Dinamika 11. hét

Gyakorló óra (konzultáció)
a ZH előtt.

Merev test dinamikája

Síkfeladatok: Feltétel: $\underline{\omega}(t) \parallel \underline{e}$ és $\underline{\varepsilon}(t) \parallel \underline{e}$ – kinematikai felt.

$\underline{\Pi}_S \parallel \underline{e}$ (vagy $\underline{e}$ tehetetlenségi főirány)
dinamikai felt

Dinamika alaptétele $[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\Pi}}_S]_S = [\underline{F}, \underline{M}_S]_S$
(súlypontra v. álló pontra)

↳ 3 vetületi egyenlet

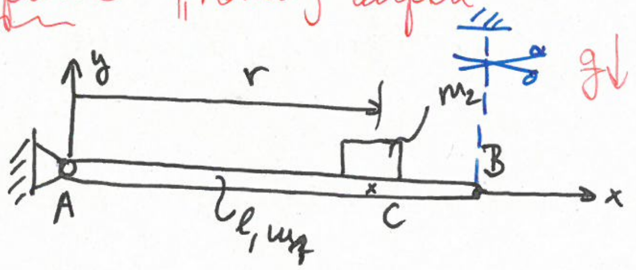
$$x: \quad m \cdot a_{Sx} = F_x$$
$$y: \quad m \cdot a_{Sy} = F_y$$
$$z: \quad \Theta_{Sz} \cdot \varepsilon_z = M_{Sz}$$

Gördülés feltétele

$$\boxed{\frac{S}{N} < \mu_0}$$

---

1. példa „Maradj talpon”



Adott: m_1, m_2, ℓ, g

Feladat: • $r = ?$ hogy rögtön elváljon
• $\underline{A}(\varphi)$ függvényét!

Megoldás

↳ Mi kell ahhoz hogy az m_2 tömeg elváljon?

↳ dinamikai feltétel → a tömeg és a rúd között nem ébred kényszer $\boxed{N=0}$!

↳ kinematikai feltétel:

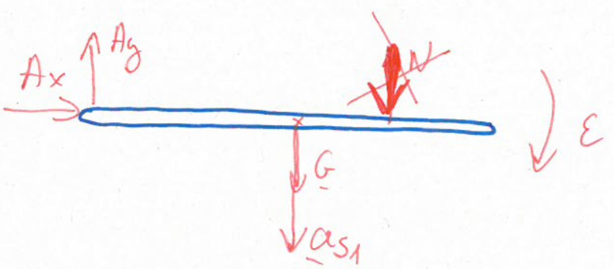
$a_2 = g$ → pontosan a neh. gyorsulásnak megfelelően zuhan

és

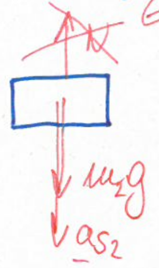
$a_C \geq g$ → a C pont gyorsulása nagyobb vagy egyenlő!

SZTA': Most két test van ⇒ két SZTA' kell:

rúd



tömeg



mivel nincs nyomóerő le lehet hagyni!

Fel tudjuk írni a dinamika alaptételét:

$$[\dot{\underline{I}}, \underline{D}_S]_S = [\underline{F}, \underline{M}_S]_S \quad \text{vagy} \quad [\dot{\underline{I}}, \underline{D}_A]_A = [\underline{F}; \underline{M}_A]_A$$

Az anyagi pontra:

$$y: -m_2 a_{S2} = -m_2 g \Rightarrow \boxed{a_{S2} = g}$$

ez volt a kin. feltételünk!

A rúdra:

$$x: \quad m \cdot a_{Sx} = A_x \qquad \boxed{A_x = 0}$$

$$\hookrightarrow a_{Sx} = 0!$$

$$y: -m \cdot a_{Sy} = A_y - m_1 g$$

ment ε negatív irányú

$$z: -\Theta_{A_z}\varepsilon = -m_1 g \cdot \frac{\ell}{2}$$

$$\Theta_{A_z} = \underbrace{\frac{1}{12} m_1 \ell^2}_{\text{rúdnak S-re!}} + \underbrace{m_1 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}_{\text{Steiner tag}} = \boxed{\frac{1}{3} m_1 \ell^2}$$

← rúdnak a tehetetlenségi nyomatéka a rúdvégre

Visszaírva:

$$-\frac{1}{3} m_1 \ell^2 \varepsilon = -m_1 g \frac{\ell}{2}$$

$$\hookrightarrow \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$$

(Az iránya pedig ↻)

