Dinamika 8. hét

Anyagi pont kinetikája és relatív kinetika

Elméleti összefoglaló:

- Impulzus: $\underline{I} = m\underline{v}$
- Perdület: $\underline{\Pi}_A = \underline{r}_{AS} \times \underline{I}$
- Kinematikai nyomaték $\underline{D}_A = \underline{r}_{AS} \times \underline{\dot{I}}$

Dinamika alaptétele:

$$\left[\underline{\dot{I}}, \underline{D}_A\right]_A = \left[\underline{F}; \underline{M}_A\right]_A$$

HA ÁLLÓ PONT: $\underline{D}_0 = \underline{\dot{\Pi}}_0$

HA SÚLYPONT: $\underline{D}_S = \underline{\dot{\Pi}}_S$

csak ekkor $\left[\underline{\dot{I}}, \underline{\dot{\Pi}}_S\right]_S = \left[\underline{F}; \underline{M}_S\right]_S$

Tételek:

↳ Impulzustétel $\underline{I}(t_1) - \underline{I}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\, dt$

↳ Perdülettétel $\underline{\Pi}_0(t_1) - \underline{\Pi}_0(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \underline{M}_0\, dt$ (állópontra/súlypontra)

Kinetikus energia $T = \frac{1}{2} m \underline{v}^2$ [Joule]

Teljesítmény $P = \underline{F} \cdot \underline{v}$ [Watt]

Teljesítménytétel $\boxed{\dot{T} = P}$

Munka $W_{01} = \int_{t_0}^{t_1} P\, dt$ ⟶ Munkatétel: $\boxed{T(t_1) - T(t_0) = W_{01}}$

Potenciálos erő ha $\exists\ U(\underline{r})$ potfgv, hogy

$$\boxed{\underline{F} = -\operatorname{grad} U}$$

Potenciálos erő munkája: $W_{01} = U_0 - U_1$

Ha potenciálos erők vannak.

mechanikai Energia állandó $T(t_0) + U(t_0) = T(t_1) + U(t_1)$

$T + U = \text{áll} \quad \forall\, t\text{-re!}$

Relatív kinetika

↓ A relatív kinematikán felírt gyorsulásból:

$$m\underline{\alpha} = \underbrace{\underline{F}}_{\text{valódi erő}} + \underbrace{\underline{F}_{sz} + \underline{F}_{cor}}_{\text{látszólagos erők}}$$

$\underline{F}_{sz} = -m \cdot \underline{a}_{sz}$

$\underline{F}_{cor} = -m\, a_{cor}$

↓ Relatív teljesítménytétel:

valódi erő

látsz. erő

$$\boxed{P_{rel} = \underline{F} \cdot \beta + \underline{F}_{sz} \cdot \beta}$$

↳ Relatív munkatétel

$$T_{2rel} - T_{1rel} = W_{12rel} = \int_{t_1}^{t_2} P_{rel}\, dt$$

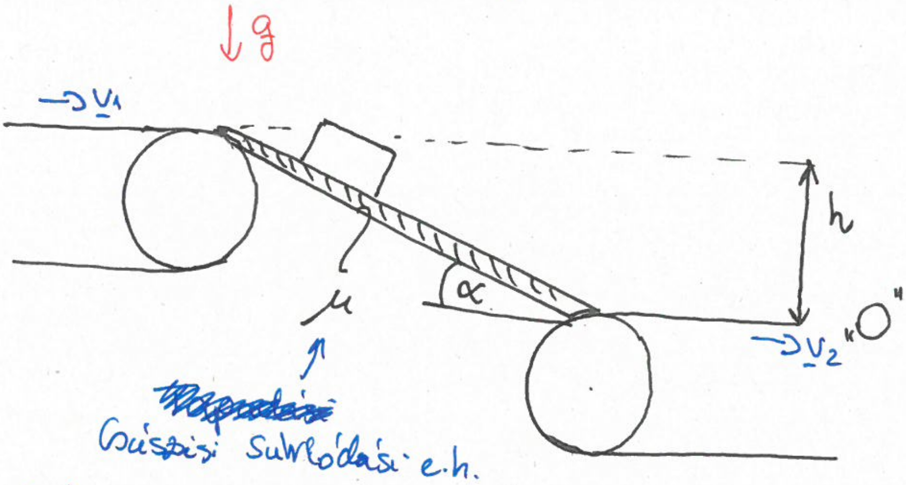
$$\boxed{T_{rel} + U_{rel} = \text{áll}}$$

Ha potenciálos erők vannak

$U_{rel} = U + U_{sz\acute{a}ll}$

$T_{rel} = \frac{1}{2} m \beta^2$

1. példa – „Futószalag"



Adatok

$h = 1\,[m]$

$\mu = 0{,}55$

$v_1 = 0{,}4\,\left[\frac{m}{s}\right]$

$\alpha = 30\,[°]$

Kérdés: Mennyi lesz v_2, ha a doboz csúszik.

Megoldás: Munkatétel felhasználásával

$$T_2 - T_1 = W_{12} \rightarrow \text{külső erők munkája}$$

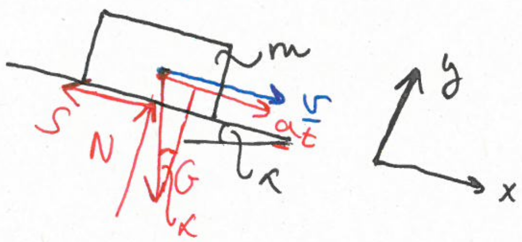
$$T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

Szabadtest ábra

$\underline{a} = \underline{a}_t$ (egyenes pálya miatt)

↳ Válasszunk koordinátarendszert! lejtővel párhuzamos és rá merőleges!



