



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Műszaki Mechanika Tanszék

Vontatmányok stabilitása

SZAKDOLGOZAT

szerző:

Antali Máté

mechatronikai mérnök alapszakos hallgató

konzulens:

Dr. Stépán Gábor

egyetemi tanár

Budapest

2010 A.D.

„A prófétálások véget érnek, a nyelvek megszűnnek, a tudomány elenyészik. Mert töredékes a megismerésünk és töredékes a prófétálásunk, amikor pedig eljön majd a tökéletes, a töredékes véget fog érni. (...)

Most ugyanis tükör által, homályosan látunk, akkor pedig majd színről színre. Most töredékes az ismeretem, akkor pedig úgy fogok ismerni, mint ahogy én is ismert vagyok.”

/Szent Pál apostol/

NYILATKOZAT

Alulírott Antali Máté, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem hallgatója kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem el, és a szakdolgozat készítéséhez csak a megadott forrásokat használtam fel.

A 2010 novemberében beadott „Vontatott kerék dinamikájának vizsgálata” című TDK-dolgozatom alapján, onnan jelentős mennyiségű anyag átvételével készült.

Budapest, 2010. december 10.

aláírás

Tartalomjegyzék

Bevezetés-----	1
1. A mechanikai modell felállítása-----	2
1.1. Modellezési lehetőségek ismertetése-----	2
1.1.1. A vizsgált rendszer elemei-----	2
1.1.2. Az elemek modellezése a szakirodalomban-----	3
1.2. A modell megalkotása-----	4
1.2.1. Modellezési megfontolások-----	4
1.2.2. A modell definíciója-----	6
1.3. A változók számának csökkentése-----	9
1.3.1. A használt bázisok és transzformációk-----	9
1.3.2. A érintőkényszer figyelembe vétele-----	13
1.3.3. A gördülőkényszer figyelembe vétele-----	14
1.3.4. Általános koordináták és kvázisebességek-----	16
1.3.5. Dimenziótlan változók és paraméterek bevezetése-----	17
2. A rugalmasság nélküli modell mozgásegyenlete és stabilitása-----	19
2.1. A rugalmasság nélküli modell megalkotása-----	19
2.2. Az egyensúlyi megoldás stabilitása-----	20
3. A rugalmas modell mozgásegyenlete-----	23
3.1. A kinematikai egyenletek-----	23
3.2. A mozgásegyenletet levezetése Appell-egyenlettel-----	24
3.2.1. Az Appell-függvény felírása-----	25
3.2.2. Az Appell-függvény deriválása-----	29
3.2.3. A kvázierők felírása-----	31
3.2.4. Az Appell-egyenlet felírása-----	33
3.3. Az egyenlet dimenziótlan alakja-----	34
3.4. Az egyenlet linearizálása-----	36
4. A rugalmas modell lineáris stabilitása-----	39
4.1. Paraméterter leszűkítése-----	39
4.2. A karakterisztikus egyenlet felírása-----	40
4.3. A csillapítatlan modell lineáris stabilitása-----	41

4.3.1. Stabilitás függőleges királycsap esetén-----	41
4.3.2. Stabilitás ferde királycsap esetén-----	43
4.4. A csillapított modell lineáris stabilitása-----	49
4.4.1. Stabilitás függőleges királycsap esetén-----	49
4.4.2. Stabilitás ferde királycsap esetén-----	50
5. A numerikus szimuláció-----	54
5.1. A szimuláció elkészítése-----	54
5.2. A program működése-----	55
6. Eredmények és következtetések-----	58
Összefoglalás-----	60
Summary-----	61
Irodalomjegyzék-----	62
Függelék A: Anholonom rendszerek szabadságfokai-----	63
Függelék B: Futási eredmények-----	65

Bevezetés

Bevásárlás közben bizonyára tapasztaltuk már, hogy haladás közben a bevásárlókocsi kerekei gyakran furcsa, szabálytalannak tűnő rezgésbe jönnek. Arra viszont nemigen gondolunk, hogy hasonló rezgés vezethet komoly balesetekhez a versenymotorok esetén. A jelenség jól mutatja, hogy gyakran egészen egyszerű, mindennapi jelenségek mögött rejtőzik egy bonyolult fizikai vagy akár mérnöki probléma.

Jelen dolgozat témája a vontatmányok, járműelemek szabadon futó kerekeinek vizsgálata. Az ilyen rendszerek közös jellemzője, hogy a kerék csapágyazását tartalmazó járműelem nem mereven, hanem egy csappal vagy gömbcsuklóval van a jármű többi részéhez rögzítve, mely körül szabadon elfordulhat. Ilyen kialakítást találunk a kamionvontatmányoknál, a repülőgépek orr-futóműveinél, de jó példa a már emlegetett bevásárlókocsi is. Elsőre nem kézenfekvő, de a biciklik és motorkerékpárok első kerekei is ilyen struktúrával rendelkeznek.

Szeretjük, ha ezen eszközeink kiszámíthatóan működnek, aminek látszólag ellentmond a szabadon elforduló járműelem. Azonban helyes tervezés esetén a csapnál fellépő erők és a kerék gördülése általában a megfelelő irányba szabályozzák a vontatmány mozgását. Ezért tudunk bevásárlókocsit tolni, utánfutókat vontatni, sőt, akár utánfutóval tolatni is. A kerékpárok és motorok esetén pedig a kéz által kifejtett erő is segít ebben.

Azonban bizonyos esetekben a kerék és a csapágyazást tartó járműelem furcsa, ön-gerjesztett rezgésbe jön. Ezt a jelenséget, mely egyenes vonalú egyenletes haladáskor is létrejöhet, „shimmy”-jelenségnek nevezi a szakirodalom. Bizonyos esetben a rezgés a megcsúszásig, a felborulásig vagy a jármű károsodásáig fokozódhat, melyek mind súlyos balesetforrást jelentenek.

A „shimmy”-jelenség régóta kutatott téma a szakirodalomban. Jelen dolgozatban arra keresünk választ, milyen hatással van a jelenség kialakulására, ha a szabadon elforduló járműelem nem függőleges, hanem ahhoz képest megdöntött csap körül fordulhat el. Felmerülhet a kérdés, hogy milyen mérnöki szempontok alapján tesszük ezt fel. Egyrészt természetesen gyártás, de akár működés közben is kerülhet kis mértékű ferdeség a csap pozíciójába, mely hatással lehet a stabil működésre. Más részről érdemes megvizsgálni, érdemes-e eleve ferdére gyártani a felfüggesztést.

Először áttekintjük a modellezési lehetőségeket, majd felállítunk egy alkalmas mechanikai modellt és annak segítségével vizsgáljuk a rendszer működését.

1. A mechanikai modell felállítása

Ahhoz, hogy minél alkalmasabb modellt válasszunk, érdemes körülnézni, hogy a szakirodalomban milyen mechanikai modelleket alkalmaznak. Majd felállítjuk saját modellünket.

1.1. Modellezési lehetőségek ismertetése

Az irodalomjegyzék [1], [2], [3], [4], és [5] pontjában számos különféle mechanikai modellt találunk a shimmy-jelenség leírására. Most ezeket nem cikkenként, hanem tematikusan rendszerezük.

1.1.1. A vizsgált rendszer elemei

Egy fizikai modell végső soron nem más, mint egy viselkedésen alapuló hasonlat, mely a tapasztalat bizonyos elemeit egy matematikai struktúrához kapcsolja. Egy jó hasonlat a költészetben is a lényegyet emeli ki, és elhagyja a kevésbé fontosat. Mely elemeket is kívánjuk modellezni a fizikai világ egészéből? Adott a jármű, mely számos alkatrészből áll, és adott a külvilág. A külvilág és a jármű kapcsolatából csak két elemmel fogunk foglalkozni, az út és kerék kapcsolatával és a gravitációval.

A hivatkozásokban szereplő modellek szinte mindegyike tovább szűkíti a modellezendő létezők számát azzal, hogy csupán a jelenség szempontjából érdekes alkatrészeket veszi figyelembe közvetlen módon. Abból a feltevésből indulnak ki, hogy a vontatott kerék nem befolyásolja a jármű többi részének mozgását. Így a jármű többi része csak a rendszer határán megjelenő kinematikai peremfeltételként, többnyire állandó sebességű vontatásként jelentkezik.

A modell szempontjából négy létfontosságú elemmel kell foglalkoznunk. Mindenképpen foglalkoznunk kell az útfelület leírásával. A vontatott kerék modellje pedig legkevesebb három alkatrészből áll. A keréken kívül foglalkoznunk kell a szabadon elforduló alkatrésszel, melybe a kerék csapágya rögzítve van. Ezt a továbbiakban vonórúdnak fogjuk nevezni. A vonórúd elfordulását a modellek nagy része nem gömbcsukló, hanem hengeres csap, a királycsap körül írja le. A királycsap már mereven kapcsolódik a jármű többi részéhez, ilyen módon a jármű mozgásából származó kényszert a királycsapra kell előírni. A három alkatrész egyértelműen elkülöníthető a bevásárlókocsi kerekének példáján, melyet a következő ábra mutat.



1. ábra: A modell elemei a bevásárlókocsi esetén

Fontos még megjegyeznünk, hogy az irodalomban talált modellek mindegyikében figyelembe van véve a laterális irányú rugalmasság a modell egy vagy több pontján. Ez a haladási irányra merőleges és a talajjal párhuzamos irányt jelenti. Amennyiben minden alkatrészt és kapcsolatot merevnek választanák, a kapott modell egyenlete túl alacsony dimenziójú lenne ahhoz, hogy alkalmas legyen rezgések leírására. Ezt figyelembe kell majd vennünk a saját modell megalkotásánál is. Most nézzük, milyen lehetőségek vannak az egyes elemek modellezésére.

1.1.2. Az elemek modellezése a szakirodalomban

Az út leírásánál két kérdésben kell döntenünk, milyen geometriájú és milyen dinamikai viselkedésű útfelületet választunk. A szakirodalom vizsgált modelljei kivétel nélkül merev útfelülettel dolgoznak. Ez elfogadható közelítés, hiszen egy kemény útfelület, például aszfaltfelület nagyságrendekkel merevebb, mint a gumi vagy a kerékfelfüggesztés. Geometriát tekintve ferde vagy vízszintes talajt adhatunk meg, ami lehet sima, vagy egyenetlen. Utóbbit általában különböző amplitúdójú és térfrekvenciájú szinuszfüggvényekkel veszik figyelembe.

A keréknél is geometriai és dinamikai megfontolásokat kell tennünk. A kerékmodell lehet teljesen merev, vagy a rugalmasságot figyelembe vevő, egy elfogadható kompromisszum, amikor a kereket alapvetően merevnek modellezik, azonban az útfelülettel való érintkezés környezetében figyelembe veszik a rugalmasságot is.

Itt ki kell térni a kerék és az út kapcsolatára is. Merev keréknél a legegyszerűbb a gördülést egy pontos érintkezéssel modellezni. Ehhez a kör és a tórusz gördülő idomok a legalkalmasabbak. A rugalmas modelleknél a talajjal egy kis felület érintkezhet. A kerület mentén végighaladó deformációt még időkésséssel is modellezhetjük.

A gördülés csak korlátozott feltételek között állhat fenn. A csúszást nem feltétlenül szükséges figyelembe vennünk, ha mégis így teszünk, számtalan tapadási modellt találunk a

szakirodalomban.

A vonórúd dinamikája modellekben merev vagy rugalmas, geometriája rúd vagy általános kiterjedt test lehet. A vonórúd és a királycsap közötti kapcsolatot jellemzően síkcsukló kényszerrel modellezik. Maga a királycsap is lehet rugalmas, de a csap és a vonórúd közötti kapcsolatnál is indokolt lehet a rugalmasság figyelembe vétele.

1.2. A modell megalkotása

A fenti tapasztalatok alapján megalkothatjuk modellünket. Alapvetően a [3] cikkben szereplő modellt követjük, azt azonban több ponton módosítanunk kell a ferde csap megjelenése miatt.

1.2.1. Modellezési megfontolások

Mivel vizsgálatunk a királycsap ferde helyzetének hatását kívánja megfigyelni, érdemes minél egyszerűbb modellt alkotni, amely már alkalmas a vizsgálatra. Ennek megfelelően választjuk meg a modell elemeit.

Az utat egy vízszintes síklapnak tekintjük, a kereket merevnek tekintjük, és a kettő között egy pontos érintkezést tételezünk fel. Egyelőre nem foglalkozunk a megcsúszással, a kerék görbülését pedig úgy írjuk le, mintha egy kör görbülne a síkon. A kerék tehetetlenségi tenzorára annyi megkötésünk van, hogy a forgásszimmetrikus és dinamikailag kiegyensúlyozott legyen.

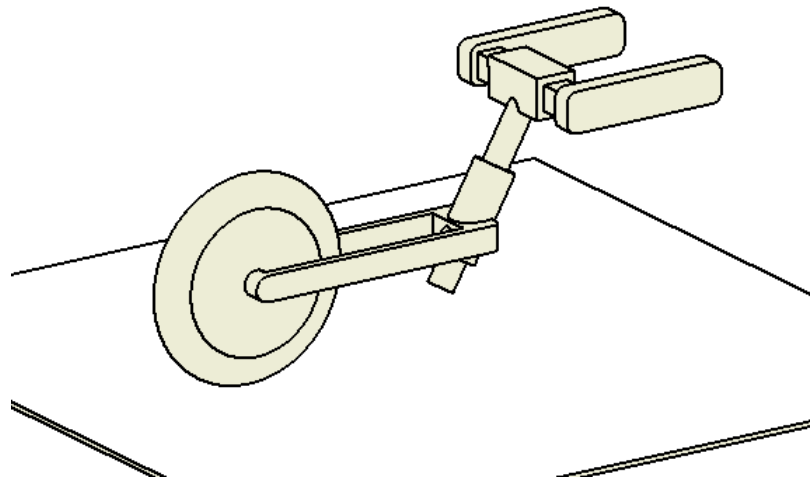
A kerék csapágóját ideális, súrlódásmentes csuklós kapcsolattal modellezzük. A vonórúd szintén merev, és szimmetrikus a haladási irányba eső függőleges síkra.

A vonórúd és a királycsap kapcsolatát ferde csuklóval írhatnánk le, ez azonban a nem lenne működőképes. A vonórúd elfordulásával ugyanis a kerék megemelkedne és lesüllyedne, amit a görbülő kényszer miatt nem tehet meg. Egy megoldás lehet, ha a csuklós kapcsolat helyett hengerdugattyút építünk be, mely megengedi a csukló mentén történő lineáris elmozdulást is.

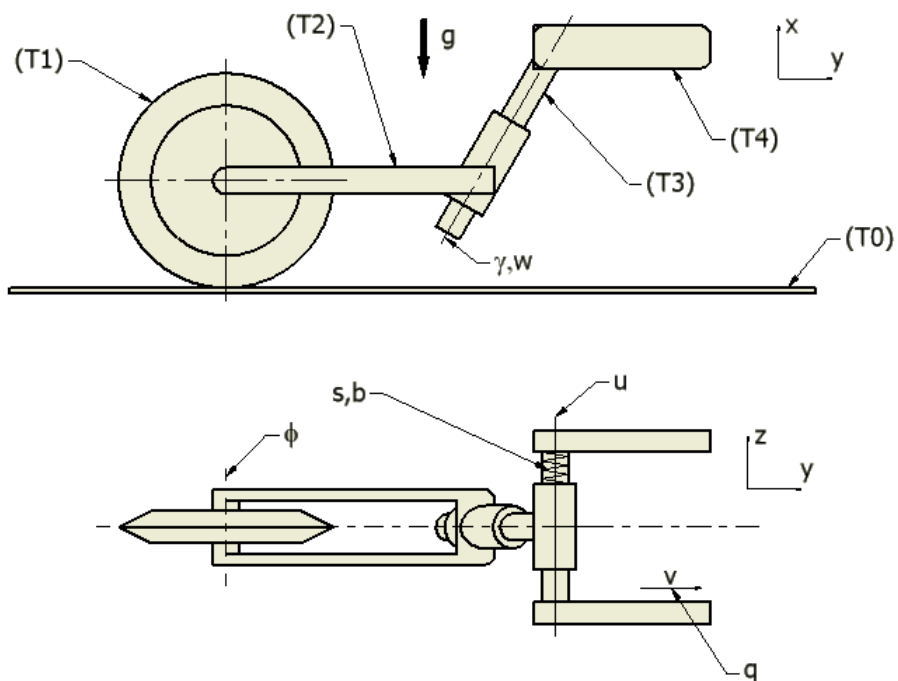
A rugalmasságot laterális irányban több helyen vehetjük figyelembe. A valóságban rugalmasságot tapasztalunk a gumiköpenynél, a vonórúdnál, a királycsapnál és a vonórúd és a csap kapcsolódásánál. Nem követünk el nagy hibát, ha a modellben csak egy helyen vesszük figyelembe, értékét azonban módosítjuk a többi rugalmasságnak megfelelően. Azt a megoldást választjuk, hogy a rugalmasságot a királycsapon belül vesszük figyelembe. Ezt

úgy tesszük meg, hogy a királycsapot két merev testből állítjuk össze. Az egyik hengerdugattyús kapcsolatban van a vonórúddal, a másik merev kapcsolatban a jármű többi részével. A kettő között csúszkás kapcsolat van, melyet egy lineáris rugó és egy viszkózus csillapítás szabályoz.

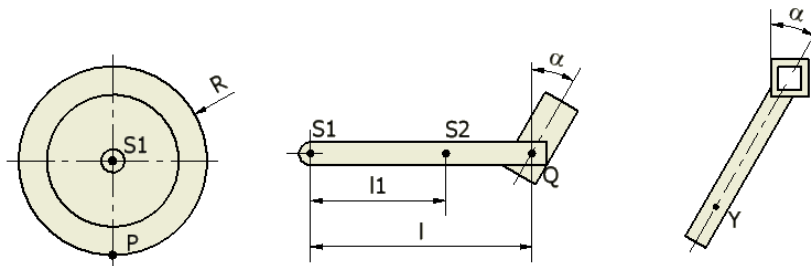
A modellt az alábbi ábrákon láthatjuk:



2. ábra: A mechanikai modell vázlatja



3. ábra: Az alkotó testek és a kapcsolatokat leíró koordináták, paraméterek



4. ábra: Az alkatrészek paramétereit és a nevezetes pontok

A modellben csak a (T1) és (T2) testeket tekintjük tömeggel rendelkezőnek, a (T3) és (T4) testek tömegét elhanyagoljuk, ezek csak a járművel való kapcsolat leírásához szükségesek. Az eddig összefoglaltakat, a testeket, változókat és a modell egyéb összetevőit a következő pontban precízebben definiáljuk. Érdemes minden pontot összevetni az ábrával.

1.2.2. A modell definíciója

1. A modell öt merev testből (T0-T4) áll. A (T0) test talajt, a (T1) test a kereket, a (T2) test pedig a vonórudat modellezi. A (T3) és (T4) testek a királycsapot és jármű többi részével való kinematikai kapcsolatot helyettesítik.
2. A testekhez Descartes-féle koordináta-rendszereket illesztünk. A (3) ábra szerinti kiindulási pozícióban a merev testekhez kötött lokális koordináta-rendszerek megfelelő tengelyei párhuzamosak egymással, és az ott jelölt irányokban helyezkednek el.
3. (K1) kényszer: A (T4) test csúszka kényszerrel van (T0)-hoz kötve, a megengedett elmozdulás y irányú. A csúszka irányában történő elmozdulást q -val jelöljük.
4. (K2) q irányban a (T4) test elmozdulásának sebessége v .
5. (K3) kényszer: A (T3) test csúszka kényszerrel van (T4)-hez kötve, a megengedett elmozdulás z irányú, mértéke az u koordinátával adott.
6. (K4) kényszer: A (T2) test hengerdugattyú kényszerrel van a (T3) testhez kötve, a kényszer tengelyének irányvektora az xy -síkban van, és az x tengellyel α szöget zár be. A csatlakozást meghatározó pontot a (T2) testen Q -val, a (T3) testen Y -nal jelöljük, az ábrán látható helyzetben a két pont egybeesik. A hengerdugattyú lineáris elmozdulását a w , elfordulását a γ koordinátával jelöljük.
7. (K5) kényszer: A (T1) test csuklóval van a (T2) testhez rögzítve, a csukló tengelye z irányú. A csuklót meghatározó pontot mindkét testen S_1 -gyel jelöljük, ez a pont a (T2) testen lokális negatív y irányban l távolságra van a Q ponttól. A csuklónak

megfelelő elfordulást ϕ -vel jelöljük.

