XIII. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA
MAMEK, 2019
Miskolc, 2019. augusztus 27-29.

CSÚSZÓ ÉS TAPADÓ MEGOLDÁSOK ÁTMENETEI HÁROM DIMENZIÓS SÚRLÓDÁSI FELADATOK ESETÉN

Antali Máté[1] és Stépán Gábor[2]
[1,2]Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék
antali@mm.bme.hu, stepan@mm.bme.hu

Absztrakt: *A cikkben egy három dimenziós súrlódásos oszcillátor dinamikáját vizsgáljuk. A rendszer nem-sima differenciálegyenleteit a nemrég publikált kiterjesztett Filippov rendszerek matematikai módszerei segítségével elemezzük. Célunk, hogy feltérképezzük a csúszás és tapadás lehetséges átmeneteinek számát és típusait és átfogó képet kapjunk a rendszer viselkedéséről. Az analitikus számítások során az eredményeket összevetjük az egyszerűbb, síkbeli oszcillátornál kapott megoldásokkal.*

Kulcsszavak: *súrlódás, Filippov rendszerek, nem-sima dinamika, nemlineáris rezgések*

1. BEVEZETÉS

Száraz súrlódást tartalmazó rendszereknél gyakran van szükség annak eldöntésére, hogy a testek között tapadás vagy csúszás jön létre. Elemi síkbeli problémáknál két gyakori eset fordul elő. Ha a két merev test egyetlen pontban érintkezik, tapadás közben gördülő mozgás lehetséges a testek között. Ha viszont sík mentén érintkezik a két merev test, akkor tapadáskor a két test egymáshoz képest nem fordulhat el, és a testek relatív mozgása pontszerű test kinematikájával írható le.

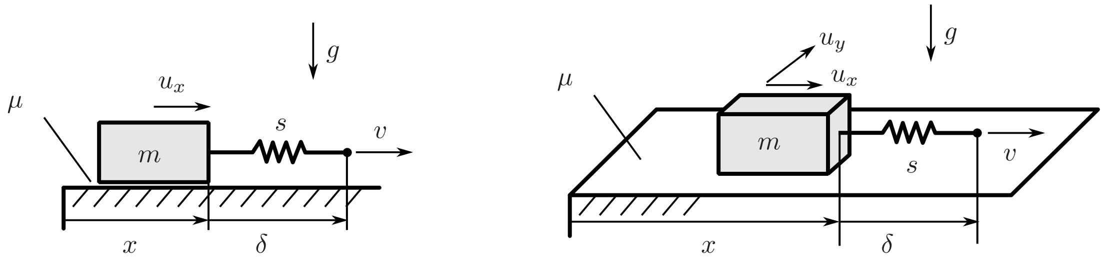
Mindkét esetben alapvető kérdés, hogy a tapadási (gördülési) állapot milyen feltételek mellett áll fenn. Az egyszerű Coulomb modell és más hasonló modellek a *súrlódási erő* függvényében adják meg a tapadás feltételét. A megszokott gondolatmenet a következő. Először feltesszük, hogy tapad (gördül) a test, majd a *tapadási* dinamikai egyenletekből kiszámítjuk a tapadási súrlódási erőt, mint kényszererőt. Végül a súrlódási modellből eldöntjük, hogy valóban fennáll-e a tapadás, vagy pedig megcsúszás jön létre.

Azonban egy ritkábban használt, másik gondolatmenet is lehetséges. Feltehetjük, hogy a tapadási állapotból kis zavar hatására megcsúszás alakult ki. Majd a *csúszási* dinamikai egyenletekből meghatározzuk, hogy milyen *gyorsulások* jönnek létre. Ekkor eldönthető, hogy ezen gyorsulások hatására a rendszer megszünteti a csúszást és helyreáll a tapadás, vagy pedig a csúszás tartósan fennmaradhat. Lényegében azt vizsgáljuk meg, hogy a tapadás stabilis-e a csúszást létrehozó zavarokkal szemben. De vajon ugyanazt az eredményt adja-e ez a két eljárás? Megmutatható, hogy ez a súrlódási modell választásától függ, és a modellek egy széles osztályára a két feltétel megegyezik.

Síkbeli esetben a megcsúszás *két különböző irányban* jöhet létre. Az ilyen rendszerek vizsgálatára használhatjuk a Filippov-típusú nemsima dinamikai rendszerek elméletét, melyet az elmúlt évtizedekben dolgoztak ki (áttekintésért lásd [1]). A csúszási dinamikai egyenletekből kapott differenciálegyenlet fázisterét vizsgálva sokat megtudhatunk a rendszer viselkedéséről, a súrlódás okozta nem-folytonosság hatásáról. Fontos kérdés a megoldások *kompatibilitása*, vagyis, hogy megcsúszás és letapadás esetén a megoldás különféle szakaszai hogyan illeszthetők össze.

Három dimenziós esetben viszont bonyolultabb a helyzet, ilyenkor a két kapcsolódó test érintkezési pontjában nem csak kétféle, hanem *végtelen sok irányban* jöhet létre megcsúszás az érintkezési síkban. Matematikai eszközöket keresve a szerzők az elmúlt években kidolgozták a Filippov-rendszerek kiterjesztését ezekre az esetekre, ahol a differenciálegyenlet szakadása a fázistér egy két kodimenziós alterében következik be [2, 3, 4]. Az eredmények alkalmazhatóak térbeli súrlódási problémák vizsgálatára.

Cikkünkben egy síkbeli, majd egy térbeli súrlódásos oszcillátor viselkedését vizsgáljuk, kiemelve a térbeli súrlódás jellegzetességeit. Célunk, hogy ezen modellek dinamikájáról átfogó képet kapjunk, melyhez hasonló viselkedés sok mechanikai rendszerben előfordulhat. Másik célunk, hogy a modellek kapcsán végiggondoljuk a száraz súrlódás dinamikai következményeit és a matematikai módszerek keresztül a tapadás és csúszás átmeneteire új szempontból tekinthessünk.



1. ábra. Súrlódásos oszcillátor síkbeli (balra) és térbeli (jobbra) esetben. A rugó végét állandó v sebességgel vontatjuk, a kialakuló rezgést a száraz súrlódás befolyásolja. Az oszcillátorok állapotát a rugó megnyúlásával (δ) és a hasáb sebesség-komponenseivel (síkban u_x, térben u_x és u_y) írjuk le.

2. SÍKBELI ÉS TÉRBELI SÚRLÓDÁSOS OSZCILLÁTOROK

Tekintsünk egy m tömegű hasábot, melyet egy s merevségű rugón keresztül vontatunk egy vízszintes, érdes síkon (lásd az 1. ábra bal oldalát). A rugó vontatási pontja állandó v sebességgel mozog, a gravitációs gyorsulást g-vel jelöljük. A hasáb és a sík között száraz súrlódás lép fel. Feltételezzük, hogy a tapadási (statikus) és csúszási (dinamikus) súrlódási együtthatók megegyeznek, $\mu_{\text{stat}} = \mu_{\text{din}} = \mu$. Ekkor az egyszerű Coulomb-törvény alapján a csúszó hasábra ható súrlódási erő

$$S_x = -\mu m g \frac{u_x}{|u_x|} = -\mu m g \operatorname{sgn} u_x, \tag{1}$$

ahol u_x jelöli a hasáb sebességét a rögzített sík mentén. A hasáb mozgásegyenlete

$$m\dot{u}_x + s(x - vt) = -\mu m g \frac{u_x}{|u_x|} \tag{2}$$

alakban írható fel, ahol x jelöli a hasáb pozícióját. Bevezetve a $\delta := vt - x$ jelölést a rugó megnyúlására, a (2) egyenlet átírható a δ és u_x változókra vonatkozó két elsőrendű differenciálegyenletté,

$$\dot{\delta} = v - u_x, \qquad \dot{u}_x = \frac{s}{m}\delta - \mu g \frac{u_x}{|u_x|}. \tag{3}$$

Látható, hogy $u_x = 0$ esetben a (3) rendszernek szakadása van. Ebben a helyzetben nem érvényes a csúszásra felírt Coulomb-törvény és letapadás jöhet létre. Tapadás során a $u_x \equiv 0$ kényszer érvényes, ekkor a (3) egyenletek helyett egyszerűen a

$$\dot{\delta} = v, \qquad \dot{u}_x = 0. \tag{4}$$

differenciálegyenletek érvényesek. Mozgása során a súrlódásos oszcillátor a csúszási és a tapadási állapotok között kapcsolgathat, a (3)-(4) egyenleteknek megfelelően. A két állapot közötti átmenetek többféle módszerrel vizsgálhatóak, melyet a következő fejezetben mutatunk be.

