XII. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA
MaMeK, 2015
Miskolc, 2015. augusztus 25-27.

KÉT PONTON GÖRDÜLŐ GOLYÓ NEM-FOLYTONOS DINAMIKÁJA

Antali Máté[1], Stépán Gábor[2]
[1,2] Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
antali@mm.bme.hu, stepan@mm.bme.hu

Absztrakt: *Egy olyan mechanikai modellt vizsgálunk, melyben egy hengeres edény körkörös mozgatásával hozunk mozgásba egy golyót. A golyó és az edény két pontban érintkezhet, és mindkét pontban többféle viselkedés is előfordulhat (gördülés, csúszás, elválás), ami egy összetett, nem-folytonos dinamikai rendszerhez vezet. A legfontosabb esetekben megkeressük a stacionárius mozgásokat és meghatározzuk azok stabilitását. Megvizsgáljuk továbbá az stacionárius megoldások létrejöttének feltételeit, és a különféle stacionárius mozgások kapcsolódásait a gerjesztés paramétereinek hatására. A kapott átalakulások egy része megfeleltethető a szakirodalomban található nem-folytonos bifurkációknak, de találunk olyan különleges bifurkációt is, melyre nincs utalás a szakirodalomban. Az eredmények segítik a szerzők által korábban vizsgált golyós áramlásmérő dinamikájának mélyebb megértését. A választott mechanikai modell alapján később létrehozható kísérleti berendezés, ami lehetőséget ad az eredmények ellenőrzésére.*

Kulcsszavak: *kétpontos gördülés, göldülő golyó, nem-folytonos dinamika, nem-folytonos bifurkáció*

1. BEVEZETÉS

Az elmúlt évtizedekben több olyan szabadalom is született folyadék térfogatáramának mérésére, melyben az áramlás egy folyadékba helyezett golyót hajt meg egy hengeres edény fala mentén [1, 2]. Amint a szerzők korábbi munkájukban kimutatták [3, 4], a golyó és az edény közötti kapcsolat nem-folytonos jellege miatt a dinamika különleges bifurkációkat tartalmaz. A folyadék és golyó kölcsönhatásának paraméterei azonban bizonytalanok, így az eredmények kísérleti ellenőrzése nehézkes. Jelen tanulmányban egy az 1. ábrán látható mechanikai rendszert vizsgálunk, mely hasonló felépítésű a golyós áramlásmérőhöz, azonban a golyót folyadék helyett az edény mozgatásával hozzuk mozgásba. Ezen rendszer alkalmas arra, hogy a kapott analitikus eredményeket később kísérleti úton kapott eredményekkel vessük össze, melyből közvetetten ellenőrizhetők a golyós áramlásmérőre kapott eredmények is.

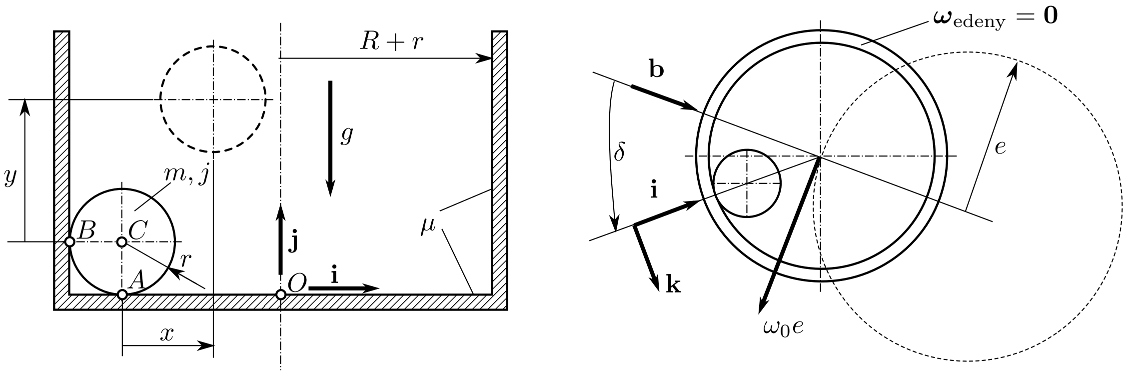
2. MECHANIKAI MODELL

A golyó mozgását az edényhez rögzített vonatkoztatási rendszerben írjuk le, ami az edény mozgatása miatt nem inerciarendszer. Az edényt úgy mozgatjuk körbe, hogy szögsebessége minden pillanatban nulla és minden pontja e sugarú pályán, $\omega_0 e$ nagyságú sebességgel mozog. A továbbiakban ω_0-t a gerjesztés körfrekvenciájának, e-t pedig a gerjesztés amplitúdójának nevezzük. A gerjesztés a mozgó vonatkoztatási rendszer minden pontjában egyformán fellépő, $\omega_0^2 e$ nagyságú szállító gyorsulással vehető figyelembe. Ezen szállító gyorsulás irányát jellemezzük egy $\mathbf{b}$ egységvektorral, mely ω_0 szögsebességgel forog a függőleges tengely körül.

A számítások egyszerűsítése érdekében a vektorokat egy $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisvektorokkal jellemzett *forgó* koordináta-rendszerben adjuk meg. Az $\mathbf{i}$ bázisvektor a golyó C középpontjából radiálisan befelé mutat, a $\mathbf{j}$ bázisvektor az edény szimmetriatengelyéhez kötött, míg a $\mathbf{k}$ bázisvektor a $\mathbf{k} := \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ keresztszorzásból adódóan tangenciális irányú. A forgó koordináta-rendszer szögsebessége legyen $\boldsymbol{\omega}_c(t) := \omega_c(t)\,\mathbf{j}$. Az ω_c és a 1. táblázatban szereplő többi változó t időtől való függését a továbbiakban csak akkor jelöljük, ha az a megértéshez szükséges. A golyó szöghelyzetét a gerjesztés irányához képest képest egy δ szöggel adhatjuk meg, melyen az $\mathbf{i}$ egységvektor $\mathbf{b}$-vel bezárt szögét értjük. A δ szög előjelét úgy definiáljuk, hogy $\dot{\delta} = \omega_c - \omega_0$ teljesüljön, így δ azt fejezi ki, hogy a golyó mennyit *siet* a gerjesztéshez képest.

