Stability and bifurcation analyses of two-wheeled trailers

Ádám Bálint Fehér
Mechanical Engineering Modelling MSc, Major in Solid Mechanics, 2023/2024/I.
Supervisor: Hanna Zsófia Horváth, PhD student, hanna.horvath@mm.bme.hu

1 Introduction

The two-wheeled trailers are one of the most important means of transportation in the automotive industry, therefore their safety and stability are essential. In this thesis, the manners of stability and its influencing factors were thoroughly investigated. Possible control solutions were proposed, that can increase the stable regions of the vehicle. A non-smooth spatial mechanical model with four degrees of freedom was implemented, see Fig. 1. Controlling brake forces, which are proportional to a derivative control gain, are introduced into the control loop, that activates only in the nonlinear region of the yaw rate. The time-delayed case of the controller was also investigated. The effect of smoothing functions was also examined with the help of an event-handling algorithm.

To validate the theory, experiments were carried out on a down-scaled trailer model, that was designed by the Department of Applied Mechanics.

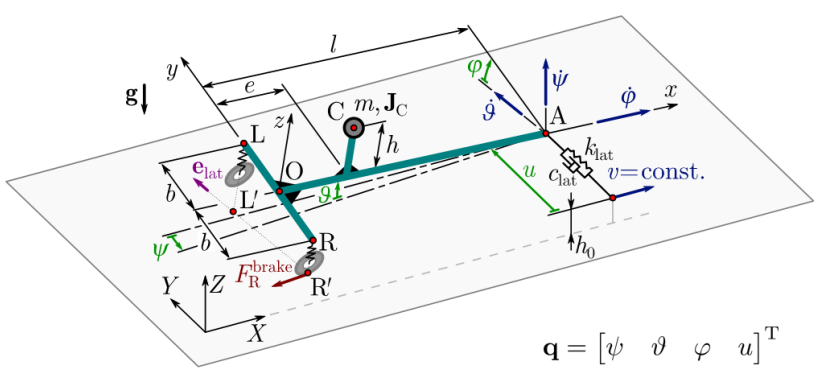


Figure 1: The mechanical model of the investigated trailer Horvath, H. Z., Feher,A.B. and Takacs D. [2023], 'Stability control of two-wheeled trailers'

2 Applied methods

The equations of motion were derived by using the Lagrange equation of the 2nd kind. The active forces of the system are taken into account through the virtual power law. For the nonlinear equations the *DDE Biftool* package was used, that creates bifurcation diagrams based on the so-called pseudo-arc-length method. For the numerical simulation of the system's generalized coordinates the well-known *ode45* for the delayed case the *dde23* functions were used. The event handling works based on an algorithm developed in terms of this thesis. The motion of the measurement device was captured via the OptiTrack system, from which the data are exported and evaluated based on basic trigonometric relations.

3 Results

The introduction of the control brake force in the nonlinear region significantly reduced the unsafe bistable region and at greater derivative control gain values another, small bistable zone appeared, that increased the global stability of the system. On the bifurcation diagram in Fig. 2, D denotes the derivative control gain value of the brake force control.

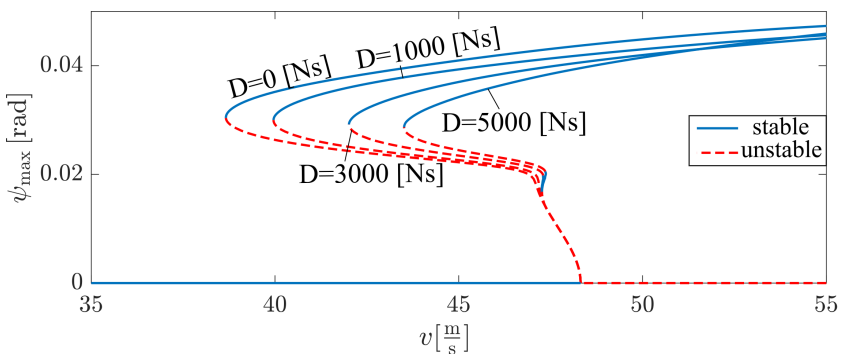


Figure 2: Bifurcation diagram of the yaw angle for different derivative control gain values of the brake force

The theoretical, numerical and experimental, measured results show a good match, especially in terms of kingpin lateral displacement u and the frequency of the trailer's vibrations, see Fig. 3.

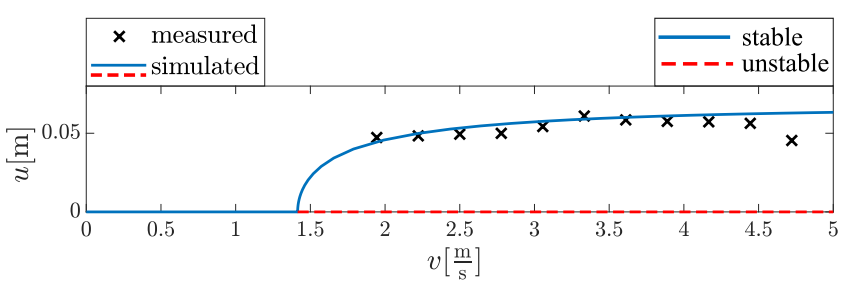


Figure 3: Comparison of measured and simulated bifurcation diagram

4 Summary

The control algorithms increase the stability of the trailer, even in the time-delayed case, therefore it is beneficial to implement brake control on towed trailers. The event handling showed that the use of smoothing functions stands on stable ground by choosing the appropriate smoothing parameters. The simulation results are verified with measurements, there are however certain deviations, that could corrupt the results. A future task could be to eliminate these errors and design a measurement system that operates equipped with a brake force control mechanism.

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. – www.mm.bme.hu

Fold bifurcation prediction through neural networks

ÁKOS DEBRECZENI
Mechanical Engineering Modelling MSc, Major in Solid Mechanics, 2023/2024/I.
Supervisor: Dr. Giuseppe Habib, associate professor, habib@mm.bme.hu

1. Introduction

Bifurcations are present in all walks of life and are widely used. In dynamical systems, some critical event usually occurs near the bifurcation points where new stable states of the system appear or disappear. Their knowledge is essential during the design phase to avoid unexpected events occurring. Nowadays, artificial intelligence is gaining popularity for its endless applications. In this thesis, neural networks are exploited to study bifurcation. To do this, the neural network must be able to detect equilibrium states with as much accuracy as possible, as generally and as sensitively as possible. In this thesis, two neural networks were trained for this purpose, one focusing on the speed of training and the other on the extraction of more detailed information, in this case the indication of the stability type of the equilibrium states. Both networks were then validated both on a general dynamical system and, in the more critical case, near a bifurcation point.