Din. alaptétele:

$$\dot{\underline{I}} = \underline{F} \quad \Rightarrow \text{vektoriális egyenletek}$$

$\underline{e}_t$: $\quad m \cdot a_t = mg\sin\alpha - S$

$\underline{e}_n$: $\quad 0 = N - mg\cos\alpha$

| + egyenlet kell $\boxed{S = \mu N}$

$$N = mg\cos\alpha$$

$$S = \mu mg\cos\alpha$$

A súlyerő potenciálos: $\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial z \end{bmatrix}$.

$$\boxed{U = mgy}$$

$$W_{12} = \underbrace{W_{12}^G}_{\text{súlyerő}} + \underbrace{W_{12}^K}_{\text{kényszererőE}}$$

$$W_{12}^G = T_2^G - T_1^G = U_1^G - U_2^G = \underline{\underline{-(U_2^G - U_1^G)}}$$

DE! $T_2^G + U_2^G = T_1^G + U_1^G$

$$T_2^G - T_1^G = U_1^G - U_2^G$$

$$W_{12}^G = mgh - mg0 = \underline{\underline{mgh}}$$

$$W_{12}^K = \underbrace{W_{12}^N}_{\text{normálerő}} + \underbrace{W_{12}^S}_{\text{súrlódás}} = \int_{t_1}^{t_2} P^N dt + \int_{t_1}^{t_2} P^S dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \underline{N} \cdot \underline{v}\, dt}_{\text{merőlegesek}} + \int_{t_1}^{t_2} \underline{S}\,\underline{v}\, dt$$

$$P^N = 0 \,!!$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\underline{S}}_{\text{állandó}}\, \underline{v}\, dt = \underbrace{-S}_{\text{ellentétes irányúak}} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(t)\, dt = -S \Big(\underbrace{s(t_2) - s(t_1)}_{l \text{ a szalag hossza}} \Big) = -S \cdot l = \underline{\underline{-S \cdot \frac{h}{\sin\alpha}}}$$

$\underline{\text{Összegezve}}$ $T_2 - T_1 = W_{12} = W_{12}^G + W_{12}^K = W_{12}^G + W_{12}^N + W_{12}^S$

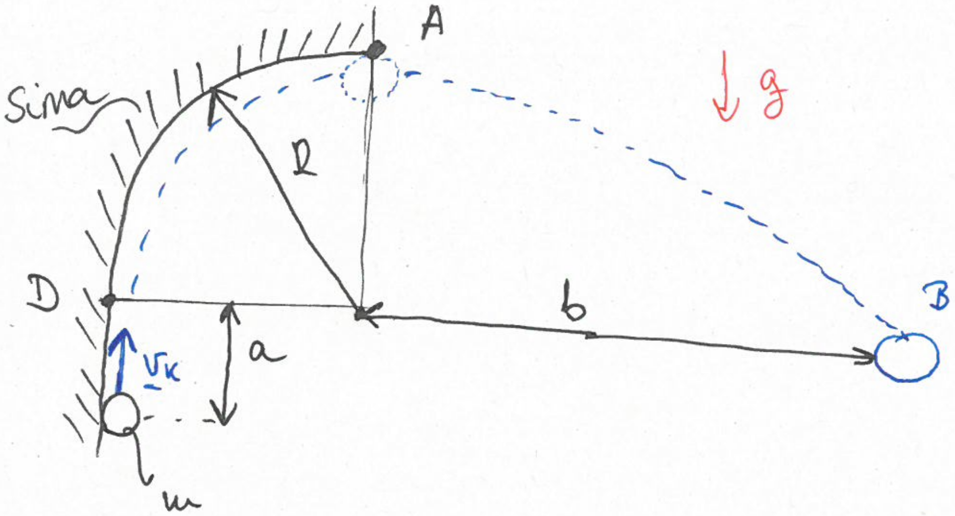
$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = mgh - S \cdot \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$S = \mu mg \cos\alpha$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} (v_2^2 - v_1^2) = \cancel{m} g \left(h - \frac{\mu \cos\alpha \cdot h}{\sin\alpha} \right)$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh - 2\mu \cdot h \operatorname{ctg}\alpha} = \underline{\underline{1{,}04 \left[\frac{m}{s}\right]}}$$

2. példa – „Kényszerpályán mozgó anyagi pont"



Adatok:

$a = 1\,[m]$

$b = 3\,[m]$

$R = 1\,[m]$

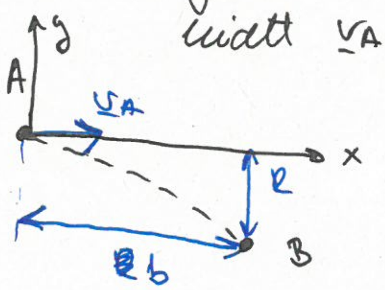
$m = 1\,[kg]$

A golyót v_K kezdősebességgel kilőjjük. Mekkora legyen v_K kezdősebesség a golyónak „B"-n ponton áthaladjon. Mekkorák az egyenes és a köríves falszakasz mentén a kényszererők?