A golyó C középpontjának helye, sebessége és gyorsulása felírható, mint

$$\mathbf{r}_{OC} := \begin{bmatrix} x-R \\ r+y \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_C := \dot{\mathbf{r}}_{OC} + \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{r}_{OC} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_c(R-x) \end{bmatrix}, \tag{1}$$



1. ábra. A mechanikai modell. A bal oldali ábrán az edény és a golyó látható függőleges metszetben. A jobb oldali ábrán a gerjesztés figyelhető meg felülnézetben: az edényt úgy mozgatjuk vízszintes síkban, hogy szögsebessége ($\boldsymbol{\omega}_{\text{edeny}}$) zérus legyen és minden pontja egy e sugarú körpályán mozogjon $\omega_0 e$ nagyságú sebességgel.

Jelölés	**Mennyiség**	**Mértékegység**
x	radiális elmozdulás	m
y	axiális elmozdulás	m
δ	kerületi szöghelyzet a gerjesztéshez képest	$-$
v_x	radiális sebesség	m/s
v_y	axiális sebesség	m/s
ω_c	golyó középpontja által kijelölt forgó koordináta-rendszer szögsebessége	1/s
$\tilde{\omega}_x$	radiális csúszási szögsebesség	1/s
$\tilde{\omega}_y$	axiális csúszási szögsebesség	1/s
$\tilde{\omega}_z$	tangenciális csúszási szögsebesség	1/s

1. táblázat. A golyó állapotának leírásához szükséges változók. Egy térbeli merev test helyzetét és sebességállapotát 12 változóval lehetne leírni, most azonban csak 9 változóra van szükségünk, mivel a golyót saját középpontja körül való elforgatása nem befolyásolja a dinamikát.

$$\mathbf{a}_C := \dot{\mathbf{v}}_C + \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{v}_C = \begin{bmatrix} \dot{v}_x + \omega_c^2(R-x) \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega}_c(R-x) - 2\,\omega_c v_x \end{bmatrix}, \tag{2}$$

ahol r a golyó sugara, $R+r$ az edény belső sugara, $x(t)$ és $y(t)$ a golyó elmozdulása radiális és axiális irányban, $v_x := \dot{x}$ és $v_y := \dot{y}$ pedig a hozzájuk tartozó radiális és axiális sebességek. A differenciáláskor figyelembe kell vennünk a forgó koordináta-rendszer hatását, és hogy az edényhez rögzített vonatkoztatási rendszerben $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$. A golyó szögsebességét és szöggyorsulását az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{\omega} := \begin{bmatrix} \frac{R-x}{r}\omega_c + \tilde{\omega}_x \\ -\frac{R-x}{r}\omega_c + \tilde{\omega}_y \\ \frac{1}{r}(v_y - v_x) + \tilde{\omega}_z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{R-x}{r}\dot{\omega}_c + \dot{\tilde{\omega}}_x + \frac{1}{r}\omega_c(v_y - 2v_x) + \omega_c\tilde{\omega}_z \\ -\frac{R-x}{r}\dot{\omega}_c + \dot{\tilde{\omega}}_y + \frac{1}{r}\omega_c v_x \\ \frac{1}{r}(\dot{v}_y - \dot{v}_x) + \dot{\tilde{\omega}}_z - \frac{R-x}{r}\omega_c^2 - \omega_c\tilde{\omega}_x \end{bmatrix}, \tag{3}$$

ahol $\tilde{\omega}_x(t)$, $\tilde{\omega}_y(t)$ és $\tilde{\omega}_z(t)$ a golyó *csúszási szögsebességei*. A változók ezen választása és elnevezése indokolható, ha kiszámítjuk a golyó A „legalsó” és B „legkülső” pontjainak sebességét,

$$\mathbf{v}_A := \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CA} = \begin{bmatrix} r\tilde{\omega}_z + v_y \\ v_y \\ -r\tilde{\omega}_x \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_B := \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CB} = \begin{bmatrix} v_x \\ -r\tilde{\omega}_z + v_x \\ r\tilde{\omega}_y \end{bmatrix}, \tag{4}$$

ahol $\mathbf{r}_{CA} := -r\mathbf{j}$ és $\mathbf{r}_{CB} := -r\mathbf{i}$. Amennyiben a golyó tartósan hozzáér az edény aljához ($v_y = 0$) illetve a falához ($v_x = 0$), akkor $\mathbf{v}_A$ illetve $\mathbf{v}_B$ az érintkezési pontok csúszási sebességét adják meg, melyek ekkor tisztán a megfelelő csúszási szögsebességekkel írhatóak le.

