Száraz súrlódás és nem-folytonos dinamikai rendszerek

Antali Máté

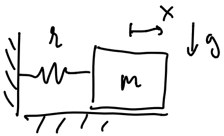
BME Műszaki Mechanikai Tanszék

---

5. Súrlódásos oszcillátorok

Az előadás-sorozat elkészülését az MTA/ELKH támogatta a Prémium Posztdoktori Kutatói Programban támogatott PPD2018-014/2018 számú pályázat keretében. Készült 2021-ben.

A



$$m\ddot{x} + kx = -\mu m g \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \longrightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\alpha^2} x = -\underbrace{\mu g}_{=\alpha^2 f_0} \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

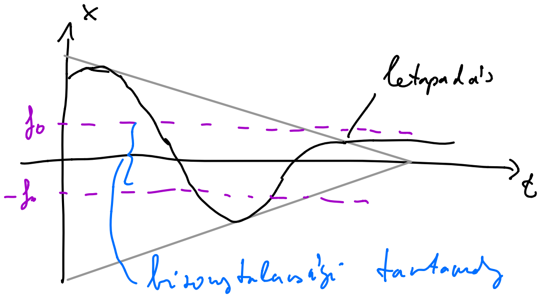
$$f_0 = \frac{\mu m g}{k}$$

(statikus kitérés)

- Coulomb-modell
- $N = mg$

- időbeli lefolyás: $x(t) = A \cdot \cos(\alpha t) + B \cdot \sin(\alpha t) + C$

(szakaszonként)



- fázistér (Filippov-rendszer)

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\alpha^2 x - \alpha^2 f_0 \frac{v}{|v|} \end{cases} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \qquad \underline{F}(\underline{x})$$

Filippov-rendszer-e

kapcs. felület: $\underbrace{v = 0 \text{ egyenes}}_{\Sigma}$

$$\underline{F}^+(\underline{x}) = \begin{bmatrix} v \\ -\alpha^2 (x + f_0) \end{bmatrix} \quad (v > 0)$$

$$\underline{F}^-(\underline{x}) = \begin{bmatrix} v \\ -\alpha^2 \cdot (x - f_0) \end{bmatrix} \quad (v < 0)$$

$$H(\underline{x}) = v \rightarrow \underline{w}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{w}^- = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

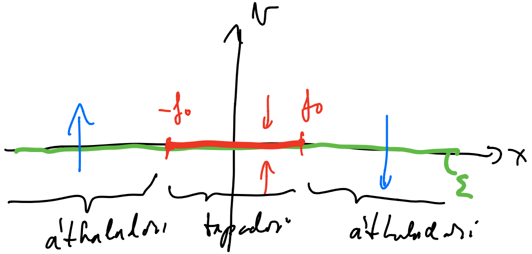
$$\hat{\underline{x}} \in \Sigma, \quad \hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad \underline{F}^+(\hat{\underline{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha^2(x+\delta_0) \end{bmatrix} \qquad \underline{F}^-(\hat{\underline{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha^2(x-\delta_0) \end{bmatrix}$$

teljesülnek a feltételek (definíció) → Filippov-rsz.

$$\left.\begin{aligned} F_n^+ &= \langle \underline{F}^+(\hat{\underline{x}}), \underline{n}^+ \rangle = -\alpha^2(x+\delta_0) \\ F_n^- &= \langle \underline{F}^-(\hat{\underline{x}}), \underline{n}^- \rangle = \alpha^2(x-\delta_0) \end{aligned}\right\}$$

→ áthaladási tartományok: $x < -\delta_0$ vagy $x > \delta_0$

↘ tapadási tartomány: $-\delta_0 < x < \delta_0$



→ tapadási dinamika: (Utkin)

$$\underline{F}^0 = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\underline{F}^+ + \underline{F}^-\right)}_{\begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha^2 x \end{bmatrix}} + \beta \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(\underline{F}^+ - \underline{F}^-\right)}_{\begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha^2 \delta_0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha^2(x+\beta\delta_0) \end{bmatrix}$$

$\underline{F}^0$ Σ egyenesébe esik: $\underbrace{\langle \underline{F}_0, \underline{n}^+ \rangle}_{= -\alpha^2(x+\beta\delta_0)} = 0$