$\underline{v_K};\ \underline{K_D};\ \underline{K_A} = ?$

Megoldás: A – B között ~~f~~ hajítás

↳ Rögzítsük a koordinátarendszert A-hoz. A megtámasztás miatt v_A iránya ismert



A mozgás törvény:

$$x(t) = v_A \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2$$

Ha át KELL mennie B ponton:

$$\left.\begin{aligned} \boxed{b} &= x_b = v_A \cdot t_{AB} \\ \boxed{-R} &= y_b = -\frac{g}{2} t_{AB}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad t_{AB} = \frac{b}{v_A}$$

Geometria miatt ismert

↳ visszaírva a másikba

$$-R = -\frac{g}{2} \frac{b^2}{v_A^2}$$

↳ Ebből: $v_A = \sqrt{\frac{+g \cdot b^2}{2R}} = b \cdot \sqrt{\frac{g}{2R}} = \underline{\underline{6{,}64\,[\frac{m}{s}]}}$

Tehát tudjuk mekkora a v_A sebesség!

A kezdőpont és az A pont közé: <u>Munkatétel</u>

$$T_2 - T_1 = W_{12} = W_{12}^{súly} = -(U_2 - U_1) = \underline{\underline{-mg(a+R)}}$$

mert nincs súrlódás és a normálerő teljesítménye 0!

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_A^2$$

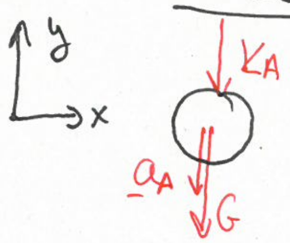
$$T_1 = \frac{1}{2} m v_K^2$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 - \frac{1}{2} \cancel{m} v_K^2 = -\cancel{m} g (a+R)$$

$$v_K = \sqrt{v_A^2 + 2g(a+R)} = \underline{\underline{9,13 \left(\frac{m}{s}\right)}}$$

<u>Kényszererőkhöz:</u>

A pont : <u>Szabadtest ábra:</u>



<u>Din. alaptétele</u> : $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$

$$\Rightarrow -m \cdot \underline{a}_A = -\underline{K}_A - \underline{G}$$

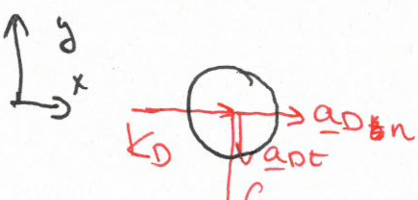
$$\hookrightarrow -m a_A = -K_A - G \quad \text{(y irányban)}$$

$$a_A = \frac{v_A^2}{R} = \underline{\underline{44,15 \left(\frac{m}{s^2}\right)}}$$

$$\hookrightarrow K_A = m a_A - G$$

$$K_A = \underline{\underline{34,34 (N)}}$$

D pont <u>SZTÁ</u>



<u>Din. alaptétele</u> $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$

x: $m a_{Dn} = K_D$ → $a_{Dn} = \frac{v_D^2}{R} = ?$

y: $-m a_{Dt} = -mg \Rightarrow a_{Dt} = g$

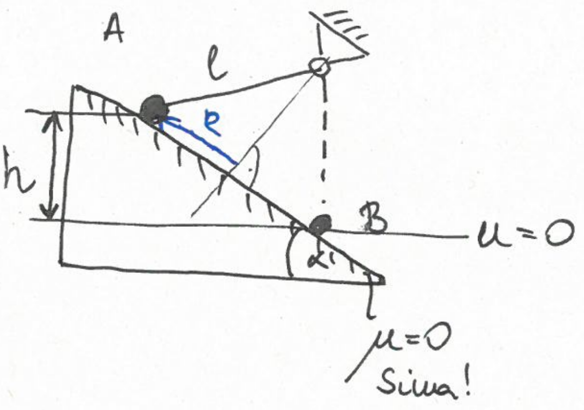
v_D-t munkatétellel → úgy mint v_K-t

$$v_D = \sqrt{v_A^2 + 2gR} = 7,985 \left(\frac{m}{s}\right)$$

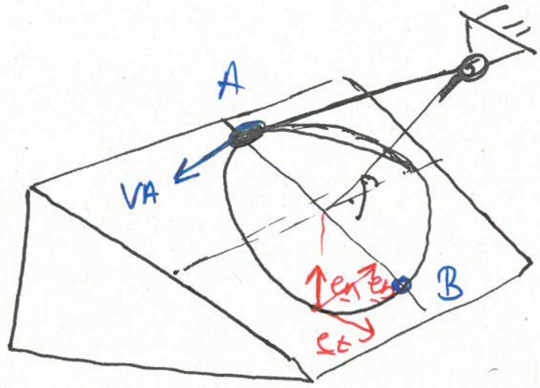
Visszaírva: $a_{DN} = \frac{v_D^2}{R} = 63,76 \left(\frac{m}{s^2}\right)$