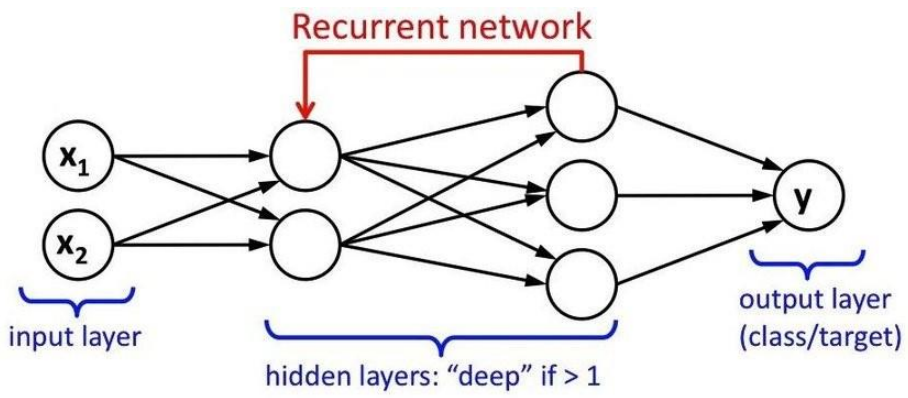


Figure 1 *– structure of a recurrent neural network*

2. Applied methods

The neural networks were trained on dynamic systems where a material point moves either along a planar track, or on a 3D surface. The motion of the particle was calculated using the 2nd kind Lagrange equation. In both cases, the type of the implemented network was Long-Short Term Memory (LSTM), which gave the possibility to consider a larger part of the motion due to its memory size. In the planar case (particle on a track), the strength of the network was the low training time, while the 3D training allowed not only to find the equilibrium points, but also to tell if they were stable or unstable in case of nodes.

3. Results

The neural networks were tested on a general 3D surface.

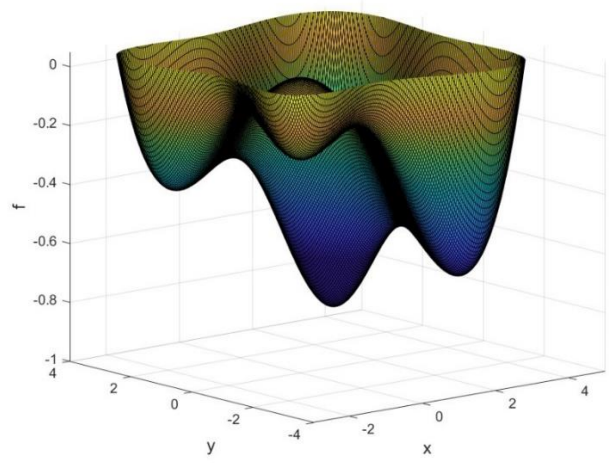


Figure 2 *– general surface for validation*

The network is able to distinguish stable and unstable node, saddles are predicted according to the direction of approach. It is important to note that the neural network only exploit trajectories passing through the equilibrium, without requiring the particle to sattle there.

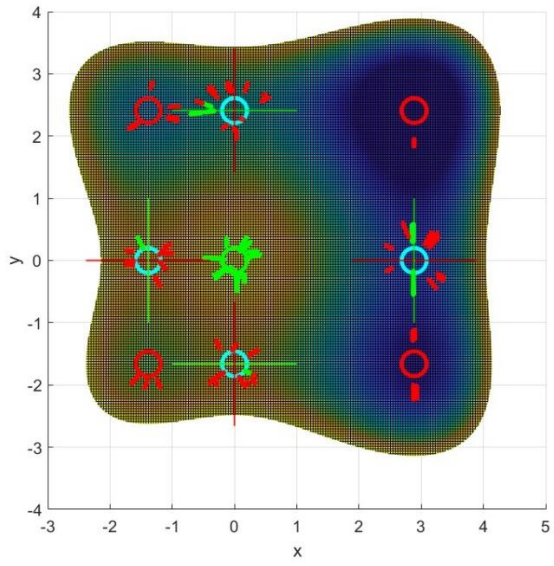


Figure 3 *– validation results*

4. Summary

With neural networks the prediction of equilibrium points of a dynamic system is possible. With further improvements the next goal could be the prediction of bifurcation points, using the combination of convolutional and LSTM neural networks.

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. www.mm.bme.hu

Dynamical analysis and time-domain based simulations of milling operations

Levente Balogh

Mechanical Engineering Modelling MSc, Major in Solid Mechanics, 2022/2023/II.

Supervisor: Dr. Dávid Hajdu, assistant professor, hajdu@mm.bme.hu

1 Introduction

In the realm of machining operations, understanding the dynamic intricacies of milling processes is paramount for achieving precision and efficiency. This thesis, titled "Dynamical Analysis and Time-Domain Simulations of Milling Operations," embarks on a comprehensive exploration that seamlessly integrates theoretical analyses, simulation algorithm development, and practical validations. From the foundational stability analysis of delay differential equations to the meticulous development of a versatile simulation program, this research endeavours to enhance our comprehension of milling dynamics.

2 Applied methods

Numerous factors have been considered in crafting and advancing the simulation. Advanced mathematical modelling is employed to accurately represent chip removal in milling. This involves transforming equations into modal coordinates and systematically testing specialized cutting forces. Machined surfaces are evaluated through surface analysis, while insights are derived from experiments involving various tools and worn edges.

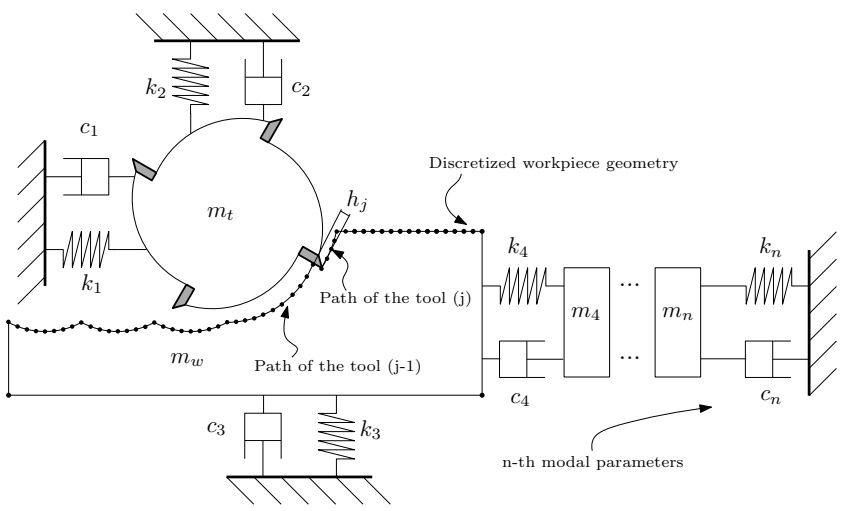


Figure 1: Basic concept of the simulation

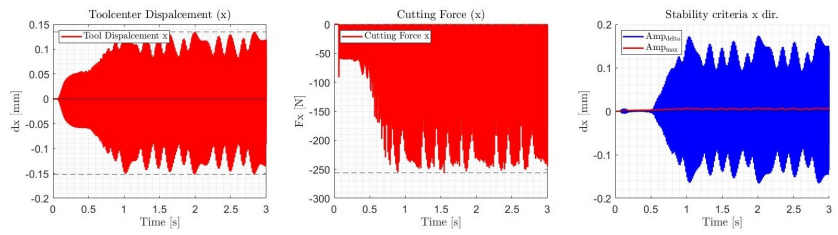


Figure 2: Simulation results: displacements, forces and stability

3 Results

The simulation allowed to reproduce periodic solutions in the stable case and semi-discretization stability maps. This implies that there will be many other effects to consider in this kind of research.