8. (K6) kényszer: A (T1) test koordináta-rendszerében adott $x^2 + y^2 = R^2$ egyenletű kör tiszta gördülést végez a (T0) test rendszerében felírt $x=0$ egyenletű síkon. A mindenkori érintési pontot P -vel jelöljük.
9. A (T0) test inerciarendszer.
10. A (T3) és (T4) testek tehetetlenségi paramétereit zérusnak tekintjük.
11. A (T1) test súlypontja S_1 , tömege m_1 , súlyponti tehetetlenségi nyomatéki mátrixa

saját koordináta-rendszerében $\Theta_1 = \begin{bmatrix} \Theta_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{x1} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{z1} \end{bmatrix}$

12. A (T2) test súlypontját S_2 -vel jelöljük, mely az S_1Q szakaszon, S_1 -től l_1 távolságra van. A test tömege m_2 , súlyponti tehetetlenségi nyomatéki mátrixa saját

koordináta-rendszerében $\Theta_2 = \begin{bmatrix} \Theta_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{z2} \end{bmatrix}$

13. A (T1) és (T2) testekre gravitáció hat, melynek térerőssége g , iránya pedig a (T0) rendszerben $-x$.
14. A (T3) és (T4) testek közötti u elmozdulást egy lineáris rugó és egy viszkózus csillapítás befolyásolja. A rugó merevsége s , a csillapítás nagysága b . A rugó $u=0$ esetben feszítetlen.

Bár szinte lehetetlen matematikailag kifogástalan modell-definíciót előállítani, mégis érdemes törekedni a minél pontosabb matematikai megalapozásra. Egy jól definiált modell már a megalkotásakor magában foglal minden információt, melyet a matematika deduktív módszereivel csak ki kell bontanunk. Bár a levezetéskor folyamatosan párhuzamba kell állítanunk a fizikai tartalmat a matematikai modellel, kedvező, ha ekkor a modell már minél teljesebben adott, és nem kell utólag pontosítani.

A modellben található paramétereket a lenti táblázatban foglaltuk össze. Értelmezési tartományuk általában a pozitív vagy nemnegatív valós számok halmaza. A királycsap α megdöntési szögét a

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

intervallumban értelmezzük. A vonórúd l hosszánál megengedünk negatív értékeket, ez azt jelenti, hogy a vonórúd a vontatás irányában előrefelé áll. Emiatt a sebességnél elég a

1. A mechanikai modell felállítása

pozitív értékeket vizsgálni, hiszen ha α , l és v értékét ellentettjére változtatjuk, a modell tükörképét kapjuk.

paraméter	Fizikai jelentés
R	a kerék sugara (gördülő kör sugara)
m_1	a kerék tömege
Θ_{x1}, Θ_{z1}	a kerék tehetetlenségi nyomatéki mátrixának elemei
l	a vonórúd hossza
l_1	a vonórúd és a kerék súlypontjainak távolsága
m_2	a vonórúd tömege
$\Theta_{x2}, \Theta_{y2}, \Theta_{z2}$	a vonórúd tehetetlenségi nyomatéki mátrixának elemei
α	a királycsap megdőntési szöge
s	a csap rugómerevsége (a (T3) és (T4) testek között)
b	a csap csillapítása (a (T3) és (T4) testek között)
g	gravitációs gyorsulás
v	a rendszer ((T4) test) vontatási sebessége

1. táblázat: A modellben használt paraméterek

A már bemutatott és az ábrán szereplő időfüggő geometriai jelentésű változókat az alábbi táblázat mutatja be:

q	a (T4) test elmozdulása a vontatás során
u	a (T3) és (T4) testek relatív elmozdulása az egyensúlyi helyzethez képest
w	a vonórúd lineáris elmozdulása a királycsap mentén
γ	a vonórúd elfordulása a királycsap körül
ϕ	a kerék szöghelyzete

A fenti változók nem függetlenek egymástól. A jármű elemei közötti kényszereket már figyelembe vettük a változók megválasztásakor, azonban a környezettel való kapcsolat újabb kényszereket eredményez, a vontatás, a talajjal való érintkezés és a gördülés kényszerfeltételeit. Ezek némelyike kinematikai kényszer, mely csak a sebességekre jelent megkötést. Emiatt modellünk anhonolom mechanikai rendszer, melynek jellemzője, hogy a geometriai pozíció megadása után a sebességállapot kevesebb változóval adható meg, mint amennyi a pozícióhoz szükséges. Dolgozatunkban erre a geometriai szabadságfok és a kinematikai szabadságfok terminológiát használjuk. A fogalmak bevezetését és jelentésüket az A függelékben találjuk.

Mivel a mozgásegyenlet felírásához az Appell-egyenletet fogjuk használni, szükségünk van a redundáns változók kiküszöbölésére. A következő pontban elérjük, hogy rendszerünket egy geometriai állapotot leíró általános koordinátákból és sebességállapotot leíró kvázi-sebességekből álló állapotvektorral írjuk le.

1.3. A változók számának csökkentése

Fentebb már említettük, de a (K2) és (K6) kényszereket még nem vettük figyelembe. Előbbit könnyen figyelembe megadhatjuk az alábbi egyenlettel:

$$\dot{q} = v \quad (1.1)$$

A (K6) kényszert, mely magában foglal egy érintési és gördülési feltételt, viszont lényegesen nehezebb matematikai formába önteni. Először definiálni kell a szükséges koordináta-rendszereket és a közöttük lévő kapcsolatokat.

1.3.1. A használt bázisok és transzformációk

A rendszerben két forgást jellemző koordinátát vezettünk be, a ϕ és γ változókat. Ezek hatását forgató mátrixokkal jellemezhetjük. Ha adott egy ortonormált bázis, és a forgatás tengelye valamelyik bázisvektorral párhuzamos, a transzformációs mátrixot az alábbi módon számíthatjuk az adott bázisban felírva:

$$\mathbf{T}(k, \lambda) := [t_{ij}(k, \lambda)] \quad (1.2)$$

A 3×3 -as mátrix elemeinek definíciója:

$$t_{ij}(k, \lambda) := \delta_{ij}(\cos \lambda + \delta_{ik}(1 - \cos \lambda)) - \epsilon_{ijk} \sin \lambda \quad (1.3)$$

A képletben $i, j, k \in \{1; 2; 3\}$, δ_{ij} a Kronecker-szimbólum, ϵ_{ijk} pedig a Levi-Civita tenzor. Az elvontnak tűnő formula nagyon is használható jelentést takar. Ha a (1.2) formulába k helyére a forgatási tengelyként használt koordináta-tengely indexét, λ helyére pedig a forgatásra használt változó nevét helyettesítjük, akkor megkapjuk a jól ismert forgató mátrixokat, anélkül, hogy a vektorok vetületeit vizsgálnánk. Nézzük az alkalmazást:

Legyen (B0) a talajhoz rögzített bázis, ahol x irány a talajra merőleges, y pedig a talaj síkjával párhuzamosan a vontatás irányába mutat. Ha az $\alpha=0$ eset állna fenn, a γ irányban történő forgatás (B0) bázisban az x tengely körül történne. Ezért definiáljuk az alábbi mátrixot:

$$\mathbf{T}_\gamma := \mathbf{T}(1, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Mivel azonban ferde tengely körül forgatunk, magát a transzformációt is el kell forgatnunk. Az α szöggel való elfordulást a következő segédmátrix adja:

$$\mathbf{T}_\alpha := \mathbf{T}(3, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

A ferde tengely körüli forgatás mátrixát a lineáris algebrából ismert összefüggéssel kapjuk:

$$\mathbf{T}_{\alpha\gamma} := \mathbf{T}_\alpha \mathbf{T}_\gamma \mathbf{T}_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \sin^2 \alpha (1 - \cos \gamma) & \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \gamma) & \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \gamma) & 1 - \cos^2 \alpha (1 - \cos \gamma) & -\cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Bár az α szöggel való forgatás nem takar valódi mechanikai forgást, érdemes a $\mathbf{T}_{\alpha\gamma}$ összetett transzformáció köztes bázisait is megneveznünk. Legyen a $\mathbf{T}(B_i, B_j)$ egy olyan transzformáció mátrixa a (B_i) bázisban felírva, mely annak bázisvektorait a (B_j) bázis megfelelő elemeibe képezi le. Ekkor a következő egyenletek definiálják a (B_1) - (B_3) bázisokat:

$$\mathbf{T}(B_0, B_1) = \mathbf{T}_\alpha$$

$$\mathbf{T}(B_1, B_2) = \mathbf{T}_\gamma$$

$$\mathbf{T}(B_2, B_3) = \mathbf{T}_\alpha^{-1}$$

A (B_3) bázis a vonórúdhoz van rögzítve, ebben a ϕ körüli forgás mátrixa a következőképp adódik:

$$\mathbf{T}_\phi := \mathbf{T}(3, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

A (B_4) bázis definíciója tehát a következő egyenletből adódik:

$$\mathbf{T}(B_3, B_4) = \mathbf{T}_\phi$$

A báziselemek közötti transzformációs mátrixszal egyszerűen felírható a bázistranszformáció mátrixa is. Jelölje $\tilde{\mathbf{T}}(B_i, B_j)$ azt a mátrixot, mely egy tetszőleges (B_i) bázisban felírt vektor mátrixát (B_j) bázisúvá alakítja át. Lineáris algebrából ismeretes az alábbi azonosság bármely két bázisra:

$$\tilde{\mathbf{T}}(B_i, B_j) = \mathbf{T}(B_j, B_i)$$

Mivel célunk a gördülőkényszer felírása, szükség lesz a kerék és a talaj P érintési pontja illetve az S_1 pont közötti vektorra. Mivel a $(K6)$ kényszer szerint egy kör gördül a $(T0)$ -beli

$x=0$ síkon, az érintési pont ezen kör pontjai között az, melynek a (B0) bázisban mérve legkisebb az x koordinátája.

Ehhez először fel kell írunk a gördülő kör paraméteres vektoregyenletét a (B3) bázisban:

$$\mathbf{r}_{kör}(\epsilon, (B3)) = \begin{bmatrix} R \cos \epsilon \\ R \sin \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}; \epsilon \in [0; 2\pi) \quad (1.8)$$

Ezt a vektort a $\mathbf{T}_{\alpha\gamma}$ mátrixszal való szorzással vihetjük át a (B0) rendszerbe, és a kapott kifejezés x koordinátájának szélsőértékét kell vizsgálni ϵ változó függvényében. Ez azonban nehezen kezelhető kifejezéshez vezetne. Viszont könnyebben boldogulunk, ha a kerék x , majd y tengelyeire felírt Euler-szögeivel dolgozunk.

Vezessük be az alábbi segédmátrixokat:

$$\mathbf{T}_{\psi} := \mathbf{T}(1, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{T}_{\theta} := \mathbf{T}(2, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 1 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{T}_{\psi\theta} := \mathbf{T}_{\psi} \mathbf{T}_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi & -\sin \psi \cos \theta \\ -\cos \psi \sin \theta & \sin \psi & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

A két új bázist a következő egyenletek definiálják:

$$\mathbf{T}(B0, B5) = \mathbf{T}_{\psi}$$

$$\mathbf{T}(B5, B6) = \mathbf{T}_{\theta}$$

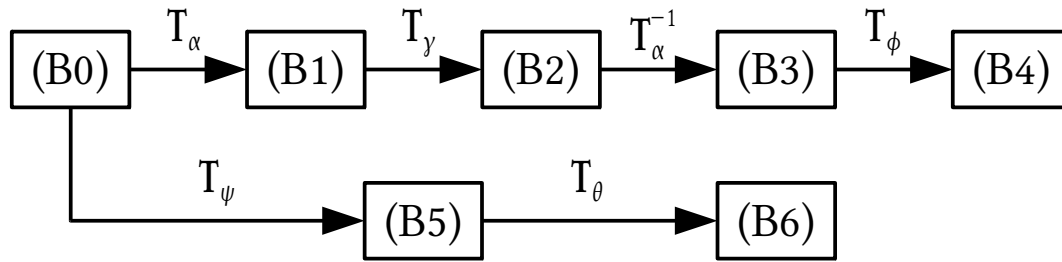
A bázisokat a következő oldalon lévő ábrán és táblázatba foglalják.

A változók fizikai jelentése a következő. A ψ szög jelenti a kerék precesszióját, vagyis esetünkben súlypontjának haladási irányát a vontatási irányhoz képest. A θ szög pedig a kerék forgástengelyre merőleges síkjának függőleges tengellyel bezárt szögét jelenti. A két új koordinátát úgy kényszerizzük be, hogy a (B0) bázis z tengelyét a kerék forgástengelyébe vigye át mind a (1.11), mind az (1.6) mátrix. Ez a következőt jelenti:

$$\mathbf{T}_{\psi\theta} \mathbf{k} = \mathbf{T}_{\alpha\gamma} \mathbf{k}$$

Kifejtve:

$$\begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \theta \\ \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.12)$$



5. ábra: A bázisok közötti kapcsolat

bázis	merev testhez rögzítve	leírás
(B0)	(T0),(T4),(T5)	a (T0) test saját koordináta-rendszere
(B1)	(T0),(T4),(T5)	segédrendszer, (B0) merev elforgatásából adódik
(B2)	(T2)	segédrendszer, (B3) merev elforgatásából adódik
(B3)	(T2)	a (T2) test saját koordináta-rendszere
(B4)	(T1)	a (T1) test saját koordináta-rendszere
(B5)	-	segédrendszer az Euler-szögek miatt
(B6)	(T2)	segédrendszer az Euler-szögek miatt

2. táblázat: A levezetéshez használt bázisok

A (1.12) egyenletrendszer megoldása, figyelembe véve, hogy a rendszer csak a $\theta \in (-\pi/2; \pi/2)$ intervallumban működőképes:

$$\begin{aligned}
 \sin \theta &= \sin \alpha \sin \gamma & (1.13) \\
 \cos \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \\
 \sin \psi &= \frac{\cos \alpha \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \\
 \cos \psi &= \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}
 \end{aligned}$$

Ezzel kifejeztük az Euler-szögeket a többi változó függvényeként. Nézzük az Euler-szögekkel való felírás hatékonyságát. Szorozzuk meg a (1.8) kifejezést a (1.11) mátrixszal és vizsgáljuk annak x koordinátáját. A második egyenletben kihasználjuk, hogy a kerék forgástengelye, így a köregyenletek is egybeesnek a (B3) és (B6) bázisok esetén.

$$\mathbf{i}^T \mathbf{r}_{k\ddot{o}r}(\epsilon, (B0)) = \mathbf{i}^T \mathbf{T}_{\psi\theta} \mathbf{r}_{k\ddot{o}r}(\epsilon, (B6)) = \mathbf{i}^T \mathbf{T}_{\psi\theta} \mathbf{r}_{k\ddot{o}r}(\epsilon, (B3)) = R \cos \theta \cos \epsilon$$

Ennek minimuma egyszerűen adódik, azt $\epsilon = -\pi$ esetén veszi fel. Ekkor:

$$\mathbf{r}_{kör}(-\pi, (B6)) = \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez éppen a minimális x koordinátájú pontba, vagyis a talajjal való érintkezési pontba mutat. Ennek segítségével nagyon egyszerű alakban felírható a következő helyvektor.

$$\mathbf{r}(P; S_1; (B6)) = R \mathbf{i} = R \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez átírva a (B0) bázisba:

$$\mathbf{r}(P; S_1; (B0)) = R \mathbf{T}_{\psi\theta} \mathbf{i} = R \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\psi \cos\theta \\ \cos\psi \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Majd felhasználva (1.13)-at:

$$\mathbf{r}(P; S_1; (B0)) = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\gamma}} \begin{bmatrix} 1 - \sin^2\alpha \sin^2\gamma \\ \sin\alpha \cos\alpha \sin^2\gamma \\ -\sin\alpha \sin\gamma \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Most már megvan a kerék középpontjából az érintési pontba mutató vektor, így felírhatjuk az érintő- és gördülő kényszereket.

1.3.2. A érintőkényszer figyelembe vétele

Az érintőkényszert könnyen megfogalmazhatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a (K1) és (K3) kényszereknek megfelelően Y pont x koordinátája állandó a (T0) rendszerben.

Ennek felírásához szükségünk lesz a S_1Q és QY vektorokra is.

$$\mathbf{r}(S_1; Q; (B3)) = l \mathbf{j} = l \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(S_1; Q; (B0)) = l \mathbf{T}_{\alpha\gamma} \mathbf{j} = l \begin{bmatrix} \sin\alpha \cos\alpha (1 - \cos\gamma) \\ 1 - \cos^2\alpha (1 - \cos\gamma) \\ \cos\alpha \sin\gamma \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{r}(Q; Y; (B1)) = -w \mathbf{i} = -w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(Q; Y; (B0)) = -w \mathbf{T}_\alpha \mathbf{i} = -w \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Most már felírhatjuk az érintőkényszert:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^T(\mathbf{r}(P; Y; (B0))) &= C \\ \mathbf{i}^T(\mathbf{r}(P; S_1; (B0)) + \mathbf{r}(S_1; Q; (B0)) + \mathbf{r}(Q; Y; (B0))) &= C \\ R\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} + l \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \gamma) - w \cos \alpha &= C \end{aligned} \quad (1.17)$$

A C konstans azért jelenik meg, mert w koordináta nullpontja nincs definiálva a modellben. Most ezt úgy szeretnénk határozottá tenni, hogy a $\gamma = 0$ helyzethez a $w = 0$ koordináta tartozzon. Ezeket beírva (1.17)-be adódik:

$$R = C$$

Így (1.17)-ből kifejezhető w :

$$w = -\frac{R}{\cos \alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \right) + l \sin \alpha (1 - \cos \gamma) \quad (1.18)$$

1.3.3. A gördülőkényszer figyelembe vétele

Az érintőkényszer megfogalmazása után írjuk fel a gördülőkényszert. A P és Q pontok között felírható az alábbi elemi összefüggés (bázisfüggetlen alakban):

$$\mathbf{v}(P) + \boldsymbol{\omega}((T1)) \times \mathbf{r}(P, S_1) + \boldsymbol{\omega}((T2)) \times \mathbf{r}(S_1, Q) = \mathbf{v}(Q) \quad (1.19)$$

A gördülés miatt a P pont sebessége zérus:

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{0}$$

Ennek kifejtéséhez érdemes a vektorokat a $(B1)$ bázisba transzformálni, hogy egyszerűbb alakokat kapjunk:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(P; S_1; (B1)) &= \mathbf{T}_\alpha^{-1} \mathbf{r}(P; S_1; (B0)) = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos^2 \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma \cos \gamma \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}(S_1; Q; (B1)) &= \mathbf{T}_\alpha^{-1} \mathbf{r}(S_1; Q; (B0)) = l \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \sin \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A Q pont sebességét egyszerűen felírhatjuk:

$$\mathbf{v}(Q, (B0)) = v \mathbf{j} + \dot{u} \mathbf{k} + \dot{w} \mathbf{T}_\alpha \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \dot{w} \cos \alpha \\ v + \dot{w} \sin \alpha \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(Q, (B1)) = \mathbf{T}_\alpha^{-1} \mathbf{v}(Q, (B0)) = \begin{bmatrix} \dot{w} + v \sin \alpha \\ v \cos \alpha \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

Nézzük a szögsebességeket a lokális rendszerekben. A harmadik paraméter a vonatkoztatási rendszert jelöli, ha hiányzik, akkor az a $(T0)$ inerciarendszert jelenti.

$$\boldsymbol{\omega}((T1); (B3); (T2)) = \dot{\phi} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}((T2); (B1)) = \dot{\gamma} \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}((T1); (B1)) = \mathbf{T}_\gamma \mathbf{T}_\alpha^{-1} \boldsymbol{\omega}((T1); (B3); (T2)) + \boldsymbol{\omega}((T2); (B1)) = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ -\dot{\phi} \sin \gamma \\ \dot{\phi} \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Most már minden vektorunk adott a $(B1)$ bázisban, helyettesítsünk vissza az (1.19) egyenletbe. Így kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} R \dot{\phi} \\ \left(\frac{\sin \alpha \sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} R - \cos \alpha \sin \gamma l \right) \dot{\gamma} + \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} R \dot{\phi} \\ \left(\frac{-\sin \alpha \cos^2 \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} R + \cos \alpha \cos \gamma l \right) \dot{\gamma} + \frac{\cos \alpha \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} R \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{w} + v \sin \alpha \\ v \cos \alpha \\ \dot{u} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Mivel a gördülőkényszerhez hozzátartozik a (1.17) érintőkényszer, annak deriválásából már kaphatunk egy kinematikai kényszert is. Így az (1.20) egyenletek közül csak kettő független.