Az A vagy B pontban az edényről a golyóra ható, egyelőre ismeretlen koncentrált erőket $\mathbf{F}_A$-val illetve $\mathbf{F}_B$-vel jelöljük, míg a gravitációs erő és a mozgó vonatkoztatási rendszerből adódó szállító erő eredőjét a C pontban ható

$\mathbf{F}_C$ erővel vesszük figyelembe,

$$\mathbf{F}_A := \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}_B := \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}_C := -mg\,\mathbf{j} - m\omega_0^2 e\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -m\omega_0^2 e\cos\delta \\ -mg \\ -m\omega_0^2 e\sin\delta \end{bmatrix}. \tag{5}$$

A golyó tehetetlenségi nyomatéka felírható $\mathbf{J} := jmr^2\mathbf{I}$ alakban, ahol j a dimenziótlan tehetetlenségi nyomaték ($j = 2/5$ homogén golyóra), $\mathbf{I}$ pedig az egységmátrix. A definiált mennyiségekkel felírható a dinamika alaptétele a golyóra,

$$\begin{cases} \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C & = m\mathbf{a}_C \\ \mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F}_A + \mathbf{r}_{CB} \times \mathbf{F}_B & = mjr^2\boldsymbol{\varepsilon}. \end{cases} \tag{6}$$

Ennek kifejtésével és átrendezésével kapjuk:

$$\begin{cases} A_x + B_x & = m\dot{v}_x + m\omega_c^2(R-x) + m\omega_0^2 e\cos\delta, \\ A_y + B_y & = m\dot{v}_y + mg, \\ A_z + B_z & = m\dot{\omega}_c(R-x) - 2m\omega_c v_x + m\omega_0^2 e\sin\delta, \\ -A_z & = mjr\left(\frac{R-x}{r}\dot{\omega}_c + \dot{\tilde{\omega}}_x + \frac{1}{r}\omega_c(v_y - 2v_x) + \omega_c\tilde{\omega}_z\right), \\ B_z & = mjr\left(-\frac{R-x}{r}\dot{\omega}_c + \dot{\tilde{\omega}}_y + \frac{1}{r}\omega_c v_x\right), \\ A_x - B_y & = mjr\left(\frac{1}{r}(\dot{v}_y - \dot{v}_x) + \dot{\tilde{\omega}}_z - \frac{R-x}{r}\omega_c^2 - \omega_c\tilde{\omega}_x\right), \end{cases} \tag{7}$$

melyből kifejezhetők a $v_x, v_y, \omega_c, \tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$ változók deriváltjai:

$$\begin{cases} \dot{v}_x & = \frac{1}{m}(A_x + B_x) - \omega_c^2(R-x) - \omega_0^2 e\cos\delta, \\ \dot{v}_y & = \frac{1}{m}(A_y + B_y) - g, \\ \dot{\omega}_c & = \frac{1}{m(R-x)}(A_z + B_z) + \frac{2}{R-x}\omega_c v_x - \omega_0^2\frac{e}{R-x}\sin\delta, \\ \dot{\tilde{\omega}}_x & = -\frac{1}{mr}\left(\frac{1+j}{j}A_z + B_z\right) - \frac{1}{r}\omega_c v_y - \omega_c\tilde{\omega}_z + \omega_0^2\frac{e}{r}\sin\delta, \\ \dot{\tilde{\omega}}_y & = \frac{1}{mr}\left(A_z + \frac{1+j}{j}B_z\right) + \frac{1}{r}\omega_c v_x - \omega_0^2\frac{e}{r}\sin\delta, \\ \dot{\tilde{\omega}}_z & = \frac{1}{mr}\left(\frac{1+j}{j}A_x + B_x - A_y - \frac{1+j}{j}B_y\right) + \frac{g}{r} + \omega_c\tilde{\omega}_x - \omega_0^2\frac{e}{r}\cos\delta. \end{cases} \tag{8}$$

Ezen 6 változót a rendszer *kvázi-sebességeinek* tekinthetjük ([5], 217. oldal), hiszen egyértelműen leírják a golyó mozgásállapotát. A gömbszimmetria miatt a golyó orientációjával nem szükséges foglalkoznunk, így a golyó geometriai helyzete 3 általános koordinátával egyértelműen megadható (x, y, δ), és ezen koordináták deriváltjai a már korábban bemutatott

$$\begin{cases} \dot{x} & = v_x \\ \dot{y} & = v_y \\ \dot{\delta} & = \omega_c - \omega_0 \end{cases} \tag{9}$$

összefüggésekkel adódnak. A (8)-(9) egyenletrendszerben egyelőre még ismeretlenként szerepelnek az A és B pontokban fellépő erőkomponensek. A hiányzó egyenleteket a golyó és az edény kapcsolatától függően adhatjuk meg.

Az A és B pontokban háromféle állapot lehetséges: a golyó gördülhet, megcsúszhat az edény felületén vagy elválhat tőle. Gördülés esetén a (4) egyenletben szereplő megfelelő érintkezési pont sebessége nulla, csúszás esetén egyszerű Coulomb-törvényt feltételezünk μ súrlódási tényezővel, elválás esetén pedig nem lép fel erő. Ezek figyelembe vételével az A pont esetére a következő összefüggések adódnak:

$$\begin{array}{rlll} \text{gördüléskor:} & \tilde{\omega}_x = 0, & \tilde{\omega}_z = 0, & y = 0; \\ \text{csúszáskor:} & A_x = -\mu A_y\frac{\tilde{\omega}_z}{\sqrt{\tilde{\omega}_x^2+\tilde{\omega}_z^2}}, & A_z = \mu A_y\frac{\tilde{\omega}_x}{\sqrt{\tilde{\omega}_x^2+\tilde{\omega}_z^2}}, & y = 0; \\ \text{elváláskor:} & A_x = 0, & A_y = 0, & A_z = 0. \end{array} \tag{10}$$

A B pontra hasonló egyenleteket kapunk:

$$\begin{array}{rlll} \text{gördüléskor:} & \tilde{\omega}_y = 0, & \tilde{\omega}_z = 0, & x = 0; \\ \text{csúszáskor:} & B_y = \mu B_x\frac{\tilde{\omega}_z}{\sqrt{\tilde{\omega}_y^2+\tilde{\omega}_z^2}}, & B_z = -\mu B_x\frac{\tilde{\omega}_y}{\sqrt{\tilde{\omega}_y^2+\tilde{\omega}_z^2}}, & x = 0; \\ \text{elváláskor:} & B_x = 0, & B_y = 0, & B_z = 0. \end{array} \tag{11}$$

