a szögsebesség (iránya) adja:

$$\omega(t_1) = -2 \cdot 7 + 10 = -4 \; [rad/s]$$

↻ már visszafelé mozog

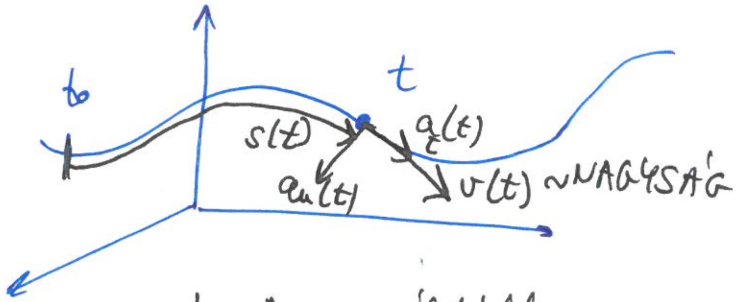
↳ Mikor vált irányt?

$$\omega(t^*) = 0 \implies -2 \cdot t^* + 10 = 0$$
$$t^* = \frac{-10}{-2} = 5\,(s)$$

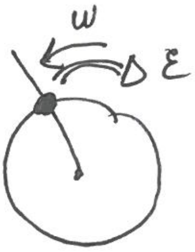
Hol van ekkor?

$$\varphi(t^*) = \frac{1}{2}\varepsilon t^* + \omega \cdot t^* + \varphi_0 = 25{,}5236 = 4 \cdot 360° + 22{,}4°$$

Foronómiai görbék



$s(t)$; $v(t)$; $a_t(t)$ görbék ábrázolása



↳ A mi példánkban:

$$a_t(t) = R \cdot \ddot{\vartheta}(t) = R \cdot \varepsilon = \text{konst!}$$

$$v(t) = R \cdot \dot{\vartheta}(t) = R(\varepsilon t + \omega_0) = \underbrace{R \cdot \varepsilon}_{a_{t0}} \cdot t + \underbrace{R\omega_0}_{v_{t0}!} \quad // \; 5 \tfrac{m}{s}$$

$$s(t) = R \cdot \vartheta(t) = \underbrace{R \cdot \varepsilon}_{a_{t0}} \frac{t^2}{2} + \underbrace{R\omega_0}_{v_{t0}} \cdot t + \underbrace{R \cdot \vartheta_0}_{s_{t0}}$$

Számértékkel: $a_t(t) = -1 \; m/s^2$

$v(t) = -t + 5 \;\rightarrow\; v(t^*) = 0 \;\rightarrow\; t = 5 \,[s]$

$v(t_1) = -7 + 5 = -2 \left[\frac{m}{s}\right]$

$$s(t) = -\frac{t^2}{2} + 5t + \frac{\pi}{12}$$

$s(t_0) = \frac{\pi}{12}$

$s(t^*) = 12{,}762 \,[m]$

$s(t_1) = 10{,}762 \,[m]$

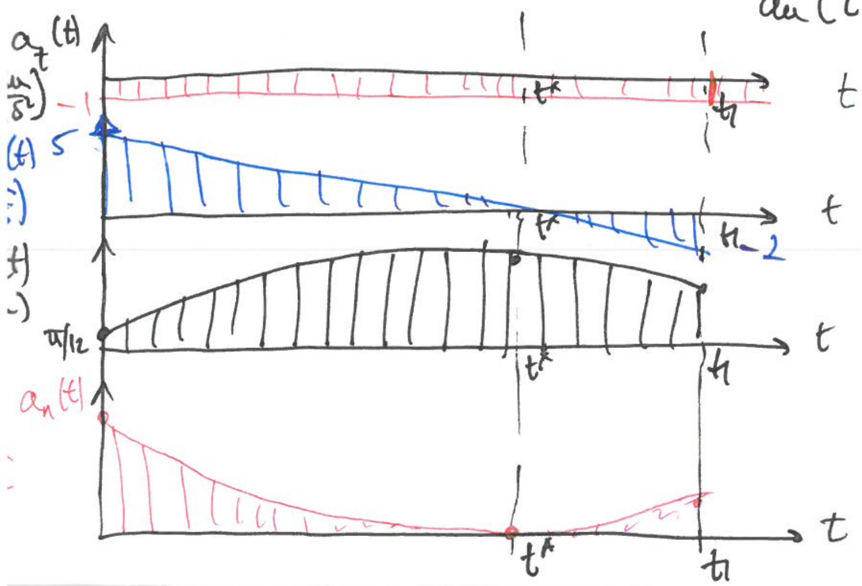
Normális irányban!