A második egyenletből kifejezhető $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{v}{R} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma} + \left(\frac{l}{R} \tan \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} - \tan \alpha \sin \gamma \right) \dot{\gamma} \quad (1.21)$$

Ezt visszaírva a harmadik egyenletbe, kapjuk:

$$\dot{u} = v \cos \alpha \tan \gamma + \left(l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - R \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right) \dot{\gamma} \quad (1.22)$$

1.3.4. Általános koordináták és kvázisebességek

Most, hogy megvannak a hiányzó kényszeregyenletek, válasszunk egymástól független változókat. A geometriai térben általános koordinátákat kell keresnünk. Öt változónk volt, azonban (1.18) segítségével w eliminálható. Így az általános koordináta-vektorunk négy dimenziós lesz:

$$\mathbf{q}^T := [u \quad \phi \quad q \quad \gamma] \quad (1.23)$$

A sebességtér azonban kevesebb koordinátával is leírható. Az általános koordináták deriváltjai $\dot{\gamma}$ kivételével kifejezhetők a (1.1), (1.21) és (1.22) kinematikai kényszerek segítségével. Így egyetlen kvázisebességet kell választanunk. Az egyszerűség kedvéért legyen ez

$$\omega := \dot{\gamma} \quad (1.24)$$

Így a sebességtér az általános koordinátavektoron kívül egy csupán egydimenziós kvázisebesség-vektor határozza meg:

$$\tilde{\mathbf{q}}^T := [\omega] \quad (1.25)$$

Vagyis a rendszernek geometriai szempontból négy, kinematikai szempontból egy szabadságfoka van.

Egy öt változóból álló vektort alkothatunk:

$$\hat{\mathbf{x}}^T := [u \quad \phi \quad q \quad \gamma \quad \omega]$$

Ezt a vektort állapotvektornak nevezhetjük, hiszen az öt változó segítségével megadható a mechanikai rendszer valamennyi pontjának pozíciója és gyorsulása, vagyis a rendszer állapota. A második fejezet célja az, hogy felírjuk ezen állapotter differenciálegyenletét. Előbb azonban még érdemes csökkenteni paramétereink számát.

1.3.5. Dimenziótlan változók és paraméterek bevezetése

A dimenziótlanítás alkalmas használatával úgy csökkenthetjük paramétereink számát, hogy közben nem veszítjük el azok fizikai jelentését. Egy fizikai feladatban a paraméterek számát dimenziótlanítással annyival csökkenthetjük, amennyi az alappértékegységek száma. Esetünkben ez a szám három, és három mértékegység szempontjából lineárisan független alapparamétert kell választanunk. Legyen ez a kerék R sugara, a kerék m_1 tömege és a g gravitációs konstans. Ekkor definiálhatjuk az alábbi dimenziótlan paramétereket:

$$p_l := \frac{l}{R}; p_{l1} := \frac{l_1}{l} \quad (1.26)$$

$$p_m := \frac{m_2}{m_1}; p_{x1} := \frac{\Theta_{x1}}{m_1 R^2}; p_{z1} := \frac{\Theta_{z1}}{m_1 R^2}; p_{x2} := \frac{\Theta_{x2}}{m_2 l^2}; p_{y2} := \frac{\Theta_{y2}}{m_2 l^2}$$

$$K := \frac{sR}{m_1 g}; B := \frac{b}{m_1} \sqrt{\frac{R}{g}}; V := \frac{v}{\sqrt{gR}}$$

Ahhoz, hogy a paraméterek száma valóban csökkenjen, a változókat is dimenziótlanítani kell. Az idő dimenziótlanításához a gravitációs térerősséget és a sugarat használjuk. Legyen az új független változó:

$$\tau := t \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (1.27)$$

Ekkor egy tetszőleges X függő változó dimenziótlan idő szerinti deriváltját vesszővel jelöljük:

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial \tau} \sqrt{\frac{g}{R}} = \dot{X} \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (1.28)$$

Ekkor az új függő változóink:

$$\beta := \frac{u}{R} \quad (1.29)$$

$$\xi := \frac{q}{R}$$

$$\sigma = \dot{\gamma} = \omega \sqrt{\frac{R}{g}}$$

A két szög jellegű változó már eleve dimenzió nélküli. Megalkothatjuk a dimenziótlan

állapotvektort:

$$\mathbf{x}^T = [\beta \quad \phi \quad \xi \quad \gamma \quad \sigma] \quad (1.30)$$

A következő fejezetekben felírjuk a rendszer differenciálegyenletét majd a megoldások stabilitását fogjuk vizsgálni. Először megnézzük, mi történik, ha a rugalmasságot elhanyagoljuk, majd a teljes, rugalmas-csillapított modellel fogunk foglalkozni.

Bár a mozgásegyenleteket a hagyományos változókkal írjuk fel, arra törekszünk majd, hogy a dimenzió nélküli változókat behelyettesíthessük. Ekkor kevesebb paraméter hatását kell figyelnünk.

2. A rugalmasság nélküli modell mozgásegyenlete és stabilitása

Már említettük, hogy ha a királycsap ferdeségének hatását vizsgáljuk, érdemes minél egyszerűbb modellt alkotnunk. Ebben a fejezetben rövid kitérőt teszünk egy olyan modellel, mely nem alkalmas a shimmy-jelenség vizsgálatára, azonban már megfigyelhető rajta a csap ferdeségének bizonyos hatásai.

2.1. A rugalmasság nélküli modell megalkotása

Az első fejezetben bemutatott modelltől akkor tudjuk a legegyszerűbben elhanyagolni a rugalmasságot, ha hozzáveszünk a modell definíciójához egy további kényszert:

$$u=0 \quad (2.1)$$

Ezzel lényegében egyetlen merev testté kapcsoljuk össze a (T3) és a (T4) testeket, a királycsap kettéosztott szerepe megszűnik. A (2.1) kényszeregyenlet deriváltja:

$$\dot{u}=0$$

Ha ezt beírjuk a (1.22) egyenletbe, közvetlenül kifejezhető $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = \frac{-\frac{v}{R} \cos \alpha \tan \gamma}{\frac{l \cos \alpha}{R \cos \gamma} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}} \quad (2.2)$$

Visszahelyettesítve a (1.21) egyenletből pedig kifejezhető $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{v}{R} \left(\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma} - \frac{\left(\frac{l}{R} \tan \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} - \tan \alpha \sin \gamma \right) \cos \alpha \tan \gamma}{\frac{l \cos \alpha}{R \cos \gamma} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}} \right) \quad (2.3)$$

Látható, hogy a sebességtér teljesen meghatározott az általános koordináták által, így kvázisebességet nem is kell bevezetnünk. A rendszernek geometriai szempontból három, kinematikai szempontból nulla szabadságfoka van.

Az állapotvektor így egyben az általános koordináta-vektor. Az előző fejezetbeli

dimenziótlánítás után:

$$\dot{\mathbf{x}}^T := [\dot{\phi} \quad \dot{\xi} \quad \dot{\gamma}]$$

Viszont ezen változók deriváltjait éppen a (2.2), (2.3) és (1.1) egyenletek adják meg. Így a differenciálegyenlethez nem szükség felírunk a mozgásegyenletet, a rendszer kinematikailag teljesen határozott.

Az első fejezetben alkalmazott jelölésekkel felírhatjuk a dimenziótlan egyenletrendszert:

$$\dot{\phi} = V \left(\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma} - \frac{(p_l \tan \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} - \tan \alpha \sin \gamma) \cos \alpha \tan \gamma}{p_l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}} \right) \quad (2.4)$$

$$\dot{\xi} = V \quad (2.5)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{-V \cos \alpha \tan \gamma}{p_l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}} \quad (2.6)$$

Látható, hogy valamennyi általános koordinátára kaptunk egy elsőrendű differenciálegyenletet. A fenti három egyenlet, melyben csupán két geometriai paraméter (α és p_l), valamint a dimenziótlan sebesség szerepel, determinálja a rendszer mozgását.

2.2. Az egyensúlyi megoldás stabilitása

Mivel az egyenletek jobb oldalán csak a γ változó szerepel, a (2.6) egyenlet lecsatolható a többiről. Ezen egyenletnek triviális egyensúlyi megoldása a $\gamma_1 = 0$ fixpont. Ezt visszaírva az egyenletekbe kapjuk:

$$\dot{\phi} = V \quad (2.7)$$

$$\dot{\xi} = V$$

$$\dot{\gamma} = 0$$

Vagyis a teljes állapot térnek nem lesz itt egyensúlyi helyzete, csupán egyensúlyi mozgása. Ez nem meglepő, hiszen a kerék folyamatosan forog és a jármű halad előre.

Linearizáljuk a (2.6) egyenletet a $\gamma(t) = 0$ megoldás környezetében:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= V & (2.8) \\ \dot{\xi} &= V \\ \dot{\gamma} &= -\frac{V}{p_l - \tan \alpha} \gamma \end{aligned}$$

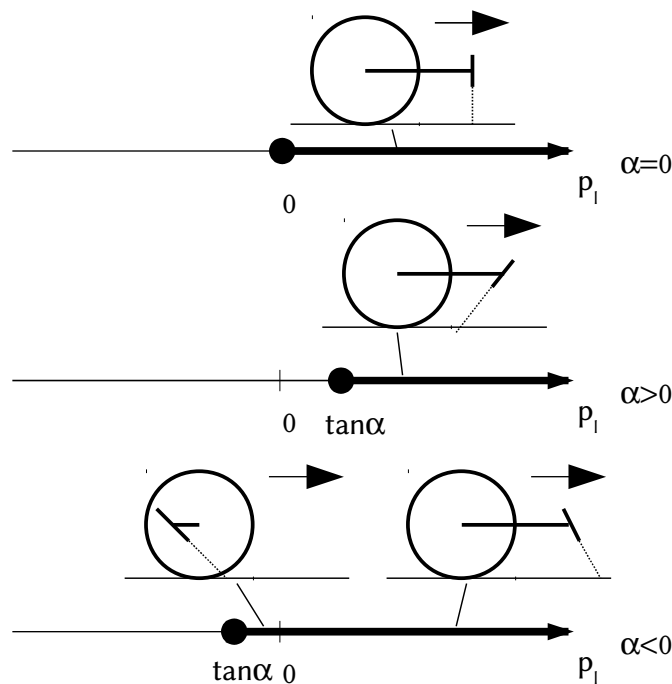
Az első két egyenlet lineáris közelítésben konstans. Ezért elég a harmadik egyenlet stabilitását vizsgálni. Ezzel egy egyszerű egytárolós rendszert kaptunk. Mivel a vontatási sebesség pozitív, az aszimptotikus stabilitás feltétele egyszerű:

$$p_l = \frac{l}{R} > \tan \alpha \quad (2.9)$$

Vagyis a vonórúd dimenziótlan hosszának minimuma van, és ez a minimum a megdöntési szögtől függ. Függőleges csap esetén a feltétel egyszerűen annyi lenne, hogy l legyen pozitív, vagyis a haladási iránnyal ellenkező irányban álljon a vonórúd.

Ha az α megdöntési szög pozitív, a stabil tartomány csökken, nem lehet akármilyen rövidre választani a vonórudat. Negatív szög esetén azonban a stabilis tartomány növekszik, és olyan esetben is lehetővé válik a stabilis mozgás, amikor a vonórúd a vontatás irányában előre felé áll, mint a motorkerékpár első kereke esetén.

A stabilitás feltételének egyszerű geometriai jelentése van, a rúd egyensúlyi helyzetében a királycsap tengelyének talajjal való metszéspontjának haladási irányban előrébb kell lennie, mint a kerék érintési pontja. Ezt mutatja be a következő ábra:



6. ábra: A stabilitás feltételének geometriai jelentése

A modellből két fontos következtetést kell levonnunk. Egyrészt már mutatja a királycsap ferdeségének hatásait, hiszen az befolyással van a rendszer stabilitására. Másrészt egy egytárolós rendszert kaptunk, ami csak statikus stabilitásvesztést képes produkálni, és nem jelenhetnek meg benne rezgések. Ezért a modell alkalmatlan a shimmy leírására. Mindazonáltal a merev modell jó viszonyítási alapot jelent, mielőtt nekilátunk a rugalmas modell vizsgálatának.

3. A rugalmas modell mozgásegyenlete

A mozgásegyenlet felírásánál Newton II. axiómáját használjuk. A dinamika alaptörvényének azonban számos ekvivalens átfogalmazása ismert, mint például a Lagrange-egyenlet vagy a Routh-Voss egyenlet. Ezen módszerek többek között abban különböznek, hogy milyen jellegű kényszereket képesek kezelni, és lehet-e a kényszereknek segítségével változókat eliminálni.

Már előrevetítettük, hogy az Appell-egyenletet fogjuk használni. Ennek előnye, hogy mind a geometriai, mint a kinematikai kényszereket figyelembe lehet venni a differenciálegyenlet felírásakor és nem kell algebrai egyenleteket csatolnunk a differenciálegyenlethez. Ráadásul az Appell-egyenlet rögtön elsőrendű differenciálegyenletet ad. A 1.3.4. pontban lévő \mathbf{x} állapotvektort úgy határoztuk meg, hogy használhassuk az Appell-egyenlet változójaként. Ekkor az egyenletet az alábbi alakban keressük.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

Itt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^5$, mely a paraméterektől is függ.

3.1. A kinematikai egyenletek

Maga az Appell-egyenlet csak a newtoni axiómát tartalmazó egyenlet, a kinematikai kényszerekből és a kvázisebességek definíciójából újabb egyenleteket kapunk. Ezeket már meghatároztuk az 1.3. pontban, csak össze kell gyűjtenünk őket.

Vegyük az (1.1) (1.21), (1.22) és (1.24) egyenleteket. Az első háromból (1.24) segítségével eliminálhatjuk γ deriváltját. Így az alábbi négy skaláregyenletet kapjuk:

$$\dot{\phi} = \frac{v}{R} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma} + \left(\frac{l}{R} \tan \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} - \tan \alpha \sin \gamma \right) \omega \quad (3.2)$$

$$\dot{u} = v \cos \alpha \tan \gamma + \left(l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - R \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right) \omega$$

$$\dot{q} = v$$

$$\dot{\gamma} = \omega$$

Ezzel az öt skaláregyenletből négyet meg is kaptunk. A kinematikai kényszerek tehát meghatározzák az állapotter három dimenziójának viselkedését, a kvázisebesség-definíció további egyet. Így a valódi mozgásegyenlet egy dimenziós lehet. Ezt fogjuk felírni Appell-egyenlettel. Az Appell-egyenlet levezetését és elméleti hátterét a [8] irodalomban találjuk.

3.2. A mozgásegyenletet levezetése Appell-egyenlettel

Már csak egy skaláregyenlet felírása van hátra, de ehhez még sok algebrai számítást kell végeznünk.

Ahogy a Routh-Voss egyenlet a mozgási energiát, az Appell-egyenlet a gyorsulási energiát vagy Appell-függvényt alkalmazza a rendszer állapotfüggvényeként. A módszer hátránya, hogy a gyorsulási energia felírása körülményesebb a mozgási energiánál. Ezt már a definícióban is láthatjuk.

Az anyagi pont gyorsulási energiája:

$$S = \frac{1}{2} m a^2 \quad (3.3)$$

Ugyanez merev testre integrálással határozható meg, melyet itt nem részletezünk:

$$S = \frac{1}{2} m a_s^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\Theta}_s \boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\omega})^T \boldsymbol{\Theta}_s \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \omega^2 \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\Theta}_s \boldsymbol{\omega} \quad (3.4)$$

Utóbbi kifejezésben m tömegű és $\boldsymbol{\Theta}_s$ súlyponti tehetetlenségi mátrixú merev testről beszélünk, ahol \mathbf{a}_s a test súlypontjának gyorsulását, $\boldsymbol{\omega}$ a test szögsebességét, $\boldsymbol{\varepsilon}$ pedig a test szöggyorsulását jelöli.

Ha figyelembe vesszük a geometriai és kinematikai kényszereket, a gyorsulási energia általános esetben az időtől, az általános koordinátáktól, a kvázisebességektől és utóbbiak deriváltjaitól függhet:

$$S = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) \quad (3.5)$$

Az Appell-egyenlet ebből:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = \Pi_i \quad (3.6)$$

Bal oldalt az Appell-függvény kvázigyorsulások szerinti deriváltjai vannak, jobb oldalt pedig a kvázierők szerepelnek, melyek a valódi erők transzformáltjai a kvázisebességek terébe. Esetünkben egyetlen Appell-egyenlet lesz, hiszen csak egy kvázisebességünk van. Lássuk, hogyan kapjuk ezt meg.

3.2.1. Az Appell-függvény felírása

Az Appell-függvény (3.4) felírásában négy tag szerepel. A hosszadalmasság miatt ezeket az $S_i((T_j))$ módon fogjuk jelölni, ami a (T_j) test Appell-függvényének i -edik tagját jelenti. Például (a bázisjelölések mellőzésével):

$$S_2((T1)) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}((T1))^T \boldsymbol{\Theta}((T1))_s \boldsymbol{\varepsilon}((T1))$$

A következő levezetésben $f(x_1; x_2; \dots; x_k)$ egy olyan általános kifejezést jelöl, mely csak a paraméterlistán megadott változóktól függhet.

Az Appell-függvényhez szükségünk van a testek szögsebességeire és szöggyorsulásaira.

A szögsebességek már ismertek:

$$\boldsymbol{\omega}((T1); (B1)) = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ -\dot{\phi} \sin \gamma \\ \dot{\phi} \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}((T2); (B1)) = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A deriválást bármelyik bázisban elvégezhetjük, azonban ne feledjük, hogy ha az inerciarendszerhez képest változó bázisban deriválunk, akkor korrigálnunk kell a forgó bázis szögsebességével.