Ezek a feltételek időben folyamatosan fennállnak, így például $\tilde{\omega}_x = 0$ alatt pontosabban a $\tilde{\omega}_x \equiv 0$ feltételt értjük. Mivel az A és B pontokban egyaránt háromféle különféle viselkedés fordulhat elő, a (10)-(11) egyenletekből a 9 különböző esetben közvetlenül vagy közvetetten kiszámíthatók a kontakterők, így a (8)-(9) egyenletek egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletet adnak. Ez alól kivétel az az eset, amikor mindkét pontban gördülés áll fenn: ekkor bár megkapható a differenciálegyenlet-rendszer, az $\mathbf{F}_A$ és $\mathbf{F}_B$ egyes komponenseit nem tudjuk meghatározni. Ezt az okozza, hogy a (10) és (11) egyenletek gördülési esetekben érvényes sorai nem függetlenek.

A fentiek mellett még figyelembe kell vennünk az elválásból és a megcsúszásból adódó korlátokat. Mivel a golyó és az edény között csak nyomó irányú erő lehetséges, ezért gördülés és csúszás esetén fenn kell állnia a

$$A_y \geq 0 \qquad \text{illetve} \qquad B_x \geq 0 \tag{12}$$

feltételeknek az adott pontban, különben a golyó elválik az edény falától. Az egyszerű Coulumb-törvény miatt gördüléskor teljesülnie kell a

$$\sqrt{A_x^2 + A_z^2} \leq \mu A_y \qquad \text{illetve} \qquad \sqrt{B_y^2 + B_z^2} \leq \mu B_x \tag{13}$$

feltételnek, különben a golyó megcsúszik az adott pontban.

A következő pontokban az egyes esetekben kapott differenciálegyenletek stacionárius helyzeteivel foglalkozunk, melyeket mechanikai szempontból *stacionárius mozgásoknak* nevezünk.

3. STACIONÁRIUS MOZGÁSOK AZ EDÉNY FALÁN GÖRDÜLÉSKOR

Tekintsük először azt az esetet, amikor a golyó gördül az edény falán, viszont nem ér hozzá az edény aljához. Ekkor a (10) és (11) feltételek közül a megfelelő sorokat kiválasztva (8)-(9) figyelembe vételével az

$$B_x = m\omega_c^2 R + m\omega_0^2 e\cos\delta, \qquad B_y = mjR\omega_c^2 + mjr\omega_c\tilde{\omega}_x, \qquad B_z = \tfrac{j}{1+j} me\omega_0^2 \sin\delta \tag{14}$$

összefüggéseket kapjuk. Ha az azonosan nulla változókat leválasztjuk, a rendszer állapota egy $\mathcal{U} \cong \mathbb{R}^5$ fázistérben írható le. Ennek eleme az $\mathcal{U} \ni \mathbf{u} := (v_y, \omega_c, \tilde{\omega}_x, y, \delta)$ állapotvektor, melyre a következő differenciálegyenlet adódik:

$$\begin{cases} \dot{v}_y &= \frac{j}{1+j} R\omega_c^2 + \frac{j}{1+j} r\omega_c\tilde{\omega}_x - \frac{1}{1+j} g \\ \dot{\omega}_c &= -\frac{1}{1+j} \cdot \frac{e}{R}\omega_0^2 \sin\delta \\ \dot{\tilde{\omega}}_x &= \frac{1}{1+j} \cdot \frac{e}{r}\omega_0^2 \sin\delta - \frac{1}{r}\omega_c v_y \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{\delta} &= \omega_c - \omega_0. \end{cases} \tag{15}$$

A rendszer általános értelemben konzervatív, a

$$E_u(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} m\Big((1+j)\left(v_y^2 + (\omega_c - \omega_0)^2 R^2\right) + j(r\tilde{\omega}_x + R\omega_c)^2\Big) + mgy - meR\omega_0^2\cos\delta \tag{16}$$

mennyiség ugyanis időben állandó ($\dot{E}_u \equiv 0$). Az első tag a mozgási energiával van kapcsolatban, a második a gravitációs potenciál, a harmadik pedig a gerjesztésből adódó potenciál.

Ha megkeressük (15) stacionárius mozgásait, a megoldások két családját kapjuk:

$$\begin{bmatrix} v_y \\ \omega_c \\ \tilde{\omega}_x \\ y \\ \delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ \frac{g}{jr\omega_0} - \frac{R}{r}\omega_0 \\ y^0 \\ 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{u}_{01}, \qquad \begin{bmatrix} v_y \\ \omega_c \\ \tilde{\omega}_x \\ y \\ \delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ \frac{g}{jr\omega_0} - \frac{R}{r}\omega_0 \\ y^0 \\ \pi \end{bmatrix} =: \mathbf{u}_{02}, \tag{17}$$

mindkét esetben y^0 tetszőlegesen választható nemnegatív állandó, mely azt fejezi ki, hogy milyen magasra emelkedett a golyó az edény aljához képest. A $\mathbf{u}_{01}$ megoldás esetén $\delta = 0$ azt jelenti, hogy a golyó a kerület mentén a gerjesztés irányában helyezkedik el. Míg a $\mathbf{u}_{02}$ megoldásnál $\delta = \pi$ azt jelzi, hogy ekkor a golyó a gerjesztéssel átellenes irányban helyezkedik el.

