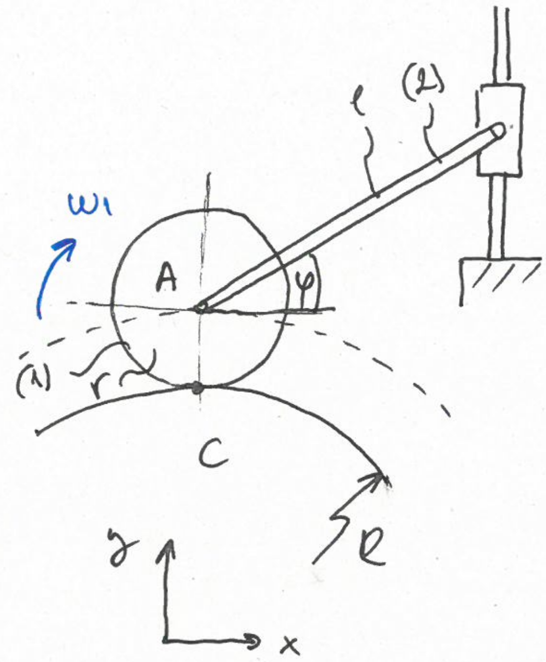
Dinamika - 5. hét

Merev testek mozgásának vizsgálata

1. példa 2010 ZH



Adatok:

$R = 2{,}1\,[m]$

$r = 0{,}3\,[m]$

$l = 1{,}2\,[m]$

$\varphi = 30\,[°]$

$\omega_1 = 4\left[\frac{rad}{s}\right] = áll$

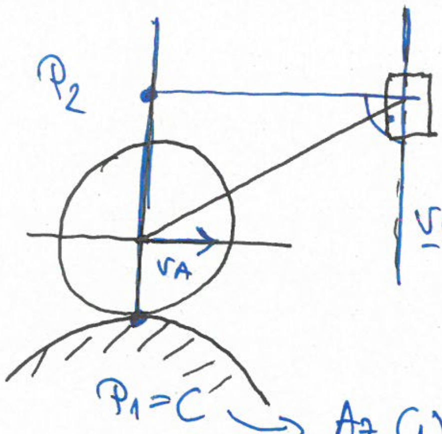
Az (1) es test állandó szögsebességgel gördül a R sugarú álló talajon. A hozzá csuklósan kapcsolódó (2) test másik vége függőlegesen megvezetett.

1.1) Határozza meg a sebességpólus helyét a (2)es test esetében!

1.2) Adja meg a rúd sebességállapotát

1.3) Adja meg a (2)es test szöggyorsulását és B pontjának gyorsulását

1.4) Határozza meg a (2)es test gyorsuláspólusának helyét és jelölje be az ábrán!



$\underline{v}_B$ iránya csak függőleges lehet!

$P_1 = C$ → Az (1)-es test sebességpólusa mert gördül!

Merőlegest állítunk $\underline{v}_A$-ra és $\underline{v}_B$ irányára ⇒ P_2 pont

$$\underline{r}_{AP_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} [m]}}$$

Sebességállapot:

1-es test felől:

$$\underline{v}_A = \underbrace{\underline{v}_C}_{0 \text{ mert sebességpólus}} + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{CA} \qquad \underline{r}_{CA} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_A = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & r & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} r\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{AB}$$

Az irányát tudjuk

$$\underline{v}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ l\cos\varphi & l\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega_1 - l\sin\varphi \cdot \omega_2 \\ l\cos\varphi\, \omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből:

$$0 = r\omega_1 - l\omega_2 \sin\varphi \rightarrow \omega_2 = \frac{r\omega_1}{l\sin\varphi} = 2\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$v_B = l\cos\varphi\,\omega_2 = 1{,}2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = 1{,}2\cdot\sqrt{3} = 2{,}078\left[\frac{m}{s}\right]$$

↳ A testek sebességállapotai

1es test:

$$\left[\underline{0}\,;\,\underline{\omega}_1\right]_C$$

$$\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\-4\end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

2es test:

$$\left[\underline{v}_A\,;\,\underline{\omega}_2\right]_A \qquad \underline{v}_A = \begin{bmatrix}1{,}2\\0\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s}\right] \qquad \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Gyorsulásállapot

$\omega_1 =$ áll és A pont (a korong középpontja) körpályán mozog $\qquad \varepsilon_1 = 0!$

↓

$$\underline{a}_A = \begin{bmatrix}a_{Ax}\\a_{Ay}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{At}\\a_{An}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-\frac{v_A^2}{\rho_A}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-\frac{r^2\omega_1^2}{R+r}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-0{,}6\\0\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$\rho_A = R + r$!!!