Kezdjük az első testtel. Mivel a tehetetlenségi nyomatéki mátrixban az első két elem megegyezik, ezért a mátrix nem változik, ha a $(B4)$ rendszerből a $(B3)$ -ba majd a $(B2)$ -be transzformáljuk. A vektorokat érdemes a $(B2)$ bázisba transzformálni, mert ott a tehetetlenségi mátrix egyszerű alakú, viszont a vektorok sem bonyolódnak el, mint $(B3)$ és $(B4)$ esetében.

$$\boldsymbol{\Theta}_s((T1); (B2)) = \boldsymbol{\Theta}_s((T1); (B4)) = \begin{bmatrix} \Theta_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{x1} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{z1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\omega}((T1); (B2)) = \mathbf{T}_y^{-1} \boldsymbol{\omega}((T1); (B1)) = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A deriváláskor figyeljünk a forgó bázisra:

$$\boldsymbol{\varepsilon}((T1);(B2)) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}((T1);(B2)) + \boldsymbol{\omega}((T2);(B2)) \times \boldsymbol{\omega}((T1);(B2)) = \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ -\dot{\phi} \dot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Ezzel ki is fejezhetünk az Appell-függvény négy tagja közül hármat a koordinátákkal és deriváltjaikkal. Az Appell-függvény skaláris mennyiség, ezért bármelyik bázisban felírhatjuk, feltéve, hogy inerciarendszerben vagyunk. A számítást nem részletezzük, de csupán a (3.7)-(3.9) kifejezéseknek a (3.4) egyenletbe való helyettesítéséről van szó.

$$S_2((T1)) = \frac{1}{2} \Theta_{x1} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{z1} \dot{\phi}^2 \quad (3.10)$$

$$S_3((T1)) = (\Theta_{z1} - \Theta_{x1}) \dot{\phi}^2 \dot{y}^2$$

$$S_4((T1)) = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + \dot{y}^2) (\Theta_{x1} \dot{y}^2 + \Theta_{z1} \dot{\phi}^2)$$

Most nézzük a másik testet. Itt érdemes a (B3) rendszerbe transzformálnunk a vektorokat:

$$\Theta_s((T2);(B3)) = \begin{bmatrix} \Theta_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{x1} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{z1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}((T2);(B1)) = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}((T2);(B1)) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}((T2);(B1)) = \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Itt nem volt baj a deriválással, hiszen (B1) bázis inerciarendszerhez kötött. Térjünk most át (B3) bázisra:

$$\boldsymbol{\omega}((T2);(B3)) = \mathbf{T}_\alpha \mathbf{T}_y^{-1} \boldsymbol{\omega}((T2);(B1)) = \begin{bmatrix} \dot{y} \cos \alpha \\ \dot{y} \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}((T_2);(B_3)) = \mathbf{T}_\alpha \mathbf{T}_y^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}((T_2);(B_1)) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} \cos \alpha \\ \ddot{\mathbf{y}} \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

A második test Appell-függvényének három tagja:

$$S_2((T_2)) = \frac{1}{2} (\Theta_{x_2} \cos^2 \alpha + \Theta_{y_2} \sin^2 \alpha) \ddot{\mathbf{y}}^2 \quad (3.11)$$

$$S_3((T_2)) \equiv 0$$

$$S_4((T_2)) = \frac{1}{2} (\Theta_{x_2} \cos^2 \alpha + \Theta_{y_2} \sin^2 \alpha) \dot{\mathbf{y}}^4$$

Itt az ideje, hogy a (3.2) összefüggéseket figyelembe vegyük a fenti tagoknál. A tömörség érdekében ϕ deriváltjait most még nem helyettesítjük be, csak függvényként kezeljük $\dot{\phi} = \dot{\phi}(\boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\omega})$ és $\ddot{\phi} = \ddot{\phi}(\boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\omega}; \dot{\boldsymbol{\omega}})$ értelemben. Tehát a fenti kifejezések:

$$S_2((T_1)) = \frac{1}{2} \Theta_{x_1} \dot{\boldsymbol{\omega}}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{z_1} \dot{\phi}^2 \quad (3.12)$$

$$S_3((T_1)) = (\Theta_{z_1} - \Theta_{x_1}) \dot{\phi}^2 \boldsymbol{\omega}^2 = f(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$$

$$S_4((T_1)) = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + \boldsymbol{\omega}^2) (\Theta_{x_1} \boldsymbol{\omega}^2 + \Theta_{z_1} \dot{\phi}^2) = f(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$$

$$S_2((T_2)) = \frac{1}{2} (\Theta_{x_2} \cos^2 \alpha + \Theta_{y_2} \sin^2 \alpha) \dot{\boldsymbol{\omega}}^2$$

$$S_3((T_2)) \equiv 0$$

$$S_4((T_2)) = \frac{1}{2} (\Theta_{x_2} \cos^2 \alpha + \Theta_{y_2} \sin^2 \alpha) \boldsymbol{\omega}^4 = f(\boldsymbol{\omega})$$

Látható, hogy az S_3 és S_4 tagok el fognak tűnni a parciális deriváláskor, hiszen nem tartalmazzák a kvázisebesség deriváltját, vagyis a kvázigyorsulást.

Még az S_1 tagokra lesz szükségünk. Ehhez számítsuk ki a testek súlypontjának gyorsulását. Most használjuk a (B2) bázist. Kezdjük a keréssel:

$$\mathbf{v}(S_1) = \boldsymbol{\omega}((T_1)) \times \mathbf{r}(P, S_1) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{r}(P; S_1; (B2)) = \mathbf{T}_y^{-1} \mathbf{r}(P; S_1; (B1)) = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

A szögsebességet már kiszámítottuk (3.8)-ban. Ezeket beírva (3.13)-ba:

$$\mathbf{v}(S_1; (B2)) = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \sin \alpha \cos \gamma \\ \dot{\phi} \cos \alpha \\ -\dot{\gamma} \sin \alpha \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Végezzük el a deriválást:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(S_1; (B2)) &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}(S_1; (B2)) + \boldsymbol{\omega}((T1); (B2)) \times \mathbf{v}(S_1; (B2)) = \\ &= \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \sin \alpha \cos \gamma \\ \ddot{\phi} \cos \alpha + \dot{\gamma}^2 \sin \alpha \cos \gamma \\ -\ddot{\gamma} \sin \alpha \cos \gamma + \dot{\phi} \dot{\gamma} \cos \alpha \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}^3} \begin{bmatrix} -\dot{\phi} \dot{\gamma} \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin \gamma \cos \gamma \\ \dot{\phi} \dot{\gamma} \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \gamma \\ \dot{\gamma}^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Így az Appell-függvény első tagja, figyelembe véve a kinematikai egyenleteket: (3.15)

$$\begin{aligned} S_1((T1)) &= \frac{1}{2} m_1 R^2 \left(\ddot{\phi}^2 + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \gamma}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} \dot{\omega}^2 \right) + m_1 R^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos \gamma}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} (\ddot{\phi} \omega^2 - \dot{\omega} \dot{\phi} \omega) + \\ &+ m_1 R^2 \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin \gamma \cos \gamma}{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma)^2} \dot{\omega} \omega^2 + f(\gamma, \omega) \end{aligned}$$

Nézzük a másik testet. Hogy formuláink ne növekedjenek túlságosan nagyra, a kocszi súlypontjának gyorsulását a kerékéből vezetjük le a sebesség átszámításával:

$$\mathbf{v}(S_2) = \mathbf{v}(S_2) + \boldsymbol{\omega}((T2)) \times \mathbf{r}(S_1, S_2) \quad (3.16)$$

Ismét a (B2) bázist használjuk:

$$\mathbf{r}(S_1; S_2; (B3)) = l_1 \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}(S_1; S_2; (B2)) = \mathbf{T}_\alpha^{-1} \mathbf{r}(S_1; S_2; (B3)) = \begin{bmatrix} l_1 \sin \alpha \\ l_1 \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}((T2); (B2)) = \mathbf{T}_\alpha^{-1} \boldsymbol{\omega}((T2); (B3)) = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Béírva ezeket (3.16)-ba:

$$\mathbf{v}(S_2; (B2)) = \mathbf{v}(S_1; (B2)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} l_1 \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Deriválva:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(S_2; (B2)) &= \mathbf{a}(S_1; (B2)) + \frac{d}{dt} \mathbf{v}(S_2; (B2)) + \boldsymbol{\omega}((T1); (B2)) \times \mathbf{v}(S_2; (B2)) = \\ &= \mathbf{a}(S_1; (B2)) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\gamma}^2 l_1 \cos \alpha \\ \dot{\gamma} l_1 \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Így az Appell-függvény első tagja sajnos még hosszadalmasabb, mint a kerék esetén:

$$\begin{aligned} S_1((T2)) &= [S_1((T1))]_{m_1=m_2} + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\omega}^2 - m_2 R l_1 \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} (\ddot{\phi} \omega^2 - \dot{\omega} \dot{\phi} \omega) - \\ &- m_2 R l_1 \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \dot{\omega}^2 + m_2 R l_1 \frac{\sin \alpha \cos^3 \alpha \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \dot{\omega} \omega^2 + f(\gamma, \omega) \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2.2. Az Appell-függvény deriválása

Még annyi feladatunk lenne hátra a parciális deriválások elvégzése előtt, visszaírni ϕ idő szerinti deriváltjait. Viszont érdemes ezeket a kifejezéseket külön deriválni parciálisan és csak azután visszaírni. Az egyszerűség kedvéért egyelőre csak formális kifejezésekkel dolgozunk:

$$\dot{\phi}(\gamma; \omega) = a(\gamma) + b(\gamma) \omega \quad (3.19)$$

3. A rugalmas modell mozgásegyenlete

$$a(\gamma) := \frac{v}{R} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma}$$

$$b(\gamma) := \frac{l}{R} \tan \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma} - \tan \alpha \sin \gamma$$

Ekkor:

$$\frac{\partial a(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{v}{R} \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial b(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{l}{R} \frac{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma (1 + \cos^2 \gamma)}{\cos^2 \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} - \tan \alpha \cos \gamma$$

Kis számítással igazolhatók az alábbi összefüggések:

$$\ddot{\phi}(\gamma; \omega; \dot{\omega}) = \frac{\partial a(\gamma)}{\partial \gamma} \omega + \frac{\partial b(\gamma)}{\partial \gamma} \omega^2 + b(\gamma) \dot{\omega}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\phi}^2}{\partial \dot{\omega}} = b^2(\gamma) \dot{\omega} + b(\gamma) \frac{\partial a(\gamma)}{\partial \gamma} \omega + b(\gamma) \frac{\partial b(\gamma)}{\partial \gamma} \omega^2$$

Az alábbi, Appell-függvényben két is helyen megjelenő tag meglepően leegyszerűsödik deriválás után:

$$\frac{\partial (\dot{\phi} \omega^2 - \dot{\omega} \phi \omega)}{\partial \dot{\omega}} = -a(\gamma) \omega$$

Most pedig írjuk fel az Appell-egyenlet bal oldalát. Az Appell-függvény formális alakja:

$$S(\gamma; \omega; \dot{\omega}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 S_j((Ti))$$

A parciális deriváltat a következő alakban keressük:

$$\frac{\partial S(\gamma; \omega; \dot{\omega})}{\partial \dot{\omega}} = A(\gamma) \dot{\omega} + B(\gamma) \omega^2 + C(\gamma) \omega \quad (3.21)$$

Definiáljuk az alábbi, tehetetlenségi jellemzőket tartalmazó dimenziótlán paramétercsoportokat:

$$M_1 := 1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{\Theta_{z1}}{m_1 R^2} = 1 + p_m + p_{z1} \quad (3.22)$$

$$M_2 := 1 + \frac{m_2}{m_1} = 1 + p_m$$

$$M_3 := \frac{m_2}{m_1} \frac{l}{R} \frac{l_1}{l} = p_m p_l p_{l1}$$

$$\begin{aligned} M_4 &:= \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{l}{R} \frac{l_1}{l} \right)^2 + \frac{\Theta_{x1}}{m_1 R^2} + \left(\frac{\Theta_{x2}}{m_2 l^2} \cos^2 \alpha + \frac{\Theta_{y2}}{m_2 l^2} \sin^2 \alpha \right) \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{l}{R} \right)^2 = \\ &= p_m p_l^2 p_{l1}^2 + p_{x1} + \left(p_{x2} \cos^2 \alpha + p_{y2} \sin^2 \alpha \right) p_m p_l^2 \end{aligned}$$

Ekkor a (3.21) egyes tagjai, a részletes számítás elhagyásával:

$$\frac{A(\gamma)}{m_1 R^2} = M_1 b^2(\gamma) + \left(M_2 \frac{\tan \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} - M_3 \right) \left(\frac{\cos \gamma \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right) + M_4 \quad (3.23)$$

$$\frac{B(\gamma)}{m_1 R^2} = M_1 b(\gamma) \frac{\partial b(\gamma)}{\partial \gamma} + \left(M_2 \frac{\tan \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} - M_3 \right) \left(\frac{-\sin \alpha \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}^3} \right)$$

$$\frac{C(\gamma)}{m_1 R^2} = M_1 b(\gamma) \frac{\partial a(\gamma)}{\partial \gamma} + \left(M_2 \frac{\tan \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} - M_3 \right) \left(\frac{-v \cos \alpha}{R \cos \gamma} \right)$$

3.2.3. A kvázierők felírása

Most írjuk fel az Appell-egyenlet jobb oldalát. A kvázierők kiszámításához felhasználjuk, hogy a kvázierővel és az aktív erőkkel felírt virtuális teljesítmény megegyezik:

$$\delta P = \sum_j \mathbf{F}_j^T \delta \mathbf{v}_j = Q \delta \omega \quad (3.24)$$

Írjuk fel az egyes aktív erőket és támadáspontjaik sebességét. Négy aktív erőt különböztethetünk meg. A két test súlypontjában a gravitációs erő hat, a királycsapnál pedig a rugóból és csillapításból származó erők.

A gravitációból származó erők a súlypontokban hatnak:

$$\mathbf{F}_1((B_0)) = -m_1 g \mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}_2((B_0)) = -m_2 g \mathbf{i}$$

3. A rugalmas modell mozgásegyenlete

Tegyük át a vektorokat a (B2) bázisba, mert ott sebességeink egyszerű alakúak.

$$\mathbf{F}_1((B2)) = \mathbf{T}_\alpha^{-1} \mathbf{T}_\gamma^{-1} \mathbf{F}_1((B0)) = -m_1 g \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \alpha \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Hasonlóan:

$$\mathbf{F}_2((B2)) = -m_2 g \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \alpha \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

A sebességeket (3.14) és (3.17) alapján behelyettesítve az alsó két erő virtuális teljesítményére adódik:

$$\begin{aligned} \delta P_1 &= m_1 g R \frac{\sin^2 \alpha \sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma)}} \delta \omega \\ \delta P_2 &= m_2 g \left(R \frac{\sin^2 \alpha \sin \gamma \cos \gamma}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma)}} - l_1 \sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma \right) \delta \omega \end{aligned}$$

A rugóerő a modeldefiníció alapján:

$$\mathbf{F}_3((B0)) = -s u \mathbf{k}$$

A rugó a (T3) testre hat, melynek sebessége a definíció 6. pontjában megadott Y pontban:

$$\mathbf{v}(Y, (B0)) = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ \dot{u} \end{bmatrix}$$

Felhasználva a (3.2.2) összefüggést:

$$\delta P_3 = -s u \left(l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - R \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right) \delta \omega$$

A viszkózus csillapítás:

$$\mathbf{F}_4((B0)) = -b \dot{u} \mathbf{k}$$

A támadáspont és így a támadáspont sebessége is megegyezik a rugóerőével. A virtuális teljesítmény:

$$\delta P_4 = -b \left(v \cos \alpha \tan \gamma \left(l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - R \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right) + \left(l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - R \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right)^2 \omega \right) \delta \omega$$

Ha a virtuális teljesítményeket összegezzük, akkor mivel (3.24) tetszőleges $\delta \omega$ esetén fennáll:

$$\begin{aligned} \Pi = & m_1 R^2 g \left(M_2 \frac{\tan \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} - M_3 \right) \sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma - \\ & - su \left(l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - R \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right) - \\ & - b \left(v \cos \alpha \tan \gamma \left(l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - R \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right) + \left(l \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - R \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right)^2 \omega \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2.4. Az Appell-egyenlet felírása

Így felírhatjuk az Appell-egyenletet:

$$\frac{\partial S}{\partial \omega} = \Pi \quad (3.28)$$

Ebből a (3.21) ismeretében kifejezhető a kvázisebesség deriváltja:

$$\dot{\omega} = \frac{\frac{-B(\gamma)}{m_1 R^2} \omega^2 - \frac{C(\gamma)}{m_1 R^2} \omega + \frac{Q}{m_1 R^2}}{\frac{A(\gamma)}{m_1 R^2}}$$

Ebbe behelyettesítjük (3.23) és (3.27) eredményeinket, és némi átrendezés után kapjuk az alábbi egyenletet: (3.29)

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & \frac{-1}{M_1 P_1^2(\gamma) \tan^2 \gamma (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma) - P_2(\gamma) \cos^2 \alpha \frac{\tan \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} + M_4} \cdot \\ & \cdot \left(\left(M_1 \tan \gamma \left(P_1^2(\gamma) (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma) + \frac{l}{R} P_1(\gamma) \tan^2 \gamma \cos^2 \alpha \right) + \right. \right. \\ & + P_2(\gamma) \left(\frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right) \left. \right) \omega^2 + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \gamma} \left(M_1 P_1(\gamma) \tan^2 \gamma + P_2(\gamma) \right) \frac{v \cos \gamma}{R} \omega + \\ & + \frac{g}{R} P_2(\gamma) \sin \alpha \cos \gamma \sin \gamma + \frac{s}{m_1 R} \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} P_1(\gamma) u + \\ & + \frac{b}{m_1 R} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \gamma} \left(\frac{v \cos \gamma}{R} P_1(\gamma) \tan \gamma + P_1^2(\gamma) \omega \right) \end{aligned}$$

A két formálisan szereplő függvény jelentése:

$$P_1(\gamma) := \frac{l}{R} \frac{\tan \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \quad (3.30)$$

$$P_2(\gamma) := M_3 - M_2 \frac{\tan \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}$$

Ezzel megkaptuk az ötödik egyenletet. A fenti jelölésekkel a kinematikai egyenletek:

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma} \left(\frac{v}{R} + P_1(\gamma) \sin \gamma \omega \right) \quad (3.31)$$

$$\dot{u} = R \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \left(\frac{v}{R} \sin \gamma + P_1(\gamma) \omega \right)$$

$$\dot{q} = v$$

$$\dot{y} = \omega$$

Mielőtt bármit is mondanánk az egyenletről, térjünk át a dimenziótlan mennyiségekre, hiszen hosszú távon ezekkel fogunk számolni.

3.3. Az egyenlet dimenziótlan alakja

Térjünk át most az 1.3.5. pontban definiált dimenziótlan változókra és paraméterekre. Ekkor kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma} (V + P_1(\gamma) \sin \gamma \sigma) \quad (3.32)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} (V \sin \gamma + P_1(\gamma) \sigma)$$

$$\dot{\xi} = V$$

$$\dot{y} = \sigma$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = & \frac{-1}{M_1 P_1^2(\gamma) \tan^2 \gamma (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma) - P_2(\gamma) \cos^2 \alpha \frac{\tan \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} + M_4} \cdot \\ & \cdot \left(\left(M_1 \tan \gamma (P_1^2(\gamma) (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma) + p_l P_1(\gamma) \tan^2 \gamma \cos^2 \alpha) + \right. \right. \\ & + P_2(\gamma) \left. \left(\frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}} \right) \right) \sigma^2 + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \gamma} (M_1 P_1(\gamma) \tan^2 \gamma + P_2(\gamma)) V \cos \gamma \sigma + \\ & + P_2(\gamma) \sin \alpha \cos \gamma \sin \gamma + K \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} P_1(\gamma) \beta + \\ & \left. + B \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \gamma} (V \cos \gamma P_1(\gamma) \tan \gamma + P_1^2(\gamma) \sigma) \right) \end{aligned}$$

Itt:

$$P_1(\gamma) := p_l - \frac{\tan \alpha \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}, \quad (3.33)$$

$P_2(\gamma)$ jelentése pedig nem változik.

Ezzel megkaptuk a (3.1)-ben keresett egyenletet. Vizsgáljuk az egyenlet struktúráját. Ha csak a függvényviszonyt jelöljük, az egyenlet az alábbi alakba írható:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\gamma, \sigma) \\ f_2(\gamma, \sigma) \\ \text{const} \\ f_4(\sigma) \\ f_5(\beta, \gamma, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

Először is fontos észrevennünk, hogy az idő explicit módon nem szerepel az egyenlet jobb oldalán, vagyis egyenletünk autonóm differenciálegyenlet. Azonban a függő változók közül sem szerepel mindegyik, hiányzik a ϕ és a ξ a jobb oldalról. Ebben semmi meglepő sincs, hiszen a kerék szöghelyzete vagy a jármű elmozdulásának pozíciója a modell jellege miatt nincs közvetlen hatással a koordináták megváltozására. Ezért ezeket a koordinátákat ciklikus, kiküszöbölhető koordinátáknak nevezzük. Ezt a helyzetet kihasználhatjuk arra, hogy két altérre bontjuk a fázisteret, csökkentve a probléma dimenzióinak számát.