$$\hookrightarrow K_D = m \cdot a_{DN} = \underline{\underline{63,76 (N)}}$$

3. példa Inga a lejtőn



Adott:
m, l, α, β

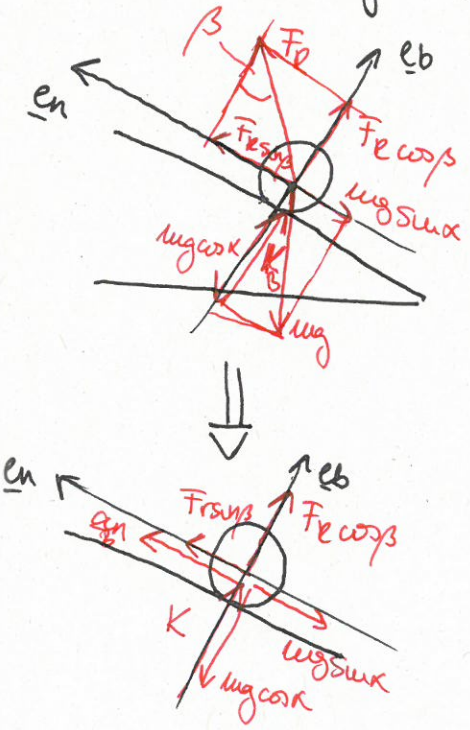


Egy m tömegű anyagi pont egy rúdhoz csatlakozva (ennek a tömege elhanyagolható) egy csukló körül az adott α szögű lejtőn mozog.

1) Adjuk meg VA sebességet, ha az anyagi pont a B pontban éppen ne váljon el a lejtőtől! ($v_A = ?$)

2) Mekkora a kényszererő az A pontban ($K_A = ?$)

1) SZTÁ a B pontban



Dinamika alaptétele: $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$

e_t: $m \cdot a_{Bt} = 0$ $\qquad a_{Bt} = 0$

↳ a sebesség maximális

e_n: $m \cdot a_{Bn} = F_R \sin\beta - mg\sin\alpha$

e_b: $m \cdot \underset{0}{\underset{\parallel}{a_{Bb}}} = \overset{0}{\overset{\parallel}{K}} + F_R\cos\beta - mg\cos\alpha = 0$

↓ Ha éppen nem emelkedik el $K = 0$

↳ $\underline{F_R} = mg\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

Visszaírva: $\cancel{m} \cdot a_{Bn} = \cancel{m}g\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta - \cancel{m}g\sin\alpha$

$$a_{Bn} = g(-\sin\alpha + \mathrm{tg}\beta\cos\alpha)$$

$\Downarrow$

$$a_{Bn} = \frac{v_B^2}{\varrho} = \frac{v_B^2}{R} \longrightarrow \frac{v_B^2}{R} = g(\mathrm{tg}\beta\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$\underline{v_B^2 = Rg(\mathrm{tg}\beta\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

Az A pontbeli sebesség munkatétellel számolható

A ~ t_1
B ~ t_2 időpillanatokban

$$T_B - T_A = W_{AB} = W_{AB}^{G} + \underbrace{W_{AB}^{Fr}}_{=0} + \underbrace{W_{AB}^{K}}_{=0} = -(U_B - U_A)$$

mert ideális kényszer!

$$\boxed{T_B - T_A = -(U_B - U_A)}$$

$$T_B = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m Rg(\mathrm{tg}\beta\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$U_B = 0 \; ; \; U_A = mgh = mg\,2R\cdot\sin\alpha$$

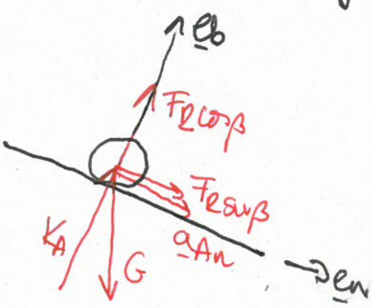
$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = mg\,2R\sin\alpha$$

$$\hookrightarrow v_A = \sqrt{v_B^2 - mg\,4R\sin\alpha} = \sqrt{Rg(\mathrm{tg}\beta\cos\alpha - \sin\alpha) - Rg\,4R\sin\alpha}$$

$$v_A = \sqrt{Rg(\mathrm{tg}\beta\cos\alpha - 5\sin\alpha)} = \underline{\underline{\sqrt{gl\sin\beta(\mathrm{tg}\beta\cos\alpha - 5\sin\alpha)}}}$$

$\hookrightarrow R = l\cdot\sin\beta$

2) SZTÁ az A pontban:



Din. alaptétele: $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$

e_t: $m a_{At} = 0$

$\hookrightarrow = 0$ mert v_A minimális

e_n: $m\cdot a_{An} = F_R\sin\beta + mg\sin\alpha$

e_b: $m\cdot \underset{0}{a_{Ab}} = F_R\cos\beta + K - mg\cos\alpha$

Az utolsó egyenletből:

$$0 = F_R\cos\beta + K - mg\cos\alpha \rightarrow F_R = \underline{\underline{\frac{mg\cos\alpha - K}{\cos\beta}}}$$

$$a_{An} = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{v_A^2}{R} = \frac{Rg(tg\beta\cos\alpha - 5\sin\alpha)}{R} = \underline{g(tg\beta\cos\alpha - 5\sin\alpha)}$$