álló helyzetből indul

Kinematikai feltételünk: $a_C \geq a_{S2} = g \qquad a_C = r \cdot \varepsilon$

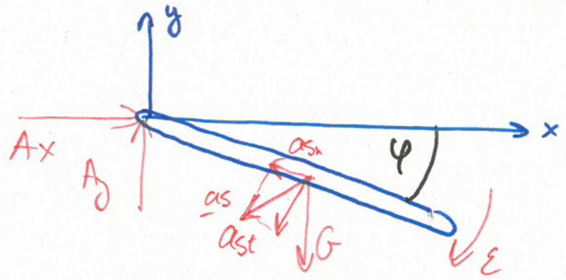
$$r\varepsilon \geq g \Rightarrow r \geq \frac{g}{\varepsilon} = \frac{2}{3}\ell$$

A feltétel

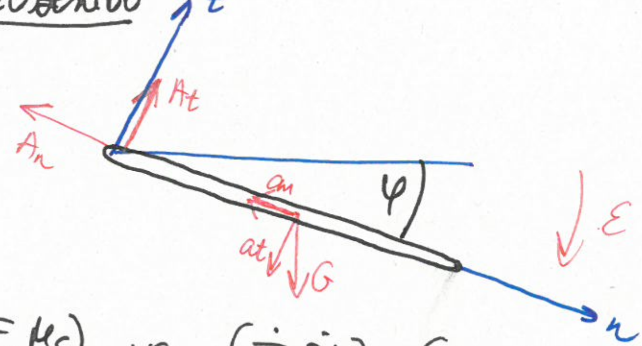
$$\boxed{r \geq \frac{2}{3}\ell}$$

A(φ) függvény

Általános helyzetben a rúd DZTÁ-ja



⟹ célszerűbb



A din. alaptétele: $[\dot{I}, \dot{\Pi}_S]_S = [F, M_S]_S$ vagy $[\dot{I}, \dot{\Pi}_A]_A = [F, M_A]_A$

$$\left.\begin{aligned} t:&\quad -m_1 a_t = A_t - m_1 g\cos\varphi \\ n:&\quad -m_1 a_n = -A_n + m_1 g\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n, a_t \Rightarrow \text{Munkatétel!!}$$

$$z:\quad -\Theta_A \cdot \varepsilon = -m_1 g \frac{l}{2}\cos\varphi$$

Θ_A: $\frac{1}{3} m_1 l^2$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{3} m_1 l^2 \varepsilon = -m_1 g \frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$\hookrightarrow \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi$$

Munkatétel

$T_2 - T_1 = W_{12}$ $\qquad T_1 = \frac{1}{2}\Theta_A \omega_1^2 = 0!$ álló helyzet miatt

$W_{12} = W_{12}^G = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2 = m_1 g \frac{l}{2}\sin\varphi$

$$\frac{1}{2}\Theta_A \omega_2^2 = m_1 g \frac{l}{2}\sin\varphi$$

$$\hookrightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{m_1 g\, l\sin\varphi}{\Theta_A}} = \sqrt{\frac{m_1 g\, l\sin\varphi}{\frac{1}{3} m_1 l^2}} = \sqrt{\frac{3g}{l}\sin\varphi}$$

A gyorsulások: $a_{St} = \frac{l}{2}\cdot\varepsilon = \frac{l}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi = \frac{3}{4} g\cos\varphi$

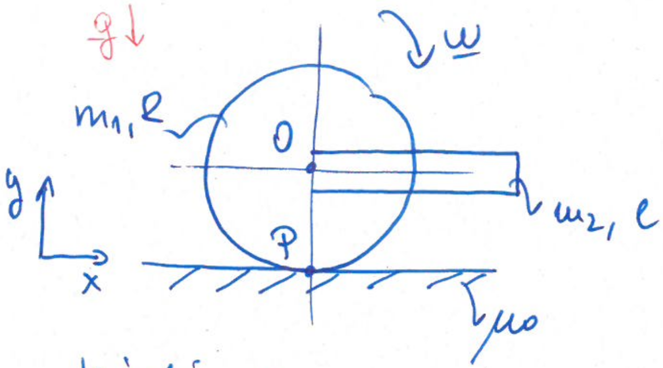
$$a_{Sn} = \frac{l}{2}\omega^2 = \frac{l}{2}\cdot\frac{3g}{l}\sin\varphi = \frac{3}{2} g\sin\varphi$$