Ha linearizáljuk a (15) egyenletet a $\mathbf{u}_{01}$ megoldás körül, a

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+j}\cdot\frac{g}{\omega_0} + \frac{j}{1+j}R\omega_0 & \frac{j}{1+j} r\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{1+j}\cdot\frac{e}{r}\omega_0^2 \\ -\frac{1}{r}\omega_0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+j}\cdot\frac{e}{r}\omega_0^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{01}) + \mathcal{O}^2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{01}) \tag{18}$$

rendszert kapjuk, ahol $\mathcal{O}^2$ jelzi a nemlineáris tagokat. Számítsuk ki az együtthatómátrix λ sajátértékeit,

$$\lambda_{1,2} = \pm i\alpha_1 = \pm i\omega_0\sqrt{\frac{1}{1+j}\cdot\frac{e}{R}}, \qquad \lambda_{3,4} = \pm i\alpha_2 = \pm i\omega_0\sqrt{\frac{j}{1+j}}, \qquad \lambda_5 = 0. \tag{19}$$

A $\lambda_5 = 0$ sajátértékhez az y koordináta irányába mutató sajátvektor tartozik, mivel $\mathbf{u_{01}}$ nem egyetlen izolált stacionárius mozgást, hanem stacionárius mozgások egy családját jelenti, melyek csak y koordinátában térnek el egymástól. Mivel a rendszer konzervatív, a két tisztán képzetes gyökpár jelzi, hogy az egyensúlyi helyzet kis megzavarására a rendszer kvázi-periodikus rezgéssel válaszol. Megfigyelhető, hogy a rezgés α_1 saját-körfrekvenciája függ a gerjesztés e amplitúdójától is, míg az α_2 saját-körfrekvencia az amplitúdótól függetlenül az ω_0 gerjesztési saját-körfrekvencia körülbelül 0.53-szorosa (homogén golyó esetén).

Ha a (15) egyenletet az $\mathbf{u}_{01}$ megoldás körül linearizáljuk, a

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+j}\cdot\frac{g}{\omega_0} + \frac{j}{1+j}R\omega_0 & \frac{j}{1+j}r\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+j}\cdot\frac{e}{r}\omega_0^2 \\ -\frac{1}{r}\omega_0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{1+j}\cdot\frac{e}{r}\omega_0^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{02}) + \mathcal{O}^2(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{02}) \tag{20}$$

rendszer adódik, ahol a mátrix sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega_0\sqrt{\frac{1}{1+j}\cdot\frac{e}{R}}, \qquad \lambda_{3,4} = \pm i\alpha_2 = \pm i\omega_0\sqrt{\frac{j}{1+j}}, \qquad \lambda_5 = 0. \tag{21}$$

A különbség az előző (19) esethez képest az, hogy a $\lambda_{1,2}$ sajátértékek valósak, melyek közül az egyik pozitív, így az $\mathbf{u}_{20}$ stacionárius mozgások instabilak. Vagyis a falon való stacionárius gördülést gyakorlatban csak a gerjesztés irányában ($\delta = 0$) lehet létrehozni.

Vizsgáljuk meg, hogy a (17) stacionárius megoldások milyen feltételek mellett valósulhatnak meg. A (12) feltételből azt kapjuk, hogy az $\mathbf{u}_{01}$ megoldások mindig a falon maradnak, míg az $\mathbf{u}_{02}$ mozgások esetén bekövetkezik a faltól való elválás, ha $e > R$. A (13) feltételből pedig azt kapjuk, hogy az $\mathbf{u}_{01}$ és $\mathbf{u}_{02}$ megoldások esetén akkor következik be megcsúszás, ha $\omega_0 < \sqrt{\frac{g}{\mu(R+e)}}$ illetve $\omega_0 < \sqrt{\frac{g}{\mu(R-e)}}$. Vagyis ha a gerjesztés frekvenciája nem elég nagy, akkor a golyó megcsúszik a falon, a stacionárius gördülő mozgás nem alakul ki.

4. STACIONÁRIUS MOZGÁSOK AZ EDÉNY ALJÁN GÖRDÜLÉSKOR

Tekintsük most azt az esetet, amikor a golyó gördül az edény alján, de nem ér hozzá az edény falához. Ekkor a (8)-(10) összefüggésekből az ismeretlen erőkomponensekre az

$$A_x = \frac{j}{1+j}me\omega_0^2\cos\delta, \qquad A_y = mg, \qquad A_z = \frac{j}{1+j}me\omega_0^2\sin\delta \tag{22}$$

kifejezések adódnak. Az azonosan nulla változók leválasztása után egy $\mathcal{W} \cong \mathbb{R}^5$ fázistér adódik, melynek egy pontját a $\mathcal{W} \ni \mathbf{w} := (v_x, \omega_c, \tilde{\omega}_y, x, \delta)$ vektor írja le. A kapott differenciálegyenlet a

$$\begin{cases} \dot{v}_x &= -\omega_c^2(R-x) - \frac{1}{1+j}e\omega_0^2\cos\delta \\ \dot{\omega}_c &= \frac{2}{R-x}\omega_c v_x - \frac{1}{1+j}\cdot\frac{e}{R-x}\omega_0^2\sin\delta \\ \dot{\tilde{\omega}}_y &= \frac{1}{r}\omega_c v_x - \frac{1}{1+j}\cdot\frac{e}{r}\omega_0^2\sin\delta \\ \dot{x} &= v_x \\ \dot{\delta} &= \omega_c - \omega_0 \end{cases} \tag{23}$$

alakba írható. Ismét található általánosított energiafüggvény,

$$E_w(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}m\Big((1+j)\left(v_x^2 + (\omega_c-\omega_0)^2(R-x)^2\right) + j(r\tilde{\omega}_y - R\omega_c)^2\Big) - \\ - m(R-x)\omega_0^2\Big(e\cos\delta + (1+j)(R-x)\Big), \tag{24}$$

a rendszer konzervatív. A

$$\begin{bmatrix} v_x \\ \omega_c \\ \tilde{\omega}_y \\ x \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ \tilde{\omega}_y^0 \\ R - \frac{1}{1+j}e \\ \pi \end{bmatrix} =: \mathbf{w}_0, \tag{25}$$

stacionárius mozgások egyparaméteres családot alkotnak, ahol $\tilde{\omega}_y$ tetszőlegesen megválasztható. Vagyis a stacionárius mozgás létrejöhet attól függetlenül, hogy a golyó milyen szögsebességgel forog a függőleges tengely körül.