Visszaírva:

$$m\cdot a_{An} = F_R\sin\beta + mg\sin\alpha$$

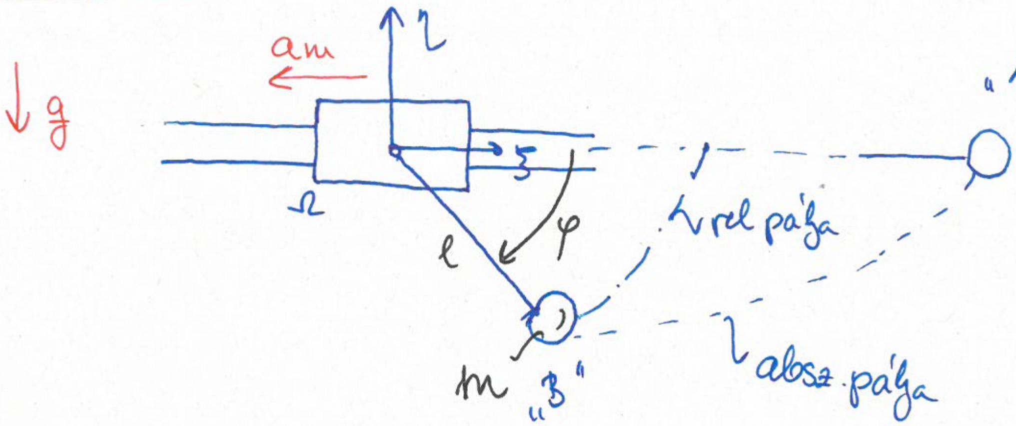
$$mg(tg\beta\cos\alpha - 5\sin\alpha) = \frac{mg\cos\alpha - K}{\cos\beta}\cdot\sin\beta + mg\sin\alpha \quad /\cdot\cos\beta$$

$$mg(\sin\beta\cancel{\cos\alpha} - 5\sin\alpha\cos\beta) = mg\cancel{\cos\alpha}\sin\beta - K\sin\beta + mg\sin\alpha\cos\beta$$

$$mg(-6\sin\alpha\cos\beta) = -K\sin\beta$$

$$\boxed{K = 6\sin\alpha\cdot ctg\beta\cdot mg}$$

4. példa Darumacska



Adatok:

$a_m = 3 \left[\frac{m}{s^2}\right]$ = áll

$m = 1$ (kg)

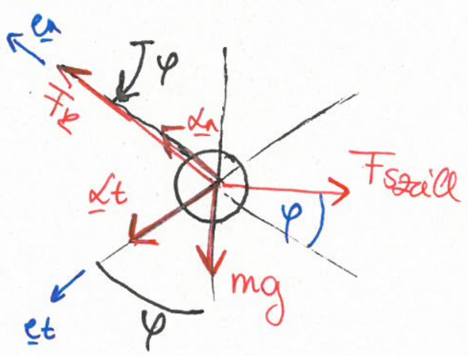
$\varphi = 30°$

$l = 1$ [m]

Kérdés: Mekkora az F_e kötélerő a „B" helyzetben, ha $\beta_A = 0$

Megoldás:

Szabadtestábra



Din. alaptétele $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$

$$m\underline{\alpha} = \underline{F}_{val} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor}$$

$$\underline{F}_{száll} = -m\underline{a}_{száll} =$$

$$\underline{F}_{száll} = -m(\underline{a}_\Omega + \underbrace{\underline{\varepsilon}_{10} \times \underline{r}_{\Omega B}}_{=0} - \underbrace{\omega_{10}^2 \underline{r}_{\Omega B}}_{=0}) =$$

$$\underline{F}_{száll} = -m\underline{a}_\Omega = -m\begin{bmatrix} -a_\Omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma_\Omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_{cor} = -m\underline{a}_{cor} = -m(2\underbrace{\underline{\omega}_{10}}_{\underline{0}} \times \underline{\beta}_B) = \underline{0}$$

A vetületi egyenletek:

t: $m\alpha_t = mg\cos\varphi - ma_m\sin\varphi \longrightarrow \alpha_t = g\cos\varphi - a_m\sin\varphi$

n: $m\alpha_n = F_e - mg\sin\varphi - ma_m\cos\varphi$

$\hookrightarrow \alpha_n = \frac{\beta_b^2}{\varrho_{B\,rel}} = \frac{\beta_b^2}{l}$ ⟶ relatív mukatétel!

Relatív munkatétel

$$T_{B rel} - T_{A rel} = W_{AB rel}$$

$$\frac{1}{2} m \beta_b^2 - \underbrace{\frac{1}{2} m \beta_A^2}_{0} = W_{AB rel}^{G} + W_{AB rel}^{K} + W_{AB rel}^{száll}$$

- $W_{AB rel}^{G} = -(U_B^G - U_A^G) = -(-mgh - 0) = mgh = \underline{\underline{mgl\sin\varphi}}$
- $W_{AB rel}^{K} = 0$ ment ideális kényszer $\underline{F_r} \perp \beta$
- $W_{AB rel}^{száll} = -(U_B^{SZ} - U_A^{SZ}) =$

$$F_{száll} = \begin{bmatrix} ma_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U^{SZ} = -ma_m \cdot \xi$$

$$= -(-ma_m \cdot l\cos\varphi + ma_m \cdot l) =$$

$$= \underline{\underline{-ma_m l(1-\cos\varphi)}}$$

Visszaírva: $\frac{1}{2}\beta_b^2 \cancel{m} = \cancel{m}gl\sin\varphi - \cancel{m}a_m l(1-\cos\varphi)$

$$\beta_b^2 = 2gl\sin\varphi - 2a_m l(1-\cos\varphi) = \underline{\underline{2l(g\sin\varphi - a_m(1-\cos\varphi))}}$$

