Száraz súrlódás és nem-folytonos dinamikai rendszerek

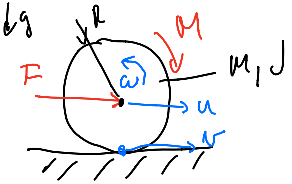
Antali Máté

BME Műszaki Mechanikai Tanszék

---

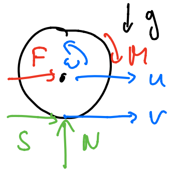
6. Gördülési feladatok

Az előadás-sorozat elkészülését az MTA/ELKH támogatta a Prémium Posztdoktori Kutatói Programban támogatott PPD2018-014/2018 számú pályázat keretében. Készült 2021-ben.



$J = j m R^2 \qquad 0 < j < 1 \qquad (j = 1/2$, tömör korong$)$

$$\frac{v-u}{R} = \omega \quad \rightarrow$$



$(N - mg = 0)$

csúszás

$$m\dot u = F + S \longrightarrow \boxed{\dot u = \frac{F}{m} + \frac{S}{m}}$$

$$\begin{cases} j m R^2 \dot\omega = SR - M \\ j m (\dot v - \dot u) = S - \dfrac{M}{R} \end{cases} \rightarrow \dot v = \frac{S}{jm} - \frac{M}{jmR} + \underbrace{\frac{F}{m} + \frac{S}{m}}_{\dot u} = \frac{F}{m} - \frac{M}{jmR} + \frac{S(1+j)}{jm}$$

Coulomb-modell: $S = -\mu m g \dfrac{v}{|v|}$

2 DOF → 4D fázistér lenne → de helyzettől, szöghelyzettől független

↳ 2D fázistérre redukálható: $x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot u = \underbrace{\frac{F}{m}}_{a} \underbrace{- \mu g}_{b} \frac{v}{|v|} \\ \dot v = \underbrace{\frac{F}{m} - \frac{M}{jmR}}_{c} - \underbrace{\frac{1+j}{j} \mu g}_{d} \frac{v}{|v|} \end{cases}$$

a, b, c, d paraméterek

$\Sigma: \ v = 0 \qquad H(x) = v$

$\underline{w}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{w}^- = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\underline{F}^+ = \begin{bmatrix} a - b \\ c - d \end{bmatrix} \qquad \underline{F}^- = \begin{bmatrix} a + b \\ c + d \end{bmatrix}$$

$\rightarrow F_n^+ = c - d$

$F_n^- = -c - d$

$\searrow$ konstans $\swarrow$

$F_n^+ < 0 \qquad c < d$

$F_n^- < 0 \qquad c > -d$

$\nearrow$ ha $|c| < d \iff \left| \frac{F}{m} - \frac{M}{jmR} \right| < \frac{1+j}{j} \mu g \rightarrow$ | |

$\rightarrow$ teljes Σ tapadási tartomány

$\searrow$ ha $|c| > d \rightarrow$ teljes Σ átcsúszási tartomány

tapadási dinamika:

$$\underline{F}^0 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} - \beta \cdot \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

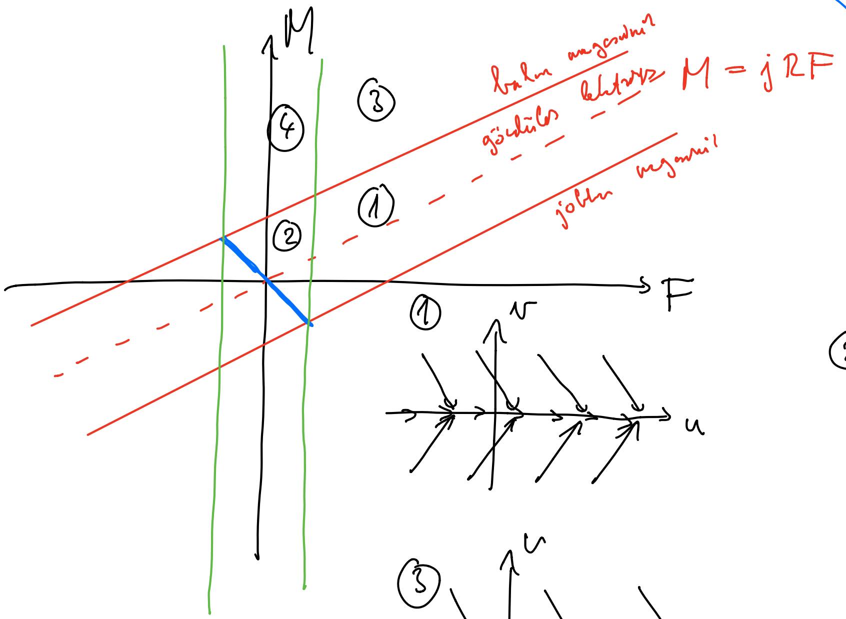
$\langle \underline{F}_0, \underline{w}^+ \rangle = c - \beta d = 0 \rightarrow \beta = \frac{c}{d} \searrow$