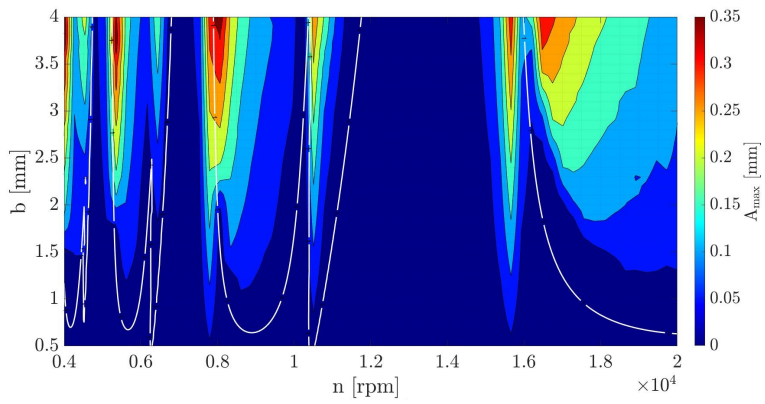


Figure 3: Colored amplitude map compared with the stability map

It produced good results compared to the measurement and proved that it is necessary to take the runout effect into account for stability.

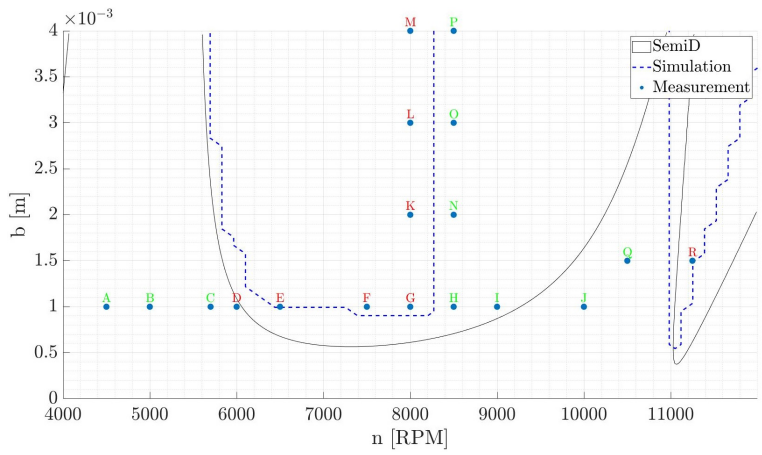


Figure 4: Stability map with the parameters from measurement

4 Summary

The simulation proved versatile, demonstrating its effectiveness in predicting stability, resonance, and surface roughness while accommodating variations like tool eccentricity and chip thickness. The results underscore the program's ability to mirror reality and highlight the importance of accounting for subtle effects in milling simulations. This research contributes valuable insights to the field, providing a solid foundation for further advancements in milling operation simulations and enhanced manufacturing processes.

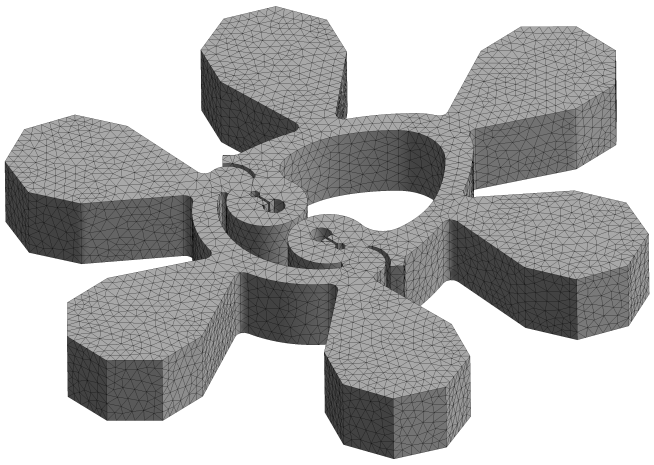
Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. – www.mm.bme.hu

Kísérleti modális analízis eredményeinek illesztése végeselemes szimulációkkal

Bereczky Botond Kornél
Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Dr. Magyar Bálint Balázs, adjunktus, magyar@mm.bme.hu

1. Bevezetés

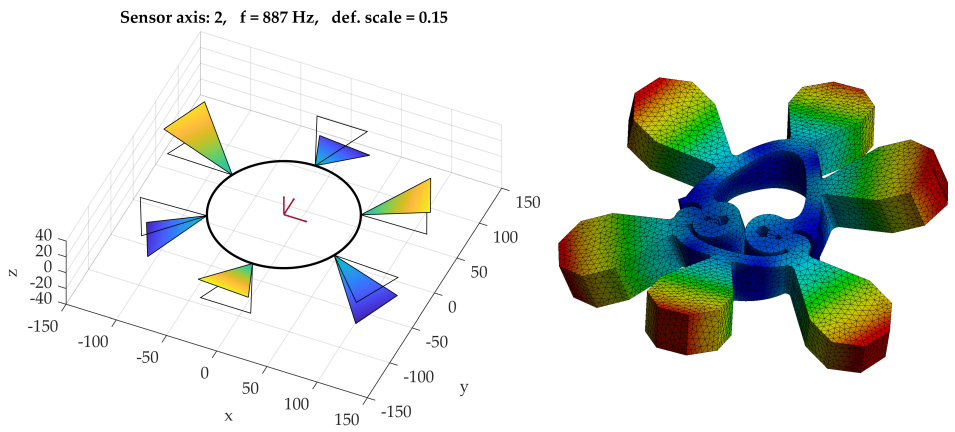
A modális analízis különböző módszereivel meghatározhatók egy rendszer dinamikai tulajdonságai, amelyek pontos ismerete nagy jelentőséggel bír az elvárt és biztonságos működési tartomány megállapításában. A mérnöki gyakorlatban alkalmazott szerkezetek javarészt külön gyártott, egymással a szerelés során összekapcsolt alkatrészekből épülnek fel. Ezen alkatrészek közötti kontaktok jelentősen befolyásolják a rendszer modális tulajdonságait. A jelenség bemutatása érdekében a szakdolgozat egy monolit tömbből legyártott, valamint három másik, az elsővel megegyező geometriájú, de két részből különböző mértékű túlfedéssel összeszerelt próbatest modális analízisének leírását tartalmazza.