Visszaírva az erők:

$$A_t = -m_1(a_t - g\cos\varphi) = -m_1\left(\frac{3}{4} g\cos\varphi - g\cos\varphi\right) = \frac{1}{4} m_1 g\cos\varphi \quad (\uparrow)$$

$$A_n = m_1(a_n + g\sin\varphi) = m_1\left(\frac{3}{2} g\sin\varphi + g\sin\varphi\right) = \frac{5}{2} m_1 g\sin\varphi \quad (\leftarrow)$$

2. feladat



Adatok:

- $m = m_1 = m_2$; ω
- $\ell = 2R$

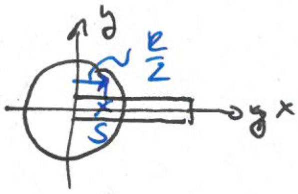
Feladat: Az $\ell = 2R$ hosszú rúd és az R sugarú korong össze van hegesztve. A test ω szögsebességgel gördül. A vizsgált helyzetben a rúd vízszintes

Kérdés: $\varepsilon = ?$

μ_0, hogy éppen gördüljön

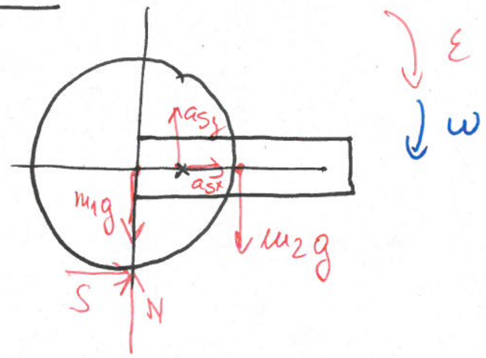
Megoldás

↳ Súlypont:



$$r_S = \frac{m \cdot 0 + m \cdot R}{2m} = \frac{R}{2}$$

SZTÁ



A din alaptétele: $[\underline{I}, \dot{r}_S] = [\underline{F}, \underline{M}_S]_S$

(1) $x: \; 2m\, a_{Sx} = S$

(2) $y: \; 2m\, a_{Sy} = N - \underbrace{m_1 g - m_2 g}_{2mg}$

(3) $z: \; -\Theta_{Sz} \cdot \varepsilon = \underbrace{m_1 g \frac{R}{2} - m_2 g \frac{R}{2}}_{=0} + S \cdot R - \frac{NR}{2}$

mert $\underline{m_1 = m_2}$!

$$\Theta_{Sz} = \overbrace{\Theta_{S1} + \Theta_{S1S}}^{\text{korong}} + \overbrace{\Theta_{S2} + \Theta_{S2S}}^{\text{rúd}}$$

$$\Theta_{Sz} = \frac{1}{2} mR^2 + m\frac{R^2}{4} + \frac{1}{12} m (2R)^2 + m\frac{R^2}{4}$$

$$\Theta_{Sz} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{12} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{4}{3}} mR^2 = \underline{\frac{4}{3} mR^2}$$

Ismeretlenek: $a_{Sx}, a_{Sy}, S, N, \varepsilon$

de csak 3 egyenlet!

Kell kinematikai egyenlet:

$$\underline{a}_O = \begin{bmatrix} a_O \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{a}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ a_P \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_O = \underline{a}_P + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{PO} - \omega^2 \underline{r}_{PO}$$

$$\begin{bmatrix} a_O \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_O \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\varepsilon \\ a_P - \omega^2 R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{a_O = R \cdot \varepsilon} \quad \text{és} \quad \boxed{a_P = \omega^2 R}$$

$$\underline{a}_S = \underline{a}_O + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{OS} - \omega^2 \underline{r}_{OS}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Sx} \\ a_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_O \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & \varepsilon \\ 0 & 0 & -\varepsilon \\ \frac{R}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{R}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{Sx} \\ a_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_O - \omega^2 \frac{R}{2} \\ -\frac{R}{2}\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4) $a_{Sx} = a_O - \omega^2 \frac{R}{2} = \underline{\underline{R \cdot \varepsilon - \omega^2 \frac{R}{2}}}$ (+1 egyenlet)

(5) $a_{Sy} = -\frac{R}{2}\varepsilon$ (+1 egyenlet)

Visszahelyettesítem:

(4) → (1) $S = 2m\left(R \cdot \varepsilon - \frac{\omega^2}{2} R\right)$

(5) → (2) $-2m \frac{R \cdot \varepsilon}{2} = N - 2mg$ Ebből: $N = \underline{\underline{2mg - mR\varepsilon}}$