$$\underline{F}^0 = \begin{bmatrix} a - \frac{c}{d} \cdot b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+j} \cdot \frac{1}{m} \cdot \boxed{\left(F + \frac{M}{R}\right)} \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

ugyanaz, mint a gördülésből számított dinamika

→ itt nem gyorsul / lassul kocsi

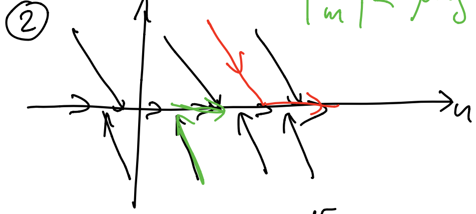
$M = -FR$

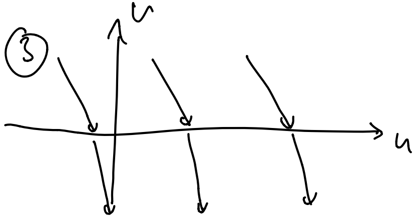


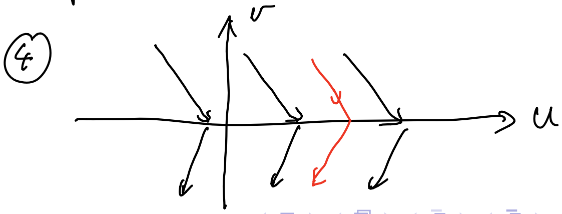
$\frac{F}{m} - \mu g \frac{v}{|v|}$ előjele

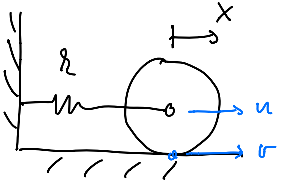
↓

$\left|\frac{F}{m}\right| < \mu g$







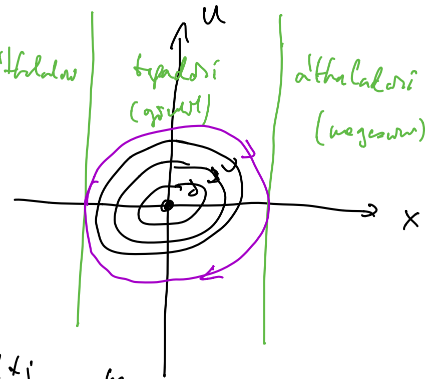


előző példa: $M=0$, $F=-kx$ $\to$ $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ u \\ v \end{bmatrix}$ $\to$ Σ: $v=0$ sík

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{u} = -\frac{k}{m}x - \mu g \frac{v}{|v|} \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x - \frac{1+j}{j}\mu g \frac{v}{|v|} \end{cases}$$

$\underline{F}$

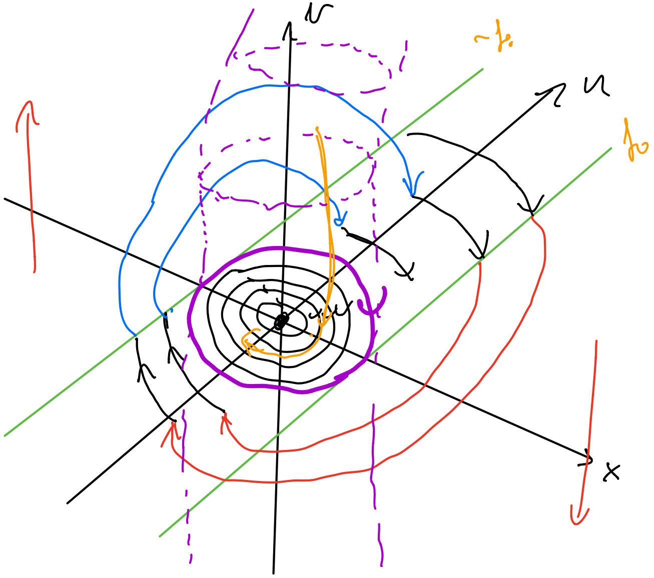
$$\to \quad \underline{F}^0 = \begin{bmatrix} u \\ -\frac{1}{j+1}\cdot\frac{k}{m}x \\ 0 \end{bmatrix}$$



$\to$ tapadási tartomány

$$\left|\frac{F}{m}\right| < \frac{1+j}{j}\mu g \to |x| < \underbrace{\frac{1+j}{j}\mu g \frac{m}{k}}_{f_0}$$

xu sík : Egyens. felület



kicsi „hengeres" belül → rögtön letapad

kívül → tapadó (görbülő) és csúszó szakasz váltakozva