Tekintsük most a súrlódásos oszcillátor egy térbeli esetét, ahol a hasábot szintén egy érdes síkon vontatjuk, de most már figyelembe vesszük a sík minden irányába történő csúszást (lásd az 1 ábra jobb oldalát). Jelölje u_x és u_y a hasáb sebességének komponenseit. Ekkor a térbeli esetre alkalmazott Coulomb törvényből a súrlódási erő megfelelő komponensei a

$$S_x = -\mu m g \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \qquad S_y = -\mu m g \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \tag{5}$$

képletekkel számíthatók. A csúszási súrlódási erő $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \mu m g$ nagysága állandó, iránya pedig ellentétes a hasáb sebességével ($S_x/S_y = u_x/u_y$). Tegyük fel, hogy a hasábot vontató rugó az u_x sebességkomponens irányába mutat, valamint a rugó δ megnyúlása és a hasáb rugóra merőleges irányú elmozdulása elhanyagolható a rugó teljes hosszához képest. Ekkor csúszás esetén a rendszer differenciálegyenletei

$$\dot{\delta} = v - u_x, \quad \dot{u}_x = \frac{s}{m}\delta - \mu g \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \quad \dot{u}_y = -\mu g \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}. \tag{6}$$

Tapadás akkor következik be, ha $u_x = u_y \equiv 0$, ekkor (4)-hez hasonlóan az egyenletek

$$\dot{\delta} = v, \qquad \dot{u}_x = 0, \qquad \dot{u}_y = 0. \tag{7}$$

3. SÍKBELI OSZCILLÁTOR MODELLJE – FILIPPOV RENDSZEREK

A 1. ábra bal oldalán látható síkbeli súrlódásos oszcillátor mozgását csúszás esetén az (3), tapadás esetén a (4) differenciálegyenletek jellemzik. A tapadás és csúszás feltételeit elemi dinamikai módszerekkel jellemzően a következő gondolatmenet szerint kaphatjuk: A tapadáshoz egyrészt szükséges az $u_x = 0$ kinematikai feltétel teljesülése. Másrészt feltesszük, hogy a test tapad, és ebből a feltevésből kiszámítjuk a tapadási súrlódási erőt és a normálerőt, mely esetünkben $\bar{S} = s\delta$ illetve $N = mg$. Ezekre teljesülnie kell a Coulomb-törvény $|\bar{S}| \leq \mu N$ feltételének, így a tapadás dinamikai feltétele

$$|\delta| \leq \frac{\mu mg}{s}. \tag{8}$$

Vagyis a tapadás a rugó megnyúlásának csak viszonylag kis δ értékeire állat fenn, ellenkező esetben a hasáb megcsúszik. Hogy a hasáb jobbra vagy balra csúszik meg, az a tapadásból elméletileg számított súrlódási erő előjeléből dönthető el (azzal mindig ellentétes).

Vizsgáljuk meg most az oszcillátort a Filippov-féle dinamikai rendszerek elmélete segítségével. Látni fogjuk, hogy az elemi módszerrel kapott eredmények mellett átfogóbb képet kaphatunk a rendszer viselkedéséről. Ezeket a módszereket itt csak szorosan a példához kapcsolódva mutatjuk be. Az ilyen differenciálegyenletek matematikai hátterét a [1] szakkönyv mutatja be, melyet a szerző is összefoglal az [2] disszertáció 2. fejezetében.

A Filippov-rendszerek olyan elsőrendű, $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$ alakú differenciálegyenlet-rendszerek, ahol az egyenlet jobb oldalán lévő $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ vektormező nem folytonos, hanem egy $H(\mathbf{z}) = 0$ egyenlettel jellemzett felületen szakadása van. Ez a

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \mathbf{f}_1(\mathbf{z}) & \text{ha} \quad H(\mathbf{z}) > 0 \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{z}) & \text{ha} \quad H(\mathbf{z}) < 0 \end{cases} \tag{9}$$

alakban írható fel. Példánk esetében a (9) egyenletben megjelenő mennyiségek

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \delta \\ u_x \end{bmatrix}, \qquad H(\mathbf{z}) = u_x, \qquad \mathbf{f}_1(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} v - u_x \\ \frac{s}{m} \cdot \delta - \mu g \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} v - u_x \\ \frac{s}{m} \cdot \delta + \mu g \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Fontos feltétel, hogy a (9) felíráskor $\mathbf{f}_1$ és $\mathbf{f}_2$ függvények külön külön már folytonos – sőt, sima – függvények. A rendszert a $\delta - u_x$ fázissíkon tekintve úgy jellemezhetjük, hogy a $H(\mathbf{z}) = 0$ görbe két oldalán két különféle viselkedése van a rendszernek (jobbra csúszás illetve balra csúszás), melyeket $\mathbf{f}_1$ és $\mathbf{f}_2$ írja le (lásd a 2. ábra bal oldala). A két tartományt elválasztó határon a differenciálegyenletnek szakadása van, mely a

$$\Sigma = \{\mathbf{z}_0 : H(\mathbf{z}_0) = 0\} \tag{11}$$

kapcsolófelületen vagy más néven *szakadási halmazon* jön létre. Példánkban a szakadási halmaz az $u_x = 0$ egyenes.

Vegyük észre, hogy az $u_x = 0$ állapot éppen a tapadás kinematikai feltételének felel meg. A (9) felírás szerint a szakadási halmazon nincs értelmezve a differenciálegyenlet. Mi történik, ha a – numerikus vagy analitikus – megoldás során csúszás közben mégis elérjük az $u_x = 0$ állapotot? Ennek megválaszolásához tekintsük a szakadási halmaz egy $\mathbf{z}_0 \in \Sigma$ pontját és a következő két egységvektort,

$$\mathbf{n}_1(\mathbf{z}_0) = \frac{\nabla H(\mathbf{z}_0)}{|\nabla H(\mathbf{z}_0)|} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{n}_2(\mathbf{z}_0) = -\frac{\nabla H(\mathbf{z}_0)}{|\nabla H(\mathbf{z}_0)|} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

melyek a $\delta - u_x$ fázissíkon megadják az $u_x = 0$ egyenes két oldalát (lásd a 2. ábra jobb oldala). A jobbra, illetve balra csúszást a fázissíkon a felfelé illetve lefelé távolodás fejezi ki az $u_x = 0$ egyenestől. Ezután kiszámíthatjuk $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ határértékeit az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ irányokból,