$$\boxed{\beta = -\frac{x}{\delta_0}}$$

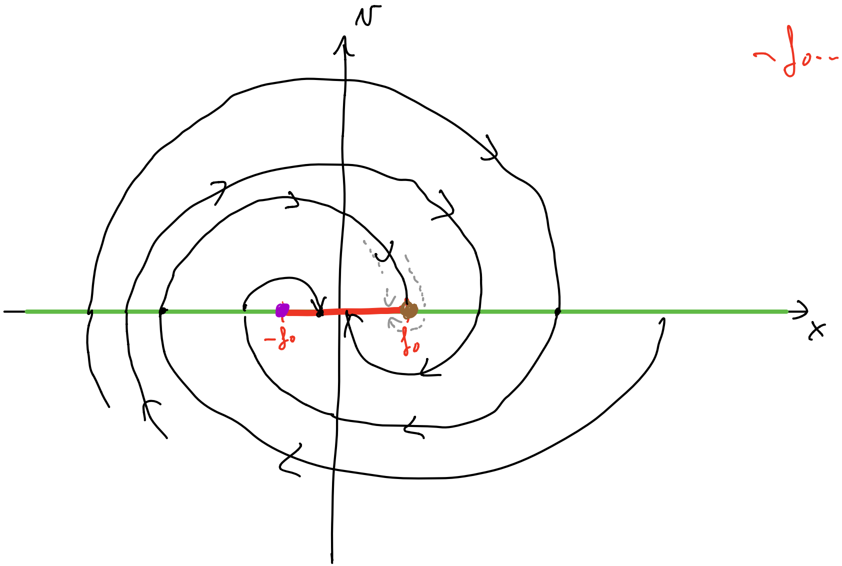
triviális tapadási dinamika

(tap. tartomány minden pontja egyensúly)

$$\boxed{\underline{F}_0(\hat{\underline{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\underline{F}^+$ egyensúlyi helyzete $(\underline{F}^+(x) = 0) \to v=0,\ x=-f_0 \to$ centrum

$\underline{F}^-$ egyensúlyi helyzete $(\underline{F}^-(x) = 0) \to v=0,\ x=f_0 \to$ centrum



$-f_0 \ldots f_0$ szakasz ∞ sok

pszeudo-egyensúly

sem $\underline{F}^+$, sem $\underline{F}^-$ nem rendelkezik egyensúllyal

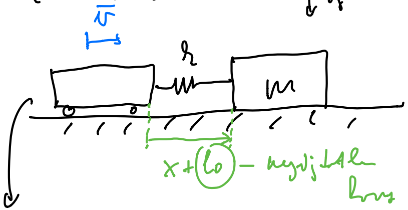
– statikus Coulomb modell

$f_0' > f_0$ $\to$ nem különböző

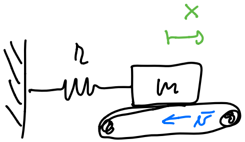
$\underbrace{}_{\frac{\mu_0 m g}{\varepsilon}}$

– Stribeck modell megoldása

(B) (akadozó csúszás) $\downarrow g$ $\bar{v} > 0$, ismert



$\approx$



$$m\ddot{x} + kx = -\mu m g \frac{\bar{v} + \dot{x}}{|\bar{v} + \dot{x}|} \to \text{legyen: } v = \bar{v} + \dot{x} \to m\dot{v} + kx = -\mu m g \frac{v}{|v|}$$

(Coulomb-súrlódás)

$$\hookrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v - \bar{v} \\ \dot{v} = -\alpha^2 x - \alpha^2 \delta_0 \frac{v}{|v|} \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \qquad H(\underline{x}) = v \qquad \underline{w}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{w}^- = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

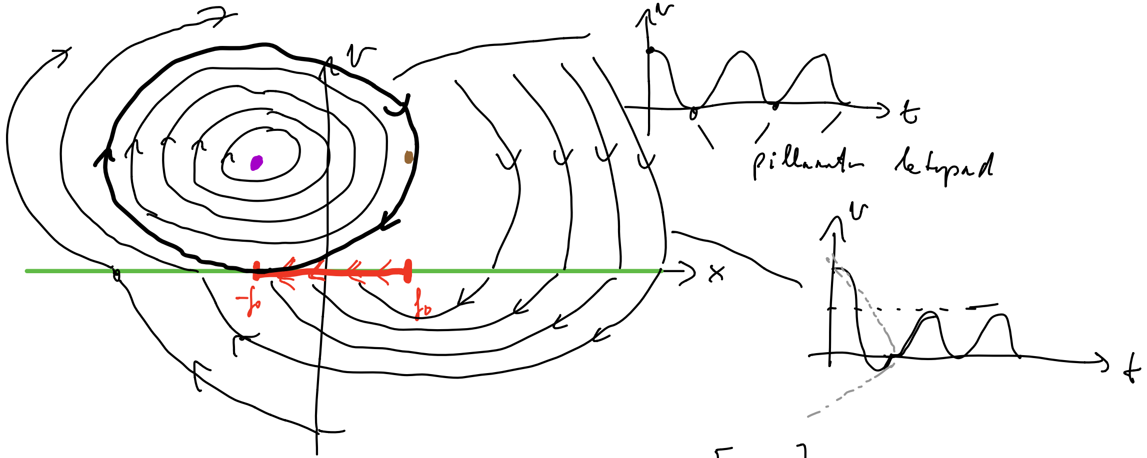
$$\underline{F}^+(\underline{x}) = \begin{bmatrix} v - \bar{v} \\ -\alpha^2(x + \delta_0) \end{bmatrix} \qquad \underline{F}^-(\underline{x}) = \begin{bmatrix} v - \bar{v} \\ -\alpha^2(x - \delta_0) \end{bmatrix}$$