Vezessük be az alábbi állapotvektorokat:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T &= [\sigma \quad \beta \quad \gamma] \\ \mathbf{z}^T &= [\phi \quad \xi] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ezek az eredeti \mathbf{x} állapottér altereit jelentik. Az egyenletet is kettébonthatjuk az alábbiak szerint:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) \quad (3.36)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}(\mathbf{y}) \quad (3.37)$$

A szétcsatolás előnye, hogy a (3.36) egyenlet megoldható a (3.37) ismerete nélkül is. A fizikai jelentés kézenfekvő, a \mathbf{z} változóinak nincs hatása \mathbf{y} megváltozására. Sőt, saját maga megváltozására sem. A (3.36) egyenlet megoldásának ismeretében a (3.37) megoldása integrálási feladattá egyszerűsödik. Ezzel a probléma vizsgálatát egy öt dimenziós fázistérből egy három dimenziós fázistérbe redukáljuk.

Azonban ez sem segít azon a problémán, hogy sem (3.32), sem a szétcsatolt egyenlet nem oldható meg analitikusan. Le kell mondanunk a modell analitikus módszerekkel történő teljes körű vizsgálatáról. A globális viselkedést numerikus szimulációval vizsgálhatjuk, melyről az utolsó fejezetben lesz szó.

Azonban az analitikus módszerekkel is kaphatunk részeredményeket. Az egyik ilyen lehetőség az egyensúlyi helyzetek körüli linearizált modell stabilitásának vizsgálata. Ez azért is alapvető, hiszen a shimmy is egy egyensúlyihoz közel álló viselkedés közben jelenik meg. Keressük meg tehát a fizikai tartalommal bíró egyensúlyi helyzetet és linearizáljuk körülötte az egyenletet. A téma háttérével kapcsolatban lásd: [6]

3.4. Az egyenlet linearizálása

Az állandó sebességgel való vontatás közben első ránézésre azt az állapotot tekintjük egyensúlynak, amikor a rúd szöghelyzete és szögsebessége zérus, valamint a királycsapnál lévő rugó feszítetlen. Nem véletlen, hogy éppen az \mathbf{y} fázistér koordinátáiról van szó, és ha ellenőrizzük, kiderül, hogy naiv elképzelésünk helyes, a (3.36) egyenletnek valóban fixpontja van az $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ pontban.

Helyettesítsük ezt be a (3.37) egyenletbe. Így a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ V \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Látható, hogy a \mathbf{z} állapotterben ez nem jelent egyensúlyt. Ez nem is meglepő, hiszen állandó sebességű vontatás közben sohasem lesz mindegyik koordináta nyugalomban. Viszont az egyenlet jobb oldala konstans, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ esetben a két ciklikus koordináta és így az egész rendszer egyensúlyi mozgást végez.

Matematikai szempontból ez azt jelenti, hogy egyensúlyi mozgásnál a rendszer állapota egy két dimenziós egyenes mentén mozog az öt dimenziós teljes állapotterben. Végezhetnénk egy olyan koordináta-transzformációt, hogy az állapotter origója az egyensúlyi mozgásnak

megfelelően mozogjon, így valódi egyensúlyi helyzetet kapnánk. Erre azonban most nincs szükség, ugyanis a (3.37) egyenlet az egyensúlyi mozgás körül linearizálva (3.38)-at adja vissza. Vagyis a (3.37) egyenlet jobb oldala lineáris közelítésben is konstans, vagyis a teljes rendszer lineáris stabilitásának elégséges feltétele lesz (3.36) stabilitása.

Mivel a linearizálást az $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ pont körül végezzük, írjuk fel először a (3.36) egyenletet mátrixos formában:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}(\gamma, \sigma) & b_{12}(\gamma) & b_{13}(\gamma) \\ b_{21}(\gamma) & 0 & b_{23}(\gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Tömörebben:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}(\gamma, \sigma) \mathbf{y} \quad (3.40)$$

A mátrix természetesen függ a változóktól, azonban nem mindegyiktől. A β változóra nézve az egyenlet eleve lineáris.

A (3.39) egyenletből egyszerűen megkaphatjuk a lineáris egyenletet. A linearizálás után az alábbi egyenletet várjuk:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y}, \quad (3.41)$$

ahol $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ konstans mátrix az állapotmátrix, és

$$\mathbf{A} := \lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow 0}} \mathbf{B}(\gamma, \sigma)$$

$$a_{ij} := \lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow 0}} b_{ij}$$

Így az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

A mátrix egyes elemei:

$$a_{11} = -\frac{V P_{20} \cos^2 \alpha + B P_{10}^2 \cos^2 \alpha}{M_4 - P_{20} \sin \alpha \cos \alpha} \quad (3.43)$$

$$a_{12} = -\frac{K P_{10} \cos \alpha}{M_4 - P_{20} \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$a_{13} = -\frac{P_{20} \sin \alpha \cos \alpha + B V P_{10} \cos^2 \alpha}{M_4 - P_{20} \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$a_{21} = P_{10} \cos \alpha$$

3. A rugalmas modell mozgásegyenlete

$$a_{23} = V \cos \alpha$$

Az új konstansok jelentése:

$$P_{10} := \lim_{\gamma \rightarrow 0} P_1(\gamma) = p_l - \tan \alpha \quad (3.44)$$

$$P_{20} := \lim_{\gamma \rightarrow 0} P_2(\gamma) = M_3 - M_2 \tan \alpha$$

Megkaptuk tehát a rendszer linearizált egyenletét.

Határozzuk meg a linearizált egyenletet abban az esetben, amikor a királycsap függőleges, vagyis $\alpha = 0$, hiszen a ferde csap hatását ehhez képest kívánjuk vizsgálni. Egyszerűen csak be kell írunk az $\alpha = 0$ értéket a (3.43) együtthatókba. Így kapjuk:

$$\hat{a}_{11} = -\frac{V M_3 + B p_l^2}{M_4} \quad (3.45)$$

$$\hat{a}_{12} = -\frac{K p_l}{M_4}$$

$$\hat{a}_{13} = -\frac{B V p_l}{M_4}$$

$$\hat{a}_{21} = p_l$$

$$\hat{a}_{23} = V$$

Most már adottak a linearizált egyenletek, így nekivághatunk a stabilitás vizsgálatának.

4. A rugalmas modell lineáris stabilitása

Azt fogjuk megvizsgálni, hogy az előző fejezetben leírt egyensúlyi állapot illetve egyensúlyi mozgás stabilis-e lineáris közelítésben. Ennek nagyon is lényeges mechanikai tartalma van, az a kérdés, hogy ha a vontatott kereket egy kis zavar éri, akkor ez a zavar lecsillapodva eltűnik, vagy egyre növekedve a jármű instabilitását okozza.

4.1. Paramétertér leszűkítése

Mivel nagyon sok paraméterünk van, a linearizálás előtt rögzítsünk le néhányat közülük. Ehhez egy elfogadható megkötést teszünk a két merev test geometriájára:

Legyen a kerék egy homogén sűrűségű korong, ekkor:

$$p_{x1} = \frac{1}{4}; \quad p_{z1} = \frac{1}{2} \quad (4.1)$$

A vonórudat pedig modellezzük a két végénél rögzített vékony, homogén rúddal, ekkor:

$$p_{x2} = \frac{1}{12}; \quad p_{y2} = 0; \quad p_{l1} = \frac{1}{2} \quad (4.2)$$

Így a dimenziótlan tehetetlenségi paramétercsoportok módosulnak:

$$M_1 = \frac{3}{2} + p_m \quad (4.3)$$

$$M_2 = 1 + p_m$$

$$M_3 = \frac{1}{2} p_m p_l$$

$$M_4 = \frac{1}{4} p_m p_l^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cos^2 \alpha p_m p_l^2$$

4.2. A karakterisztikus egyenlet felírása

A lineáris rendszer aszimptotikus stabilitásának feltétele, hogy az állapotmátrix karakterisztikus gyökei mind negatív valós résszel bírjanak. Ennek vizsgálatához határozzuk meg az eredeti A mátrix karakterisztikus polinomját:

$$\tilde{P}(\lambda) := \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + a_{11}\lambda^2 + (a_{12}a_{21} + a_{13})\lambda + a_{12}a_{23}$$

A könnyebb kezelhetőség kedvéért szorozzunk be alkalmas konstanssal és az alábbi polinomot kapjuk:

$$P(\lambda) := C_3\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0 \quad (4.4)$$

Az együtthatók:

$$C_3 := M_4(1 + \tan^2 \alpha) - P_{20} \tan \alpha \quad (4.5)$$

$$C_2 = V P_{20} + B P_{10}^2$$

$$C_1 := K P_{10}^2 + P_{20} \tan \alpha + B V P_{10}$$

$$C_0 := K V P_{10}$$

Nézzük az együtthatókat a királycsap függőleges helyzete esetén:

$$\hat{C}_3 := M_4 \quad (4.6)$$

$$\hat{C}_2 = V M_3 + B p_l^2$$

$$\hat{C}_1 := K p_l^2 + B V p_l$$

$$\hat{C}_0 := K V p_l$$

Mivel a karakterisztikus egyenlet harmadfokú, használható analitikus eredményt nem kapunk a gyökökre. Viszont a Routh-Hurwitz kritérium segítségével feltételt kaphatunk a stabilitásra. Ezen kritérium szerint a rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha a karakterisztikus polinom együtthatói azonos előjelűek és a Hurwitz-determináns pozitív. Részletesebben a [7] irodalomban.

4.3. A csillapítatlan modell lineáris stabilitása

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a viszkózus csillapítás zérus. Ebben a pontban ezért minden levezetés $B=0$ mellett értendő.

4.3.1. Stabilitás függőleges királycsap esetén

Először nézzük azt az esetet, amikor a királycsap nincs megdöntve. Ekkor a (4.6) együtthatók közül az első három mindenképpen pozitív a fizikailag értelmes paraméterekre. A \hat{C}_0 együttható esetére kapunk egy stabilitási kritériumot:

$$p_l > 0 \quad (4.7)$$

Ez megegyezik a második fejezetben kapott eredménnyel. Azonban még figyelembe kell venni a Hurwitz-determinánst is:

$$\hat{H} = \begin{vmatrix} \hat{C}_2 & \hat{C}_0 \\ \hat{C}_3 & \hat{C}_1 \end{vmatrix} = K V \left(\frac{1}{6} p_l^3 p_m - \frac{1}{4} p_l \right) > 0 \quad (4.8)$$

Innen:

$$p_m > \frac{3}{2} \frac{1}{p_l}, \text{ ha } p_l > 0 \quad (4.9)$$

illetve

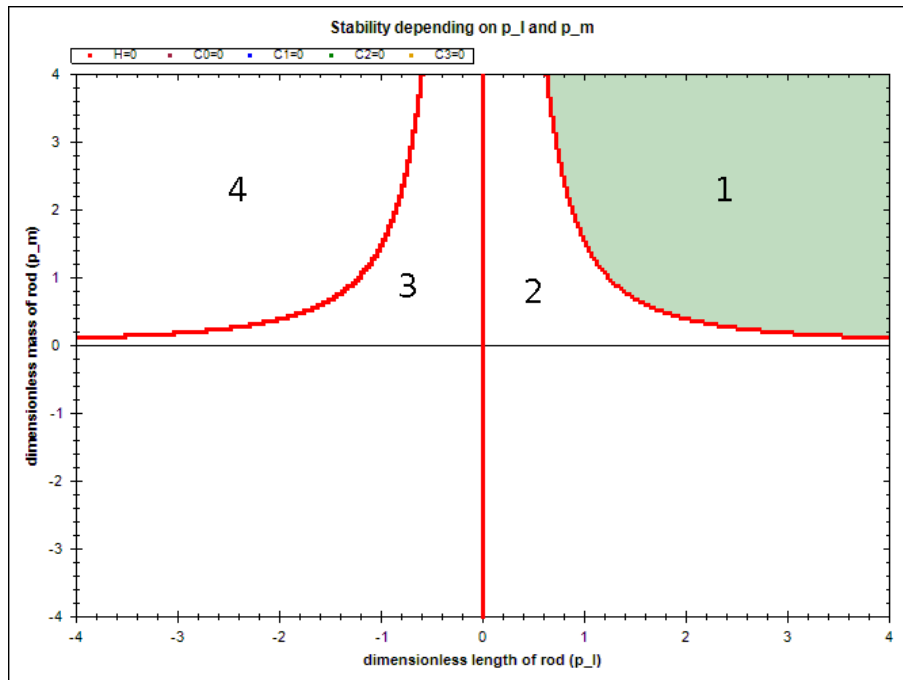
$$p_m < \frac{3}{2} \frac{1}{p_l}, \text{ ha } p_l < 0$$

Ennek inverz kifejezése a (4.7) figyelembevétel:

$$p_l > \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{p_m}}$$

Vagyis kaptunk egy alsó korlátot a vonórúd hosszára. Emlékezzünk, hogy a rugalmasság nélküli modellben zérus α szög esetén bármilyen pozitív p_l -re stabilis volt a rendszer. A stabilitás láthatóan független a rugómerevség és a sebesség nagyságától.

Vagyis függőleges csapnál a stabilitás a vonórúd kerékhez viszonyított nagyságának és tömegének növelésével megnő. Ez a két paraméter alapvető egy konstrukció szempontjából, főleg, mert adott anyagnál függenek is egymástól. Ezért a stabilitási térképet a $p_l - p_m$ paramétersíkon rajzoljuk fel, amint a következő oldalon lévő diagramon is látható.



A vízszintes tengelyen a vonórúd hossza szerepel a kerék sugarához viszonyítva, a függőleges tengelyen pedig a vonórúd dimenziótlán tömege.

A vastag vonallal jelölt Hurwitz-determináns feltétele négy részre bontja a síkot, ezek felváltva lennének stabil és instabil tartományok. A (4.7) feltétel azonban csak a besatírozott részen tesz lehetővé valódi stabilitást.

Érdeemes beszélni még a gyökök jellegéről és a stabilitásvesztés típusairól. Egyáltalán már az is meglepő, hogy létezik stabilis tartomány a csillapítás nélküli modellben is. Az egyenlet struktúrájában azonban felfedezhető, hogy magának a vontatásnak van csillapító hatása.

Kimutatható, hogy a csillapítás és ferdeség nélküli rendszerben mindenképpen egy valós gyök és egy komplex gyökpár jelenik meg. Vagyis kitérített helyzetre a modell mindenképpen rezgéssel reagál.

A (4.7) feltétel határhelyzete $p_l=0$ esetben áll fenn. Ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 = 0$$

Vagyis háromszoros zérus gyök van az egyenletnek. Ebben a szélsőséges esetben a jármű kereke nem képes szabad forgásra.

A (4.8) feltétel határhelyzetében a következő gyököket kapjuk a karakterisztikus egyenletből:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{K p_l^2} \cdot i \tag{4.10}$$

$$\lambda_3 = -V \frac{p_l p_m}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} p_l^2 p_m}$$

A jobb félsíkon az λ_3 gyök negatív, tehát hatása lecsillapodik, a rendszer statikusan stabilis, azonban megmarad egy állandó amplitúdójú rezgés a tiszta képzetes gyökök miatt. A sátozott 1. jelű részben a rezgés lecsillapodik, azonban a 2. tartományban a komplex gyökpár valós része pozitívba vált, és a rendszer elveszti stabilitását. Ez Hopf-bifurkáció jellegű stabilitásvesztés.

A függőleges tengelytől balra lévő 3. tartományban megint lecsengő lesz a komplex gyökpár, viszont a λ_3 már pozitív, így statikus stabilitásvesztés következik be. A bal szélső 4. tartományban pedig mindhárom gyök pozitív valós részű, a rendszer többszörösen instabil.

A továbbiakban megnézzük a teljes (de még csillapítatlan) modellünket, ahol $\alpha \neq 0$ is megengedett. Az egyszerűbb modell (4.9) feltételével való összehasonlítás miatt továbbra is a $p_l - p_m$ paramétersíkon keresünk stabil és instabil tartományokat, melyeket a Routh-Hurwitz kritériumok határhelyzetei alakítanak ki. Ezen görbéket és tartományokat befolyásolhatja a többi paraméter, konkrétan V , K és α is. A feltételeket pozitív p_m mellett, vagyis az eredeti modell szerinti fizikailag értelmes tartományban vizsgáljuk, ennek ellenére a görbéket érdemes a teljes $p_l - p_m$ síkban felrajzolni.

4.3.2. Stabilitás ferde királycsap esetén

Először belátjuk, hogy

$$C_3 > 0$$

Ugyanis $\cos^2 \alpha$ -val való beszorzás után:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} p_m p_l^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cos^2 \alpha p_m p_l^2 - \frac{1}{2} p_m p_l \sin \alpha \cos \alpha + (1 + p_m) \sin^2 \alpha > 0 \\ p_m \left((3 + \cos^2 \alpha) p_l^2 - 6 \sin \alpha \cos \alpha p_l + 12 \sin^2 \alpha \right) > -12 \sin^2 \alpha - 3 \end{aligned} \quad (4.11)$$

A jobb oldal mindenképpen negatív. A bal oldali zárójelben egy p_l -re nézve másodfokú kifejezést találunk. Ennek diszkriminánsa:

$$36 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 48 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 144 \sin^2 \alpha = -12 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 144 \sin^2 \alpha$$

Vagyis a diszkrimináns negatív vagy zérus. Így a $(3 + \cos^2 \alpha) > 0$ főegyütthatójú másodfokú polinom helyettesítési értéke nemnegatív. Tehát a bal oldal nemnegatív, míg a bal

oldal negatív, így az (4.11) feltétel mindig teljesül.

Tehát a C_3 együttható mindenképpen pozitív. A Routh-Hurwitz kritérium az együtthatók azonos előjelét követeli meg, tehát a többi együtthatónak is pozitívnak kell lennie.

Nézzük most a következő feltételt: $C_0 > 0$

$$(p_l - \tan \alpha) \cos^2 \alpha VK > 0$$

A rugómerevség és a sebesség pozitív, így a feltétel átfogalmazása:

$$p_l > \tan \alpha \quad (4.12)$$

Ezzel visszakaptuk a merev modellben is meglévő (2.9) feltételt.

Nézzük a C_2 együtthatót: $C_2 > 0$

$$\left(\frac{1}{2} p_m p_l - (1 + p_m) \tan \alpha \right) V > 0$$

Innen a megengedhető paraméterek a fizikailag értelmes tartományban:

$$p_l > 2 \tan \alpha \quad (4.13)$$

és

$$p_m > \frac{1}{\frac{p_l}{2 \tan \alpha} - 1} \quad (4.14)$$

Az első feltételnek csak pozitív α szög esetén van szigorító hatása (4.12)-höz képest. A (4.14) feltétel azonban ad egy alsó korlátot a vonórúd tömegére.

Már csak a C_1 együttható maradt: $C_1 > 0$

$$K (p_l - \tan \alpha)^2 + \left(\frac{1}{2} p_l p_m - (1 + p_m) \tan \alpha \right) \tan \alpha > 0$$

$$p_m \left(\frac{1}{2} p_l - \tan \alpha \right) \tan \alpha > \tan^2 \alpha - K (p_l - \tan \alpha)^2$$

Ha $\alpha = 0$, akkor a feltétel azonosan teljesül. Ha $\alpha \neq 0$, akkor az alábbi alakra hozható:

$$p_m \left(\frac{p_l}{2 \tan \alpha} - 1 \right) > 1 - K \left(\frac{p_l}{\tan \alpha} - 1 \right)^2 \quad (4.15)$$

Innen:

$$p_m > \frac{1 - K \left(\frac{p_l}{\tan \alpha} - 1 \right)^2}{\frac{p_l}{2 \tan \alpha} - 1}, \text{ ha } p_l > 2 \tan \alpha \quad (4.16)$$

és

$$p_m < \frac{1 - K \left(\frac{p_l}{\tan \alpha} - 1 \right)^2}{\frac{p_l}{2 \tan \alpha} - 1}, \text{ ha } p_l < 2 \tan \alpha \quad (4.17)$$

Utóbbi feltétel (4.13) miatt nem teljesülhet. A (4.16) viszont gyengébb feltétel, mint a (4.14), hiszen a számlálóban mindenképp pozitív számot vonunk le.