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \cancel{\ldots} \; \frac{R^2(\varepsilon \cdot t + \omega_0)^2}{R} = R(\varepsilon^2 t^2 + 2\varepsilon t \omega_0 + \omega_0^2)$$

$$= 2t^2 - 20t + 50$$

$a_n(t_0) = 50 \left[\frac{m}{s^2}\right]$ $\quad a_n(t_1) = 8 \,[m/s^2]$

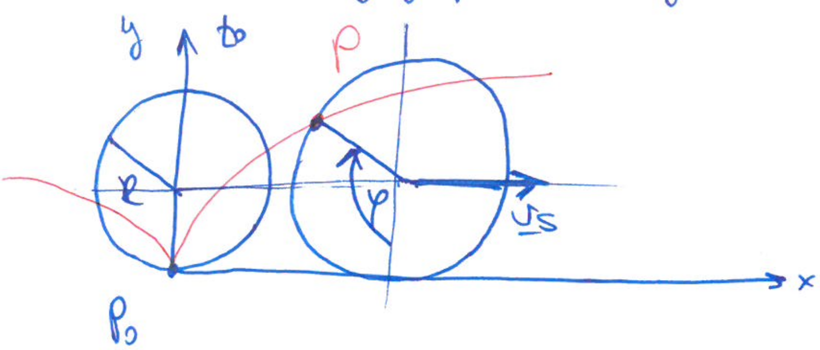
$a_n(t^*) = 0 \left[\frac{m}{s^2}\right]$



Formailag pilóták!

2. példa

Anyagi pont mozgása ciklois pályán
a „gördülő kerék”



Általános koordináta: φ

<u>Adatok:</u>

$R = 0{,}3\,(m)$

$v_S = 5\,\frac{m}{s} = \text{áll}$

gördülő kerék által befutott pálya → ciklois

P a kerékhez kötött pont

állandó sebességgel gördül!

<u>Kérdések:</u>

1) $\underline{v}_P(\varphi) = ?$ $\underline{a}_P(\varphi) = ?$

2) $\underline{v}_P(\varphi_1) = ?$ $\underline{a}_P(\varphi_1)$ ha $\varphi_1 = 75^\circ$

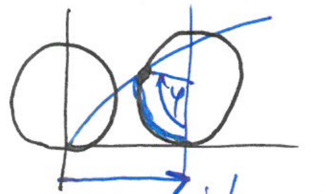
3) $\underline{a}_{Pn}$ és $\underline{a}_{Pt}$ gyorsuláskomponensek

4) $\varphi_1 = 75^\circ$ esetében ρ_1 görbületi sugár

1) ha $t_0 = 0\,(s)$ ⇒ $\underline{r}_P(t_0) = \underline{0}$

talajhoz kötött koordinátarendszer

A t_i időpillanatban mik a koordináták?



$$\underline{r}_P(t) = \begin{bmatrix} x_S - R\sin\varphi \\ R - R\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_S = R\cdot\varphi}$$

(rad) $\varphi = \frac{x_S}{R}$

A ciklois egyenletrendszere:

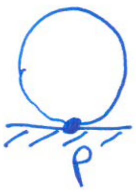
$$\underline{r}_P(t) = \begin{bmatrix} R(\varphi - \sin\varphi) \\ R(1 - \cos\varphi) \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{bmatrix}$$

↳ sebesség:

$\underline{v}_P(t) = \dot{\underline{r}}_P = \frac{d\underline{r}}{dt} =$ itt idő szerint kell deriválni,

mi viszont csak a szög szerint tudunk $\varphi \to \dot{\varphi}$
↳ illetve megjelenik $\dot{\varphi}$

gördülés kinematikai feltétele:



$v_P = 0 \Longrightarrow$

olyan mintha a P pont körül forogna

$v_S = R\cdot\omega = R\cdot\dot{\varphi}$

↳ $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{v_S}{R}}$ ki lett fejezve az ismeretlen $\dot{\varphi}$

