Száraz súrlódás és nem-folytonos dinamikai rendszerek

Antali Máté

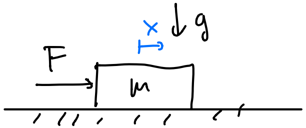
BME Műszaki Mechanikai Tanszék

---

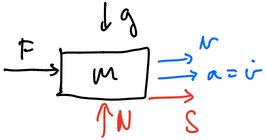
3. Száraz súrlódás okozta nem-folytonos dinamika

Az előadás-sorozat elkészülését az MTA/ELKH támogatta a Prémium Posztdoktori Kutatói Programban támogatott PPD2018-014/2018 számú pályázat keretében. Készült 2021-ben.

demonstráció egy egyszerű példán



+ többféle súrlódási modell



$N = mg$

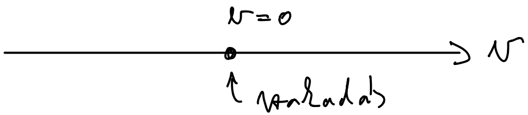
$$m\underset{\dot v}{\underset{\shortparallel}{a}} = F + S$$

(feltesszük: $F > 0$)

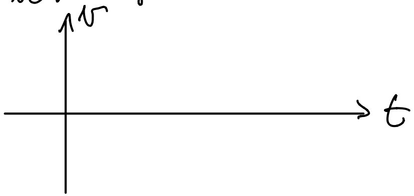
Egyszerű Coulomb-modell

csúszás: $S(v) = -\mu m g \frac{v}{|v|}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} \dot x = v \\ \dot v = \frac{F}{m} - \mu g \frac{v}{|v|} \end{cases}$ → x-et nem tartalmaz → v állapot vizsgálható (1D fázis „tér")

fázistér = egyenes



időbeli megoldás



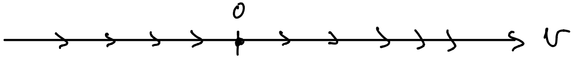
+ tapadás: $v \equiv 0$ → stat. egyensúly $F + S = 0$

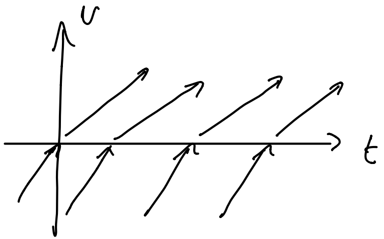
$|F| = |S| < \mu m g$

$\dot{v} = \frac{F}{m} - \mu g \frac{v}{|v|}$ → $v > 0$ (jobbra csúszik) $\dot{v} = \frac{F}{m} - \mu g$ $\dot{v} > 0$ ha $F > \mu m g$

↘ $v < 0$ (balra csúszik) $\dot{v} = \frac{F}{m} + \mu g$ $\dot{v} > 0$ ha $F > -\mu m g$ ✓ $(F > 0)$

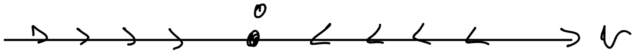
a) $F > \mu m g$

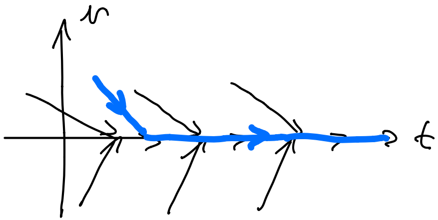




→ tapadás nem lehetséges → $v = 0$-nál összeköttetik a megoldás

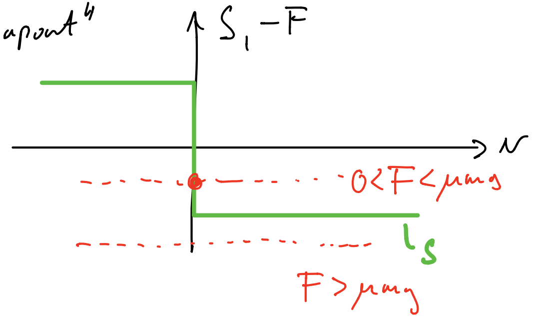
b) $0 < F < \mu m g$





tapadás létrejön → $v(t) \equiv 0$

„munkapont"



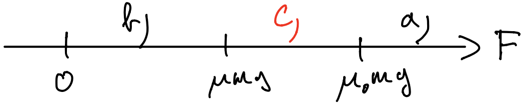
Statikus Coulomb-modell

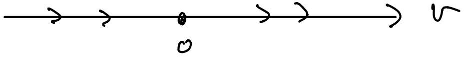
csúszás: $\dot v = \frac{F}{m} - \mu g \frac{v}{|v|}$ (dinamika lesz változó)

↪ $v>0 \to \dot v > 0$ ha $F>\mu m g$

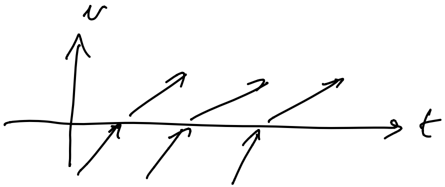
$v<0 \to \dot v > 0$ ha $F > -\mu m g$

tapadás: $|F| \le \mu_0 m g$ $(\mu_0 > \mu)$

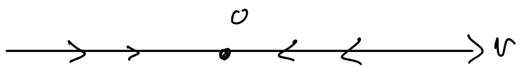


a) 

+ nincs tapadás

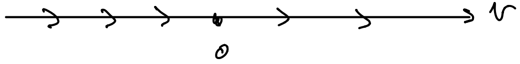


b)