Az együtthatók vizsgálatából összességében a (4.12), (4.13) és (4.14) feltételeket kaptuk. Nézzük most a Hurwitz-determinánst: (4.18)

$$H = \begin{vmatrix} C_2 & C_0 \\ C_3 & C_1 \end{vmatrix} = (K P_{10}^2 + P_{20} \tan \alpha) V P_{20} - M_4 (1 + \tan^2 \alpha) K V P_{10} + P_{20} \tan \alpha K V P_{10} > 0$$

Látható, hogy a vontatási sebesség kiesik az egyenletből. Ha elvégezzük a behelyettesítéseket, az alábbi egyenlethez jutunk:

$$(c_2 p_m^2 + c_1 p_m + c_0) > 0 \quad (4.19)$$

Itt:

$$c_2 = \frac{1}{4} p_l^2 \tan \alpha - p_l \tan^2 \alpha + \tan^3 \alpha \quad (4.20)$$

$$c_1 = \left(p_l^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \tan^2 \alpha \right) + p_l^2 \tan \alpha \left(-\frac{7}{6} + \frac{1}{4} \tan^2 \alpha \right) + p_l \tan^2 \alpha \right) K - p_l \tan^2 \alpha + 2 \tan^3 \alpha$$

$$c_0 = \left(-p_l^2 \tan \alpha + p_l \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \tan^2 \alpha \right) + \left(\frac{1}{4} \tan \alpha + \frac{1}{4} \tan^3 \alpha \right) \right) K + \tan^3 \alpha$$

A másodfokú egyenletre felírható a megoldóképlet, és így meghatározható a stabilitás határhelyzetét jelentő $p_m = f(p_l)$ görbepár. Azonban az itt nem közölt analitikus formula túlságosan bonyolult ahhoz, hogy komolyabb következtetéseket levonjunk belőle. A diszkrimináns önmagában egy hatodfokú polinom p_l -re nézve, így már a két valós megoldás létezésének feltételeihez is numerikus módszereket kellene alkalmaznunk. Az egyetlen tanulságos dolog talán, hogy a stabilitás továbbra sem függ a vontatási sebességtől.

Vizsgálni kaphatunk részeredményeket bizonyos megszorítások mellett. A (4.18) egyenlőtlenség az alábbi alakra hozható:

$$P_{20} \left(p_l + \frac{P_{20} \tan \alpha}{K P_{10}} \right) > M_4 (1 + \tan^2 \alpha) \quad (4.21)$$

Ebből a formából könnyen látható, hogy nagy merevségnél a zárójel második tagja elhanyagolhatóvá válik. Mivel éppen ez tartalmazza a p_m másodfokú hatványáért felelős tagot, ezért ezzel a feltételezéssel p_m -re lineáris kifejezést nyerhetünk.

Tegyük most még fel, hogy $\alpha > 0$. Ha ebben az esetben tekintjük a merevséget tartalmazó tagot elhanyagolhatónak, akkor a stabil tartomány részhalmaza. Ugyanis ekkor az elhanyagolt tag mindenképpen pozitív (az együtthatókból kapott feltételek miatt), vagyis egy elégséges, de nem szükséges feltételt kapunk a stabilitásra:

$$P_{20} p_l > M_4 (1 + \tan^2 \alpha) \quad (4.22)$$

Ebből kihozható az alábbi két feltétel:

$$p_l > \frac{\tan \alpha}{\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \tan^2 \alpha} \quad (4.23)$$

$$p_m > \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tan^2 \alpha \right) + p_l \tan \alpha}{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \tan^2 \alpha \right) p_l^2 - p_l \tan \alpha} \quad (4.24)$$

Tehát a két feltétel $K \rightarrow \infty$ esetén a stabilitási feltételt adja, kisebb merevség esetén pedig egy valamivel szigorúbb becslést. Vagyis véges merevségnél a megadottnál kisebb dimenziótlan tömeggel is lehet stabilis a rendszer.

Leellenőrizhetjük, hogy (4.24) visszaadja a (4.9) feltételt az $\alpha = 0$ esetben.

Kimutatható, hogy a (4.23) és (4.24) feltétel szűkebb stabilis tartományt eredményez, mint a már felírt (4.12), (4.13) és (4.14) kritériumok. Numerikus módszerekkel igazolható, hogy ez a helyzet még akkor is fennáll, ha a véges merevséget figyelembe vevő (4.19) feltételt vizsgáljuk is. Vagyis pozitív α szög esetén a stabilis tartományt egyedül a Hurwitz-determinánsból származó feltétel határolja. Igazolható, hogy itt is Hopf-bifurkációs stabilitásvesztés következik be, vagyis megjelenik a shimmy a modellben.

A legfontosabb kérdés, hogy hogyan változik a stabilis tartomány a ferde csap megjelenésével. Nézzük a (4.24), nagy merevséghez tartozó feltételt. Az egyenes csaphoz képest a számláló növekedett a nevező pedig csökkent, vagyis p_m kritikus értéke mindenképpen nagyobb lesz. Tehát nagy merevségnél a pozitív α szög csökkenti a stabilitást, adott hosszúságú vonórúd tömegét nagyobbra kell választanunk az instabilitás elkerülése érdekében, mint függőleges csapnál.

Az analitikus megoldásból nem látszik pontosan, de (4.21) alapján megállapítható az a tendencia, hogy a merevség csökkentése növeli a stabilitást pozitív α szög esetén.

Nézzük most az $\alpha < 0$ esetet. A helyzet ez esetben más, ugyanis (4.21) alapján nem szűkebb, hanem bővebb tartományt tudunk mondani a stabilitásra. Ugyanis az elhanyagolt tag ekkor negatív, vagyis elhagyásával stabilabbá tettük a rendszert. Nagy merevség és $p_l > 0$ esetén ugyanazt a feltételt kapjuk, mint (4.23) és (4.24) esetekben. A (4.24) feltételből az is leolvasható, hogy nagy merevség esetén a királycsap negatív α szöge növeli a rendszer stabilitását. Ráadásul ha

$$p_l > \frac{-1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} ,$$

akkor megszűnik az alsó korlát a vonórúd dimenziótlán tömegére.

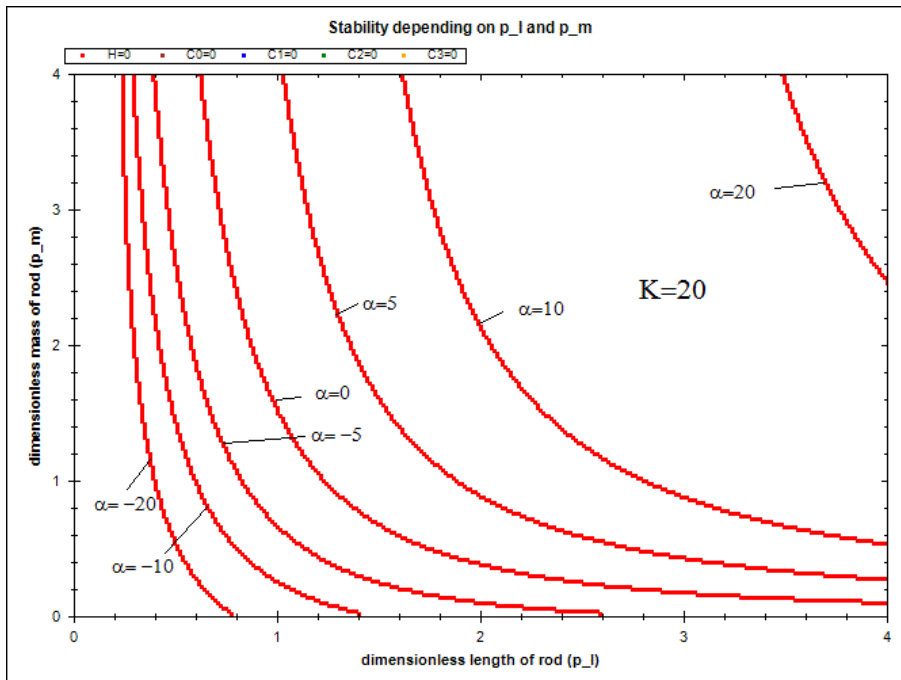
Azonban itt a merevség csökkentése az elmondottak miatt ellentétes hatású, véges merevségek esetén destabilizálja a rendszert. Numerikusan kimutatható, hogy ekkor egy maximuma jelenik meg a p_m értéknek.

Külön figyelmet érdemel még az az eset, amikor $\alpha < 0$ és $p_l < 0$. A rugalmasság nélküli modell ugyanis stabilitást mutatott ilyen esetekre is. Ezen paraméterek mellett lehetne modellezni a motorkerékpárok első kerekét. Azonban sajnos a rugalmas-csillapítatlan modell erre nem képes, $p_l < 0$ mellett nem fogunk találni stabilis tartományt. Ez néhány lépésben igazolható (4.22)-ből.

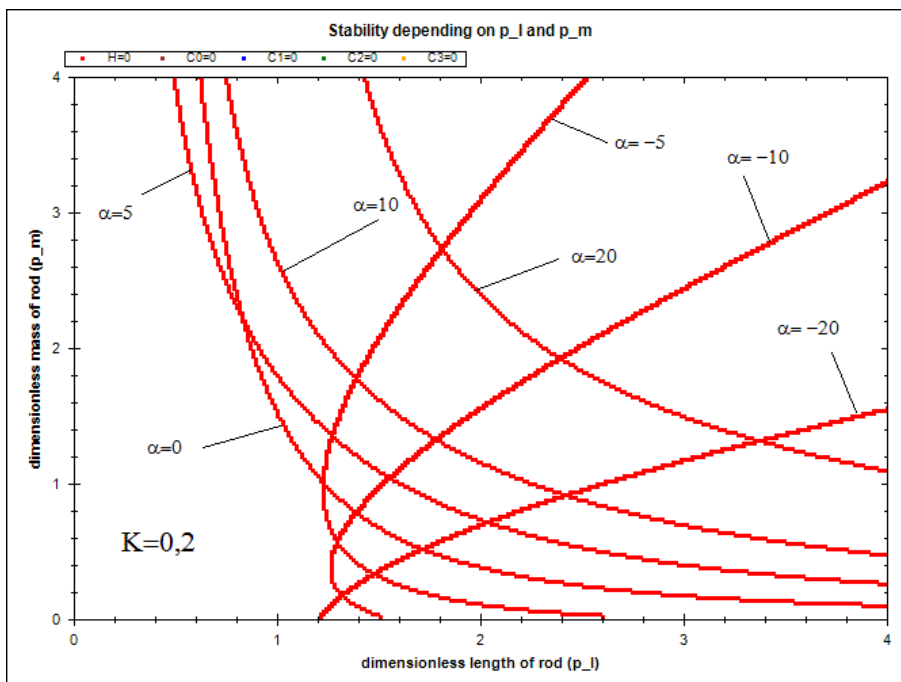
Elsőre meglepő, hogy a végtelen merevségű rugalmas modell miért nem adja vissza a rugalmasság nélkülinek ezt a jelenségét. Az ok a csillapítás hiányában keresendő, ugyanis a merev test explicite feltételez végtelen nagy csillapítást is. Ezért lesz fontos, hogy visszategyük modellünkbe a csillapítást, melyet a következő pontban fogunk megvizsgálni. Először azonban összegezzük ezen pontbeli eredményeinket két diagramon, melyek a stabilitás határhelyzetét mutatják be néhány α szög esetén.

Az első grafikon viszonylag nagy merevség mellett készült, látható az analitikusan már igazolt tendencia a megdöntési szög hatásáról. A másik grafikon két nagyságrenddel kisebb merevség mellett már egészen más képet mutat.

4. A rugalmas modell lineáris stabilitása



2. diagram: A ferde csap hatása a stabilitásra nagy merevségű rugó esetén



3. diagram: A ferde csap hatása a stabilitásra lágyabb rugó esetén

4.4. A csillapított modell lineáris stabilitása

Most az előző pontbeli levezetésünket fogjuk megismételni $B > 0$ esetre, vagyis amikor van viszkózus csillapítás. A nagyobb bonyolultság miatt nem tudunk minden eredményünket reprodukálni analitikusan.

4.4.1. Stabilitás függőleges királycsap esetén

Ekkor a (4.6) együtthatók közül az első kettő mindenképpen pozitív a fizikailag értelmes paraméterekre. A \hat{C}_0 együtthatónál kapott kritérium:

$$p_l > 0 \quad (4.25)$$

Ez nem változik a csillapítatlan modellhez képest. Valamint ezt a feltételt figyelembe véve már \hat{C}_1 is mindenképpen pozitív.

Továbbra is vizsgálnunk kell a Hurwitz-determinánst:

$$\hat{H} = \begin{vmatrix} \hat{C}_2 & \hat{C}_0 \\ \hat{C}_3 & \hat{C}_1 \end{vmatrix} = K V \left(\frac{1}{6} p_l^3 p_m + \frac{B V}{K} p_l^2 p_m - \frac{1}{4} p_l + \frac{B}{V} p_l^4 + \frac{B^2}{K} p_l^3 \right) > 0 \quad (4.26)$$

Ebből adódik:

$$p_m > \frac{\frac{1}{4} - \frac{B}{V} p_l^3 - \frac{B^2}{K} p_l^2}{\frac{1}{6} p_l^2 + \frac{B V}{K} p_l}, \text{ ha } p_l > 0 \quad (4.27)$$

illetve

$$p_m < \frac{\frac{1}{4} - \frac{B}{V} p_l^3 - \frac{B^2}{K} p_l^2}{\frac{1}{6} p_l^2 + \frac{B V}{K} p_l}, \text{ ha } p_l < 0$$

A (4.7) feltétel miatt csak az első eset lehetséges. Megállapítható, hogy mivel (4.27)-ben a tört számlálója csökken, a nevező pedig növekszik a csillapítás megjelenésével csökken a p_m -re vonatkozó minimum kritérium, így növekszik a stabilis tartomány. A csillapítás megjelenésével lesz egy olyan kritikus p_l érték, ahol a számláló negatívba vált, így már bármilyen p_m megengedhető lesz.

A stabilitás határán a karakterisztikus gyökök értéke a következő:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{K p_l^2 + B V p_l} \cdot i$$

$$\lambda_3 = \frac{-V p_l p_m + B p_l^2}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} p_l p_m}$$

Tehát a berezgési frekvencia a csillapítás megjelenésével megnő.

A csillapítás nem változtat lényegesen a stabilitástérkép stabil részének jellegén, leszámítva a p_m minimumának eltűnését nagyobb p_l értékekre. Azonban jelentősen megnő stabilis tartomány mérete. Grafikonokat a függelékben találunk.

4.4.2. Stabilitás ferde királycsap esetén

A csillapítás csak a C_1 és C_2 együtthatókban szerepel, így csak ezek megváltozását kell vizsgálnunk.

Nézzük a C_2 együtthatót: $C_2 > 0$

$$\left(\frac{1}{2} p_m p_l - (1 + p_m) \tan \alpha \right) V + B (p_l - \tan \alpha)^2 > 0$$

Az értelmes paraméterek mellett:

$$p_l > 2 \tan \alpha \quad (4.28)$$

és

$$p_m > \frac{1 - \frac{B}{V \tan \alpha} (p_l - \tan \alpha)^2}{\frac{p_l}{2 \tan \alpha} - 1} \quad (4.29)$$

Mivel a számlálóban pozitív tagot vonunk ki, a stabilitási feltétel enyhébb lesz. A képletből látható, hogy a görbe egy negatív meredekségű aszimptotához tart a $p_l - p_m$ paramétersíkon.

Nézzük most a C_1 együtthatót: $C_1 > 0$

$$K (p_l - \tan \alpha)^2 + \left(\frac{1}{2} p_l p_m - (1 + p_m) \tan \alpha \right) \tan \alpha + B V (p_l - \tan \alpha) > 0$$

$$p_m \left(\frac{1}{2} p_l - \tan \alpha \right) \tan \alpha > \tan^2 \alpha - K (p_l - \tan \alpha)^2 - B V (p_l - \tan \alpha)$$

Ha $\alpha=0$, akkor a feltétel mindenképp igaz. Ha $\alpha \neq 0$, akkor:

$$p_m \left(\frac{p_l}{2 \tan \alpha} - 1 \right) > 1 - K \left(\frac{p_l}{\tan \alpha} - 1 \right)^2 - B V \left(\frac{p_l}{\tan \alpha} - 1 \right) \quad (4.30)$$

Innen:

$$p_m > \frac{1 - K \left(\frac{p_l}{\tan \alpha} - 1 \right)^2 - B V \left(\frac{p_l}{\tan \alpha} - 1 \right)}{\frac{p_l}{2 \tan \alpha} - 1}, \text{ ha } p_l > 2 \tan \alpha \quad (4.31)$$

Látható, hogy a csillapítás ismét enyhébbé teszi a kritériumot. A csillapítás hatása ráadásul a sebességgel is összefügg. Itt nem egyértelmű, hogy a (4.29) feltétel erősebb, mint a (4.31). Globálisan ez nem is igaz, azonban numerikusan igazolható, hogy az értelmes paramétertartományban $\alpha > 0$ esetén a (4.29), $\alpha < 0$ esetén pedig a (4.31) feltétel erősebb, így mindkettőre szükségünk van. Valamint továbbra is adott a $p_l > \tan \alpha$ kritérium.

Hátra van még a Hurwitz-determináns, mely sajnos még bonyolultabb lesz: (4.32)

$$H = \begin{vmatrix} C_2 & C_0 \\ C_3 & C_1 \end{vmatrix} = (K P_{10}^2 + P_{20} \tan \alpha) (V P_{20} + B P_{10}^2) - \\ - M_4 (1 + \tan^2 \alpha) (K V P_{10} + B V P_{10}) + P_{20} \tan \alpha (K V P_{10} + B V P_{10}) > 0$$

Az egyenlőtlenség ismét a (4.19) alakba hozható, azonban bonyolultsága miatt itt nem közöljük. A kifejezés ismét kifejezhető p_m -re a megoldóképlettel, de még bonyolultabb lesz a kifejezés. Numerikus módszerekkel belátható, hogy a Hurwitz-determinánsból adódó feltétel elfedi a C_0 , C_1 és C_2 feltételeket, így a stabilis tartományt csak a $H=0$ feltétel határoolja.