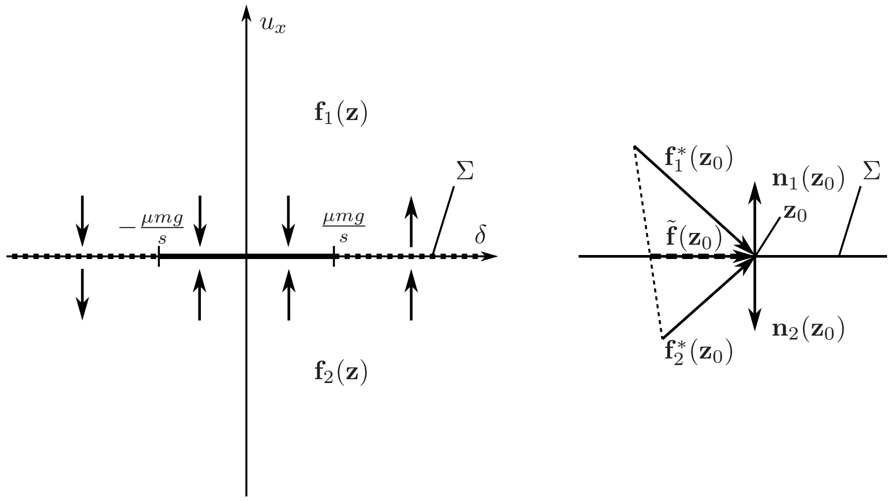
$$\mathbf{f}_1^*(\mathbf{z}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbf{f}(\mathbf{z}_0 + \varepsilon \mathbf{n}_1) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{s}{m} \cdot \delta - \mu g \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2^*(\mathbf{z}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbf{f}(\mathbf{z}_0 + \varepsilon \mathbf{n}_2) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{s}{m} \cdot \delta + \mu g \end{bmatrix}. \tag{13}$$

A normálvektorokkal vett

$$\mathbf{f}_1^* \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{s}{m} \cdot \delta - \mu g, \qquad \mathbf{f}_2^* \cdot \mathbf{n}_2 = -\frac{s}{m} \cdot \delta - \mu g \tag{14}$$

skaláris szorzatok előjeléből megtudhatjuk, hogy az $u_x = 0$ egyenes két oldalán a megoldások az $u_x = 0$ állapottól távolodnak (ha ezek a mennyiségek pozitívak), vagy az $u_x = 0$ állapothoz közelednek (ha negatívak). Ebből a következő mechanikai következtetéseket vonhatjuk le:

- Ha $\delta > \mu mg/s$, akkor a hasáb megcsúszik jobbra. (A fázissíkon $\mathbf{f}_1^* \cdot \mathbf{n}_1 > 0$ miatt eltaszítja a dinamika a trajektóriákat az $u_x = 0$ tengelytől az $\mathbf{n}_1$ irányban).
- Ha $\delta < -\mu mg/s$, akkor a hasáb megcsúszik balra. (A fázissíkon $\mathbf{f}_2^* \cdot \mathbf{n}_2 > 0$ miatt eltaszítja a dinamika a trajektóriákat az $u_x = 0$ tengelytől az $\mathbf{n}_2$ irányban).
- Ha $-\mu mg/s < \delta < \mu mg/s$ sem jobbra, sem balra nem tud megcsúszni, vagyis letapad. (A fázissíkon $\mathbf{f}_1^* \cdot \mathbf{n}_1 < 0$ és $\mathbf{f}_2^* \cdot \mathbf{n}_2 < 0$ miatt a dinamika mindkét oldalról az $u_x = 0$ tengelyhez nyomja a trajektóriákat.)



2. ábra. Síkbeli súrlódásos oszcillátor fázissíkja Filippov-rendszerként modellezve. Balra: a fázissíkon a Σ szakadási halmaz (kapcsolófelület) az $u_x = 0$ egyenes, mely elválasztja egymástól a kétfajta viselkedést (jobbra és balra csúszás). A függőleges nyilak sematikusan jelölik, hogy a megoldások azon a tartományon a szakadási halmazhoz közelednek vagy távolodnak. A folytonos vastag vonallal jelölt tartományon letapadás következik be, míg a pontozott vonallal jelölt tartományokon a megoldások áthaladnak, így nem jön létre tapadás. Jobbra: a rendszer viselkedése a szakadási halmaz egy kiválasztott $\mathbf{z}_0$ pontjának közelében, letapadáskor. Két oldalról ($\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$) közelítve két különböző határértéket kapunk ($\mathbf{f}_1^*$ és $\mathbf{f}_2^*$). Tapadáskor a megoldások „beleragadnak" a szakadási halmazba. Az így létrejövő, tapadást leíró dinamika számítható a két határérték lineáris kombinációjaként (szaggatott vonalakkal jelölve).

Vegyük észre, hogy eredményeink összhangban vannak az elemi módszerrel kapott (8) feltétellel, viszont ezt *kizárólag a csúszásra vonatkoztatott* (3) *egyenletekből kaptuk, a tapadási súrlódási erő kiszámítása nélkül!*

Mi lehet ennek az oka? Észrevehetjük, hogy a (14) mennyiségek éppen $\dot{u}_x$ és $-\dot{u}_x$ értékeket adják, vagyis megmutatják, hogy a *gyorsulás* a tapadásnak megfelelő $u_x = 0$ állapot felé, vagy ezzel ellentétesen változtatja a sebességet. Vagyis mechanikai oldalról a megszokott – *tapadást* feltételezünk, és ennek teljesülését ellenőrizzük – megközelítés fordítottját is alkalmazhatjuk. Ha *megcsúszást* feltételezünk az $u_x = 0$ állapotban, akkor ellenőrizhetjük, hogy pozitív és negatív irányú megcsúszás esetén a gyorsulás előjele konzisztens-e a megcsúszás irányával – vagyis u_x és $\dot{u}_x$ előjele megegyezik-e. Ha igen, akkor a megcsúszás létrejöhet a megfelelő irányban, ha pedig mindkét oldalról ellentmondásos eredményt kapunk, akkor a tapadás fennmarad. Bizonyos értelemben úgy tekinthetjük, hogy *a tapadás* $u = 0$ *kinematikai állapota akkor valósulhat meg tartósan, ha a rendszer állapota stabilis a megcsúszást okozó zavarásokra nézve*.

További érdekesség, hogy a tapadásra vonatkozó differenciálegyenlet levezethető a csúszó egyenletek alapján. Az $u_x = 0$ egyenes középső szakaszán, ahol a tapadás lehetséges, a trajektóriák nem metszhetik át a szakadási halmazt, hanem ebbe mintegy „beleragadnak". A trajektóriák folytatása akkor lehetséges, ha az $\mathbf{f}$ függvényt kiterjesztjük az $u_x = 0$ egyenes tapadási részére olyan módon, hogy az ott értelmezett $\tilde{\mathbf{f}}$ vektormező *minden pontban érintse a szakadási halmazt*, és a két oldali határérték lineáris kombinációjaként (súlyozott átlagaként) adódjon (lásd a 2. ábra jobb oldalát). Ehhez meg kell oldanunk a

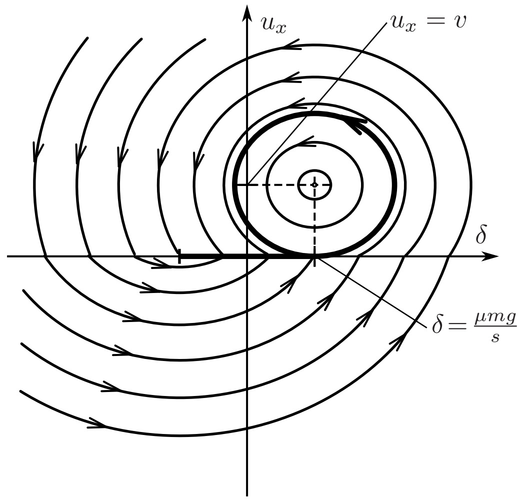
$$\tilde{\mathbf{f}} = a_1\mathbf{f}_1^* + a_2\mathbf{f}_2^*, \qquad a_1 + a_2 = 1, \qquad \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \qquad \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \tag{15}$$

egyenletrendszert, melynek megoldása

$$a_1 = \frac{s\delta}{\mu mg} + \frac{1}{2}, \qquad a_2 = -\frac{s\delta}{\mu mg} + \frac{1}{2}, \qquad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Vagyis a Filippov rendszerek elmélet segítségével a csúszást leíró (3) egyenletekből nem csak az állapítható meg, hogy hol következik be tapadás, hanem *kiadódnak a tapadásra vontakozó differenciálegyenletek anélkül, hogy a tapadásra felírtuk volna a dinamika alaptételét.* Fontos, hogy ezen egyezéshez szükség van a tapadási és csúszási súrlódási tényezők $\mu_{\text{stat}} = \mu_{\text{din}} = \mu$ egyenlőségére. Azonban megmutatható [4], hogy módszer a súrlódási modell megfelelő – bizonyos értelemben következetes – választásával alkalmazható eltérő μ_{stat} és μ_{din} értékekre is.

