Száraz súrlódás és nem-folytonos dinamikai rendszerek

Antali Máté

BME Műszaki Mechanikai Tanszék

---

4. Filippov-rendszerek

Az előadás-sorozat elkészülését az MTA/ELKH támogatta a Prémium Posztdoktori Kutatói Programban támogatott PPD2018-014/2018 számú pályázat keretében. Készült 2021-ben.

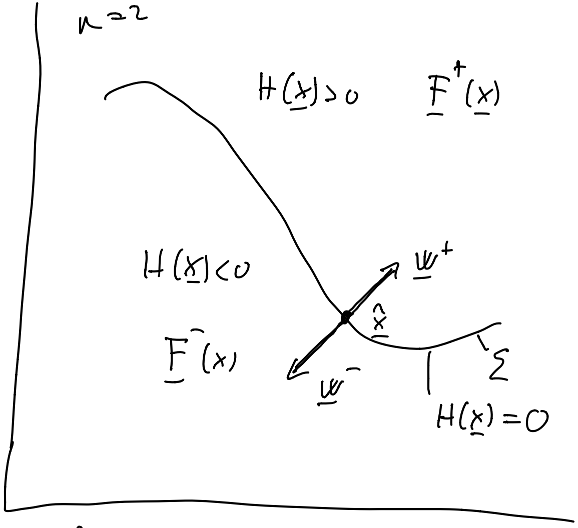
$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{F}^+(\underline{x}) & \text{ha} \quad H(\underline{x}) > 0 \\ \underline{F}^-(\underline{x}) & \text{ha} \quad H(\underline{x}) < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

- változó: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$
- $\underline{F}^+(\underline{x})$ és $\underline{F}^-(\underline{x})$ sima vektormezők
  (szakadási halmaz)
- kapcsoló felület: Σ (nem folytonossági halmaz)
  $H(\underline{x})$ implicit fgv grafikonja

$$\Sigma = \{\underline{x} : H(\underline{x}) = 0\}$$

- $\hat{\underline{x}} \in \Sigma$ (választott pont)
- $\underline{w}^+, \underline{w}^-$: Σ-ra merőleges egység vektorok

$$\underline{w}^+ = \frac{\nabla H(\underline{x})}{\|\nabla H(\underline{x})\|}, \qquad \underline{w}^- = -\underline{w}^+$$



- határérték

$$\underline{F}^+(\hat{\underline{x}}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underline{F}\left(\hat{\underline{x}} + \varepsilon \cdot \underline{w}^+(\hat{\underline{x}})\right) \qquad (2)$$

$$\underline{F}^-(\hat{\underline{x}}) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \underline{F}\left(\hat{\underline{x}} + \varepsilon \cdot \underline{w}^-(\hat{\underline{x}})\right) \qquad (3)$$

<u>Filippov-rendszer</u>: (1) rendszer, amire

1, $\underline{F}(\underline{x})$ sima fgv $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$

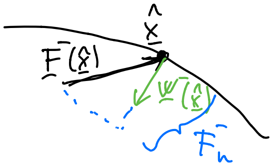
2, bármely $\hat{\underline{x}} \in \Sigma$-ban (2)-(3) határértékek léteznek

3, bármely $\hat{\underline{x}} \in \Sigma$-ban $\underline{F}^+(\hat{\underline{x}}) = \underline{F}^-(\hat{\underline{x}})$

• Σ-ra merőleges komponensek

$$F_n^+(\hat{\underline{x}}) = \langle \underline{F}^+(\hat{\underline{x}}), \underline{w}^+(\hat{\underline{x}}) \rangle \quad \text{(skaláris szorzat)}$$

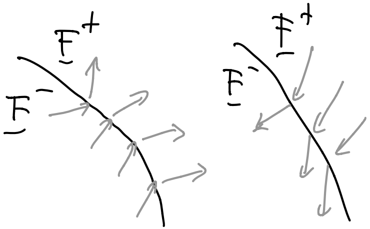
$$F_n^-(\hat{\underline{x}}) = \langle \underline{F}^-(\hat{\underline{x}}), \underline{w}^-(\hat{\underline{x}}) \rangle$$



• Σ tipikus tartományai

crossing region (áthaladó tartomány)

F_n^+ és F_n^- előjele különböző



sliding region (csúszó tartomány)

F_n^+ és F_n^- előjele megegyezik

elnevezés „csúszó" = „sliding" → irányítástechnikából

DE: crossing → mechanikai megcsúszás

sliding → mechanikai tapadás

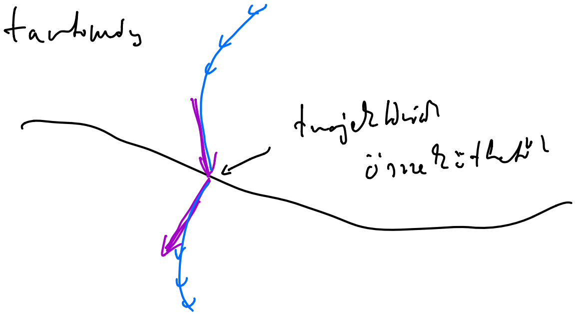
javaslat: ~~„csúszó tartomány"~~ → $\boxed{\text{tapadási tartomány}}$