1. ábra. A monolit próbatest VEM modellje

2. Alkalmazott módszerek

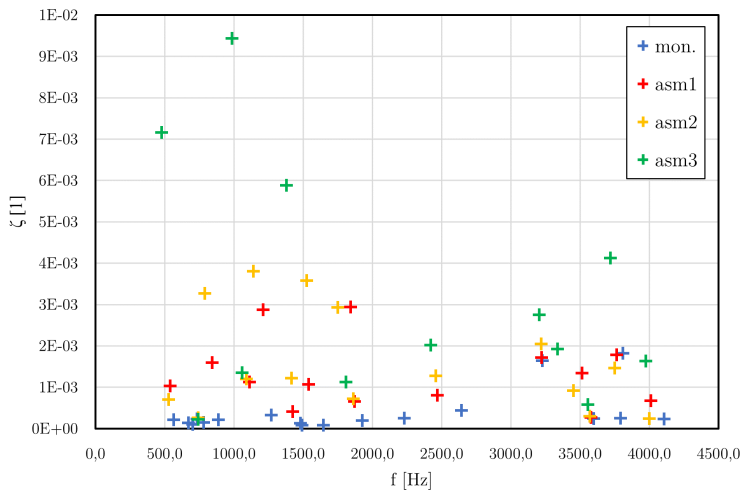
A kidolgozás során Ansys szoftverben felépítésre kerül egy végeselemes modell a monolit alkatrész CAD geometriáját felhasználva. E modellt ezután valós körülmények között kapott mérési eredményekhez illesztem. A kísérleti modális analízis során gyűjtött digitális jeleket MATLAB környezetben írt program segítségével dolgozom fel, és ebben számolok, jelenítek meg frekvenciaátviteli függvényeket. Egy megfelelően megtervezett modális háló felvétele és azon a szükséges mérések elvégzése után megjelenítem a próbatestek első 18 lengésképét, amelyeket összehasonlítok az Ansysban kapott eredményekkel. A rendelkezésre álló FRF-ek vizsgálata során továbbá megállapítom a négy különböző esetben a rendszer módusainak sajátfrekvenciáit és csillapításait. A kapott eredmények összehasonlításával képet kapok arról, hogy minként befolyásolja a szerelésből adódó kontakt a próbatest modális tulajdonságait.



2. ábra. Egy tetszőleges lengésképmegjelenítése kimért adatok alapján MATLAB-ban, illetve a szimulált végeselemes eredmény

3. Eredmények összefoglalása

Az eredmények kiértékelése alapján az a következtetés vonható le, hogy az összeszerelt próbatestek esetén jelentősen nagyobb a relatív csillapítási tényező értéke. Emellett minél kisebb a túlfedés, annál nagyobb ez a növekedés. Megállapítható továbbá, hogy a sajátfrekvenciák az előfeszítés mérséklésével jellemzően csökkennek, ám ez a változás a legtöbb esetben nem számottevő a monolit próbatesttel összevetve sem. A mérési adatokból ábrázolt lengésképek esetén sem tapasztalható a négy esetben jelentős jellegbeli eltérés egymáshoz képest.



3. ábra. Az egyes módusok frekvenciái és relatív csillapítási tényezői a négy vizsgált esetben

Összességében dolgozatomban sikerült VEM szimulációt illesztenem modális analízis kísérleti eredményeihez, valamint kimértem a szerelésből adódó kontakt hatását a modális tulajdonságokra egy adott próbatest sorozaton.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Redundáns kényszerek kezelése többtest-dinamikai rendszerek szimulációjában

CSENDE BÁLINT
Gépészmérnöki MSc, Alkalmazott Mechanika Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Bodor Bálint, doktorandusz, bodor@mm.bme.hu

1. Bevezetés

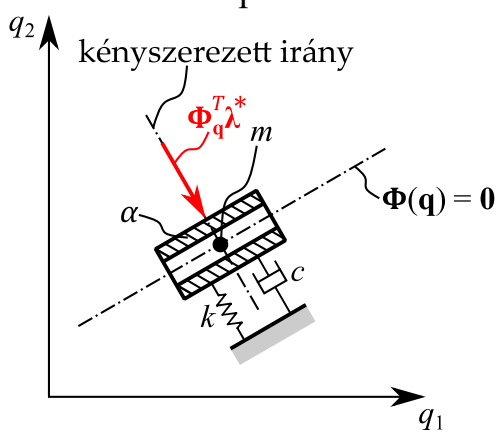
A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy a mérnökök olyan problémával találják szemben magukat, ahol a kényszeregyenletek közt lineárisan összefüggő egyenletek szerepelnek. A klasszikus kanonikus és elsőfajú Lagrange-egyenletek esetén a nehézséget ekkor az jelenti, hogy a Jakobi mátrix rangja lecsökken. Ebből kifolyólag a szimulációk során az együttható mátrix inverze nem létezik, így a szimuláció összeomlik. További gondot okoz a kinematikai szingularitás, amelynek hatására egy izolált pontban hirtelen megnő a szabadsági fokoknak a száma, azaz lokális redundanciáról beszélhetünk. A diplomatervem keretein belül olyan módszereket mutatok be, amelyek alkalmasak a redundáns geometriai kényszerek kezelésére.

2. Alkalmazott módszerek

A mechanizmusok mozgáspályájának meghatározása egy kényszerezett optimalizációs feladat. A penalty módszer a minimalizálni kívánt célfüggvényhez hozzáadja az egyes kényszerek négyzeteinek skalárral vett szorzatát, ezzel biztosítva az együtthatómátrix inverzének létezését. A penalty formula:

$$\left(\mathbf{M}+\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{q}}^{T}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{q}}\right)\ddot{\mathbf{q}}=-\mathbf{C}-\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{q}}^{T}\boldsymbol{\alpha}\left(\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}+\boldsymbol{\Omega}^{2}\boldsymbol{\Phi}+2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\mu}\dot{\boldsymbol{\Phi}}\right), \quad (1)$$

ahol az $\boldsymbol{\alpha}$ penalty paraméter minél nagyobbra történő megválasztása garantálja a pontos eredményt. Ez azonban kondicionáltsági problémához vezethet, amelynek feloldására használható az első augmented Lagrange-formula (ALF1). A rendszerhez ekkor mesterséges tömeg, rugó és csillapító van kapcsolva. A mozgás ezáltal a kényszerezetlen irányban következik be, a kényszerezett irányban történő megmaradó mozgást a $\boldsymbol{\lambda}^{*}$ nagyságú erő negálja. A módszer explicit összefüggéssel becslést ad a Lagrange multiplikátorok értékére egy megfelelő iterációs sémával. A vonatkozó fizikai képet szemlélteti az *1. ábra*.



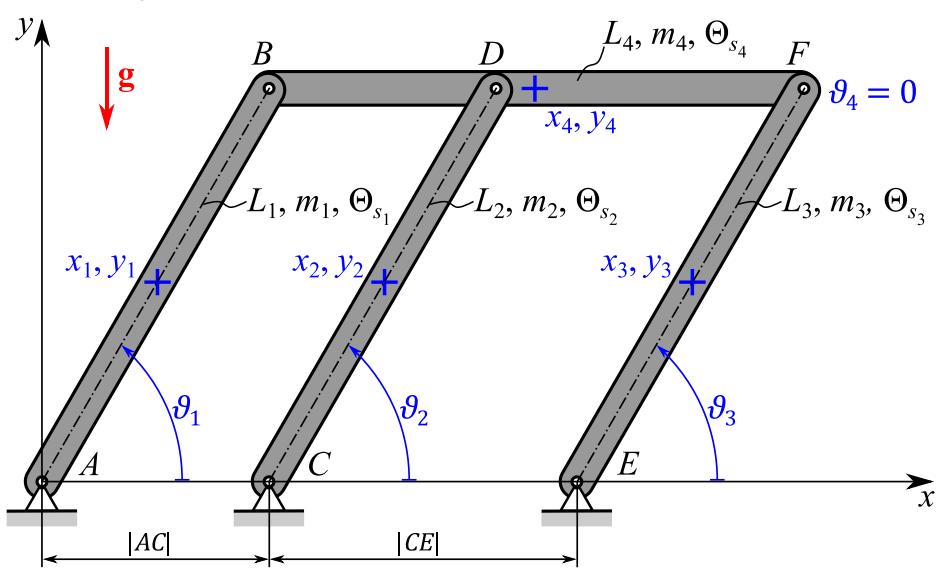
1. ábra Az első augmented Lagrange formula geometriai interpretációja

Hasonlóan működik a második augmented Lagrange-formula (ALF2), amely a Hamilton-féle kanonikus egyenletekből indul ki.