Mindent (3)ba

$$-\frac{4}{3} m R^2 \cdot \varepsilon = -(2mg - mR\varepsilon) \cdot \frac{R}{2} + 2m\left(R \cdot \varepsilon - \frac{\omega^2}{2} R\right) \cdot R$$

$$\varepsilon \underbrace{\left(\frac{4}{3} m R^2 + \frac{m R^2}{2} + 2mR^2\right)}_{\frac{23}{6} m R^2} = \frac{\cancel{2} m g R}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2} m \omega^2 R^2}{\cancel{2}}$$

$$\varepsilon = \frac{\cancel{m} g R + \cancel{m} \omega^2 R^{\cancel{2}}}{\frac{23}{6} \cancel{m} R^{\cancel{2}}} = \underline{\underline{\frac{6}{23} \frac{g + \omega^2 R}{R}}}$$

Súrlódási tényező:

$$\mu_0 \geq \frac{S}{N}$$

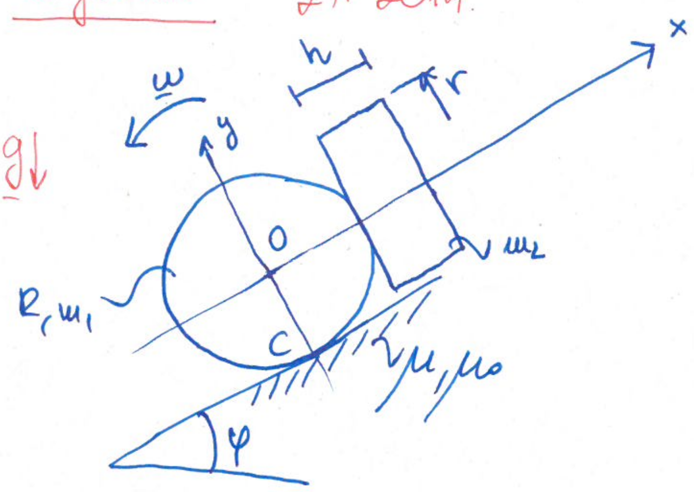
$$S = 2m\left(R\varepsilon - \frac{\omega^2 R}{2}\right) = m\left(\frac{12}{23} g - \frac{11}{23} R\omega^2\right)$$

$$N = 2m(g - R\varepsilon) = m\left(\frac{40}{23} g - \frac{6}{23} R\omega^2\right)$$

$$\mu_0 \geq \frac{S}{N} = \frac{\frac{12}{23} g - \frac{11}{23} R\omega^2}{\frac{40}{23} g - \frac{6}{23} R\omega^2} \longrightarrow \text{Példa } \omega = 0$$

$$\hookrightarrow \mu_0 > \underline{\underline{\frac{12}{40} = 0{,}3}}$$

3. feladat ZH-2014



Adatok:

$m_1 = 50\ [kg]$

$m_2 = 30\ [kg]$

$R = 0{,}3\ [m]$

$r = 0{,}2\ [m]$

$h = 0{,}2\ [m]$

$\varphi = 20\ [°]$

$\omega = 2\ \left[\frac{rad}{s}\right]$

$g = 9{,}81\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$

Az ábrán látható m_1 tömegű, R sugarú korongból és m_2 tömegű, r sugarú, h magasságú hengerből összeszerelt test φ hajlásszögű érdes lejtőn gördül. Ismert a test pillanatnyi ω szögsebessége.

Feladat

1) Határozza meg a test súlypontjának helyét, majd jelölje be az ábrába! (1p)

2) Határozza meg az S súlyponton átmenő, a mozgás síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékot (2p)

3) Adjuk meg a test S súlypontjára számított perdület vektorát (2p)

4) Rajzolja fel a test szabadtest ábráját, majd azzal összhangban írja fel a dinamika alaptételének vektori egyenleteit a megadott (x, y, z) KR-ben! (5p)

5) Sorolja fel az egyenletekben szereplő ismeretleneket, majd amennyiben szükséges egészítse ki az egyenletrendszert a megoldáshoz szükséges további kinematikai egyenletekkel (4p)

6) Számítsa ki a nehézségi erő teljesítményét (2p)

7) Számítsa ki a test kinetikus energiáját a vizsgált időpillanatban (2p)