Nézzük, hogy az eddig elmondottak alapján milyen következtetéseket vonhatunk le a súrlódásos oszcillátor viselkedésére vonatkozóan. A (10) összefüggések alapján az $\mathbf{f}_1$ és $\mathbf{f}_2$ vektormezőknek egyaránt egy-egy egyensúlyi



3. ábra. A síkbeli súrlódásos oszcillátor fázissíkja. Megjelenik egy egyensúlyi megoldás, ahol a rugó megnyúlása és a csúszási sebesség tartósan állandó ($\delta = \mu mg/s, u_x = v$). Az egyensúlyi állapot körül a megoldások koncentrikus ellipszisek (folyamatos jobbra csúszás), a kritikus amplitúdójú ilyen megoldás éppen érinti az $u_x = 0$ szakadási halmazt (az ábrán vastag vonallal jelölve). Az ennél nagyobb amplitúdójú megoldások véges számú alkalommal átmetszik a szakadási halmazt (váltakozó jobbra és balra csúszás), majd beszorulnak az $u_x = 0$ tengelybe a $|\delta| \leq \mu mg/s$ intervallumban (letapadás), végül mind rákerülnek a kritikus rezgésre.

helyzete van, viszont ezek közül csak az $\mathbf{f}_1$ vektormező $(\delta, u_x) = (\mu mg/s, v)$ egyensúlyi helyzete fekszik a $H(\mathbf{z})$ függvény által kettéosztott fázissík megfelelő részén (lásd a 3. ábrát). Ezen egyensúlyi helyzet fizikai tartalma az, hogy a rugó megnyúlása (hossza) és a hasáb sebessége is állandó. Ezen megoldás környezetében periodikus megoldásokat találunk, melyek a fázissíkon koncentrikus ellipszisekként jelennek meg, közben a hasáb folyamatosan jobbra csúszik. A legnagyobb amplitúdójú *kritikus rezgést* akkor érjük el, amikor az ellipszis éppen érinti az $u_x = 0$ egyenest, vagyis a hasáb egy pillanatra letapad. Az ennél nagyobb amplitúdójú megoldások sajátosan viselkednek. Ezek a megoldások a csúszás többszöri irányváltása után letapadnak az $u_x = 0$ egyenes középső tartományán, majd rákerülnek a kritikus amplitúdójú megoldásra. Így az összes nagy amplitúdójú mozgás véges időn belül ilyen rezgésre vezet. Ez azt is megmutatja, hogy nem-folytonos rendszerek esetén a megoldások időben visszafelé nem mindig egyértelműek, hiszen a kritikus rezgésnél nem lehet eldönteni, hogy milyen múltbeli állapotból került ide a rendszer.

Végezetül röviden kitérnénk néhány magyar és külföldi elnevezésbeli problémára. A Σ szakadási halmaz (*discontinuity set*) vagy más néven kapcsolófelület (*swithing surface*) jellegzetes tartományokra bontható a (14) szorzatok előjele alapján. Amely tartományon az egyik irányból vonzó (*attracting*), a másik irányból taszító (*repelling*) viselkedés áll elő, a tartományt *áthaladó tartománynak* (*crossing region*) nevezzük. Azt a tartományt pedig, ahol mindkét irányból vonzó viselkedés jelentkezik, és a megoldások a szakadási halmazba ragadnak, *csúszó tartománynak* (*sliding region*) nevezzük. Ezen elnevezés a matematika és irányítástechnika szaknyelvéből származik, és arra utal, hogy a megoldás fázistérben *végigcsúszik* a kapcsolófelületen. Mechanikai problémáknál azonban megtévesztő lehet az elnevezés, hiszen a mechanikai megcsúszás az *áthaladó tartományban*, a mechanikai tapadás pedig a *csúszó tartományban* jön létre. Az angol szaknyelvben a félreértés elkerülhető lehet, ha a mechanikai értelemben vett csúszásra a *sliding* helyettt a *slipping* elnevezést használjuk. A magyar szaknyelvben jelenleg nem található világos megoldás erre az elnevezésbeli zavarra.

4. TÉRBELI OSZCILLÁTOR MODELLJE – KITERJESZTETT FILIPPOV RENDSZEREK

A 1 ábra jobb oldalán látható térbeli súrlódásos oszcillátor mozgását csúszás esetén a (6), tapadás esetén a (7) egyenletek írják le. Ha a tapadás és csúszás feltételét elemi mechanikai módszerekkel akarjuk megadni, a síkbeli esethez hasonlóan járhatunk el. A felületeket összenyomó $N = mg$, a tapadási súrlódási erő komponensei pedig $\bar{S}_x = s\delta$, illetve $\bar{S}_y = 0$. Elhanyagoltuk a geometriai nemlinearitást, vagyis a rugó hosszváltozását és szögelfordulását kicsinynek tekintjük. Ekkor a Coulomb törvény térbeli esetre érvényes $\sqrt{\bar{S}_x^2 + \bar{S}_y^2} \leq \mu N$ összefüggéséből a tapadásra ugyanazt a (8) feltételt kapjuk, mint síkbeli esetben.

Szeretnénk részletesebben is megvizsgálni, hogy hogyan zajlik le a megcsúszás és a letapadás térben. Nem alkalmazhatjuk a Filippov rendszerek előző fejezetben bemutatott módszereit sem, hiszen az (6) differenciálegyenletek nem írhatók (9) alakba. Az ehhez hasonló példák adták az indíttatást ahhoz, hogy a szerzők megvizsgálják a Filippov-rendszerek matematikai elméletének kiterjesztését olyan módon, hogy a térbeli súrlódásos mechanikai rendszerek is vizsgálhatóak legyenek. Így került bevezetésre a *kiterjesztett Filippov rendszerek* fogalma, melynek matematikai hátterét részletesen a [2] disszertáció valamint a [3] és [4] cikkek mutatják be. Ebben a fejezetben csak a lényegesebb fogalmakat mutatjuk be olyan mélységben és precizitással, hogy a térbeli oszcillátor vizsgálatához elégséges legyen.

A lényegi különbség a klasszikus Filippov rendszerek és a kiterjesztett Filippov rendszerek között a szakadást tartalmazó halmaz viszonya a teljes fázistérhez képest. Figyeljük meg, hogy az (3) rendszerben a szakadási halmazt az $u_x = 0$ skaláris feltétel határozza meg, mely a 2 dimenziós fázistérben egy 1 dimenziós egyenest eredményez. *Vagyis a Filippov rendszerekben a Σ szakadási halmaz 1 kodimenziós.* A (6) térbeli oszcillátornál viszont az $u_x = 0$ és $u_y = 0$ feltételeknek egy időben kell teljesülnie a szakadási halmazon, ami a 3 dimenziós fázistérben egy 1 dimenziós egyenesre vezet. *Vagyis a kiterjesztett Filippov rendszerekben a Σ szakadási halmaz 2 kodimenziós.* Ez a különbség mechanikai szempontból könnyen szemléltethető. Míg a síkbeli esetnél a hasáb csak két irányban (jobbra vagy balra) csúszhat meg, addig a térbeli esetben az érintkezési síkban bármerre, *folytonosan sok irányban*.