Végül, tanulmányoztam a Moore-Penrose féle általánosított inverzet is, amely a szinguláris érték felbontáson alapul. A lényeg, hogy általánosított inverze bármilyen mátrixnak létezik. Ebben az esetben a minimális normájú megoldást lehet kapni.

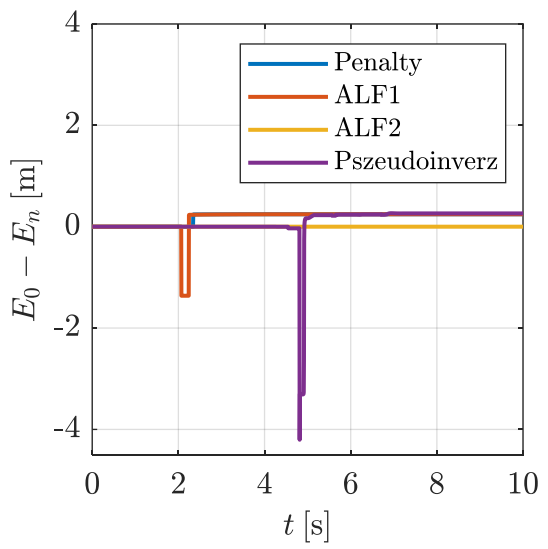
3. Eredmények

A numerikus szimulációk során többek közt a *2. ábra* által illusztrált hatcsuklós mechanizmuson teszteltem az egyes módszereket, amelynél a vízszintes helyzetben kinematikai szingularitás is jelen volt.



2. ábra A vizsgált mechanizmus

Az eredmények kiértékelése során megvizsgáltam a futtatási időt, a numerikus integrálás hibáját, a penalty paraméter és az iterációk számának hatását. Megfigyeltem, hogy a többszörösen előforduló szingularitás numerikus instabilitást eredményez. A mechanikai összenergia változását mutatja a *3. ábra*.



3. ábra A mechanikai összenergia változása

4. Összefoglalás

Összességében, a repetitív szingularitás alapján a második augmented Lagrange-formula bizonyult a legrobusztusabb módszernek, amely az elsőrendű deriváltaknak köszönhető.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Parametric study of elastic-plastic constitutive models coupled with material damage

Ádám DACHER

Mechanical Engineering Modelling, Major in Solid Mechanics, 2023/2024/I.

Supervisor: Dr. Attila Kossa, Associate Professor, Deputy Head of Department, kossa@mm.bme.hu

1 Introduction

The main objective of this thesis is to design a method for the parameter fitting of damage models. This entails the simulation of material behavior first, generating virtual experimental data with it, and then using the results to calibrate the models parameter to produce similar results to the original.

2 Research

The first model created utilized a simple strain-driven elastic-plastic model in a 1D space. Next, rate-dependency was introduced. Then, 3D deformations were investigated in small-strain ($\varepsilon < 5\%$) and finite-strain ($\varepsilon > 5\%$) formulations. Lastly, the DIEM (Ductile Damage Initiation and Evolution Model) was simulated.

One of the main additions in the DIEM is that the stress tensor at the end of each iteration is modified as

$$D_{n+1} = \frac{1 - \exp\left[-\alpha \frac{u^p_{n+1}}{u^p_f}\right]}{1 - \exp[-\alpha]} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = (1 - D_{n+1}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} \, .$$

The resulting α-dependence of the von Mises stress in my simulation is illustrated in Figure 1.

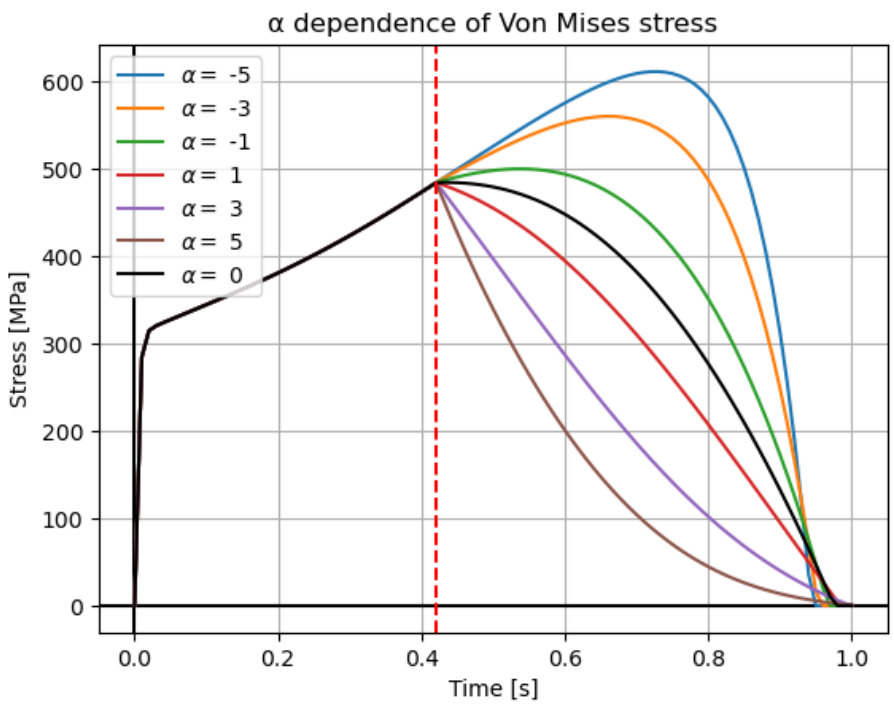


Figure 1: α dependence of the von Mises stress, DIEM

The material models simulation is followed by the parameter fitting, for which two models were used, the 1D rate-dependent model and the final DIEM. This final model has 11 parameters. The method requires initial guesses of the parameters alongside the stress data.

3 Results

The final simulation and fitting were performed with the DIEM. The deformation is visualized on Figure 2. The result of the initial simulation, and the one using the parameters found by the fitting algorithm are compared on Figure 3. The Python programming language with the SciPy library was used to perform the simulation.

