Száraz súrlódás és nem-folytonos dinamikai rendszerek

Antali Máté

BME Műszaki Mechanikai Tanszék

8. Kiterjesztett Filippov-rendszerek

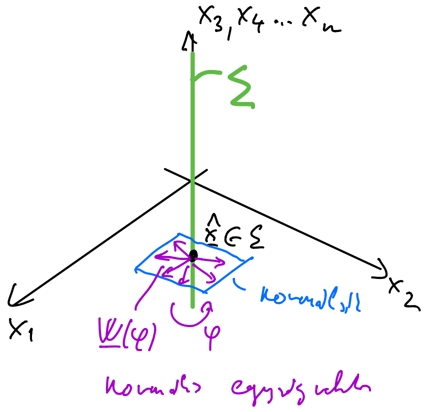
Az előadás-sorozat elkészülését az MTA/ELKH támogatta a Prémium Posztdoktori Kutatói Programban támogatott PPD2018-014/2018 számú pályázat keretében. Készült 2021-ben.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(x) \qquad (1)$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n / \Sigma$$

szakadási halmaz



általában: Σ: $n-2$ dimenziós differenciálható sokaság

most: Σ: $\underbrace{n-2 \text{ dimenziós}}_{\text{2 kodimenziós}}$ altér $\to x_1 = x_2 = 0$

$$\underline{\Psi}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$$

∞ sok normál egységvektor van

$\underline{F}$ irány menti határértékeit

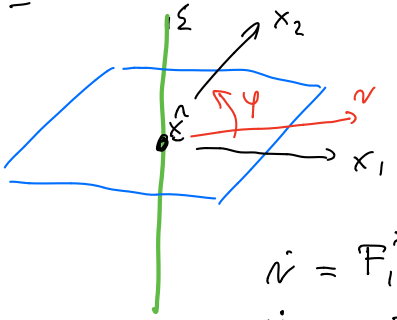
$$\underline{F}^*(\hat{\underline{x}}, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underline{F}(\hat{\underline{x}} + \varepsilon \cdot \underline{\Psi}(\varphi)) \qquad (2)$$

<u>Def</u>: (Kiterjesztett Fil. rendsz.)

(1) rendben egy $\hat{x}$, ha

- $\underline{F}(x)$ sima $\mathbb{R}^n/\Sigma$
- (2) h.t. akkor létezik $\forall \underline{\hat{x}} \in \Sigma$ és $\forall \varphi \in [0, 2\pi)$
- bármely $\hat{x} \in \Sigma \to$ létezik $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi) \to \underline{F}^*(\underline{\hat{x}}, \varphi_1) \neq \underline{F}^*(\underline{\hat{x}}, \varphi_2)$

$\underline{F}^*$ normálsíkbeli komponensei polár koordinátákban



$$\begin{cases} x_1 = r \cdot \cos\varphi \\ x_2 = r \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0$$

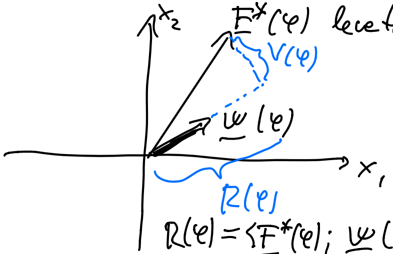
$$\varphi = \operatorname{atan}_2(x_2, x_1)$$

$\dot{x}_1 = F_1^*(\underline{\hat{x}}, \varphi)$, $\dot{x}_2 = F_2^*(\underline{\hat{x}}, \varphi) \to$ aszimptotikus dinamika $\hat{x}$-nál

$$\dot{r} = F_1^*(\varphi)\cos\varphi + F_2^*(\varphi)\sin\varphi =: R(\varphi)$$

$$r\dot{\varphi} = -F_1^*(\varphi)\sin\varphi + F_2^*\cos\varphi =: V(\varphi)$$

$F^*(\varphi)$ levetítve x_1x_2 síkba



$$R(\varphi) = \langle \underline{F}^*(\varphi); \underline{\psi}(\varphi) \rangle$$

$$V(\varphi) = \langle \underline{F}^*(\varphi), \underline{\psi}(\varphi + \pi/2) \rangle$$

aszimptotikus dinamika

$$\dot r = R(\varphi) \qquad \dot\varphi = \frac{1}{r} V(\varphi)$$

$r \to r=0$ szakadás

↳ új időskála:

$$\dot{[\,]} = \frac{d}{dt} = \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{d\gamma} = \frac{1}{r}[\,]'$$