Ezt vissza lehet írni a normális irányú vetületi egyenletbe

$$m\frac{\beta_b^2}{l} = F_K - mg\sin\varphi - ma_m\cos\varphi$$

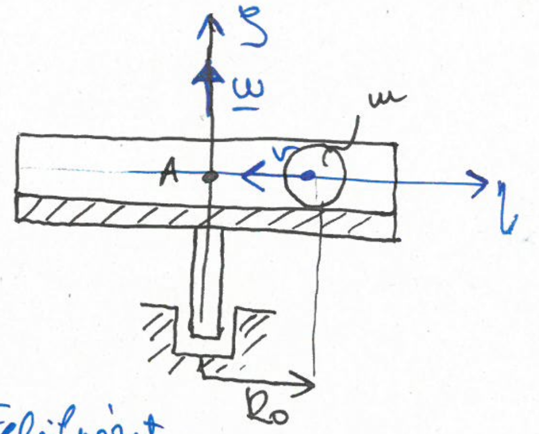
$$m \cdot 2(g\sin\varphi - a_m(1-\cos\varphi)) = F_K - mg\sin\varphi - ma_m\cos\varphi$$

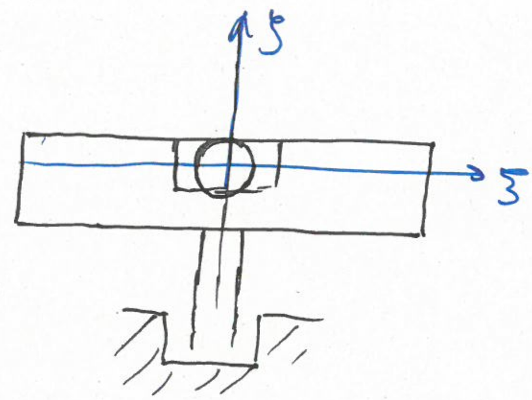
$$F_K = 3mg\sin\varphi - m(2a_m(1-\cos\varphi) - a_m\cos\varphi)$$

$$F_K = m(3g\sin\varphi - 2a_m + 3a_m\cos\varphi)$$

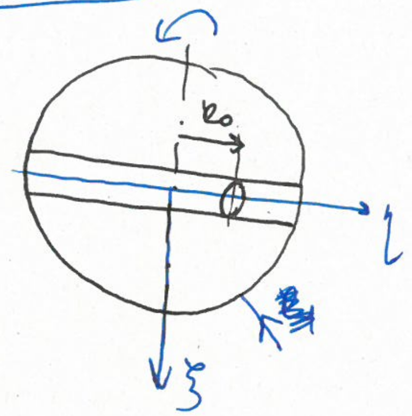
$$F_K = \underline{\underline{16{,}51\,(N)}}$$

5. példa Forgó tárcsában mozgó pont





Felülnézet



Adatok:

$\omega = 0{,}3\ \left(\frac{rad}{s}\right) = \text{áll}$

$v = 2\ \left(\frac{m}{s}\right) = \text{áll}$

$m = 50\ [kg]$

$R_0 = 5\ (m)$

$R_1 = 2\ (m)$

Az „m" tömegű anyagi pontot a tárcsa középpontján át vezetett kötéllel „v" sebességgel húzzuk a középpont felé.

Kérdések:

1). Mekkora a kötélerő az R_0 helyzetben (F_K)

2). Mekkora a kényszererő a vezetősíkon az R_0 helyzetben? (K)

3) Mekkora munkát végez a kötélerő az R_0 és R_1 helyzetek között megtett út során

↳ A feladat megoldása relatív kinetikával:

↳ Álló KR: $(x, y, z)\ A$

↳ Mozgó KR $(\xi, \eta, \zeta)\ \Omega$ (forog)

$\Omega \equiv A$

A vizsgált helyzetben

$x \parallel \xi$

$y \parallel \eta$

$z \parallel \zeta$

A R_0 helyzetben vizsgálódjunk

↳ Dinamika alaptétele $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$

$$m\underline{\alpha} = \underline{F} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor}$$

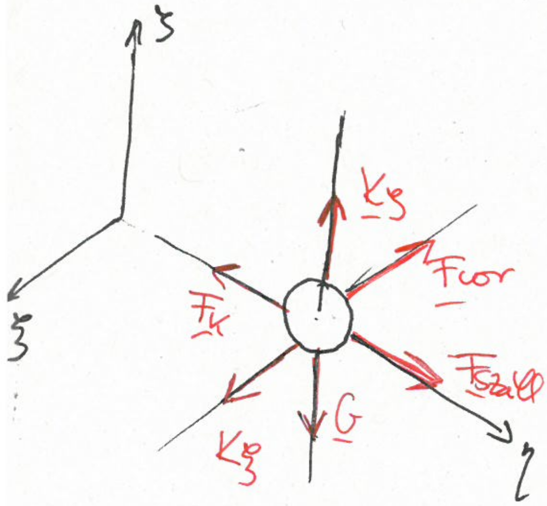
$\underline{\alpha}$ relatív gyorsulás: mivel $v = \rho = áll \Rightarrow \underline{\alpha = 0}!$

$$\underline{a}_{száll} = \underbrace{\underline{a}_A}_{\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_1 \times \underline{r}_{AP}}_{\underline{0}} - \omega_1^2 \underline{r}_{AP} = -\omega_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ R_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{F}_{száll} = -m\underline{a}_{száll}$$

$$\underline{F}_{száll} = \begin{bmatrix} 0 \\ m\omega_1^2 R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_{cor} = 2\underline{\omega}_1 \times \underline{\rho} = 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -v & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{F}_{cor} = \begin{bmatrix} 2m\omega v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Visszaírva: SZTA



$$m\underline{\alpha} = \underline{F} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor}$$

$$0 = \underbrace{\underline{G} + \underbrace{\underline{K}_\zeta + \underline{K}_\xi}_{\underline{K}} + \underline{F}_K}_{\text{valódi erők}} + \underbrace{\underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor}}_{\text{látszólagos erők}}$$