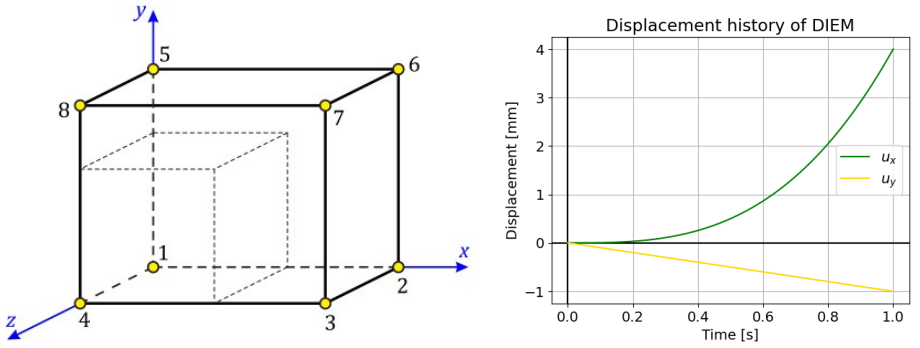


Figure 2: Visualization and graph of the displacement DIEM

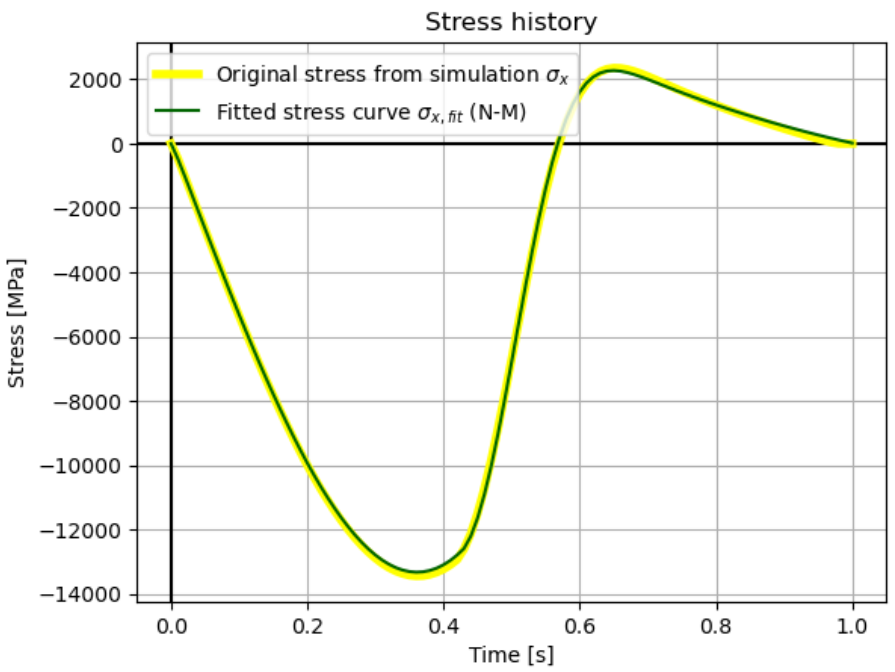


Figure 3: Comparing results with fitted parameters to original data, DIEM

The method is successful in giving parameters that yield a result similar to the original one. However, the parameters are not the same, which may model the material's behavior less accurately for other kinds of deformations. Possible improvements could be using multiple different deformations for the fitting algorithm, or using models other than the DIEM.

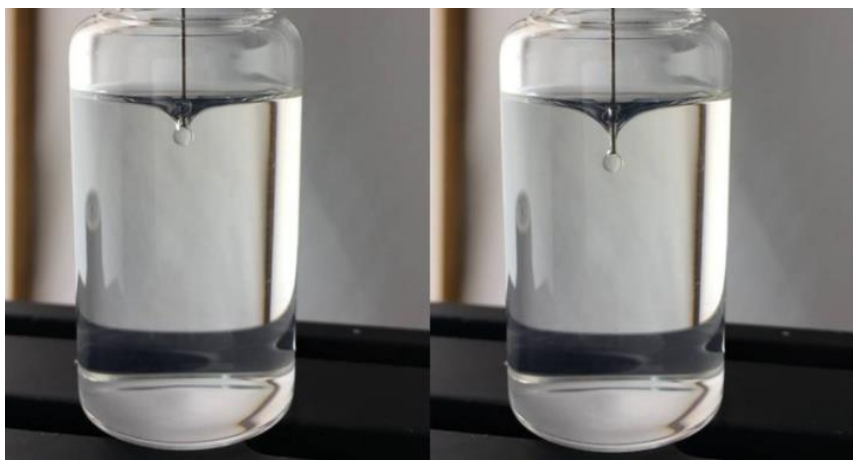
Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. – www.mm.bme.hu

Véges méretek és az anyagi viselkedés hatása lágy anyagok tompa végű nyomóvizsgálatára

FARKAS ESZTER VIKTÓRIA
Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2017/2018/I.
Témavezető: Dr. Berezvai Szabolcs, adjunktus, berezvai@mm.bme.hu

1. Bevezetés

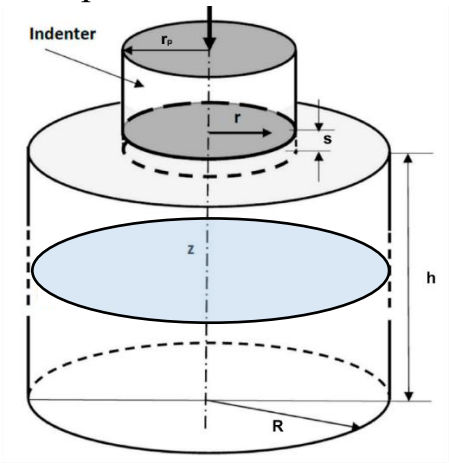
A lágy anyagok, köztük is elsősorban a hidrogélek napjainkban egyre szélesebb körű használatnak örvendenek többek között az orvostudományban vagy akár a modern mérnöki gyakorlatban. Mechanikai tulajdonságaik meghatározására egy bejáratott módszerek a különböző nyomóvizsgálatok. Ezek során általában egy fiolában elhelyezett mintát vizsgálunk, azonban az üvegcse véges méretei (szélesség, magasság) nagyban befolyásolják az anyag feszültségi- és deformációs állapotát. A szakdolgozatom fő célja ennek a mérethatásnak, emellett a különböző megfogások, anyagmodellek és nyomóeszközök hatásának vizsgálata.



1. ábra. Hidrogél nyomóvizsgálata

2. Alkalmazott módszerek

A dolgozat során ABAQUS szoftver segítségével futtattam végeselem szimulációkat a különböző geometriák vizsgálatára. Ez viszonylag nagy számú szimuláció elkészítését igényelte, ezek generálására és automatikus futtatására és kiértékelésére egy Python scriptet alkalmaztam. Az eredményeket MATLAB segítségével ábrázoltam. A kiértékelés automatizálásra a teljes feszültség- és deformációmező vizsgálata helyett csak adott mélységek mentén kapott adatok kerültek összehasonlításra.