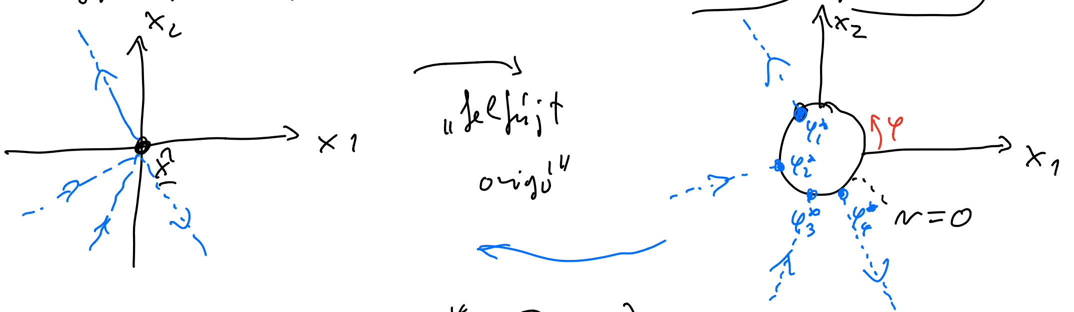
$$\boxed{r' = r R(\varphi) \qquad \varphi' = V(\varphi)} \to \text{folytonos diff. egy.}$$

↳ egyensúlyi helyzetei: $r'=0$ $\varphi'=0$ → $\boxed{r=0}$ $\boxed{V(\varphi)=0}$ → $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots \varphi_k^*$

↓ spec. megoldás

$$\varphi(\gamma)\equiv\varphi^*$$
$$r(\gamma) = r_0 e^{R(\varphi^*)\gamma}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(t)&\equiv\varphi^*\\ r(t)&=r_0+R(\varphi^*)t\end{aligned}}$$



Def: karakterisztikus irány: $\varphi^* \in [0, 2\pi) \to \underline{\underline{V(\varphi^*)=0}}$

Def: φ^* kat. inv. (radiálisan) vonzó, ha $R(\varphi^*) < 0$

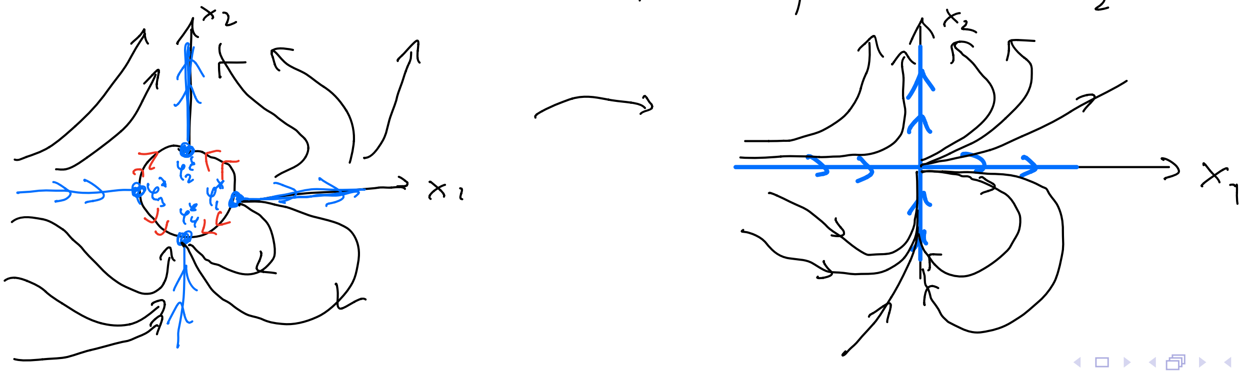
taszító, ha $R(\varphi^*) > 0$

Def: φ^* kat. inv. kerületi irányban vonzó, ha $\frac{dV}{d\varphi}(\varphi^*) < 0$