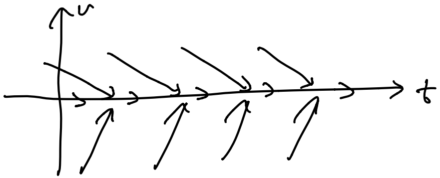


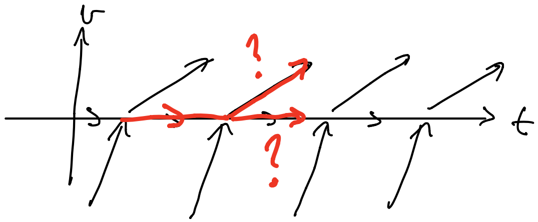
+ van tapadás

c)



DE: van tapadás

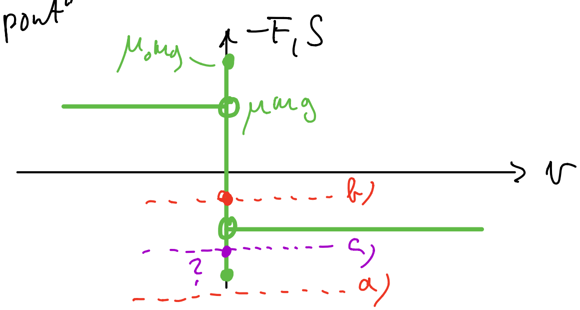




probléma: adott $v=0$ helyzetből megoldható-e?

→ nem egyértelmű → „instabil”

„munkapont”



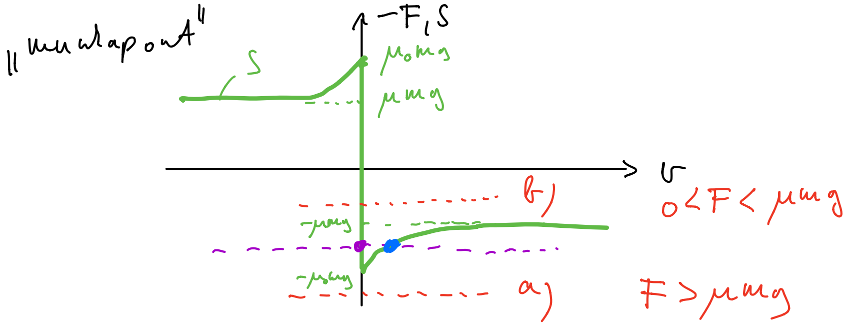
Stribeck-modell

csúszás: $\dot{v} = \frac{F}{m} - \hat{\mu}(v) \cdot g \cdot \frac{v}{|v|}$

$\hat{\mu}(v) = \mu + (\mu_0 - \mu) \cdot e^{-|v|/v_s}$

Stribeck-sebesség

+ tapadás: $|F| \leq \mu_0 m g$



→ két „munkapont"

↳ • : tapadás

↳ • : csúszás állandó $\hat{v}$ sebességgel

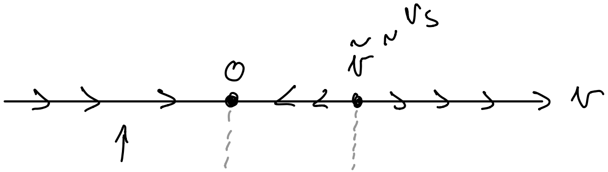
↳ egyens. helyzet

$\dot{v} = 0$ $(v > 0)$ → $\hat{v} = v_s \cdot \ln\left(\frac{mg(\mu_0 - \mu)}{F - \mu m g}\right)$

→ ha $F \to \mu m g \to \hat{v} \to \infty$

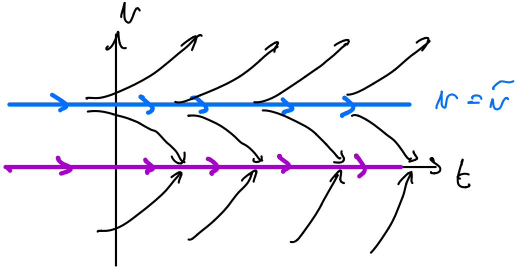
→ ha $F \to \mu_0 m g \to \hat{v} \to 0$

stabilitás: $\left.\frac{d\dot{v}}{dv}\right|_{v=\hat{v}} = \frac{F - \mu m g}{m v_s} > 0 \to$ instabil c)



$v<0$

$$\dot v = \frac{F}{m} + \underbrace{\tilde\mu(v)}_{\to 0}\cdot g > 0$$



„bistabil" tapadás ⟶ továbbiakban → egyszerű Coulomb modell

→ Stribeck modell

Tapadás feltétel: (példával)

– kinematikai feltétel: $v \equiv 0$ (definíció)

– „dinamikai" feltétel: $|F| \le \mu_0 mg$ → F statikai egyenletből, kényszererőből adódik

$(|F| \le \mu mg)$ ↗ „statikai feltétel"??

tapadás lehetősége

– dinamikai feltétel:

$v>0 \to \dot v<0$, $v<0 \to \dot v>0$

$$\lim_{v \to 0^+} \dot v < 0 \quad \text{és} \quad \lim_{v \to 0^-} \dot v > 0 \implies \boxed{\lim_{v \to 0} v \cdot \dot v < 0}$$

mindkett irányból

tapadás megvalósítható

$$\dot v = \frac{F}{m} - \tilde\mu(v) \cdot g \cdot \frac{v}{|v|}$$

$$\lim_{v \to 0^+} \dot v = \frac{F}{m} - \mu_0 \cdot g \cdot 1 \to < 0 \quad \text{ha} \quad F < \mu_0 m g$$

$$\lim_{v \to 0^-} \dot v = \frac{F}{m} - \mu_0 \cdot g \cdot (-1) \to > 0 \quad \text{ha} \quad F > -\mu_0 m g$$

→ kijött a „statikus" feltétel

⇝ lehetséges is

→ nemfolytonos, általánosított formula

↳ Filippov-rendszer