

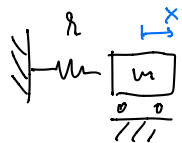
Száraz súrlódás és nem-folytonos dinamikai rendszerek

Antali Máté

BME Műszaki Mechanikai Tanszék

2. A nem-folytonos hatás megjelenése a fázissíkon

Dinamikai rendszer alapjai - faktuális



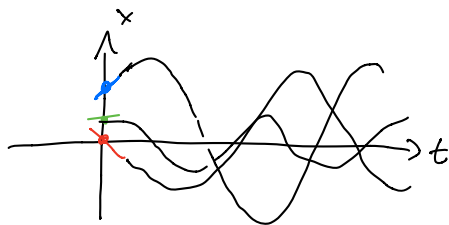
$$m\ddot{x} + kx = 0$$

- megoldás időfüggvény, kezdeti feltételekkel!

$$x(t) = (C_1) \cos(\omega t) + (C_2) \sin(\omega t)$$

$\omega = \sqrt{k/m}$

kezdeti felt.: $x(0) = x_0$
 $\dot{x}(0) = v_0 \rightarrow C_1, C_2$
 \downarrow
 $x(t)$



örvös megoldás egyen?

- faktuális

$$\dot{x} = v$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

\Rightarrow

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x$$

2 db 1. rendű ODE

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ v \end{bmatrix} \quad \underline{\dot{x}} = \underline{F}(x) = \begin{bmatrix} v \\ -k/m \cdot x \end{bmatrix}$$

\rightarrow elvevise:

- diff. egyenlet \circ
- vektormező \circ ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$)
- lineáris rendszer $\circ\circ$

lin. rendszer \rightarrow 2 alapvető dolgot \rightarrow diff. egyenlet: $\dot{x} = \underline{F}(x)$
 \rightarrow leképezés (dirichlet): $\underline{x}_{i+1} = \underline{G}(\underline{x}_i)$

• "dinamika rendszer vizsgálata"

- spec. megoldás \rightarrow megkeresni? (pl. egyensúlyi helyzet $- \underline{F(x)} = \underline{0}$,
határérték)

\rightarrow közműködés vizsgálata (pl. lin. stat. vizsgálat)

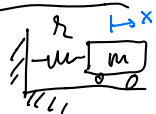
- ált. megoldásokon kívül kezdetes, típusi!

\rightarrow viselkedés jellege

- paraméterfüggetlen \rightarrow bifurkáció

+ geometria !!

Példák:

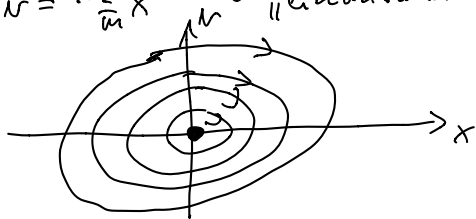


$$\dot{x} = v$$

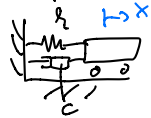
$$\dot{v} = -\frac{r}{m}v - \frac{k}{m}x$$

• egy. helyzet: $x=0, v=0$

• "lineáris" \rightarrow centrum ("neutrálisán stabilis")



oscillations:

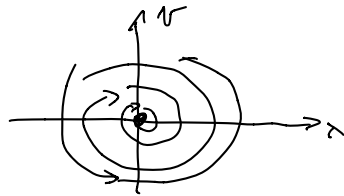


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

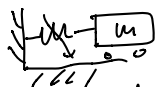
$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{c}{m}v - \frac{k}{m}x$$

- eqs. behind: $x=0, v=0$
- "linearizable" \rightarrow stabil. f. l. s.



"Duffing-oscillator"



nonlinear spring

$$m\ddot{x} + kx(1 - \gamma x^2) = 0 \quad \gamma > 0$$

$$\dot{x} = v$$

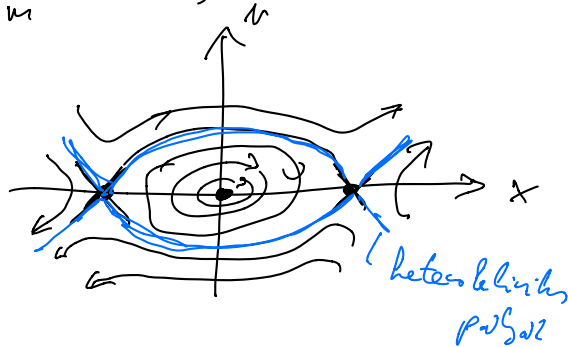
$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x(1 - \gamma x^2)$$

- eqs. behind
- $v=0$

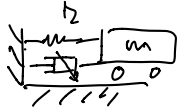
$$x(1 - \gamma x^2) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow x=\sqrt{1/\gamma} \\ \rightarrow x=-\sqrt{1/\gamma} \end{array} \right\} \text{equilibria}$$

linearizable



"von der Pol oscillator"



$$m\ddot{x} + b\dot{x} - c x (1 - \delta x^2) = 0$$

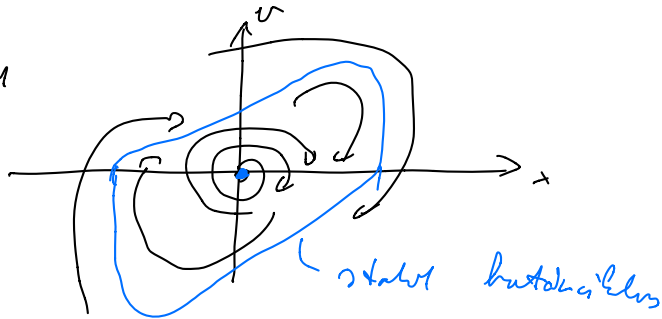
$\delta > 0$

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{b}{m} v - \frac{c}{m} x (1 - \delta x^2)$$