Viszont az edény fala miatt a $x > 0$ feltételnek teljesülnie kell, vagyis a stacionárius mozgás csak az $e < (1+j)R$ esetben létezik. A (23) egyenleteket a (25) stacionárius mozgás körül linearizálva a

$$\dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{1+j}\omega_0 e & 0 & \omega_0^2 & 0 \\ \frac{2}{e}(1+j)\omega_0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0^2 \\ \frac{1}{r}\omega_0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+j}\cdot\frac{e}{r}\omega_0^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) + \mathcal{O}^2(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \tag{26}$$

rendszert kapjuk. A mátrix sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm i\omega_0, \qquad \lambda_5 = 0. \tag{27}$$

A zérus sajátértékhez az $\tilde{\omega}_y$ irányú sajátvektor tartozik, mely a stacionárius mozgások egymáshoz képesti elhelyezkedését jelzi. Ezen kívül egyetlen, kétszeres multiplicitású tisztán képzetes gyökpárt kapunk, melyhez nem található a multiplicitásnak megfelelő számú sajátvektor. Így a stacionárius mozgás instabilis.

Ellenőrizzük az (25) stacionárius megoldás létezését a (12)-(13) feltételek alapján. A (12) feltétel mindig teljesül, a golyó nem emelkedik el az edény aljáról. A (13) feltételből pedig az következik, hogy a golyó megcsúszik, ha $\omega_0 > \sqrt{\frac{\mu g(1+j)}{ej}}$.

5. STACIONÁRIUS MOZGÁSOK KÉTPONTOS GÖRDÜLÉSKOR

Abban az esetben, amikor a golyó két pontos gördülést végez, a kontakterők nem határozhatók meg egyértelműen, mivel az A és B pontokban felírt gördülési feltételek nem függetlenek egymástól. A kerületi irányú komponensekre az

$$A_z = B_z = \frac{j}{1+2j} me\omega_0^2 \sin\delta \tag{28}$$

összefüggést kapjuk, míg az A_x, A_y, B_x, B_y határozatlanok. Ennek ellenére a mozgás meghatározható: tekintsük a $\mathcal{Q} := \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \cong \mathbb{R}^2$ fázisteret mint a $\mathcal{Q} \ni \mathbf{q} := (\omega_c, \delta)$ állapotvektorok terét. Ekkor a dinamikát a

$$\begin{cases} \dot{\omega}_c &= -\frac{1}{1+2j}\cdot\frac{e}{R}\omega_0^2 \sin\delta, \\ \dot{\delta} &= \omega_c - \omega_0 \end{cases} \tag{29}$$

differenciálegyenlet írja le. A rendszer ismét konzervatív általános értelemben, a

$$E_q(\mathbf{q}) := \frac{1}{2} m(1+2j)(\omega_c - \omega_0)^2 R^2 + meR\omega_0^2(1-\cos\delta) \tag{30}$$

energiafüggvény időben állandó. A stacionárius mozgások

$$\begin{bmatrix} \omega_c \\ \delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{q}_{01}, \qquad \begin{bmatrix} \omega_c \\ \delta \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \pi \end{bmatrix} =: \mathbf{q}_{02}. \tag{31}$$

A falon való gördülés (17) megoldásához hasonlóan a gerjesztés irányába eső ($\delta = 0$) és ezzel szemközti irányba eső ($\delta = \pi$) stacionárius mozgást is kapunk. Az előbbi esetben a

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{1+2j}\cdot\frac{e}{R}\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{01}) + \mathcal{O}^2(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{01}) \tag{32}$$

lineáris rendszert kaphatjuk, ahol az együtthatómátrix sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \pm i\alpha = \pm i\omega_0 \sqrt{\frac{1}{1+2j}\cdot\frac{e}{R}}. \tag{33}$$

Vagyis a $\mathbf{q}_{01}$ stacionárius mozgás a konzervativitás miatt neutrálisan stabilis, állandó amplitúdójú rezgések alakulnak ki. Érdemes megfigyelni, hogy a kis rezgések α körfrekvenciája alacsonyabb, mint a (19) esetben kapott α_1 körfrekvencia.

A $\mathbf{q}_{02}$ stacionárius mozgás esetén a

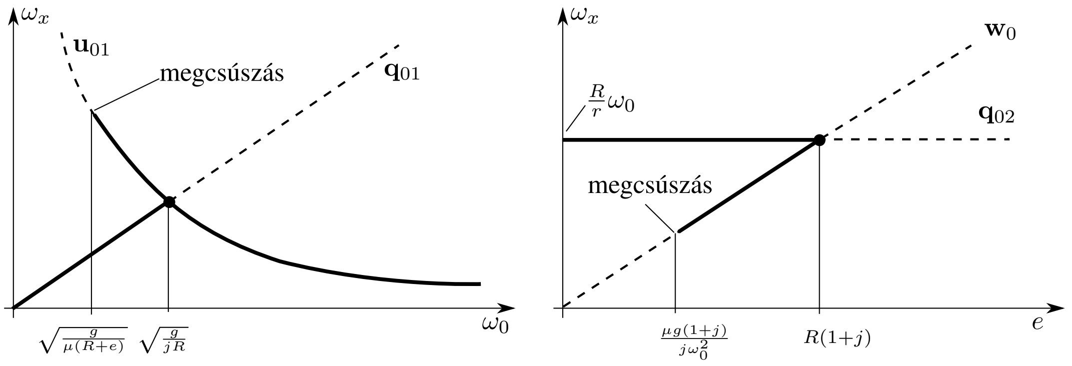
$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+2j}\cdot\frac{e}{R}\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{02}) + \mathcal{O}^2(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{02}) \tag{34}$$

lineáris rendszert kapjuk a

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 \sqrt{\frac{1}{1+2j}\cdot\frac{e}{R}} \tag{35}$$

sajátértékekkel. A két valós gyök közül az egyik pozitív, így a $\mathbf{q}_{02}$ stacionárius mozgás instabilis.