Ezért a térbeli súrlódásból adódó kiterjesztett Filippov rendszerek nem írhatóak (9) alakba, mely lényegében két különböző viselkedést adna meg. Általánosságban csak annyit mondhatunk, hogy

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{17}$$

alakú differenciálegyenletet vizsgálunk, ahol az $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ vektormező mindenhol folytonos, kivéve a Σ szakadási halmazban, mely

$$\Sigma = \{\mathbf{z}_0 : H_I(\mathbf{z}_0) = 0 \quad \text{és} \quad H_{II}(\mathbf{z}_0) = 0\} \tag{18}$$

módon, két skaláris függvénnyel adható meg. A H_I és H_{II} függvények egyenként egy-egy felületet határoznak meg, melyek metszete a Σ szakadási halmaz. Az általánosság megkötése nélkül előírhatjuk, hogy H_I és H_{II} úgy kerül megválasztásra, hogy a két felület merőleges legyen a a Σ halmaz minden pontjában.

A térbeli oszcillátor (6) differenciálegyenletét a (17)-(18) alakban felírhatjuk a

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \delta \\ u_x \\ u_Y \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} v - u_x \\ \frac{s}{m}\delta - \mu g \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}} \\ -\mu g \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}} \end{bmatrix}, \qquad H_I(\mathbf{z}) = u_x, \qquad H_{II}(\mathbf{z}) = u_y \tag{19}$$

helyettesítések segítségével. Vagyis a szakadási halmaz az $u_x = u_y = 0$ egyenes a három dimenziós fázistérben (lásd a 4. ábra jobb oldalán). Bár a csúszáshoz tartozó differenciálegyenlet nem értelmezett a szakadási halmazban (a nevezőben a gyökjel alatt nullát kapnánk), fontos következtetéseket vonhatunk le a különböző irányokból vett határértékekből. A síkbeli esetben ehhez a szakadási halmaz egy kiválasztott $\mathbf{z}_0$ pontjában az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ egységvektorokat használtuk, melyek a jobbra, illetve balra csúszásnak feleltek meg. Most viszont folytonosan sok irányt kell megvizsgálnunk, a lehetséges megcsúszásoknak megfelelően. Matematikailag azt mondhatjuk, hogy három dimenziós fázistérben az egyenesről folytonosan sok merőleges irányban léphetünk le (lásd a 4. ábra bal oldalát).

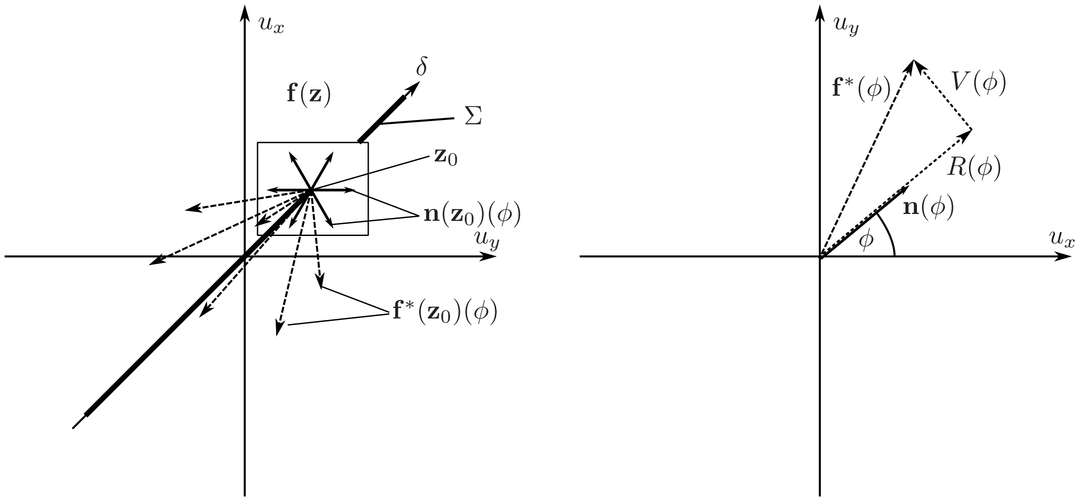
Ennek leírására először definiáljuk a

$$\mathbf{n}_I(\mathbf{z}_0) = \frac{\nabla H_I(\mathbf{z}_0)}{|\nabla H_I(\mathbf{z}_0)|} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{n}_{II}(\mathbf{z}_0) = \frac{\nabla H_{II}(\mathbf{z}_0)}{|\nabla H_{II}(\mathbf{z}_0)|} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

egységvektorokat. A H_I és H_{II} felületeire előírt merőlegesség miatt $\mathbf{n}_I$ és $\mathbf{n}_{II}$ vektorok is merőlegesek lesznek, és minden $\mathbf{z}_0 \in \Sigma$ pontban bázist alkotnak a Σ szakadási halmazra merőleges altérben. Ezen altér összes egységvektorát a

$$\mathbf{n}(\mathbf{z}_0)(\phi) = \cos\phi \cdot \mathbf{n}_I(\mathbf{z}_0) + \sin\phi \cdot \mathbf{n}_{II}(\mathbf{z}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} \tag{21}$$

függvénnyel adhatjuk meg. A $\phi \in [0, 2\pi]$ szögnek esetünkben kettős jelentése van. Egyrészt a három dimenziós *fázistérben* megadja, hogy az $u_x = u_y = 0$ egyeneshez – a Σ szakadási halmazhoz – milyen irányban közeledünk. Másrészt *mechanikailag* azt mutatja meg, hogy megcsúszáskor vagy letapadáskor milyen szöget zár be a csúszási sebesség vektora az u_x irányhoz képest.



4. ábra. Balra: A térbeli súrlódásos oszcillátor fázistere kiterjesztett Filippov rendszerként modellezve. A három dimenziós fázistérben a Σ szakadási halmaz az $u_x = u_y = 0$ egyenes. Ez a szakadási halmaz két kodimenziós, így nem két irányban, hanem a ϕ szöggel és $\mathbf{n}(\phi)$ normálvektorral jellemzett folytonosan sok irányban eltávolodhatunk tőle. Így az $\mathbf{f}$ vektormező különböző irányokból vett határértékeit az $\mathbf{f}^*(\phi)$ határ-vektormező adja meg. Jobbra: a határ-vektormező szétbontása az $\mathbf{n}(\phi)$ normálvektor irányába eső (radiális) $R(\phi)$ és erre merőleges $V(\phi)$ komponensekre. Egy megoldás ott lehet kapcsolatban a szakadási halmazzal, ahol $V(\phi) = 0$ (határ-irányok).

Egy kiszemelt $\mathbf{z}_0$ pontjában az $\mathbf{n}(\phi)$ függvény megadja az összes lehetséges irányt, ahonnan a vektormező határértékét vehetjük. A következő eredményt kapjuk:

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{z}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbf{f}(\mathbf{z}_0 + \varepsilon \mathbf{n}(\mathbf{z}_0)(\phi)) = \begin{bmatrix} v \\ s/m \cdot \delta - \mu g \cos\phi \\ -\mu g \sin\phi \end{bmatrix}. \tag{22}$$

A határérték kiszámítása közben gyökös kifejezések

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{0 + \varepsilon\cos\phi}{\sqrt{(0+\varepsilon\cos\phi)^2 + (0+\varepsilon\sin\phi)^2}} = \cos\phi, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{0 + \varepsilon\sin\phi}{\sqrt{(0+\varepsilon\cos\phi)^2 + (0+\varepsilon\sin\phi)^2}} = \sin\phi \tag{23}$$

alapján éppen a szögfüggvényeket adták. Az $\mathbf{f}^*(\phi)$ függvényt *határ-vektormezőnek* (*limit vector field*) nevezhetjük, a szakadási halmaz kiválasztott z_0 pontjában bármely ϕ szöghöz megadja az $\mathbf{f}$ vektormező adott irányból vett határértékét.