Vetületi egyenletek:

ξ: $0 = K_\xi - F_{cor}$

↳ $K_\xi = F_{cor} = 2m\omega v = \underline{\underline{60 [N]}}$

η: $0 = F_{száll} - F_K$

↳ $F_K = F_{száll} = m\omega_1^2 R_0 = \underline{\underline{22{,}5 (N)}}$

ζ: $0 = -G + K_\zeta$

↳ $K_\zeta = G = mg = \underline{\underline{490{,}5 [N]}}$

2) Kötélerő munkája

$\underline{v}$ előjele r irányú (így vetítik fel a KR-t)

$$W_{01} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}_k \cdot \underline{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} -F_k \cdot \frac{dr}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = \int_{r_0}^{r_1} -F_k\, dr =$$

$$= \int_{r_0}^{r_1} -m\omega^2 r\, dr = -m\omega^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r_0}^{r_1} = -m\omega^2 \frac{(r_1^2 - r_0^2)}{2} = \underline{\underline{47{,}25\,[J]}}$$

Másik út

$$\underline{F}_{száll}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ m\omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \exists\, U, \text{ hogy } -\text{grad}\, U = \underline{F}_{száll}$$

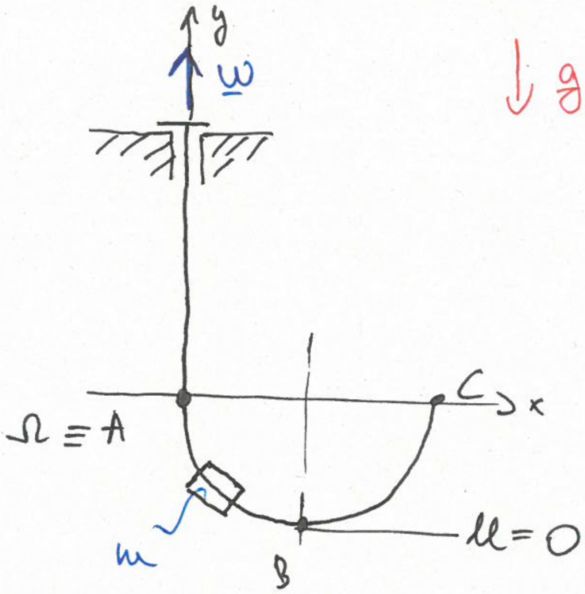
$\underline{F}_{száll} = -\underline{F}_k$

$\hookrightarrow \boxed{\underline{F}_k = -\text{grad}\, U}$

$$U_{köt} = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$W_{01} = -(U_1 - U_0) = U_0 - U_1 = \frac{m\omega^2 r_0^2}{2} - \frac{m\omega^2 r_1^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} m\omega^2 (r_0^2 - r_1^2)}}$$

6. példa | Katapult



Adatok:

$m = 0{,}2\ [kg]$

$R = 0{,}1\ [m]$

$\omega = 6{,}14\ \left[\frac{rad}{s}\right]$

Az „m" tömegű csúszka az A pontból indul mozgásnak

Kérdés:

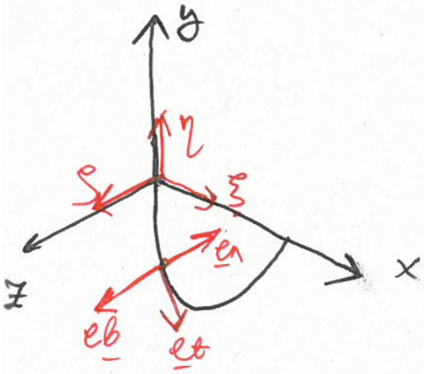
1) Mekkora a csúszkára ható kényszererő a B pontban? $\underline{K}_B = ?$

2) Mekkora lesz a csúszka sebessége a C pontban $\underline{v}_C = ?$

A feladat megoldásához relatív kinetika kell!

↳ Álló KR $\{x, y, z; A\}$

↳ Mozgó KR $\{\xi, \eta, \zeta; \Omega\}$ – forog



Dinamika alaptétele $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$ „B" pontban

$$m\underline{a} = \underline{F} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor}$$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_{száll} = \underbrace{\underline{a}_\Omega}_{=0} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_{10} \times \underline{\rho}_{\Omega B}}_{=0} + \underline{\omega}_{10} \times \underbrace{(\underline{\omega}_{10} \times \underline{\rho}_{\Omega B})}_{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ R & -R & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R\omega \end{bmatrix}} =$$

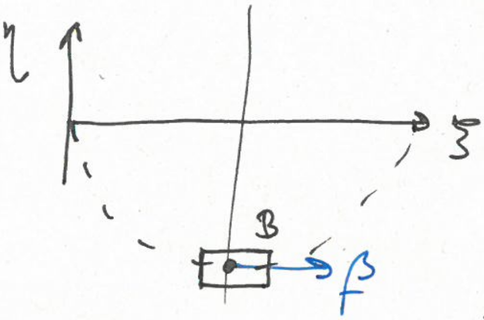
$$\underline{a}_{száll} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -R\omega \end{vmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$F_{száll} = \underline{\underline{mR\omega^2}}$