taszító, ha $\frac{dV}{d\varphi}(\varphi^*) > 0$

Példa:
$$\dot{x}_1 = w_1\left(w_1 + w_2 - w_2^2\right)$$
$$\dot{x}_2 = w_2\left(w_1 + w_2 + w_1^2\right)$$
$$w_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad w_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Van 4 db katak-inv: $\varphi_1^* = 0$, $\varphi_2^* = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_3^* = \pi$, $\varphi_4^* = \frac{3\pi}{2}$



Def: φ^* → domináns, ha $R(\varphi^*) \cdot \frac{dV}{d\varphi}(\varphi^*) > 0$

↳ izolált, ha $R(\varphi^*) \cdot \frac{dV}{d\varphi}(\varphi^*) < 0$

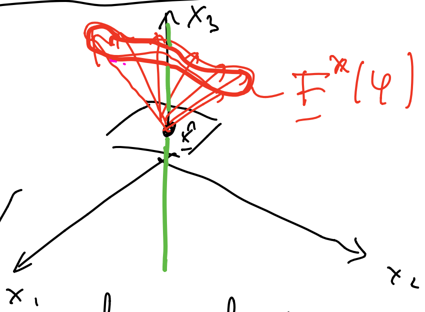
<u>Nevek a súrlódásnál:</u>

- határ-irány → irány, amerre a csúszás ↔ tapadás átmenetből létrejön
- (radiálisan) vonz / taszít: csúszás → tapadás v. tapadás → csúszás
- domináns / izolált: tipikus / speciális viselkedés

<u>tapadási / áthaladási tartományok</u> (tegyük fel $\exists\, \varphi^*$ határ-irány)

- $\underline{\hat{x}}$ a tapadási tartományban, $\varphi_1^* \dots \varphi_n^*$ vagy radiálisan vonz vagy taszít
- $\underline{\hat{x}}$ az áthaladási tartomány, $\varphi_1^* \dots \varphi_n^*$ között van 1 taszító és 1 vonzó

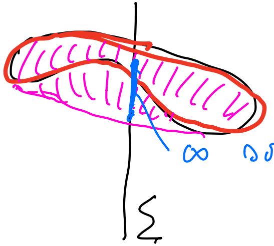
Tapadási dinamika → általában nem egyértelmű



konvex kombinációja egy

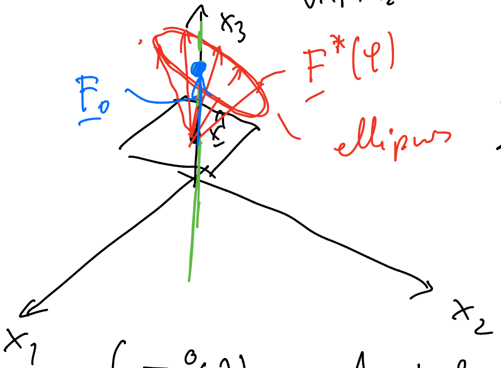
tesztelt ... →

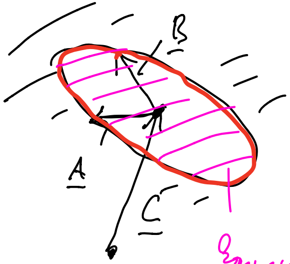
∞ sok metszéspont Σ-val



spec. eset

$$\underline{\dot{x}} = \underline{F}(\underline{x}) = \underline{A}(x)\cdot\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \underline{B}(x)\cdot\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \underline{C}(x)$$





konvex kombináció

$$\boxed{\underline{F}^0}\quad\left\{\begin{array}{l} \underline{F}^0(\hat{\underline{x}}) = a\cdot\underline{A} + b\cdot\underline{B} + \underline{C} \\ \langle \underline{F}^0(\hat{\underline{x}}),\ \underline{w}(0)\rangle = 0 \\ \langle \underline{F}^0(\hat{\underline{x}}),\ \underline{w}(\pi/2)\rangle = 0 \end{array}\right.$$