2es test:

iránya ismert ↓

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{AB} - \omega_2^2\,\underline{r}_{AB} \qquad \underline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\a_B\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-\frac{r^2\omega_1^2}{R+r}\\0\end{bmatrix} + \begin{vmatrix}i & j & k\\0 & 0 & \varepsilon_2\\l\cos\varphi & l\sin\varphi & 0\end{vmatrix} - \omega_2^2\begin{bmatrix}l\cos\varphi\\l\sin\varphi\\0\end{bmatrix}$$

Ezt kellene:

$$0 = -l\varepsilon_2 \sin\varphi - l\omega_2^2 \cos\varphi \longrightarrow \varepsilon_2 = \frac{-l\omega_2^2 \cos\varphi}{l \sin\varphi} = -\omega_2^2 \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\hookrightarrow \varepsilon_2 = -6{,}93 \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

$$a_B = -\frac{r^2\omega_2^2}{R+r} + l\varepsilon_2 \cos\varphi - l\omega_2^2 \sin\varphi$$

visszaírva

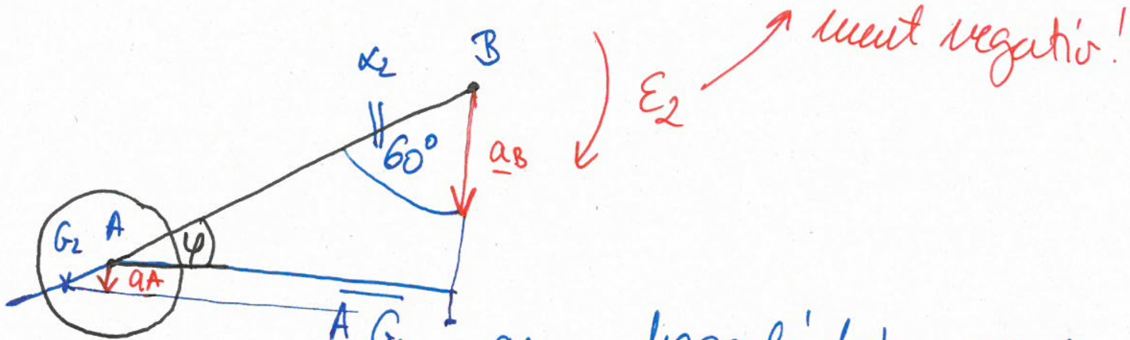
$$a_B = -10{,}2 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Tehát a gyorsulásállapot a (2)-es testben:

$$\underline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6{,}93 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s^2}\right] \quad ; \quad \underline{a}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -10{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Gyorsulásábra - gyorsuláspólus

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} \Rightarrow \alpha_2 = 60°$$