$\to F_n^+, F_n^-$ = előző példa

$\to$ tapadási és áthaladási tartományok nem változnak

tapadási dinamika: $\beta = \frac{\gamma}{\delta_0}$ (előző feladat)

$$\underline{F}_0(\hat{\underline{x}}) = \frac{1}{2}(\underline{F}^+ + \underline{F}^-) + \frac{1}{2}\beta \cdot (\underline{F}^+ + \underline{F}^-) = \begin{bmatrix} -\bar{v} \\ 0 \end{bmatrix}$$



F^+ egyensúly: $v = \bar{v}$, $x = -f_0$, $\underline{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -f_0 \\ \bar{v} \end{bmatrix}$

$$(\underline{\dot{x}} - \underline{\bar{x}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\underline{x} - \underline{\bar{x}}) \rightarrow \text{centrum}$$

F^- egyensúly: $v = \bar{v}$, $x = f_0$, $\underline{\bar{x}} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \bar{v} \end{bmatrix}$

DE: $\underline{F}^-$ csak $v < 0$ esetén $\rightarrow$ „virtuális" egyensúly

Stribeck-modell

$$\dot{x} = v - \bar{v}$$

$$\dot{v} = -\alpha^2 x - \frac{mg}{\xi}\cdot\left(\mu + (\mu_0-\mu)\cdot e^{-|v|/v_s}\right)\cdot\frac{v}{|v|}$$

$$\dot{v} = -\alpha^2 x - \alpha^2 f_0\left(\lambda + (1-\lambda)\cdot e^{-|v|/v_s}\right)\cdot\frac{v}{|v|} \qquad \lambda = \frac{\mu}{\mu_0} < 1$$

$\uparrow$ μ_0-ból számolt

- $\underline{F}^+$ és $\underline{F}^-$ valódi, de $v=0$-ban határozatlanok nem

  $\rightarrow$ tapadás/átcsúszás, tapadási dinamika

- $\underline{F}^+$ egyensúly: $v = \bar{v}$

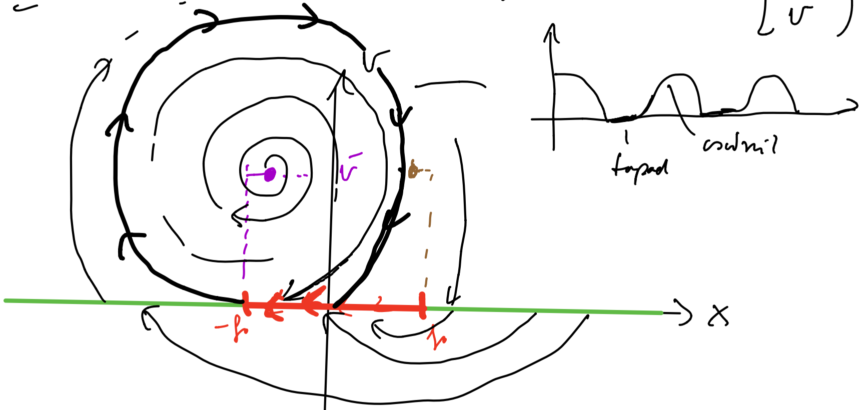
$$0 = -\alpha^2\bar{x} - \alpha^2 f_0\cdot\left(\lambda + (1-\lambda)\cdot e^{-\bar{v}/v_s}\right) \rightarrow \bar{x} = -f_0\cdot\underbrace{\left(\lambda + (1-\lambda)\cdot e^{-\bar{v}/v_s}\right)}_{<1}$$

$$\underline{\bar{x}} = \begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{v}\end{bmatrix} \rightarrow \text{stabilitás:} \quad (\underline{x} - \underline{\bar{x}})^{\cdot} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\alpha^2 & \frac{\alpha^2 f_0}{v_s}\cdot(1-\lambda)\cdot e^{-\bar{v}/v_s}\end{bmatrix}\cdot(\underline{x} - \underline{\bar{x}})$$

> 0

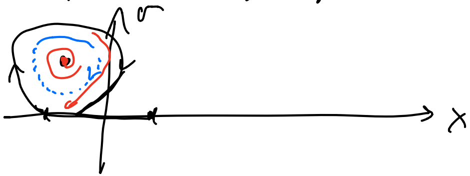
instabil fókusz

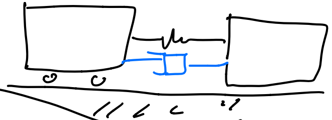
• $\underline{\underline{F}}$ → virtuális egyensúly : $\bar{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -\dot{x} \\ \bar{v} \end{bmatrix}$ → ... stabil fókusz



+ lineáris csillapítás hatása

stabilitását az egyensúly





→ akadozó csúszást elkerüljük