• eqy. helyzet: $x=0, v=0 \rightarrow$ instabil fókusz

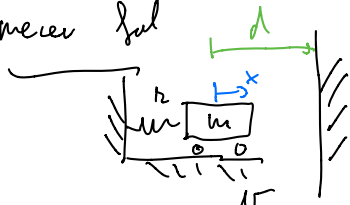
• kétirányú stabil határkörülmény



stb ...

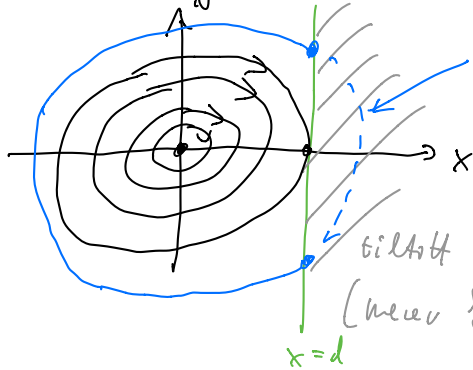
Newton-folytörvény megjelölése → ütközés példája (mozgás és? megoldás)

meccs fal



• $m\ddot{x} + kx = 0$ ha $x < d$

• $x = d$ $\dot{x}^+ = -\rho \dot{x}^-$
 (Newton-ile ütk. tör.) ütk. együt. = 1, rugalmas



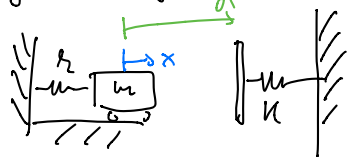
direkt lezseres (pillanatnyi)

töltött (meccs fal)
 $x = d$

hibrid dinamikai rendszer
 (0 simaszög: fókusz)

- tengelyirány: szabad
- behatás: értéktől végt.
- N.m. deriváltja: értéktől végt.

reguláris jól

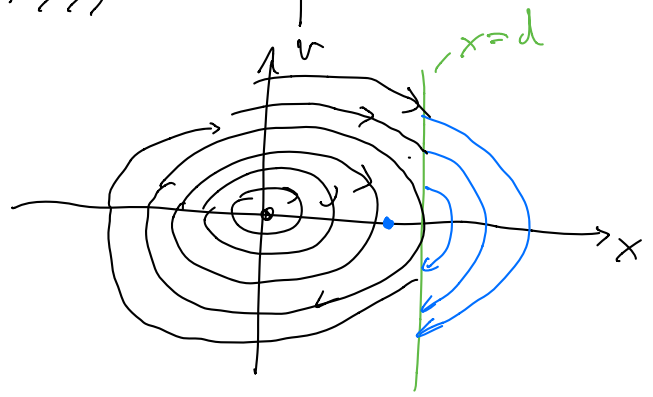


$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{ha } x < d$$

$$m\ddot{x} + kx + k \cdot (x-d) = 0 \quad \text{ha } x > d$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + (k+k)x = kd$$

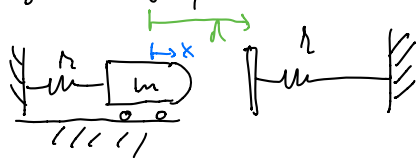
$$\text{egy. h: } x = \frac{dk}{2+k} < d$$



Maradoni foglalkozás eredményei
(Filippov-eredmény)
(A. Maradoni foglalkozás)

függvény: foglalkozás, törés
 behatás: maradoni
 v.m. deimant: maradoni

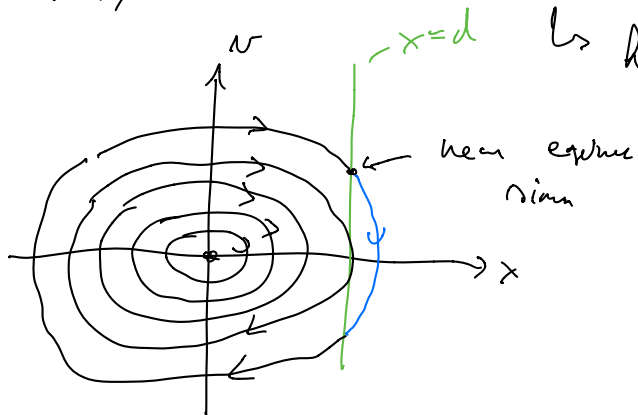
reguläre Fall, Hecke - Kontakt: $\rightarrow F_{ii} = k \cdot (x-d)^{3/2}$



$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0 \quad \text{für } x < d$$

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + k \cdot (x-d)^{3/2} = 0 \quad x > d$$

↳ Kontakt, $x=d \rightarrow k(x-d)^{3/2} = 0$



Mathematisch: Polynom, Polynom lin. v.m.
(2. Simons'ige Polynom)

- tertiär: Polynom, near fikt
- hermitesch: Polynom, fikt
- v.m. deriviert: Mathematisch