Def: áthaladási tartomány: $F_n^+ \cdot F_n^- < 0$

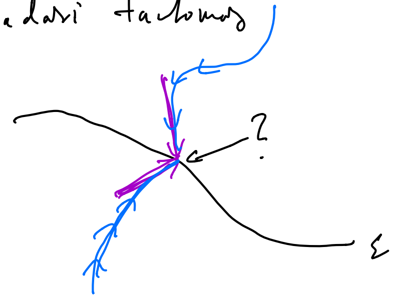
Def: tapadási tartomány: $F_n^+ \cdot F_n^- > 0$

Megoldás Σ közelítés

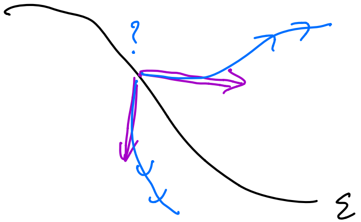
- áthaladási tartomány



• tapadási tartomány



a trajektóriák „beleragadnak" Σ-ba

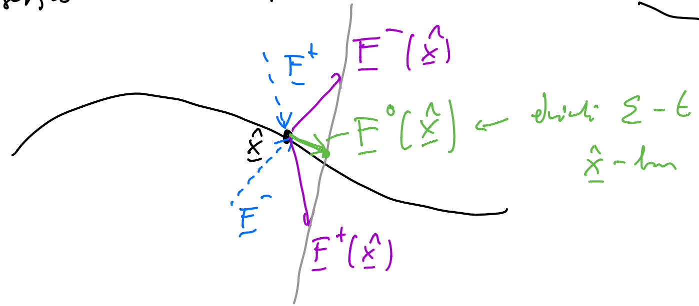


→ $\underline{F}$ kiterjesztése Σ halmazon → $\underline{F}^0$ tapadási dinamika

(tapadási tartományon)

(sliding dynamics)

legegyszerűbb: Filippov-féle konvex módszer (lineáris) → kétféle felírás:



• Filippov:

$$\underline{F}^0 = (1-\alpha)\cdot\underline{F}^+ + \alpha\cdot\underline{F}^- \qquad (\alpha(\hat{x}))$$

$$(0 \le \alpha \le 1)$$

• Utkin:

$$\underline{F}^0 = \frac{\underline{F}^+ + \underline{F}^-}{2} + \beta\cdot\frac{\underline{F}^+ - \underline{F}^-}{2} \qquad (\beta(\hat{x}))$$

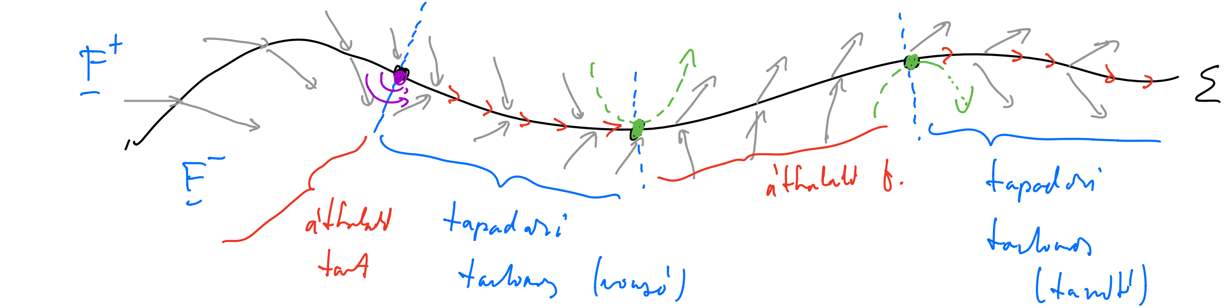
$$(-1 \le \beta \le 1)$$

ekvivalens: $\boxed{\beta = 2\alpha - 1}$

feltétel: $\underline{F}^0$ érintő Σ halmazt minden $\hat{\underline{x}}$ pontban

$$\langle \underline{F}^0(\hat{\underline{x}}), \underline{w}^+(\hat{\underline{x}}) \rangle = 0 \;\longrightarrow\; \alpha(\hat{\underline{x}}) \text{ vagy } \beta(\hat{\underline{x}})$$

szemléltetés:



spec. pontok: $F_n^+ = 0$ vagy $F_n^- = 0$ → tangency point (érintési pont)

↳ „látható"

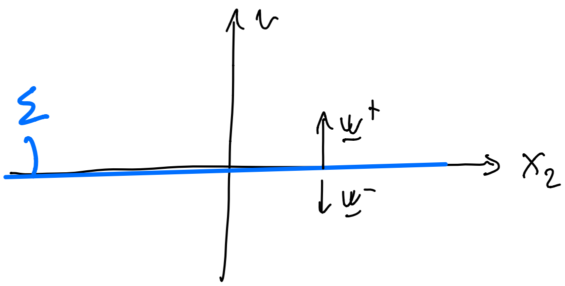
↳ „láthatatlan"

Súrlódásos probléma:

feltevés: 1 db síkbeli száraz súrlódásos érintkezés van a modellben

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to H(\underline{x}) = v \to \Sigma: v = 0 \text{ felület}$$

(n−1 dimenziós, 1 kodimenziós)



$$\underline{\psi}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\psi}^- = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \to \text{állandó}$$

Fejtés:

- $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(x) = \underline{A}(x) + \frac{v}{|v|} \cdot \underline{B}(x)$ alakú lesz a „vektormező"

  ($\underline{A}$: sima, $\underline{B}$: sima)

- tartós tapadási tartomány nem lehet (disszipáció negatív lenne)

- jellemző kép