• $\underline{v}_P(t) = R\begin{bmatrix}\dot{\varphi} - (\cos(\varphi)\cdot\dot{\varphi}) \\ \sin(\varphi)\cdot\dot{\varphi}\end{bmatrix} = R\dot{\varphi}\begin{bmatrix}1-\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix} = \underline{\underline{v_S\begin{bmatrix}1-\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix}}}$

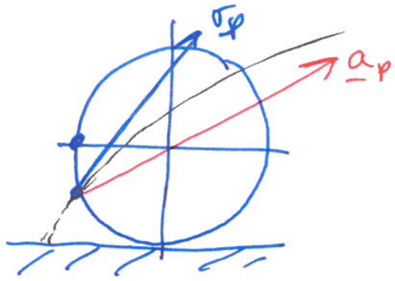
• $\underline{a}_P(t) = \frac{d\underline{v}_P(t)}{dt} = v_S\cdot\begin{bmatrix}\sin(\varphi)\cdot\dot{\varphi} \\ \cos\varphi\,\dot{\varphi}\end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{v_S^2}{R}\begin{bmatrix}\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi)\end{bmatrix}}}$ $=$

↳ $|\underline{a}| = \frac{v_S^2}{R}\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = \frac{v_S^2}{R}$ = áll. a gyorsulás állandó, csak az iránya változik

• $\varphi_1 = 75°$ esetében

– $\underline{v}_{P_1} = 5\cdot\begin{bmatrix}1-\cos 75° \\ \sin 75°\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3,706 \\ 4,83\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s}\right] \Rightarrow |\underline{v}_{P_1}| = 6,088\left[\frac{m}{s}\right]$

– $\underline{a}_{P_1} = \frac{5^2}{0,3}\cdot\begin{bmatrix}\sin 75° \\ \cos 75°\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80,49 \\ 21,87\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right] \Rightarrow |\underline{a}_{P_1}| = 83,41\left[\frac{m}{s^2}\right]$



A gyorsulás komponensei:

$$\underline{a}_p(t) = \underline{a}_{pt}(t) + \underline{a}_{pn}(t)$$

↳ Tangenciális irány → $\underline{e}_t = \frac{\underline{v}(t)}{|\underline{v}(t)|}$

$$\underline{a}_p(t) = (\underline{a}_p \cdot \underline{e}_t) \cdot \underline{e}_t$$

$$\underline{a}_n(t) = \underline{a} - \underline{a}_t$$

$$\underline{e}_{t_1} = \begin{bmatrix} 0,6088 \\ 0,7934 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{a}_{t_1} = \left(\begin{bmatrix} 80,49 \\ 21,87 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,6088 \\ 0,7934 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0,6088 \\ 0,7934 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a}_{t_1}| = 66,34 \ \frac{m}{s^2}$$

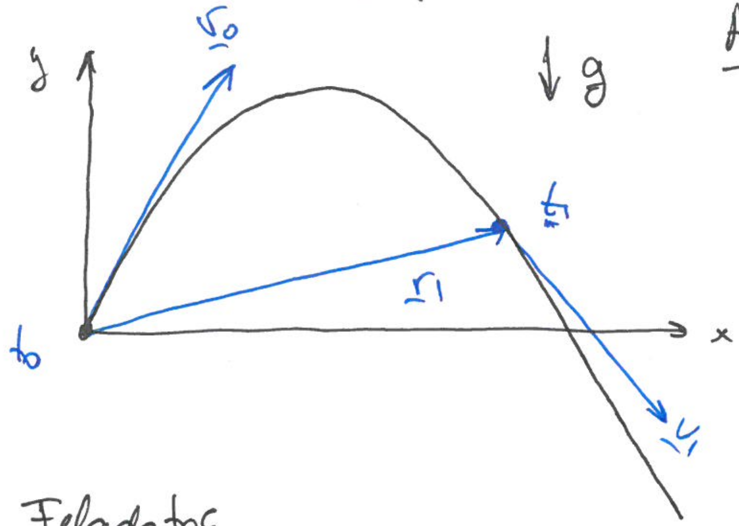
$$\underline{a}_{t_1} = \begin{bmatrix} 40,38 \\ 52,63 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\underline{a}_n = \underline{a}_1 - \underline{a}_{t_1} = \begin{bmatrix} 40,1 \\ -30,77 \end{bmatrix} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$|\underline{a}_{n_1}| = 50,55 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