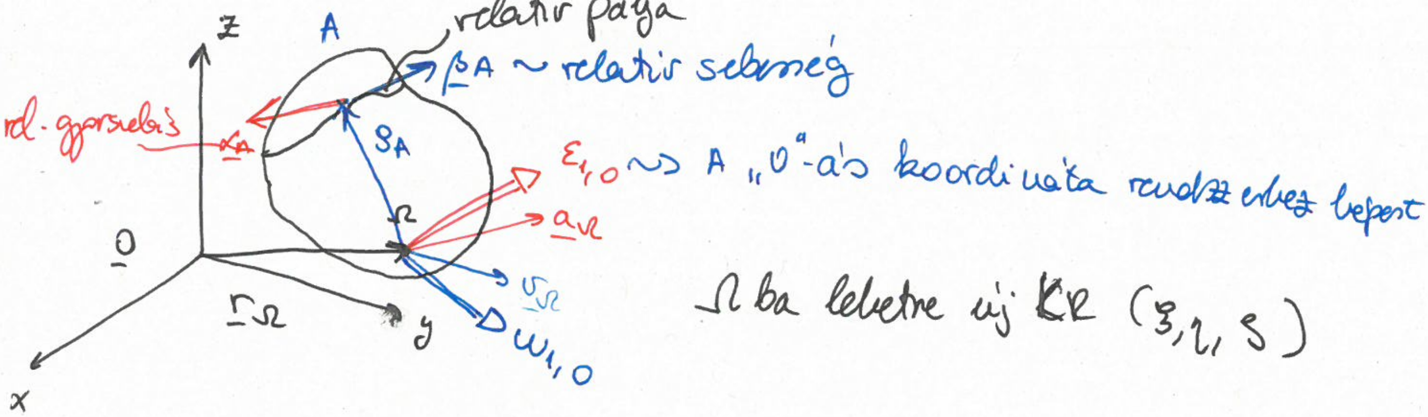
$$\frac{\overline{AG_2}}{\overline{BG_2}} = \frac{a_A}{a_B}$$

hasonló háromszögek alapján

$$\frac{\overline{AG_2}}{\overline{AB}} = \frac{a_A}{a_B - a_A} \Rightarrow \overline{AG_2} = \frac{a_A}{a_B - a_A} \cdot \overline{AB} = \boxed{0{,}075} \,[m]$$

$$\underline{r}_{AG_2} = \begin{bmatrix} -\overline{AG_2}\cos\varphi \\ -\overline{AG_2}\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0650 \\ -0{,}0375 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$$

Merev testek mozgásának vizsgálata egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerben



Ω-ba helyezve új KR (ξ, η, ζ)

Az A pont sebessége: $\underline{v}_A = \underline{\beta}_A + \underline{v}_{A\,száll}$

(abszolút) = (relatív) + (szállító)

$$\underline{v}_{A\,száll} = \underline{v}_\Omega + \underline{\omega}_{10} \times \underline{\rho}_A$$

Az A pont gyorsulása

$$\underline{a}_A = \underline{\alpha}_A + \underline{a}_{A\,száll} + \underline{a}_{A\,cor}$$

(abszolút) = (relatív) + (szállító) + (Coriolis)

$$\underline{a}_{A\,száll} = \underline{a}_\Omega + \underline{\varepsilon}_{1,0} \times \underline{\rho}_A + \underline{\omega}_{1,0} \times (\underline{\omega}_{1,0} \times \underline{\rho}_A)$$

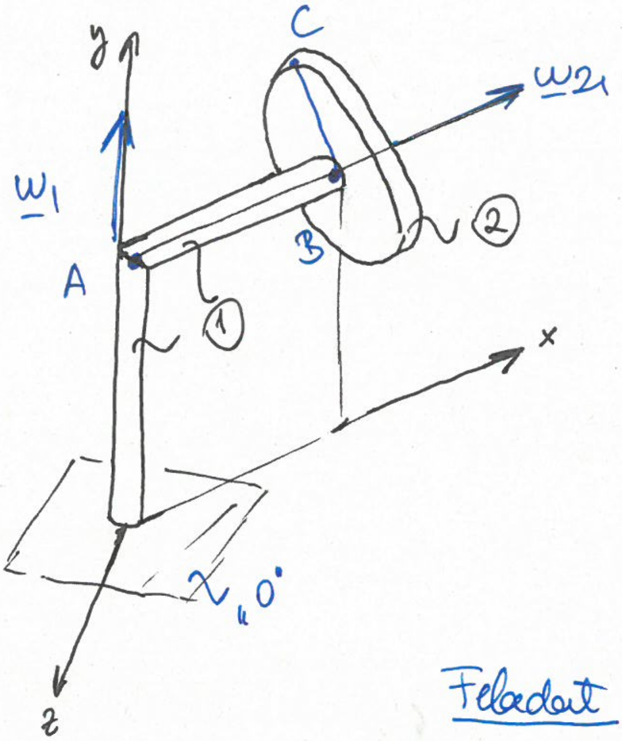
$$\underline{a}_{A\,cor} = 2\underline{\omega}_{10} \times \underline{\beta}_A$$