Ahogy síkbeli oszcillátornál az $\mathbf{f}_1^*$ és $\mathbf{f}_2^*$ vektorokból, a térbeli oszcillátornál az $\mathbf{f}^*(\phi)$ határ-vektormezőből állapíthatjuk meg, hogy milyen lehetőségek vannak a megcsúszásra és a letapadásra. Ehhez először számítsuk ki a skaláris

$$R(\phi) = \mathbf{f}^*(\phi) \cdot \mathbf{n}(\phi) = \frac{s}{m}\delta\cos\phi - \mu g, \qquad V(\phi) = \mathbf{f}^*(\phi) \cdot \mathbf{n}(\phi + \pi/2) = \frac{s}{m}\delta\sin\phi, \tag{24}$$

függvényeket. Az $R(\phi)$ függvény a vektormező $u_x = u_y = 0$ egyeneshez (Σ) közeli radiális viselkedését írja le különböző irányokból, ahol $R(\phi) > 0$, ha a megoldások távolodnak és $R(\phi) < 0$, ha közelednek $u_x = u_y = 0$ egyeneshez. A $V(\phi)$ függvény pedig a vektormező csavarodását írja le az $u_x = u_y = 0$ egyenes körül (lásd a 4. ábra jobb oldalát). Ezekkel a függvényekkel felírható a

$$\dot{u} = R(\phi), \qquad \dot{\phi} = \frac{1}{u} \cdot V(\phi) \tag{25}$$

polárkoordinátákban megadott síkbeli differenciálegyenleteket, ahol

$$u_x = u\cos\phi, \qquad u_y = u\sin\phi, \qquad u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \qquad \tan\phi = u_y/u_x. \tag{26}$$

Az eredeti $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ vektormezőből a (25) egyenletek a következőképpen kapjuk: A $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ vektormezőt először a kiválasztott $\mathbf{z}_0 = (\delta, 0, 0) \in \Sigma$ ponthoz tartozó (δ, u_x, u_y) síkra megszorítjuk, majd ebbe a síkba vetítjük, és végül vesszük az $u \to 0$ határértékét. *Vagyis a* (25) *egyenletekből meghatározható, hogy a térbeli oszcillátor megoldásai milyen módon érik el a letapadáshoz tartozó* $u_x = u_y = 0$ *állapotot.*

Mechanikailag a ϕ szög a megcsúszási sebesség irányát jelöli, $\dot{\phi}$ pedig ennek változási üteme. A $u \to 0$ határhelyzetben a (25) egyenlet $V(\phi) \neq 0$ esetben végtelen nagy értéket ad a megcsúszási irány $\dot{\phi}$ változására, ami fizikailag nem lehetséges. Vagyis a megoldások akkor érhetik el az $u_x = u_y = 0$ letapadási állapotot, ha $V(\phi) = 0$. *Tehát a* $\mathbf{z}_0$ *pontban a letapadás vagy a megcsúszás lehetséges irányait a* $V(\phi)$ *függvény gyökei adják meg.* Ezeket az irányokat *határ-irányoknak (limit directions)* nevezzük.

A térbeli súrlódásos oszcillátor példájában (24) alapján a $V(\phi)$ függvény gyökei két határ-irányt adnak meg, ezek $\phi_1 = 0$ és $\phi_2 = \pi$. A határ-irányokban a vektormező $\dot{u} = R(\phi)$ előjelétől függően beszélhetünk *vonzó határ-irányról* ($R(\phi) < 0$) vagy *taszító határ-irányról* ($R(\phi) > 0$). Esetünkben

$$R(\phi_1) = \frac{s}{m}\delta - \mu g, \qquad\qquad R(\phi_2) = -\frac{s}{m}\delta - \mu g. \tag{27}$$

A ϕ_1 irány akkor vonzó, ha $\delta < \mu mg/s$, ϕ_2 irány pedig akkor vonzó, ha $\delta > -\mu mg/s$. Így a következő eredményre jutunk:

- Ha $\delta > \mu mg/s$, akkor a hasáb megcsúszik a $\phi_1 = 0$ irányban.
- Ha $\delta < -\mu mg/s$, akkor a hasáb megcsúszik $\phi_2 = \pi$ irányban.
- Ha $-\mu mg/s < \delta < \mu mg/s$, akkor a hasáb nem csúszik meg egyik határ-irányban sem, tartós letapadás következik be.

Vegyük észre, hogy ezek az eredmények nagyon hasonlítanak arra, amit a síkbeli esetnél kaptunk. Ez azért lehetséges, mert a példa egyszerűsége miatt mindkét határ-irány ($\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$) is az $u_y = 0$ síkba esik. Ezért az összes letapadáshoz és megcsúszáshoz tartozó jelenség az $u_y = 0$ síkban játszódik le, és az (19) térbeli példa az $u_y = 0$ síkra megszorítva visszaadja a (10) síkbeli példát.

Fontos kiemelnünk, hogy a síkbeli esethez hasonlóan itt is kimondhatjuk, hogy *a tapadás* $u_x = u_y = 0$ *kinematikai állapota akkor valósulhat meg tartósan, ha a rendszer állapota stabilis a megcsúszást okozó zavarokra nézve.* A térbeli súrlódás esetén elméletileg meg kellene vizsgálnunk az összes lehetséges irányú zavarást a $\phi \in [0, 2\pi)$ tartományból. Beláttuk azonban, hogy a megoldások csak a határ-irányok mentén érkezhetnek meg vagy hagyhatják el a szakadási halmazt, így elegendő ezen néhány irány ellenőrzése. Ha az összes határ-irányra $R(\phi) < 0$ értéket kapunk, akkor tartós tapadás jön létre, és ha közülük az egyikre pozitív értéket kapunk, akkor megcsúszás. Bizonyítható, hogy egyetlen térbeli súrlódásos kapcsolatot tartalmazó rendszer esetén *legalább két, legfeljebb négy határ-irány létezhet, melyek közül legfeljebb egy lehet taszító* [4].

Kicsit közelebbről megnézve a térbeli rendszer újabb jelenségeket is rejt magában. Ehhez érdemes megvizsgálnunk a következő függvényt:

$$Q(\phi) = R(\phi) \cdot \frac{\mathrm{d}V(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = \left(\frac{s}{m}\delta \cos\phi - \mu g\right) \cdot \frac{s}{m}\delta \cos\phi. \tag{28}$$

Megmutatható, hogy $Q(\phi)$ előjele a határ-irányok esetén megadja, hogy az $u_x = u_y = 0$ szakadási egyeneshez közeledve a trajektóriák egymáshoz tartanak ($Q(\phi) < 0$), vagy egymástól távolodnak ($Q(\phi) > 0$). A $Q(\phi_1) < 0$ esetben a ϕ_1 határ-irányt *dominánsnak* mondjuk, és ekkor végtelen sok trajektória kapcsolódik a szakadási halmazhoz ebben az irányban. A $Q(\phi_1) > 0$ esetben a ϕ_1 határ-irányt *izoláltnak* mondjuk, és ekkor egyetlen trajektória kapcsolódik a szakadási halmazhoz ebben az irányban.