A már ismertetett elrendezéssel az alábbi alakot kaphatjuk:

$$P_{20} \left(p_l + \frac{P_{20} \tan \alpha}{K P_{10}} + \frac{B}{K} \tan \alpha \left(\frac{P_{10}}{V} + 1 \right) \right) > M_4 (1 + \tan^2 \alpha) \left(1 + \frac{B}{K} \right) - \frac{B}{V} P_{10}^3 \quad (4.33)$$

Most nem foglalkozunk, hogy milyen irányú becslést végzünk, de feltesszük, hogy K nagyon nagy érték. Ekkor az alábbi egyszerűbb feltételt nyerjük:

$$P_{20} p_l > M_4 (1 + \tan^2 \alpha) - \frac{B}{V} P_{10}^3 \quad (4.34)$$

Ebből adódik a következő két feltétel:

$$p_l > \frac{\tan \alpha}{\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \tan^2 \alpha} \quad (4.35)$$

$$p_m > \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tan^2 \alpha\right) + p_l \tan \alpha - \frac{B}{V} (1 + \tan^2 \alpha) (p_l - \tan \alpha)^3}{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \tan^2 \alpha\right) p_l^2 - p_l \tan \alpha} \quad (4.36)$$

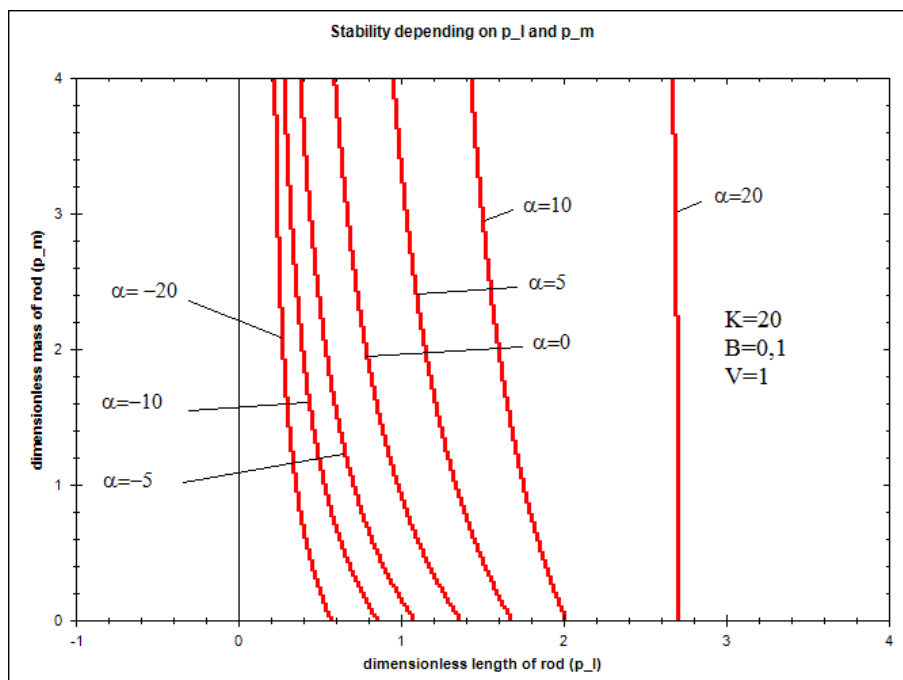
A (4.24) feltételhez képest csökken a nevező értéke a csillapítás miatt, így az alsó korlát alacsonyabb lesz, növekszik a stabilis tartomány. Ha ellenőrzésképpen a (4.27) feltételt megnézzük nagy merevség esetére, a következő eredményt kapjuk:

$$p_m > \frac{\frac{1}{4} - \frac{B}{V} p_l^3}{\frac{1}{6} p_l^2} \quad (4.37)$$

Ez megegyezik azzal, mintha a (4.36) egyenletbe helyettesítjük az $\alpha = 0$ értéket.

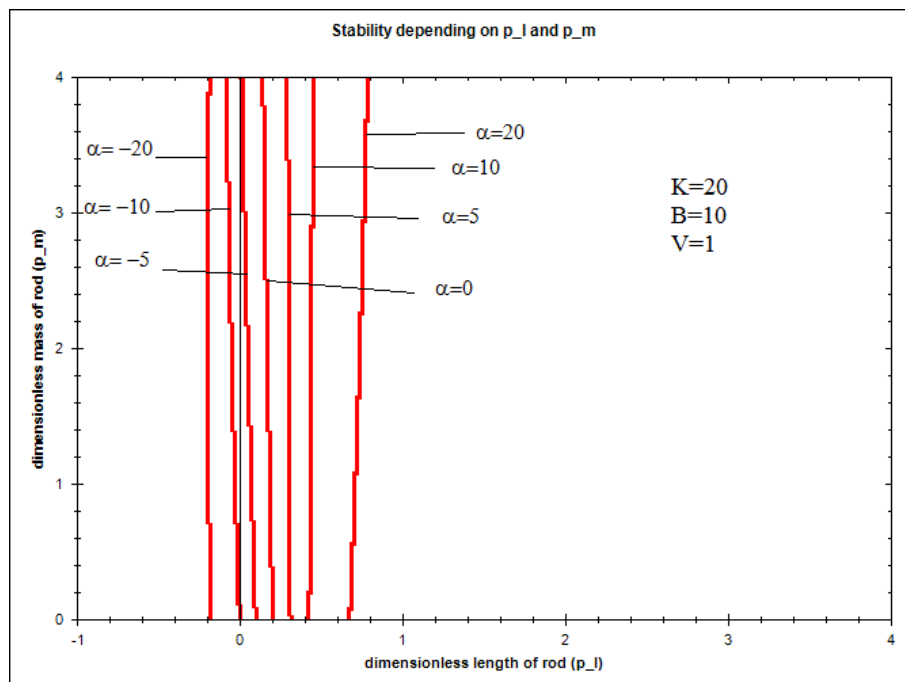
Itt már nem nyilvánvaló analitikusan, hogy a szög változtatásának milyen hatása van. Ha az α szög kicsi, akkor a tangens négyzeteket tartalmazó tagok elhanyagolhatóak, és a szögnek ugyanolyan hatása lesz, mint csillapítatlan esetben, vagyis a pozitív szög csökkenti, a negatív pedig növeli a stabilis tartományt.

Ha a teljes, (4.33)-ban szereplő feltételt ábrázoljuk, az alábbi diagramokat kapjuk néhány értékre:



4. diagram: A ferde csap hatása csillapított esetben

A grafikon ugyanazt a jelleget mutatja, mint csillapítatlan esetben, a görbék azonban a csillapítás miatt nagy meredekségűek, így a korlátozás jellemzően a vonórúd hosszára lesz hatással, mint a tömegére. A fenti grafikon viszonylag nagy merevség és kis csillapítás mellett készült. Nézzük meg ugyanezen paraméterek és nagyobb csillapítás esetén:



5. diagram: A ferde csap hatása csillapított esetben

Az erősebb csillapítás esetén érdekes hatások jelentkeznek. Mivel a görbék ugyanolyan szög értékek mellett készültek, mint az előző diagramon, látható, hogy a stabilitás sokkal érzéketlenebbé válik a királycsap ferdeségére. Másrészt a csillapítás önmagában is stabilizál, így a negatív α szög kellően erős csillapítás mellett képes áttolni a stabilitás határgörbéjét a bal oldali félsíkra. Ez azt jelenti, hogy megjelennek olyan stabilis tartományok, ahol p_l értéke negatív is lehet. Vagyis olyan stabilis mozgás is előfordulhat a modellben, ahol a vonórúd a vontatás irányában előre felé áll.

Ennek fontos fizikai tartalma van, ezáltal a modell képes visszaadni a motorkerékpárok és biciklik első kerekének viselkedéséből a stabilis tolás jelenségét. Most arra az esetre gondoljunk persze, amikor a kormányon nincs beavatkozó erő, a nyeregnél fogva toljuk, a járművet, és mégis stabil, vagyis az egyenes pályán való mozgáshoz nem szükséges fogni a kormányt.

5. A numerikus szimuláció

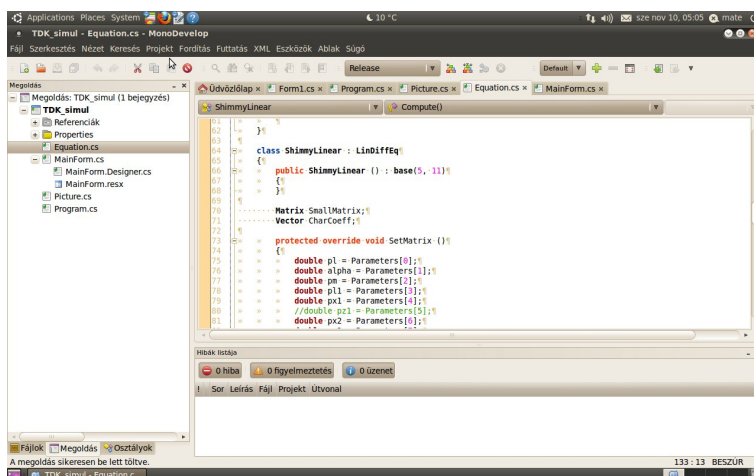
5.1. A szimuláció elkészítése

A készített számítógépes szimuláció magja egy egyszerű differenciálegyenlet-megoldó, de a programot számos egyéb funkcióval is kiegészítettük.

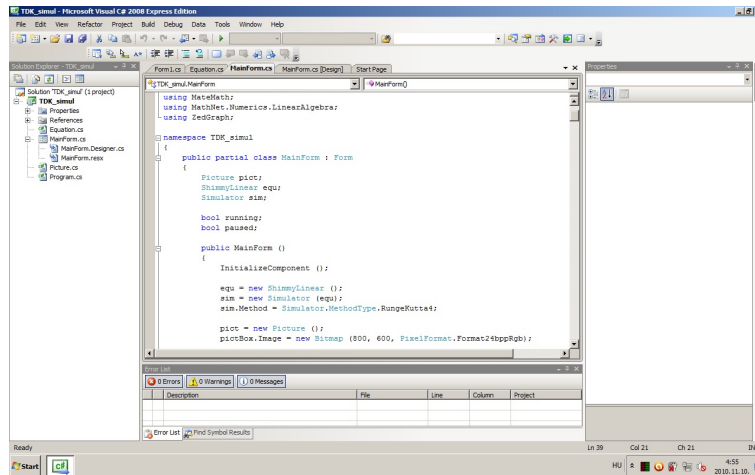
A program C# nyelven íródott, melyet a .NET keretrendszer segítségével bármilyen platformon futtathatunk. A szoftver a Mono Develop és a Visual Studio Express integrált fejlesztő környezetek segítségével készült. Előbbi fejlettebb projektbeállításokkal és kódotást segítő eszközökkel rendelkezik, utóbbi pedig az ablakok gyors fejlesztéséhez tartalmaz eszközöket.

A fejlesztés során felhasználtunk néhány előre megírt függvénykönyvtárat:

- Math.Net Iridium matematikai függvénycsomag, melyet Christoph Rüegg vezetésével fejlesztenek, és átfogó numerikus eszközkészletet kínál a lineáris algebrától a numerikus analízisen át a valószínűségszámításig.
- ZedGraph két dimenziós grafikonrajzoló modul, melynek fejlesztését Wahab Hussain irányítja, segítségével gyors és egyszerű grafikonokat hozhatunk létre sok beállítással és diagramtípussal.
- MateMath saját készítésű differenciálegyenlet megoldó csomag, mely elsőrendű differenciálegyenletek megoldására képes. A modul kezel változtatható paramétervektorokat, a szimulációs módszerek és paraméterek állíthatóak.



7. ábra: A Mono Develop fejlesztői környezete munka közben

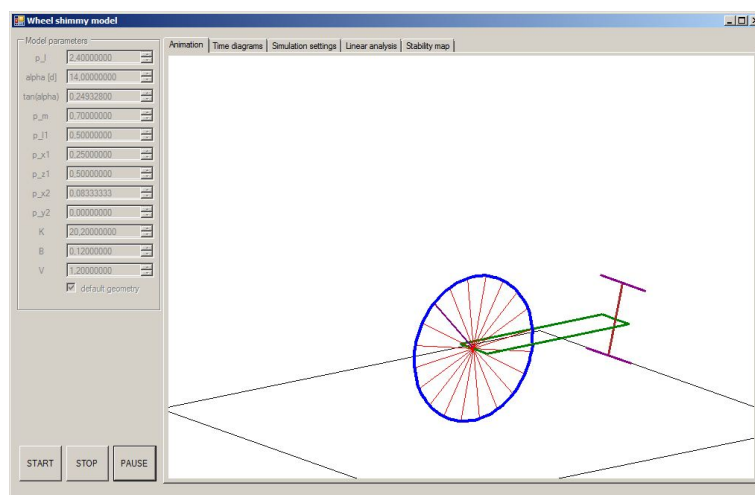


8. ábra: A Visual Studio Express fejlesztői környezetében munkában

A program létrehozásának technikai részleteit most nem ismertetjük.

5.2. A program működése

A kész program az alábbi ábrákon látható. A képernyő bal oldalán adhatjuk meg a modellparamétereket a rendszernek. A paraméterek a fentebb tárgyalt dimenziótlan alakban adhatók meg.

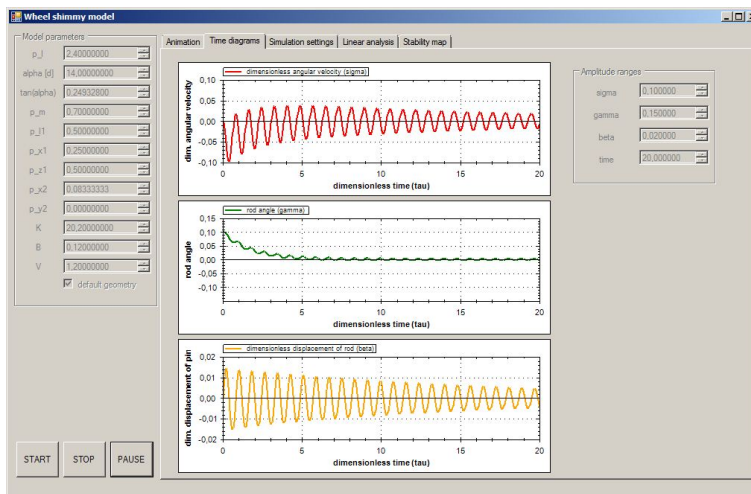


9. ábra: A paraméterek beállítása és az animáció

Az ablak jobb oldalán öt fül található. Az első fülön az animációt találjuk, mely egyszerű ábrával, ám három dimenzióban képes megjeleníteni a mozgást. A kameraszöveget az egér

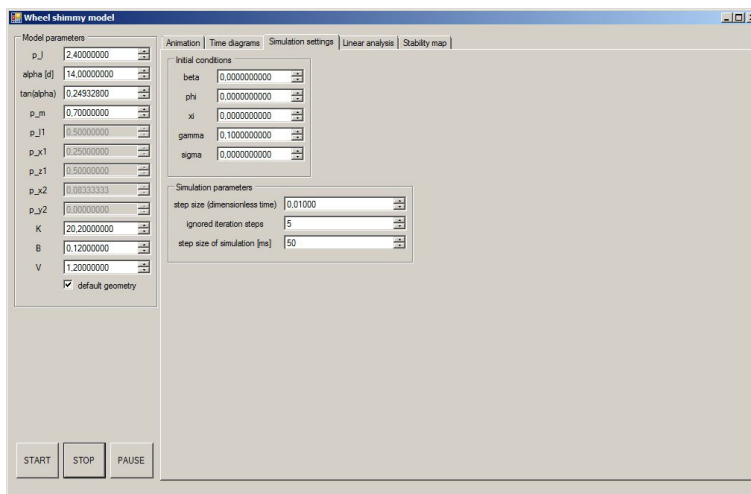
5. A numerikus szimuláció

vontatásával állíthatjuk.



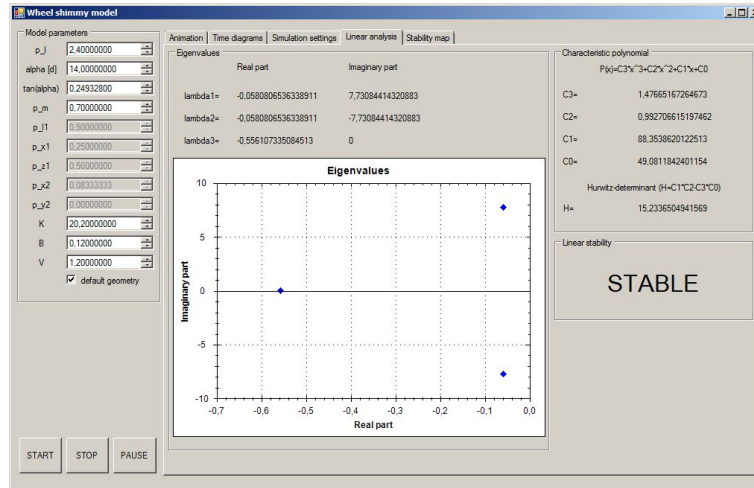
10. ábra: Az idődiagramok

A második fülön grafikonokat találunk, melyen a leszűkített állapotter három koordinátája figyelhető meg az idő függvényében.



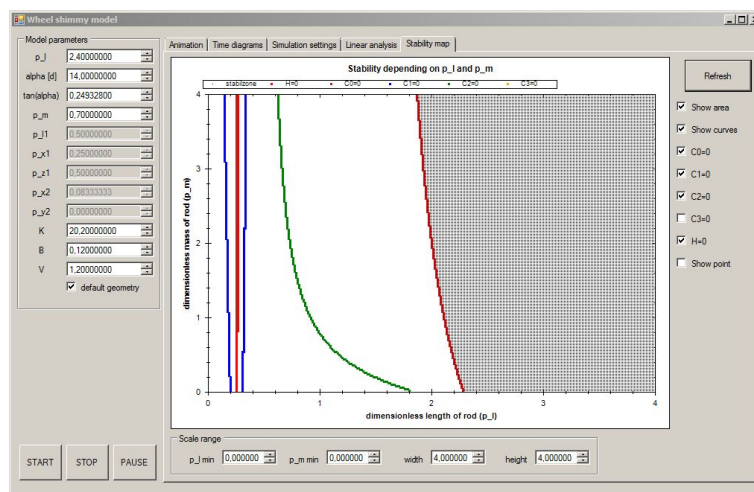
11. ábra: A szimulációs beállítások

A harmadik fülön a kezdeti feltételeket és a szimulációs paramétereket adhatjuk meg. A szimuláció a lineáris és a nemlineáris egyenletet is kezelni képes, a megoldó negyedrendű Runge-Kutta módszer alapján dolgozik.



12. ábra: Lineáris rendszervizsgálat

A negyedik fülön a lineáris stabilitásvizsgálat található, a gyökök és a karakterisztikus polinom együtthatóinak kiszámításával. Előbbiek diagramban olvashatók le, és ha ebből nem jönnek rá, a program nagy betűkkel közli, hogy stabilis-e a rendszer vagy sem.



13. ábra: Stabilitástérkép-rajzoló

A negyedik fülön egy interaktív stabilitástérkép-rajzoló szerepel, mely a vonórúd dimenziótlan tömege és dimenziótlan hossza alkotta paramétersíkon dolgozik. A többi paraméterek változtatása mellett megadhatjuk, hogy mely görbéket és stabil tartományokat kívánjuk ábrázolni. Az aktuális pozíciót is jelzi a grafikon.

Az eredményekről a következő fejezetben beszélünk röviden. A numerikus szimuláció leginkább azért volt hasznos, hogy igazolta a korábban leírt analitikus eredményeket. Az animációval való játszózás mindig segít, hogy ráérezzünk a rendszer rezdüléseire. Valamint a dolgozatban látható valamennyi stabilitástérkép ezen program segítségével készült. A B függelékben megnézhetünk néhány futási eredményt.

6. Eredmények és következtetések

Egy fizikai de általában véve matematikai modellezés során véleményünk szerint három fő fázist hajtunk végre. Az első lépés, hogy egy jelenséget minél több kapcsolódási ponttal leképezzünk egy alkalmas matematikai struktúrára. A második lépés, hogy ezen matematikai képződményen, a modellen végzünk manipulációkat. A harmadik pedig, hogy a modell által szolgáltatott eredményeket visszavetítjük a tapasztalati világra. Az egész tevékenységnek akkor van értelme, ha a végén a modell olyan dolgokat képes mondani a világról, amit a tiszta tapasztatból nem következtethettünk volna ki. A második lépés, bár segít, ha közben folyamatos visszacsatolást kapunk a tapasztalatok felé, akkor hatékony, ha akár tiszta matematikával is kezelhető. Az első és harmadik lépésnél viszont cél a minél több kapcsolódási pont a modell és a tapasztalat között.

Jelen dolgozatban az első lépést az 1.1. és 1.2. pontok jelentették, a második szakasz a közben leírt néhány fejezet. Most, a dolgozat végén pedig szeretnénk modellünk fizikai tartalmát összefoglalni.

Modellünkéből megkaptuk a jól ismert egyensúlyi helyzetet a vontatás közben, és az is kiderült, hogy a paraméterek függvényében lesz ez az egyensúlyi helyzet, pontosabban egyensúlyi mozgás stabil vagy instabil. Ez a gyakorlatban azt a kérdést foglalja magában, hogy a vontatott járműelem a legkisebb zavar hatására elveszti stabilitását vagy pedig visszatér az egyensúlyi helyzetbe, legalábbis kis kitérések hatására.