$F_{száll}$ ξ irányú

$$\underline{a}_{cor} = 2\underline{\omega}_{10} \times \underline{\rho} \quad \rightarrow F_{cor} \ \xi \text{ irányú}$$

relatív sebesség



$$\underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \underline{\rho} + \underline{v}_{száll} = \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ -R\omega \end{bmatrix}$$

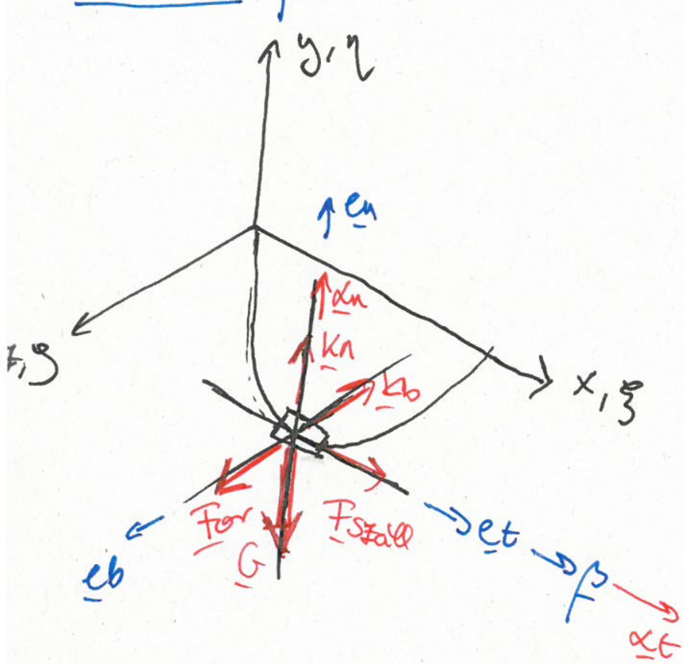
$$\underline{a}_{cor} = 2\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ \rho_b & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\omega\rho_b \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_{cor} = 2m\omega\rho_b$$

A B pont körpályán mozog ω szögsebességgel

SZTA

$\rho\omega$



Vetületi egyenletek

t: $m a_t = F_{száll} = mR\omega^2$

n: $m \cdot a_n = K_n - mg$

b: $0 = F_{cor} - K_b$

$$a_n = \frac{\rho^2}{R} \rightarrow \text{kell } \underline{\rho}\,!$$

Munkatétel A – B közé

$$T_B - T_A = W_{AB} = \int_{t_0}^{t_1} P_{rel}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F} \cdot \rho + \underline{F}_{száll} \cdot \rho \, dt$$

$$T_B = \frac{1}{2} m \rho_B^2$$

$$T_A = \frac{1}{2} m \rho_A^2 = 0!$$

- Valódi erők munkája

↗ mindig merőleges mert ideális!

$$\underline{F} = \underline{K} + \underline{G} \rightarrow \underline{F}\cdot v = \underline{K}\cdot v + \underbrace{\underline{G}\cdot v}_{\text{potenciálos}}$$

$$W_{AB}^{G} = -(U_B^G - U_A^G) = U_A^G - U_B^G = mgR - 0 = \underline{mgR}$$

- Szállító erők munkája

$$\underline{F}_{száll} = \begin{bmatrix} m\omega^2\xi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \exists\, U^{Sz}, \text{hogy} \quad \underline{F}_{száll} = -\operatorname{grad} U^{Sz}$$

$$\underline{\underline{U^{Sz} = -\frac{1}{2}m\omega^2\xi^2}}$$

$$W_{AB}^{Sz} = U_A^{Sz} - U_B^{Sz} = \underline{\underline{\frac{1}{2}m\omega^2R^2}}$$

Összesítve:

$$T_B - T_A = W_{AB} = W_{AB}^{G} + W_{AB}^{Sz}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_b^2 = \cancel{m}gR + \frac{1}{2}\cancel{m}\omega^2R^2$$

$$v_B = \sqrt{2gR + \omega^2R^2} = \underline{\underline{1{,}529\left[\frac{m}{s}\right]}}$$

↳ Vissza a vektoriális egyenletekhez!

$$n:\ m a_n = K_n - mg \qquad a_n = \frac{v_b^2}{R}$$

$$\hookrightarrow K_n = m(a_n + g) = m\left(\frac{v_b^2}{R} + g\right) = \underline{\underline{6{,}64\,[N]}}$$

$$b:\ F_{cor} = K_b$$

$$\hookrightarrow 2m\omega v_b = \underline{\underline{3{,}76\,[N]}}$$

$$K = \sqrt{K_n^2 + K_b^2} = \underline{\underline{7{,}63\,[N]}}$$

2) C pont sebessége A és C között

$$T_C - T_A = W_{AC}^{G} + W_{AC}^{száll} \longrightarrow W_{AC}^{száll} = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot 4R^2 = \underline{\underline{2m\omega^2 R^2}}$$

$$\underset{0}{\overset{\parallel}{}} \qquad \hookrightarrow W_{AC}^{G} = U_A - U_C = 0$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} \beta_C^2 = 2\cancel{m}\, \omega^2 R^2$$

$$\beta_C = 2R\omega = \underline{\underline{1{,}228 \left[\frac{m}{s}\right]}}$$

$$\underline{v}_C = \underline{\beta}_C + \underline{v}_{száll} = \begin{bmatrix} \cancel{\beta_C} \\ \cancel{0}\beta_C \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2R\omega \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 2R\omega \\ -2R\omega \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\underline{v}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}228 \\ -1{,}228 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]}}$$