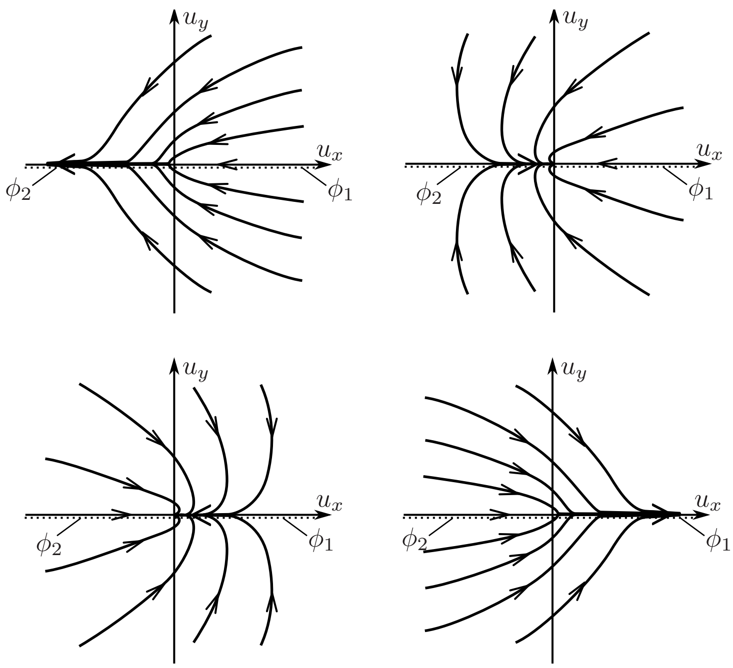
A ϕ_1 és ϕ_2 határ-irányoknál a $R(\phi)$ és $Q(\phi)$ függvények előjeléből meghatározhatjuk, hogy a választott $\mathbf{z}_0 = (\delta, 0, 0)$ tapadási állapotot kis mértékben megzavarva mi történik a hasábbal. A jellemző eseteket az 1. táblázat és a 5. ábra mutatja.

a rugó megnyúlás értéke	ϕ_1 határ-irány	ϕ_2 határ-irány	hasáb viselkedése csúsztató zavarás hatására
$\delta < -\mu mg/s$	vonzó, izolált	taszító, izolált	megcsúszik a ϕ_2 irányban
$-\mu mg/s < \delta < 0$	vonzó, izolált	vonzó, domináns	visszatapad ϕ_2 irányból
$0 < \delta < \mu mg/s$	vonzó, domináns	vonzó, izolált	visszatapad ϕ_1 irányból
$\mu mg/s < \delta$	taszító, izolált	vonzó, izolált	megcsúszik ϕ_1 irányban

1. táblázat. A határ-irányok lehetséges viselkedése a térbeli súrlódásos oszcillátornál.

A két megcsúszásos esetben mindkét határ-irány izolált. Vagyis a legtöbb megoldás elkerüli a tapadáshoz tartozó $u_x = u_y$ állapotot, folyamatos csúszás jön létre. Mindkét esetben egyetlen olyan megoldást találunk, mely az egyik határ-irány mentén eléri a tapadási állapotot, majd pillanatnyi letapadás után rögtön megcsúszás következik be a másik határ-irányban. Ezen egyszerű példában *megcsúszás esetén a megcsúszás éppen abban az irányban következik be, amerre a rugó húzza a hasábot*, ahogy azt mechanikai szemlélet alapján is sejthetjük.

Érdekesebb, és szemlélet alapján kevéssé megjósolható a letapadás kérdése a rugó különböző előjelű δ megnyúlásai esetén. Mindkét esetben két vonzó határ-irányt találunk, melyek közül az egyik domináns, a másik izolált.



5. ábra. Megcsúszás és letapadás jellegzetes esetei a térbeli súrlódásos oszcillátornál. Mind a négy esetben a két határ-irány $\phi_1 = 0$ és $\phi_2 = \pi$. Az egyes esetekhez a rugó megnyúlásának δ értékei az 1 táblázatban találhatóak. Fent balra: a ϕ_2 határ-irány taszító, a hasáb megcsúszik ebben az irányban. Fent jobbra: mindkét határirány vonzó, de a ϕ_2 domináns, így majdnem mindig ebből az irányból tapad le a hasáb. Lent balra: itt már a ϕ_1 irány a domináns, jellemzően innen tapad le a hasáb. Lent jobbra: a ϕ_1 irány taszítóvá válik, erre csúszik meg a hasáb.

A $\delta > 0$ esetben ezért majdnem minden esetben a letapadás a domináns $\phi_1 = 0$ irányból következik be, a $\delta < 0$ esetben pedig domináns $\phi_2 = \pi$ irányból. *Vagyis letapadáskor a letapadás előtti pillanatban a csúszás sebessége abba az irányba mutat, amerre a rugó húzza a hasábot.*

Letapadás után a hasáb állapotváltozását a fázistérben az $u_x = u_y = 0$ egyenesen lévő trajektóriák jellemzik. A klasszikus Filippov rendszereknél használt (15) felírást általánosítva keressük az $\tilde{\mathbf{f}}$ tapadást jellemző vektormezőt,

$$\tilde{\mathbf{f}} = \int_0^{2\pi} a(\phi) \cdot \mathbf{f}^*(\phi)\, \mathrm{d}\phi, \qquad \int_0^{2\pi} a(\phi)\, \mathrm{d}\phi = 1, \qquad \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}(\phi) = 0. \tag{29}$$

Ezt a vektormezőt a csúszási dinamika $\mathbf{f}^*(\phi)$ határ-vektormezejének lineáris kombinációjaként keressük, melyet a magasabb kodimenziós esetben integrál-átlaggal kaphatunk meg. A (15) kifejezésekben szereplő a_1 és a_2 súlyok helyett egy $a(\phi)$ folytonos, periodikus súly-függvényt keresünk. Az $\tilde{\mathbf{f}}$ vektormező a szakadási halmazban fekszik, így minden ϕ szög esetében merőlegesnek kell lennie az $\mathbf{n}(\phi)$ normálvektorra.

A (29) problémának egy tetszőleges kiterjesztett Filippov-rendszer esetén nincs egyértelmű megoldása [3]. Viszont ha például az $\mathbf{f}^*(\phi)$ határ-vektormező a

$$\mathbf{f}^*(\phi) = \mathbf{f}_{\text{sima}} + \cos\phi \cdot \mathbf{f}_{\cos} + \sin\phi \cdot \mathbf{f}_{\sin} \tag{30}$$

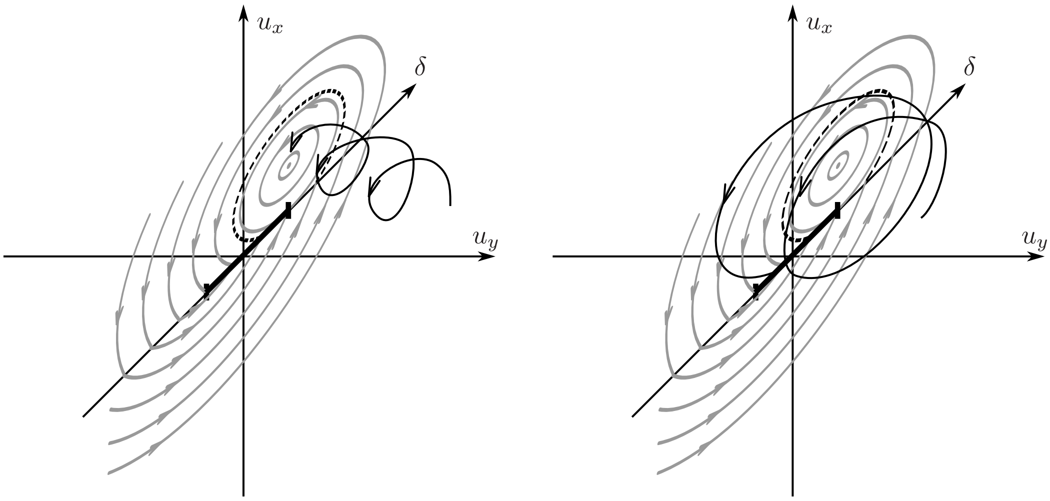
alakba írható, akkor a szakadási halmazban lévő $\tilde{\mathbf{f}}$ dinamika már egyértelmű lesz [4]. A súrlódásos oszcillátor esetén

$$\mathbf{f}_{\text{sima}} = \begin{bmatrix} v \\ s/m \cdot \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_{\cos} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu g \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_{\sin} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu g \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Ha behelyettesítjük az (30) alakot az (29) kifejezésbe, az