A modell harmadrendű rendszert eredményezett, ami azt jelenti, hogy kialakulhat a rezgés, de akár egy lengés nélkül lecsengő vagy statikusan elszálló mozgás is létrejöhet. Ezt mind az analitikus számítás, mind a numerikus szimuláció igazolta.

Azt kaptuk, hogy alapvető hatással van a stabilitásra a vonórúd és a kerék egymáshoz viszonyított nagysága és tömege. Általában elmondhatjuk, hogy a kerékhez képesti minél hosszabb és nehezebb vonórúd növeli a stabilitást. Más szóval a felfüggesztésükhöz képesti nagy méretű és nehéz kerekek okozhatnak stabilitási problémát.

A stabilitás határát átlépve a kerék egyre nagyobb amplitúdójú rezgésbe kezd, melyet a modellben semmi sem korlátoz. A valóságban természetesen a fizikai jellemzők megváltozása, mint a megcsúszás, az alkatrészek deformációja, vagy a jármű mozgásának megváltozása határt szabnak ennek a rezgésnek.

Azt kaptuk, hogy kis csillapítások esetén a stabilitás független a sebességtől, a csillapítás megjelenésével azonban sebességfüggő is lesz.

Vizsgálódásunk fő pontja a ferde királycsap hatásának vizsgálata volt. A statikus

stabilitásvesztés ellenszerének az bizonyult, hogy a királycsap tengelyének talajjal való metszéspontja a kerék érintési pontjánál előrébb legyen. Ez azonban még nem előzi meg a az ön-gerjesztett rezgés kialakulását.

A modell azt mutatja, hogy ha a királycsapot megdöntjük a haladás irányába, akkor az rontja a stabilitási feltételeket, a szög növelésével egyre szűkebb paramétertartományban lesz stabilis a rendszer működése. A másik irányban való megdöntéssel ellentétes hatást érünk el. Sőt, ha a rendszer csillapított és a királycsap a haladási iránynak háttal van megdöntve, akkor lehetségessé válik, hogy a kerék a királycsap előtt helyezkedjék el. Így a modell vizsgálhatóvá teszi a motorkerékpárok első kerekeinek viselkedését is.

A helyzet azonban nem ennyire egyszerű, mert nagyon sok paraméter hatását kell figyelembe venni. Ha a rendszer merevsége kicsi, akkor a negatív döntésű csap okozhat egy olyan jellegű változást, hogy a vonórúd tömegére nem alsó, hanem felső határt kapunk a stabilitás feltételeként.

Ettől eltekintve a fizikai valósághoz közel álló paramétereknél érdemes a királycsapot kissé hátrafelé megdönteni, ha a stabilitást veszélyeztetően rövid vonórúddal rendelkezik a konstrukció.

Még több mindent mondhatnánk a problémáról, ha jobban kihasználnánk a modellben lévő lehetőségeket. Eredményeinket kizárólag lineáris stabilitásvizsgálatra alapoztuk, de lehetőség lenne a nemlineáris stabilitás vizsgálatára. Lehetne foglalkozni a külső zavarokra, rezgésekre való érzékenységgel.

A modellt lényegileg két fontos ponton fejleszthetnénk tovább. Ha foglalkozunk a megcsúszás határhelyzetével és a megcsúszással, akkor sokkal bonyolultabb rendszert kapunk, mely a stabilitásvesztés után a megcsúszás közbeni energiavesztéssel akár újra stabilizálódhat.

Ha viszont figyelembe vesszük a jármű változó sebességű mozgását, újabb problémához jutunk, ugyanis a kapott egyenlet paraméteresen gerjesztett differenciálegyenlet, melynek stabilitása sokkal bonyolultabb eszközökkel vizsgálható, mint a jelenlegi modell.

Egyetlen problémáról beszélünk még mindig, mely még sok-sok oldalról körüljárható. Végszónak talán levonhatjuk, hogy gyakran a világ mindennapinak tűnő kis mozzanatában, mint a bevásárlókocsi rezgése, találhatunk olyan mélységeket, melyekre elsőre nem is sejtenénk. Melyet tudományunk kifinomult eszköztárával sem tudunk felderíteni minden részletében. Ez az élmény teszi a tudománnyal foglalkozót alázatossá a teremtett világgal szemben.

AD MAIOREM DEI GLORIAM

Összefoglalás

A dolgozatban a shimmy jelenségével foglalkozunk, mely vontatott kerekek esetén fordul elő. Ha egy jármű olyan kerékkal rendelkezik, mely egy csap körül képes elfordulni és nincs meghajtva, egy furcsa öngerjesztő rezgés alakulhat ki, mely akkor is létrejöhet, ha a kereket állandó sebességgel vontatjuk.

A motorbiciklik vagy repülőgépek kerekeinél létfontosságú, hogy elkerüljük ezt a instabil rezgést, mert komoly katasztrófát eredményezhet. A stabilitás feltételei nagyrészt a mechanikai rendszer fizikai paramétereiktől függenek, például a tömegektől merevségektől, csillapításoktól.

A dolgozatban létrehoztunk egy egyszerű mechanikai modellt. Modelleznünk kellett a három alapvető alkatrészt, a kereket, a vonórudat és a királycsapot. A kerék és út kapcsolatát egy pontos érintkezéssel írtuk le, az utat vízszintes merev síkként vettük figyelembe. A kereket és a vonórudat merev testként modelleztük, a rugalmasságot csak a királycsapon belül vettük figyelembe. A dolgozat azt az esetet vizsgálja, amikor a királycsap a vontatás irányába meg van döntve. A vontatási sebességet állandónak vettük.

Kiderült, hogy a rendszernek geometriai szempontból négy, kinematikai szempontból egy szabadságfoka van. Mivel anholonom rendszerről van szó, az Appell-egyenletet használtuk a rendszer differenciálegyenletének felírására.

Egy öt dimenziós elsőrendű egyenletet kaptunk, melyet egy három dimenziós fázistérre tudtunk redukálni. A leszűkített fázistér triviális fix pontja a teljes rendszer egyensúlyi mozgását jelenti.

Az egyensúlyi megoldás körül linearizáltuk az egyenletet és a Routh-Hurwitz kritériumot alkalmaztuk a stabilitás feltételének vizsgálatára.

Arra a következtetésre jutottunk, hogy a pozitív irányú, haladási irányban történő megdöntés általában instabilitást okoz és csökkenti a többi paraméter terében a stabil tartományt. A negatív megdöntés ellentétes hatással bír és növeli a stabilitást. A negatív megdöntés és a csillapítás együtt lehetővé teszi, hogy a modell akkor is stabil maradjon, mikor a vonórúd az ellenkező irányban áll, mint például a motorbiciklinél.

Egy egyszerű szimulációs programot is fejlesztettünk animációk létrehozására és a paramétereiktől függő lineáris stabilitás vizsgálatára.

Summary

In this paper we are dealing with the phenomenon of shimmy which is experienced at towed wheels. If a vehicle has a wheel which is able to rotate around a pin and there is no drive on it, a strange self-exciting vibration can develop on some occasions even if we tow the wheel with a constant velocity.

At the wheels of motorbikes or airplanes it is essential to avoid this unstable vibration because it can cause serious accidents. The conditions of stability mostly depend on the physical parameters of the system, like masses, stiffnesses and damping.

In the paper we created a simple mechanical model. The three main parts, the wheel, the towing rod and the king pin have to be modeled. We use one-point contact on the wheel, and the road is considered as a horizontal stiff plane. The wheel and the rod are modeled as rigid bodies, and the elasticity is taken into consideration in only the king pin. This paper examines the case when the king pin is tilted towards the towing direction. The towing velocity is constant.

It has been realized that this model has four geometric degrees-of freedom and one kinematic degree-of freedom. As the model is a non-holonomic mechanical system, the Appell-equation is used to create the differential equation of the system.

A five-dimensional first-order equation has been produced, which can be reduced to a three-dimensional phase space. In the reduced space the trivial fix point is the equilibrium motion of the whole system.

We made the linear approximation of the equation around the equilibrium solution and used the Routh-Hurwitz criterion to examine the conditions of stability.

The conclusions are that in general the positive tilting of the king pin to the direction of towing causes instability and reduces the stable area in the space of the other parameters. The negative tilting has the opposite consequence and increases the stability. The negative tilting and the viscous damping together enable the system to stay stable at the opposite direction of the towing rod, like at motorbikes.

A simple simulation program has been developed to create animations and examine the linear stability depending on parameters.

Irodalomjegyzék

- [1]: Stépán Gábor: Appell-Gibbs Equations for classical wheel shimmy, 2002
- [2]: Stépán Gábor: Chaotic Motion of Wheels, 1991
- [3]: Schwab, A. L, Meijaard, J. P., Kooijman, J. D. G. : Some recent developments in bicycle dynamics, 2007
- [4]: Takács Dénes, Stépán Gábor, Hogan, J.H.: Isolated large amplitude periodic motions of towedrigid wheels, 2008
- [5]: Plaut, R.H.: Rocking instability of a pulled suitcase on two wheels, 1996
- [8]: Béda Gy, Stépán G.: Analitikus mechanika, 2000
- [6]: Wiggings, Stephen: Introduction to Applied Nonlinear Dynamic Systems and Chaos, 1990
- [7]: Petrik O., Huba A., Szász G: Rendszertechnika, 1986

Függelék A: Anholonom rendszerek szabadságfokai

Az anholonom rendszerek mozgásának könnyebb értelmezéséhez vezessük be az alábbi fogalmakat. Ezek nem megszokottak a szakirodalomban, de ebben a dolgozatban használni fogjuk őket. A hely szűke miatt a definíciókat csak szövegesen fogalmazzuk meg, de van mód azok precíz, formalizmussal való bevezetésére is. Azzal az ötlettel kezdjük, hogy az anholonom rendszerek leírásához kétféle szabadsági fokot vezetünk be.

Definíció: Egy mechanikai rendszer *geometriai szabadsági fokainak száma* a lehetséges geometriai helyzeteket leíró független koordináták száma. Jele f_g .

Definíció: Egy mechanikai rendszer *kinematikai szabadsági fokainak száma* egy megadott geometriai pozícióban a sebességállapotot leíró független koordináták száma. Jele f_k .

Ez a két fogalom szervesen kapcsolódik a megszokott szabadsági fok és kényszer fogalmainkhoz, amint a következő néhány, könnyen belátható tétel is mutat.

Tétel: Egy szabad anyagi pontnak 3-3, egy szabad merev testnek 6-6 geometriai illetve kinematikai szabadsági foka van.

A szakirodalomban nem tekintik anholonom kényszernek azt a kényszert, amely integrálható. Megjegyezzük, hogy szerencsésebb ettől eltekinteni, ugyanis ha integrálható is a kényszer, megjelenik egy integrációs konstans, ami végeredményben újabb szabad változót jelent. A sebességekre megadott kényszer, amit tehát ebben a dolgozatban integrálhatóságtól függetlenül anholonom kényszernek nevezünk, nem képes pótolni egy geometriai kényszert.

Tétel: Egy elsőosztályú (vagyis egyetlen skaláregyenletből álló) anholonom kényszer a rendszerből egy kinematikai szabadságfokot vesz el, a geometriai szabadsági fokok számát nem változtatja.

Tétel: Egy elsőosztályú holonom kényszer a rendszerből egy geometriai és egy kinematikai szabadságfokot vesz el.

A fenti három megállapításból adódik az alábbi két tétel:

Tétel: Holonom mechanikai rendszerek kinematikai és geometriai szabadsági fokainak száma megegyezik, és ez egyenlő a szabadsági fokok szokásosan értelmezett számával is.

Tétel: Anholonom mechanikai rendszerek kinematikai szabadsági fokainak száma

alacsonyabb, mint a geometriai szabadsági fokok száma.

A két fogalom természetessége a rendszer mozgásegyenletével kapcsolatban is látszik:

Tétel: Egy mechanikai rendszer geometriai és kinematikai szabadsági fokainak összege egyenlő a rendszert leíró elsőrendű differenciálegyenlet állapotterének dimenziójával.

Mielőtt vizsgálódásunkat a konkrét rendszerünkre irányítanánk, nézzünk néhány példát a kétféle szabadsági fokra:

- A merev testek szabadsági fokai: $f_g=6$; $f_k=6$
- A csúszka és csukló szabadsági fokai: $f_g=-5$; $f_k=-5$
- A hengerdugattyú szabadsági fokai: $f_g=-4$; $f_k=-4$
- Az elsőosztályú anholonom kényszer szabadsági foka: $f_g=0$; $f_k=-1$
- A térbeli általános gördülés szabadsági foka: $f_g=-1$; $f_k=-3$

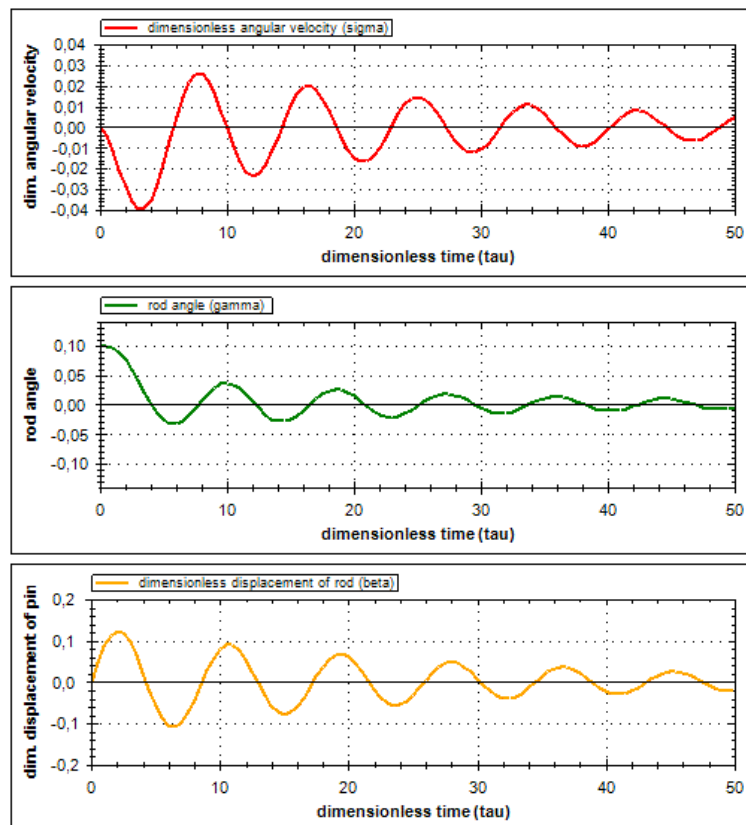
A szakirodalomban némely helyen a geometriai, néhol pedig a kinematikai szabadságfokot nevezik az anholonom rendszer szabadsági fokának. Esetleg a kettő átlagát veszik, ilyen módon fél szabadsági fokok is megjelennek. Azonban éppen a két paraméter miatt a fenti definíció többet mond. Ugyanis még egy másfél szabadságfokúnak hívott rendszer is lehet például két geometriai és egy kinematikai, de lehet három geometriai és nulla kinematikai szabadságfokból összeálló rendszer.

Az is biztos azonban, hogy a kétféle szabadsági fok használata csak anholonom rendszerekenél célszerű, egyébként felesleges bonyolítás.

Függelék B: Futási eredmények

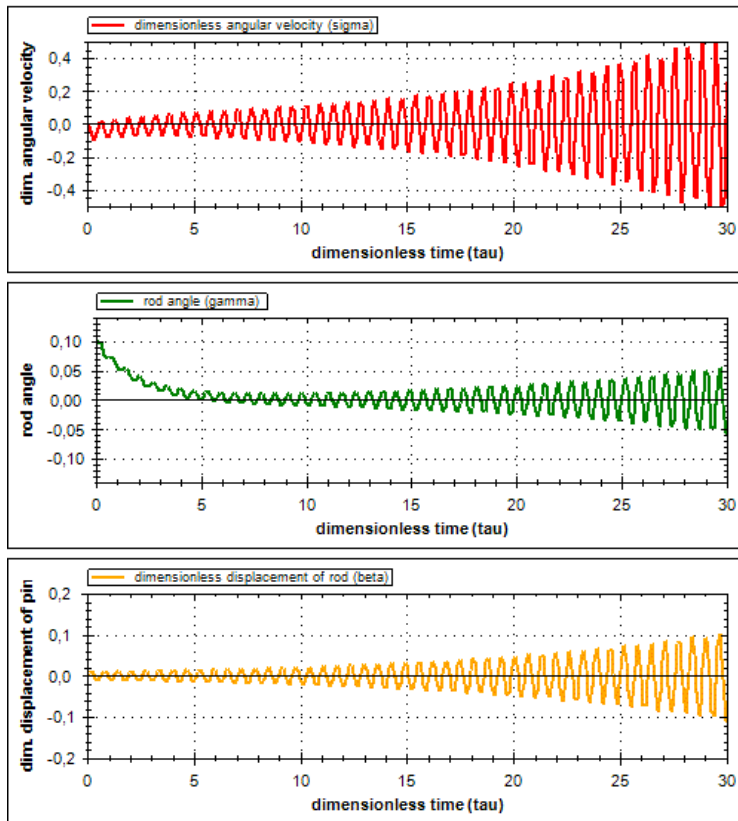
Az alábbi grafikonokon néhány jellegzetes beállítás futási eredményét figyelhetjük meg.

Az első grafikon egy csillapodó rezgést mutat be viszonylag kis merevségű csillapítás nélküli, pozitív szöggel megdöntött királycsapú modell esetében. A felső grafikonon a vonórúd szögsebességét, a középsőn a szöghelyzetét, míg az alsón a pozícióját ábrázoltuk.



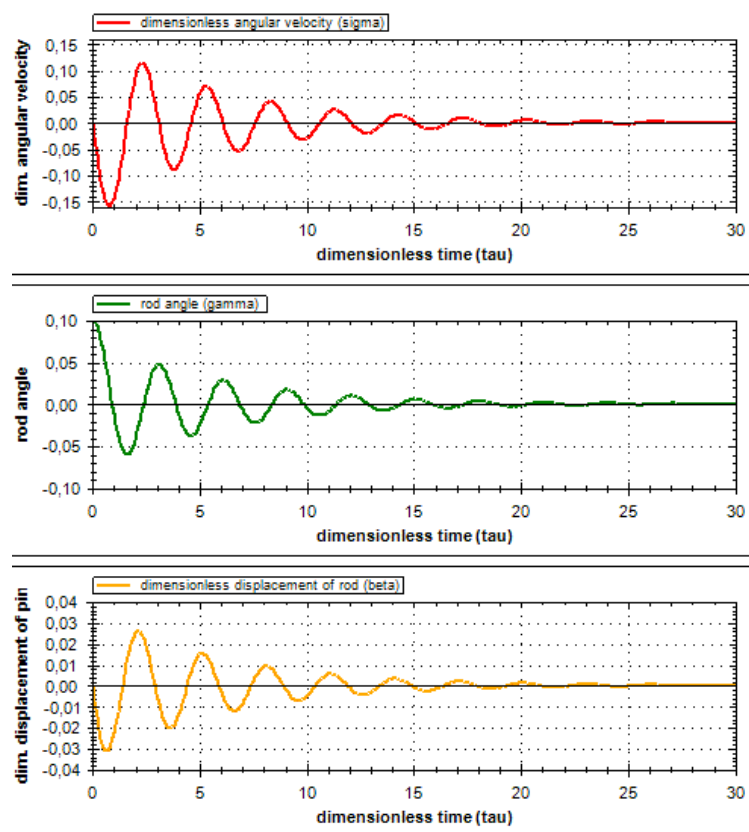
6. diagram: Stabilitás vontatás közben

A második diagram egy instabil helyzetet mutat be nagy merevségű csappal, csillapítás nélkül, pozitív irányban megdöntött királycsappal. Jellegzetes, hogy a valós gyök miatt a szöghelyzet először lecsengő helyzetet mutat, majd a rezgés lassan megnő és instabilitást okoz.



7. diagram: Instabilitás vontatás közben

A harmadik diagram negatív szögű királycsap mellett készült, csillapítással, abban a különleges helyzetben, mikor a rendszert a bicikli első kerekéhez hasonlóan toljuk.



8. diagram: Stabilitás a kerékpár első kerekénél