Görbületi sugár: $a_{n_1} = \frac{v_1^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v_1^2}{a_{n_1}} = \frac{6,088^2}{50,55} = 0,73 \ (m)$

3. példa Anyagi pontrendszer ferde hajítása



Adatok:

$$\underline{r}(t_0) = \underline{r}_0 = \underline{0}$$

$$\underline{r}(t_1) = \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 4,6 \\ 1 \end{bmatrix} (m)$$

$$t \in [t_0, t_1] = [0, 1] (s)$$

Feladatok:

$\underline{v}_0$; $\underline{v}_1$; $\underbrace{\underline{a}_{t1}; \underline{a}_{n1}}_{\underline{a}_1}$; $y(x)$ - pályagörbe; ϱ_1 görbületi sugár

hodográf!

$$\underline{g} = \underline{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9,81 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \longrightarrow \underline{v}(t) = \int \underline{a}(t)\,dt = \underline{a}\cdot t + \underline{v}_0 = \underline{g}\cdot t + \underline{v}_0$$

$= \text{áll}$

$$\underline{r}(t) = \int \underline{v}(t)\,dt = \frac{\underline{g}t^2}{2} + \underline{v}_0 t + \underset{0}{\underline{r}_0}$$

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} v_{0x}\cdot t \\ -\frac{g\cdot t^2}{2} + v_{0y}\cdot t \end{bmatrix}$$

- $\underline{r}(t_1) = \begin{bmatrix} 4,6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($t_1 = 1$) $\qquad v_{0x} \cdot 1 = 4,6$

  $-9,81 \cdot \frac{1^2}{2} + v_{0y} \cdot 1 = 1$ $\Rightarrow$ $\underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 4,6 \\ 5,9 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$

  $|\underline{v}_0| = 7,48 \left[\frac{m}{s}\right]$

- $\underline{v}(t_1) = \underline{g}\cdot t_1 + \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 4,6 \\ -3,9 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right] \qquad |v_1| \approx 6 \left[\frac{m}{s}\right]$

A pályagörbe $y(x)$ függvény kell.

$$\underline{r}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \qquad x(t)=v_{0x}\cdot t \longrightarrow t=\frac{x}{v_{0x}}$$

$$y(t)=v_{0y}\cdot t - g\cdot\frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{y(x)=v_{0y}\cdot\frac{x}{v_{0x}}-g\cdot\frac{x^2}{2v_{0x}^2}=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\cdot x-\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2}$$

↳ Csúcspont: $y'(x)=0$

$$y'=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}-\frac{g}{v_{0x}^2}\cdot x=0$$

$$\hookrightarrow x_{cs}=\frac{v_{0x}\cdot v_{0y}}{g}=\underline{\underline{2{,}77\ (m)}}$$

$$\hookrightarrow y_{cs}=y(x_{cs})=\underline{\underline{1{,}77\ (m)}}$$

Gyorsulások:

$$\underline{a}_t=(\underline{a}\cdot\underline{e}_t)\cdot\underline{e}_t=\left(\underline{a}\cdot\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right)\cdot\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

$$\underline{a}_{t_1}=\frac{1}{v_1^2}(\underline{g}\cdot\underline{v}_1)\underline{v}_1=\frac{1}{6^2}\left(\begin{bmatrix}0\\-9{,}81\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4{,}6\\-3{,}9\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}4{,}6\\-3{,}9\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}4{,}83\\-4{,}1\end{bmatrix}\frac{m}{s^2}}}$$

$$|a_{t_1}|=\underline{\underline{6{,}34\ \frac{m}{s^2}}}$$

$$\underline{a}_{n_1}=\underline{a}-\underline{a}_{t_1}=\begin{bmatrix}-4{,}83\\-5{,}71\end{bmatrix}\left(\frac{m}{s^2}\right) \qquad |a_{n_1}|=7{,}48\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\hookrightarrow a_n(t)=\frac{v^2(t)}{\rho}\Rightarrow\rho_1=\frac{v_1^2}{a_{n_1}}=\underline{\underline{4{,}86\ (m)}}$$

<u>Hodográf</u> sebességvektor által befutott pálya

$$\underline{v}(t) = \underline{v_0} + \underline{a} \cdot t = \begin{bmatrix} 4,6 \\ 5,9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -9,81 \end{bmatrix} \cdot t$$