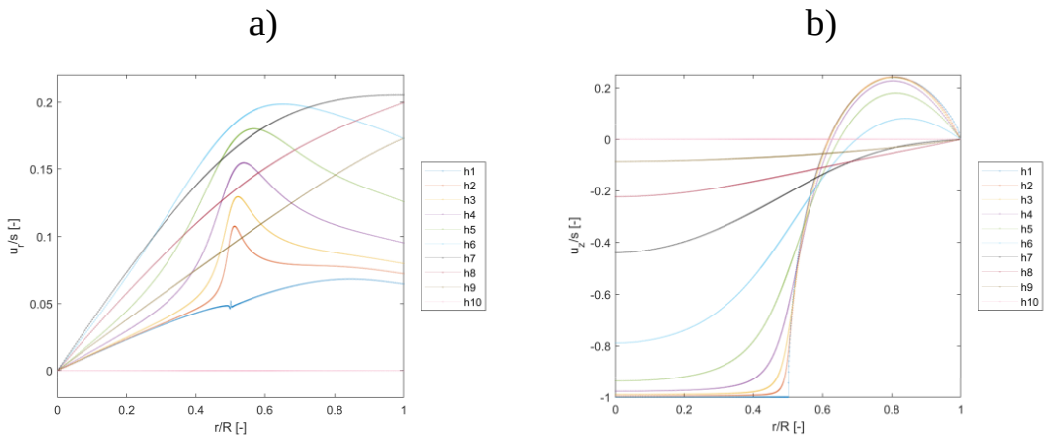


2. ábra. A VEM geometria és paraméterei. A kékkel jelölt sík egy lehetséges adatleolvasási sík.

A végeselem modellem verifikációjára egy analitikus modellt használtam.

3. Eredmények

Elsősorban a próbatestekben fellépő radiális és axiális elmozdulás komponenseket és a HMH egyenértékű feszültségeket értékeltem ki. A mérethatás a különböző megfogások hatásának felerősítésében nyilvánult meg: csak az alsó felület megfogása esetén a próbatesten „hordósodás” figyelhető meg, elsősorban a radiális elmozdulásokon, alsó és oldalsó megfogás esetén a felső felületen figyelhető meg jelentős axiális deformáció.



3. ábra. A különböző peremekre jellemző elmozdulásmező szélsőséges esetekben: a) alsó felület megfogása esetén a hordósodás b) alsó és oldalsó felület megfogása

Ezek alapján meghatároztam a különböző peremfeltételekre vonatkoztatható ideális méreteket: a próbatest ideális magassága ez esetben legalább a próbatest rádiuszának 2,5-szerese (így a benyomódás mélységének 250-szerese), a nyomóeszköz sugara pedig alsó megfogás esetén a próbatest sugarának 1/20-a és 1/30-a, alsó és oldalsó megfogás esetén annak 1/25-e és 1/30-a közé kell esnie a peremek elhanyagolhatóságához. Emellett kis benyomódás esetén elegendően hasonló feszültségi- és deformációeredményeket kapunk lineárisan rugalmas és hiperelasztikus anyagmodellek használata esetén, illetve ebben az esetben a nyomószerszámon alkalmazott kis méretű lekerekítés is megfelelő pontosságú eredményeket ad a nyomóeszköz által okozott szingularitás eltüntetése mellett.

4. Összefoglalás

A vizsgálat során megállapításokat tettem a nyomóvizsgálat ideális geometriájának felállítására, illetve megállapítottam, hogy a szimuláció során végzett egyszerűsítések megfelelően pontos eredményeket adnak.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Methods of reducing vibrations of towed shimmying wheels

Szabolcs FARKAS

Mechatronical Engineer BSc, Specialisation in Mechanical Engineering Modelling, 2023/2024/I.

Supervisor: Hanna Zsófia HORVÁTH, PhD Student, hanna.horvath@mm.bme.hu

1 Introduction

The main goal of the study is to investigate different methods, specifically dampers and tuned mass dampers (short: TMDs), for preventing and reducing vibrations of towed, anholonomic systems that can undergo the so-called shimmying motion. Such a system can be seen in Fig. 1. The relevance of the topic is further highlighted by the common appearance of such systems in applications. Aircraft landing gears, vehicle trailers, or even wheels of shopping trolleys are like this.

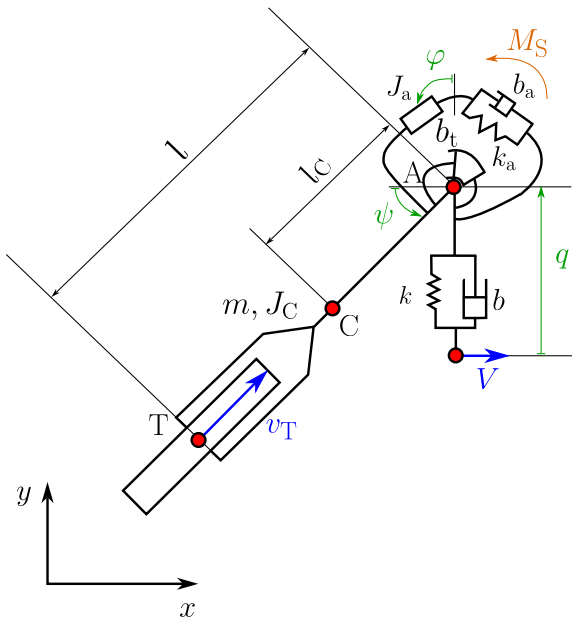


Figure 1: The mechanical model of a towed shimmying wheel.

The used mechanical model was one based on preceding literature. The centre of mass is located at point C. The wheel contact point is T, and system is towed with towing speed V. The king pin is supported by a lateral spring with stiffness k and a lateral damping with damping factor b. Around A, there are two solutions depicted: a single torsional damping b_t and a TMD system with a mass moment of inertia J_a, a rotational spring stiffness k_a and a damper coefficient b_a. These rotational ones will be applied separately, to see their effects. We also take into account, that torque M_S can arise from dry friction at the king pin. To describe the motion of the system, one can use the yaw angle ψ, the absolute angle of the TMD φ, and the lateral position of the king pin q as generalized coordinates.

2 Applied Methods

This thesis will utilize analytical and numerical stability analysis, the numerical one using two different methods, the linear *MDBM* and the nonlinear *DDE Biftool*. The latter will also be used for nonlinear bifurcation analysis. Simulations performed with *Matlab*'s *ode45* tool, both linear and nonlinear, verifying the results of the previous methods.

3 Results

- We have shown, that although torsional damping may be useful in some situations, lateral damping may still be required in the system when considering a larger speed range. Without that, at increasing velocity, an ever larger lateral damping would be required.

- The linearly unstable speed range can be significantly reduced with an appropriate TMD system, see Fig. 2. However, it is an inherently more complex system, a downside with regard to practicality.

- We have also shown, that in the presence of dry friction (i.e, when $M_S \neq 0$), so-called isolas, isolated periodic solutions exist. These are particularly dangerous, since they cannot be detected by employing linear stability analysis methods, yet in the presence of large perturbations, high amplitude oscillations can be generated by this effect. However with isolas, no instability is shown for small perturbations.