1) Súlypontszámítás

$$\underline{r_S} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \qquad \underline{r_S} = \frac{m_1 \underline{r_1} + m_2 \underline{r_2}}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} R + h/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\underline{r_S} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_2 (R + h/2)}{m_1 + m_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0,15 \\ 0 \end{bmatrix}}} \, [m]$$

2) Tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_{Sz} = \underbrace{\Theta_{S_1} + \Theta_{S_1S}}_{\text{1.es test + Steiner}} + \underbrace{\Theta_{S_2} + \Theta_{S_2S}}_{\text{2es test + Steiner}}$$

$$\Theta_{S_1} = \frac{1}{2} m_1 R^2 \qquad \Theta_{S_2} = \frac{1}{4} m_2 r^2 + \frac{1}{12} m h^2$$

$$\Theta_{S_1S} = m_1 x_S^2 \qquad \Theta_{S_2S} = m_2 \left(R + \frac{h}{2} - x_S \right)^2$$

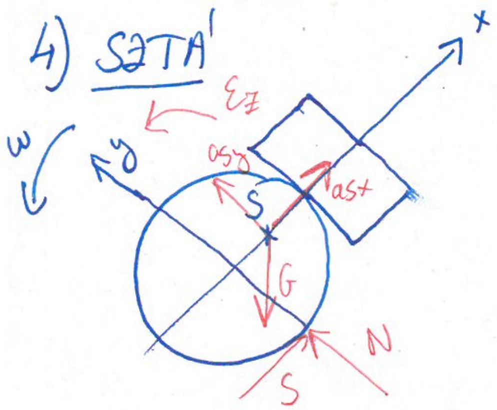
$$\Theta_{Sz} = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 x_S^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 + \frac{1}{12} m h^2 + m_2 \left(R + \frac{h}{2} - x_S \right)^2 = \underline{\underline{5,65 \, (kg\, m^2)}}$$

3) Perdületvektor

$$\underline{\Pi_S} = \underline{\underline{\Theta}}_S \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{Sz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{Sz} \cdot \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11,3 \end{bmatrix} \underline{\underline{\left[\frac{kg\, m^2}{s} \right] = [N\, m\, s]}}$$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

4) SZTÁ



Dinamika alaptétele $\left[\dot{\underline{I}} ; \dot{\underline{\Pi}}_S \right]_S = \left[\underline{F} ; \underline{M}_S \right]_S$

$$x: \; (m_1 + m_2) a_{Sx} = S - (m_1 + m_2) g \sin\varphi$$

$$y: \; (m_1 + m_2) a_{Sy} = N - (m_1 + m_2) g \cos\varphi$$

$$z: \; \Theta_{Sz} \cdot \varepsilon_z = S R - N \cdot x_S$$

5) Az ismeretlenek

$a_{Sx}, a_{Sy}, S, N, \varepsilon_z$

↳ 5 ismeretlen de csak 3 egyenlet

Még leet kinematikai egyenlet kell:

~ gördül! $\boxed{\frac{S}{N} \le \mu_0}$

$$\left.\begin{aligned} a_{0x} &= \cancel{R} - R \cdot \varepsilon_z \\ a_{0y} &= 0 \end{aligned}\right\} \ \underline{a}_0 \text{ vektor ismert.}$$

$$\underline{a}_S = \underline{a}_0 + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{0S} - \omega^2 r_{0S}$$

$$\begin{bmatrix} a_{Sx} \\ a_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\varepsilon_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_S & 0 & 0 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} x_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\varepsilon_z - \omega^2 x_S \\ x_S \cdot \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

+ 2 egyenlet!

6) Nehézségi erő teljesítménye

$$P^G = \underline{G} \cdot \underline{v}_S$$

$$\underline{v}_S = \underset{0}{\underline{v}_C} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{CS} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x_S & R & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -R\omega \\ x_S\omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = (m_1 + m_2) g \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

elvégezve a skaláris szorzást

$$P^G = \underline{G} \cdot \underline{v}_S = (m_1 + m_2) g \left(R\omega \sin\varphi - x_S \omega \cos\varphi \right)$$

$$P^G = (m_1 + m_2) g \left(R\omega \sin\varphi - x_S \omega \cos\varphi \right)$$

$$P^G = -60{,}1908 \text{ [W]}$$

7) Kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_{Sz} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(R^2 + x_S^2)\omega^2 + \frac{1}{2}\Theta_{Sz}\omega^2 = \underline{\underline{29{,}3 \text{ [J]}}}$$

$$v_S^2 = R^2\omega^2 + x_S^2\omega^2 = (R^2 + x_S^2)\omega^2$$