A szögsebességekre:

$$\underline{\omega}_{20} = \underline{\omega}_{21} + \underline{\omega}_{10}$$

$$\underline{\varepsilon}_{20} = \underline{\varepsilon}_{21} + \underline{\varepsilon}_{10} + \underline{\omega}_{10} \times \underline{\omega}_{21}$$

Bemutató feladat „Robotkar"



Adatok:

$$\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$|\omega_{2,1}| = 2 \left[\frac{rad}{s}\right] = \text{áll}$$

$$\underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} (m)$$

$$\underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} -0,3 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$$

Feladat: $[\underline{\omega}_2;\ \underline{v}_C]$ és $[\underline{\omega}_2;\ \underline{\varepsilon}_2, \underline{a}_C)$ gyorsáll.

Alkalmazzuk a relatív kinematikát

↳ vizsgáljuk a 2es testet az 1eshez viszonyított mozgással

Vonatkoztatási rendszer:

„0"-val jelölt test

„1"es test

Koordináta rendszerek

„0"-hoz kötött (x, y, z)

„1"-hez kötött (ξ, η, ζ)

A vizsgált időpillanatban

ezek fedésben vannak!! DE! nem ekvivalensek

A vizsgálandó pont: C_2 pont

↳ C_2 pont ami a 2est testhez van rögzítve

Pillanatnyilag fedésben vannak ⟸

↳ C_1 (fiktív pont) 1es testen

A relatív kinematika

$$\underline{v}_{C2} = \underline{\beta}_{C2} + \underline{v}_{C2száll} \quad ; \quad \underline{a}_{C2} = \underline{\alpha}_{C2} + \underline{a}_{C2száll} + \underline{a}_{C2cor}$$

$$\underline{v}_{C2száll} = \underline{v}_{C1}, \qquad \underline{a}_{C2száll} = \underline{a}_{C1}, \qquad \underline{a}_{C2cor} = 2(\underline{\omega} \times \underline{\beta}_{C2})$$

A szögsebességekre

$$\underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_{21}$$

$$\underline{\varepsilon}_2 = \underline{\varepsilon}_1 + \underline{\varepsilon}_{21} + \underline{\omega}_1 \times \underline{\omega}_{21}$$

3 lépésben végezzük el a feladatot

1) A „2"-es test vizsgálata az „1"-hez képest (ξ, η, ζ)
   - ↳ álló tengely körüli forgás
     - ↳ görög betűs mennyiségek $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$
     - ↳ relatív szögsebesség, szöggyorsulás
2) Az „1"-es test vizsgálata a „0"-hoz képest (x, y, z)
   - ↳ álló tengely körüli forgás
     - ↳ $\underline{v}, \underline{a}$
     - ↳ 0-hoz viszonyított szögseb. / szöggyors.
3) összerendelés a relatív kinematikával

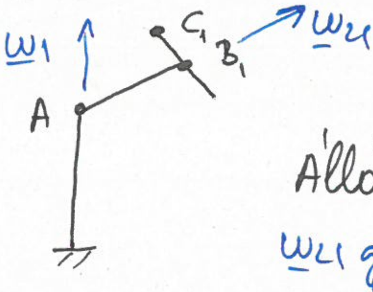
FONTOS → A (ξ, η, ζ)-ban adott mennyiségeket (x, y, z)-be kell átírni ⇒

Most ugyanaz, mivel a két koordináta-rendszer átfedésben van!

Sebességáll.