Kétpontos gördülés esetén a kontakterők nem határozhatók meg, így a (12)-(13) feltételek nem alkalmazhatók. Azonban a megoldások létezése vizsgálható közvetlenül a dinamikából is. Ha a (31) stacionárius mozgást olyan



2. ábra. Bifurkációs diagramok. A bal oldali ábra azt a bifurkációt mutatja, ahol a kétpontos gördülés (gerjesztés irányába eső) $\mathbf{q}_{01}$ stacionárius megoldása és a falon való gördülés $\mathbf{u}_{01}$ megfelelő megoldása lép kapcsolatba. A jobb oldali ábrán az a bifurkáció látható, ahol a kétpontos gördülés (gerjesztéssel ellentétes irányba eső) $\mathbf{q}_{02}$ stacionárius megoldása és a talajon gördülés $\mathbf{w}_0$ stacionárius megoldása kerül kapcsolatba. Az ábrákon a folytonos vonal a megvalósuló, a szaggatott vonal pedig a látszólagos megoldásokat jelöli.

zavarás éri, mely megszakítja a kapcsolatot a golyó és az edény alja között, akkor a (15) egyenlet lép életbe. Helyettesítsük a (31) megoldásokat a (15) egyenlet első sorába, így mindkét esetben kapjuk:

$$\dot{v}_y = \frac{j}{1+j}R\omega_0^2 - \frac{1}{1+j}g \tag{36}$$

Ha $\dot{v}_y < 0$, akkor a (15) vektormező visszalöki a golyót a kétpontos gördülés állapotába. Ez akkor áll fenn, ha $\omega_0 < \sqrt{\frac{g}{jR}}$. Ha viszont $\dot{v}_y > 0$, akkor a golyó felemelkedik az edény aljáról, és tartósan kialakul a falon való gördülés. Ebben az esetben a kétpontos gördülés valójában nem tud kialakulni.

Tekintsünk most egy olyan zavarást, mely az edény falával való kapcsolatot szünteti meg, ekkor a (23) egyenlet lép életbe. Helyettesítsük a (31) megoldásokat (15) első sorába:

$$\dot{v}_x = -\omega_0^2 R \mp \frac{1}{1+j}e\omega_0^2, \tag{37}$$

ahol a $\pm$ a $\mathbf{q}_{01}$ illetve $\mathbf{q}_{02}$ megoldások esetén érvényes. A (36) kifejezéshez hasonlóan azt feltételezhetjük, hogy a kétpontos gördülés abban az esetben létezik, ha $\dot{v}_x < 0$, ekkor a golyó nem válik el az edény falától. Ez a $\mathbf{q}_{01}$ megoldásra mindig teljesül, a $\mathbf{q}_{02}$ megoldásra viszont csak akkor, ha $e < (1+j)R$. Ha ezen feltétel nem teljesül, akkor a $\mathbf{q}_{02}$ megoldás nem létezik, a golyó elválik az edény falától.

Szükség lenne még annak vizsgálatára, hogy a golyó megcsúszhat-e egyik vagy mindkét kontaktpontban. Ez az elváláshoz hasonlóan megtehető közvetett módon, a rendszer csúszási esetekben felírt differenciálegyenleteinek vizsgálatával. A számítás hosszadalmas, jelen tárgyalásunkban nem térünk ki rá. Fontos azonban megjegyezni, hogy bizonyos paraméterértékek mellet a megcsúszás tovább szigoríthatja a kétpontos gördülés létezésének feltételét. Sőt, az egy- illetve kétpontos csúszás esetén is előfordulhatnak újabb stacionárius mozgások (lásd [3], [4])

6. A STACIONÁRIUS MOZGÁSOK BIFURKÁCIÓI

A különféle stacionárius mozgások létezésére kapott feltételek és a paraméterek nagy száma miatt nem vállalkozunk a rendszer bifurkációinak átfogó bemutatására. Csupán két példát mutatunk arra, hogy a paraméterek változtatása esetén a rendszer nem-folytonos viselkedése milyen jellegbeli változást okoz a stacionárius mozgásokban. A rendszerben egyensúlyi helyzetek nem-folytonos bifurkációi jelennek meg, melyek elméletét röviden [6, 7], átfogóan pedig [8] mutatja be.

Tekintsük először a $\mu > j\frac{R}{R+e}$ esetben a $\mathbf{u}_{01}$ és a $\mathbf{q}_{01}$ stacionárius mozgásokat az ω_0 gerjesztési körfrekvencia változtatása közben. A stacionárius megoldás helyzetét az edény falán való pörgés $\omega_x := \tilde{\omega}_x + \frac{R}{r}\omega_c$ szögsebességével írjuk le, mely a golyó (3) szögsebességének radiális irányú komponense. Az eredmények a 2 ábra bal oldalán láthatóak. A folytonos vonalak a *valódi* stacionárius mozgásokat jelölik, míg a szaggatott vonalak a *látszólagos* stacionárius mozgásokat, ahol valamilyen feltétel lehetetlenné teszi a megoldás megvalósulását. Látható, hogy a gerjesztés ω_0 körfrekvenciáját növelve a $\mathbf{q}_{01}$ stacionárius megoldás ω_x pörgési sebessége arányosan növekszik. Elérve az $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{jR}}$ értéket (fekete pont az ábrán) a kétpontos gördülés a talajtól való elválás miatt már nem jöhet létre. Ezen értéknél a falon gördülés $\mathbf{u}_{01}$ stacionárius megoldás az $y^0 = 0$ esetben egybeesik a kétpontos gördüléssel. Első ránézésre olyan szokatlan bifurkációról van szó, melyben a két egyensúlyi helyzet összeolvad.