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_{\text{sima}} + \int_0^{2\pi} a(\phi) \cos\phi\, \mathrm{d}\phi \cdot \mathbf{f}_{\cos} + \int_0^{2\pi} a(\phi) \sin\phi\, \mathrm{d}\phi \cdot \mathbf{f}_{\sin} \tag{32}$$

összefüggéshez jutunk. Érdekes, hogy az $a(\phi)$ súlyfüggvény továbbra sem választható meg egyértelműen, de bármely, az (29) feltételeket kielégítő választása ugyanazt az $\tilde{\mathbf{f}}$ vektormezőt adja. Lehetséges többféle, módszeres



6. ábra. A jellegzetes megoldások térbeli súrlódásos oszcillátor esetén. Bal oldalon: kis amplitúdójú rezgések, melyek u_y irányban exponenciális ütemben csillapodva közelítik meg valamelyik kis amplitúdójú periodikus rezgést. Jobb oldalon: nagy amplitúdójú rezgések, melyek *véges időn belül* rákerülnek a kritikus amplitúdójú periodikus megoldásra.

megoldás is [3], de példánk esetében szemlélet alapján is megtalálhatjuk például a

$$a(\phi) = \frac{s\delta}{\mu m g \pi} \cos\phi. \tag{33}$$

súlyfüggvényt. Ennek segítségével a

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

megoldást kapjuk, mely megegyezik a tapadásra kapott (7) egyenletekkel. Ne feledjük, hogy ezúttal a tapadás dinamikai feltételei nélkül, kizárólag a csúszási egyenletekből kaptuk a tapadási egyenleteket is. Érdekes, hogy a súlyfüggvény (33) alakja hasonló a síkbeli oszcillátor esetén kapott diszkrét súlyok (16) alakjához.

Tekintsük át, hogy az eddigiek alapján milyen következtetéseket kaphatunk a térbeli súrlódásos oszcillátor viselkedésére és hogyan jelenik ez meg a fázistérben. Az (3) és (6) egyenletekből látható, hogy a térbeli oszcillátor egyenleteit az $u_y = 0$ síkra megszorítva éppen a síkbeli oszcillátor egyenleteit kapjuk. Emiatt az $u_y = 0$ síkban ugyanazt a fázisportrét kapjuk, mint a síkbeli oszcillátor esetében. Ezen sík körül olyan megoldások vannak, amik a hasáb olyan csúszásának felelnek meg, ahol a csúszási sebességnek u_x és u_y komponense is van. Az (6) harmadik egyenlete alapján az u_y irányú csúszás folyamatosan csillapodik, a megoldások az $u_x - \delta$ síkhoz közelednek. Vagyis a hasáb rezgése egyre inkább a rugó egyenesébe esik. Két lényegesen különböző megoldást találunk: Ha viszonylag kis δ és u_x amplitúdóval indul a rezgés, akkor a megoldások a $u_x - \delta$ síkot a kritikus rezgés trajektóriáján belül közelítik meg. Megmutatható, hogy ilyenkor a megoldások exponenciálisan tartanak valamelyik kis amplitúdójú rezgő megoldáshoz (lásd a 6. ábra bal oldala). Ha viszont viszonylag nagy amplitúdóval indul a térbeli csúszás, akkor a $u_x - \delta$ síkot a kritikus rezgésen kívül közelíti meg. Bár az u_y csökkenési üteme kezdetben exponenciális, a szakadási halmaz $|\delta| < \mu m g/s$ letapadási zónájához közeledve elkerülhetetlen, hogy a megoldást valamelyik határ-irány bevonzza a szakadási halmazba és így véges időn belül rákerül a kritikus amplitúdójú rezgésre (lásd a 6. ábra jobb oldala). Attól függően, hogy a letapadás a $\delta < 0$ vagy a $\delta > 0$ tartományon történik, a domináns határ-irány ismeretében megállapítható, hogy a letapadás pillanata előtt a vontatás irányában ($u_x > 0$) illetve ezzel ellentétesen ($u_x < 0$) csúszik a test.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A cikkben bemutattuk, hogy a súrlódásos oszcillátor síkbeli és térbeli esetei különféle nem-sima differenciálegyenletekre vezetnek. Ezeket síkban a Filippov-rendszerek, térben a kiterjesztett Filippov-rendszerek matematikai módszereivel vizsgáltuk. Mindkét esetben azt találtuk, hogy a nagy amplitúdójú rezgések véges időn belül egy kritikus amplitúdójú, állandósult rezgésre csillapodnak le. Azonban ennél kisebb amplitúdójú rezgések is lehetségesek, melyet térben a megoldások hosszú idő alatt, exponenciális lecsengéssel közelítenek meg. A bemutatott matematikai módszerekkel átfogó képet kaphatunk a rendszer viselkedéséről és a csúszás-tapadás lehetséges átmeneteiről.

A későbbiekben érdemes lenne megvizsgálni a térbeli oszcillátort abban az esetben, amikor a geometriai nemlinearitást nem hanyagoljuk el és a rugó irányára merőleges elmozdulást is figyelembe vesszük. Egy további felmerülő kérdéskör a különféle súrlódási modellek vizsgálata (áttekintő irodalomként [5, 6]), melyet a [4] cikkben csak röviden vizsgáltunk. A közelmúltban megjelent néhány új eredmény az anizotrop súrlódási modellekkel kapcsolatban [7], ami arra utal, hogy az anizotrop viselkedés újabb jelenségekhez vezet. Ha a (6) egyenletben a két irányban különböző, $\mu_x \neq \mu_y$ súrlódási tényezőt feltételeznénk – például rovátkolt vagy érdes felület esetén – akkor a cikkben bemutatott eljárást megismételve azt találnánk, hogy akár *négy* határ-irány is létrejöhet, melyek jóval többféle dinamikai esetet eredményeznek. Ennek kidolgozása és a térbeli oszcillátor fázisterének átfogó numerikus vizsgálata a további kutatási munka tárgya lenne.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS Az első szerző kutatási tevékenységét a Magyar Tudományos Akadémia támogatja a Prémium Posztdoktori Kutatói Programban elnyert PPD2018-014/2018 számú pályázat keretében.

HIVATKOZÁSOK

[1] M. DI BERNARDO, C.J. BUDD, A.R. CHAMPNEYS, P. KOWALCZYK: *Piecewise-smooth Dynamical Systems*. Springer, London, 2008.

[2] M. ANTALI: *Dynamics of Dual-Point Rolling Bodies*. PhD disszertáció, Budapest University of Technology and Economics, 2017.

[3] M. ANTALI, G. STEPAN: Sliding and crossing dynamics in extended filippov systems, *Journal of Applied Dynamical Systems* 17(1):823–858, 2018.

[4] M. ANTALI, G. STEPAN: Nonsmooth analysis of three-dimensional slipping and rolling in the presence of dry friction, *Nonlinear Dynamics*, online megjelent, 1–19, 2019.

[5] F. MARQUES, P. FLORES, J.C.P. CLARO, H.M. LANKARANI: A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems, *Nonlinear Dynamics* 86(3):1407–1443, 2016.

[6] E. PENNESTRI, V. ROSSI, P. SALVINI, P.P. VALENTINI: Review and comparison of dry friction models, *Nonlinear Dynamics* 83(4):1785–1801, 2016.

[7] S.V. WALKER, R.I. LEINE: Set-valued anisotropic dry friction laws: formulation, experimental verification and instability phenomenon, *Nonlinear Dynamics* 96(2):885–920, 2019.