1) → szemlélettel:

„2" → „1"



Álló tengely körüli forgás ω_{21}-gyel B körül

$$v_{C_2} = \omega_{21}\cdot r_{BC} = 2\cdot\sqrt{0,3^2+0,4^2} = 1 \left[\frac{m}{s}\right]$$

↳ iránya merőleges BC_1-re és a korong síkjában van
„z" iránya van

$$\underline{v}_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Analitikusan:

B ~~v~~ álló pont → $\underline{v}_B = \underline{0}$

csak most ↓

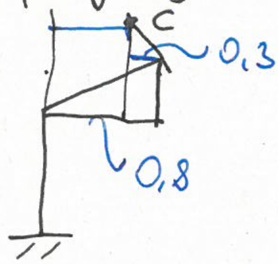
$$\underline{\varrho}_{BC(\xi,\eta,\zeta)} = \underline{r}_{BC(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -0,3 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_{C_2} = \underbrace{\underline{v}_B}_{\underline{0}} + \underline{\omega}_{21}\times\underline{\varrho}_{BC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1,6 & 1,2 & 0 \\ -0,3 & 0,4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\underline{\omega}_{21} = \omega_{21}\cdot\underline{e}_{AB} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

2) „1" → „0" C_1 pont mozgása (álló t. körüli forgás) ω_1-gyel

$$v_{C_1} = \omega_1\cdot r_C = 1\cdot(0,8-0,3) = 0,5 \left[\frac{m}{s}\right]$$



$$\underline{v}_{C_1} = \underbrace{\underline{v}_A}_{\underline{0}} + \underline{\omega}_1\times\underline{r}_{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ 0,5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\underline{r}_{AC} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (m)$$

3) Relatív kinematika

$$\underline{v}_{C2} = \underline{\beta}_{C2} + \underline{v}_{C2\,száll} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\underline{\beta}_{C2} = \underline{v}_{C1}$$

$$\underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_{21} + \underline{\omega}_{10} = \begin{pmatrix} 1{,}6 \\ 2{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Gyorsulásállapot

1) „2" – „1" relatív

körmozgást végez

$$\underline{\alpha}_{C2} = \underline{\alpha}_{C2t} + \underline{\alpha}_{C2n} = \alpha_{C2t} \cdot \underline{e}_t + \alpha_{C2n}\, \underline{e}_n$$

$\alpha_{C2t} = \rho_{BC} \cdot \varepsilon_2 = 0$ mert áll. sebességgel forog

$$\alpha_{C2n} = \frac{\beta_C^2}{\rho_C} = \frac{\beta_C^2}{\rho_C} = \frac{1}{0{,}5} = \underline{\underline{2 \left[\frac{m}{s^2}\right]}}$$

$$\underline{e}_n = \frac{\underline{\rho}_{CB}}{|\rho_{CB}|} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\alpha}_{C2} = \alpha_{Cn} \cdot \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ -1{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{\frac{m^2}{s}}}$$

↳ Analitikusan

$$\underline{\alpha}_{C2} = \underbrace{\underline{\alpha}_B}_{=0} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_{21}}_{=0} \times \underline{\rho}_{BC} + \underline{\omega}_{21} \times (\underline{\omega}_{21} \times \underline{\rho}_{BC}) = \ldots$$

ugyanez adódik

2) „1" → „0" körmozgást végez G

$$\underline{a}_{C1} = \underbrace{a_{C1t}}_{0}\, \underline{e}_t + a_{C1n}\, \underline{e}_n$$

0 állandó seb.

$$a_{C1n} = \frac{v_{C1}^2}{r_C} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = \underline{\underline{0{,}5 \left[\frac{m}{s^2}\right]}}$$

$$\underline{e}_n = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{a}_{C1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

3) Relatív kinematika

$$\underline{a}_{C_2} = \underline{\alpha}_{C_2} + \underbrace{\underline{a}_{C_2\,száll}}_{\underline{a}_{C_1}} + \underline{a}_{C_2\,cor}$$

$$\underline{a}_{C_2\,cor} = 2(\underline{\omega}_1 \times \beta_C) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_C \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega_1\beta_C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\underline{a}_{C_2} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ -1{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\underline{\varepsilon}_2 = \underbrace{\underline{\varepsilon}_1}_{=\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_2}_{\underline{0}} + \underline{\omega}_1 \times \underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}6 \end{bmatrix} \left(\frac{rad}{s^2}\right)$$