Valójában a helyzet bonyolultabb, hiszen $\mathbf{u}_{01}$ nem egyetlen stacionárius mozgás, hanem stacionárius mozgások egyparaméteres családja. Ilyen bifurkációra utalás a szakirodalomban jelenleg nem található. Az ábrán látható továbbá, hogy a falon való megcsúszás egy további korlátot jelent az $\mathbf{u}_{01}$ megoldás létezésére. Ezek a jelenségek nagyon hasonló formában megfigyelhetők a golyós áramlásmérő modelljében is [4]. Mivel ezen stacionárius mozgások stabilisak, ezen bifurkáció vizsgálata megvalósítható lenne kísérletileg is.

Tekintsük most a $\mu < \frac{jR\omega_0^2}{g}$ esetben a $\mathbf{q}_{02}$ és a $\mathbf{w}_0$ stacionárius mozgásokat az e gerjesztési amplitúdó változtatása közben. Az eredményeket a 2. ábra jobb oldalán láthatók. Amennyiben a gerjesztés e amplitúdója kisebb, mint $R(1+j)$, akkor egyidejűleg létezhet az edény alján gördülés $\mathbf{w}_0$ stacionárius mozgása és a kétpontos gördülés $\mathbf{q}_{02}$ stacionárius mozgása. Elérve az $e = R(1+j)$ értéket (fekete pont az ábrán), mindkét megoldás megszűnik létezni. Ezen viselkedés megfeleltethető a nem-folytonos nyereg-csomó bifurkációnak [6, 7], azonban az érintett egyensúlyi helyzetek tisztán képzetes és zérus karakterisztikus gyökei miatt annak egy elfajult esetéről beszélhetünk. Továbbá az edény alján történő megcsúszás miatt e kis értéke esetén nem jön létre a $\mathbf{w}_0$ stacionárius mozgás. A golyós áramlásmérő esetében ez a bifurkáció nem jelenik meg. Mivel mindkét szereplő stacionárius mozgás instabilis, ezen bifurkáció vizsgálata kísérletileg nehézkes lenne.

7. KÖVETKEZTETÉSEK

A hengeres edény mozgatásával gerjesztett golyó vizsgálatára egy olyan mechanikai modellt hoztunk létre, mely az edény és a golyó kapcsolatának három lehetséges esetét (gördülés, csúszás, elválás) tartalmazza. A két kontaktpont miatt összesen 9 különféle viselkedés alakulhat ki, melyek együtt egy nem-folytonos dinamikai rendszert alkotnak. A stacionárius mozgások stabilitását és a megvalósulás feltételeit vizsgáltuk az edény falán és alján történő egypontos gördülések, valamint a kétpontos gördülés esetén. Többféle lehetséges stacionárius mozgást is kaptunk, melynek létrejöttét az edény felületétől való elválás és az edény felületén való megcsúszás korlátozza. Az elválás feltételét a kétpontos gördülés esetén, közvetett módon tudtuk ellenőrizni közvetlenül a magasabb dimenziós dinamikai rendszer segítségével. A kétpontos megcsúszás vizsgálata további számításokat igényelne.

Megvizsgáltuk a stacionárius mozgások nem-folytonos viselkedésből adódó bifurkációit. A 2. ábra bal oldalán látható bifurkáció megfelelőjét korábban a golyós áramlásmérőnél is sikerült kimutatni. Ez azt a jelenséget tartalmazza, amikor nagy gerjesztési frekvencia esetén a golyó elválik a talajtól és kizárólag a falon kezd el gördülni. A 2. ábra jobb oldalán látható nem-folytonos nyereg-csomó bifurkáció viszont újdonság a golyós áramlásmérőnél kapott eredményekhez képest. Ez azt jelenti, hogy az edény alján lévő egypontos gördülés és a gerjesztéssel szemközti oldalon kialakuló kétpontos gördülés stacionárius mozgásai egy bizonyos gerjesztési amplitúdót elérve egyszerre eltűnnek.

A továbbiakban célszerű lenne a számításokat az eddig nem vizsgált esetekre (például kétpontos csúzsás) is elvégezni. Érdemes lenne továbbá kísérleti berendezést építeni a kapott analitikus eredmények ellenőrzése céljából.

HIVATKOZÁSOK

[1] G. ELDRIDGE AND R. ELDRIDGE. Cyclonic flow meters. US Patent, US 5 905 200, 1999.

[2] M. L. J. P. PETERS. Orbital ball flowmeter for gas and fluis. US Patent, US 8 505 378 B2, 2013.

[3] M. ANTALI AND G. STEPAN. Nonlinear dynamics of a dual-point-contact ball. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 14:303–304, 2014.

[4] M. ANTALI AND G. STEPAN. Nonsmooth bifurcations of a dual-point-contact ball. *Nonlinear dynamics*, 2015, publikálás alatt.

[5] D. T. GREENWOOD. *Advanced Dynamics*. Cambridge University Press, 2003.

[6] R. I. LEINE AND D. H VAN CAMPEN AND B. H VAN DE VRANDE. Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. *Nonlinear Dynamics*, 23(2):105–164, 2000.

[7] M. DI BERNARDO AND S. J. HOGAN. Discontinuity-induced bifurcations of piecewise smooth dynamical systems. *Phil. Trans. R. Soc A.*, 368:4915–4935, 2010.

[8] M. DI BERNARDO AND C. J. BUDD AND A. R. CHAMPNEYS AND P. KOWALCZYK. *Piecewise-smooth Dynamical Systems*. Springer, 2008.