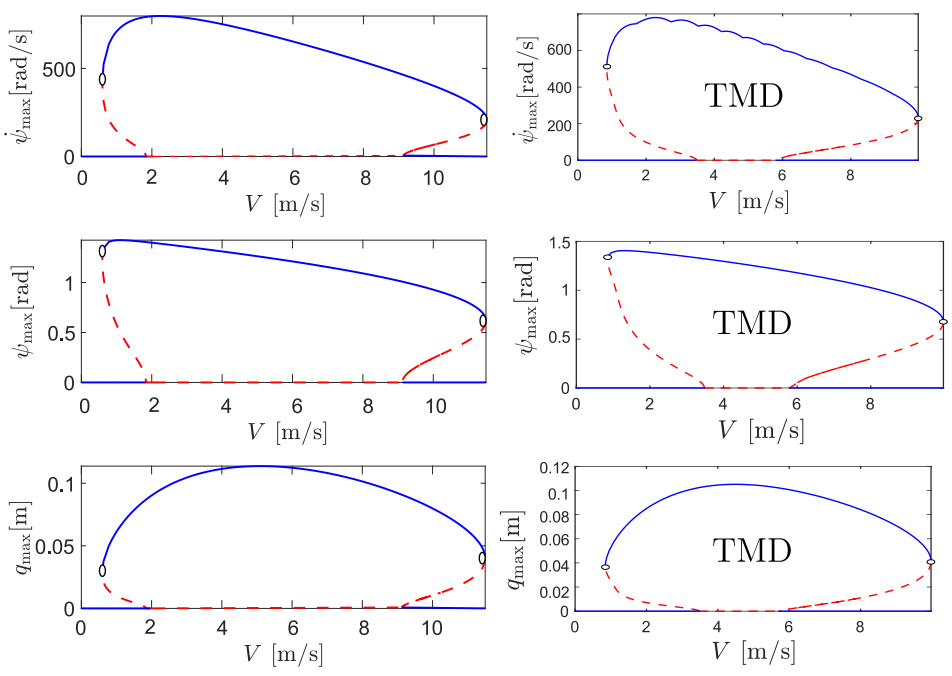


Figure 2: Bifurcation curves, when $M_S = 0\,[\mathrm{Nm}]$, $b_t = 0\,[\mathrm{Nms/rad}]$, $l = 0.015$ [m], $b = 0.5$ [Nm/s]. The left panels correspond to the system without TMD, the right panels to the system with TMD (i.e., $k_a = 0.004\,[\mathrm{Nm/rad}], b_a = 8.1715 \cdot 10^{-6}\,[\mathrm{Nms/rad}]$ and $J_a = 0.05\,J_C$).

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. – www.mm.bme.hu

Változó fordulatszámú esztergálás stabilitás vizsgálata

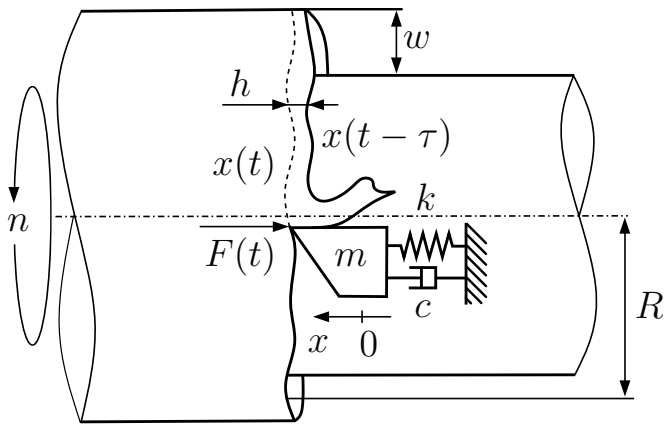
Herczeg Dávid

Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2023/2024/I.

Témavezető: Dr. Bachrathy Dániel, egyetemi docens, bachrathy@mm.bme.hu

1. Bevezetés

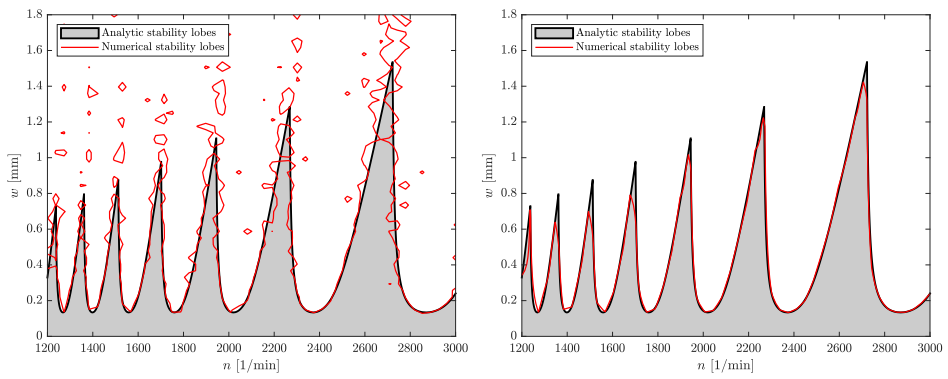
Szakdolgozatom fő témája a forgácsolási folyamatok során fellépő chatter jelenség és annak egyik megelőző eljárásának a változó fordulatszámú esztergálásnak (SSV) stabilitás vizsgálata volt, amelyhez szükséges volt a rendszer dinamikai tulajdonságainak és a szerszám erőkarakterisztikájának meghatározása.



1. ábra. Esztergálás 1 DoF mechanikai modellje

2. Alkalmazott módszerek

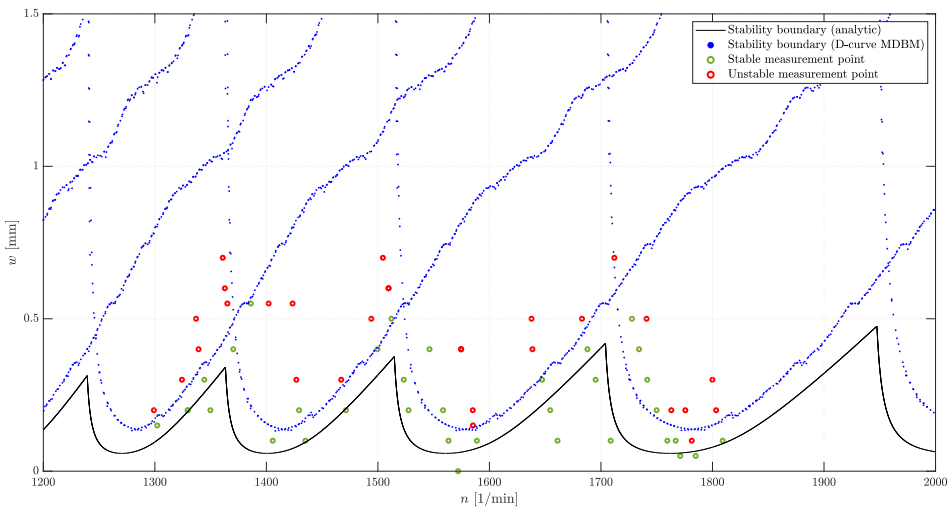
A rendszer stabilitásának vizsgálatát először konstans fordulatszámú (CSS) esetre tettük meg analitikus és numerikus módszerekkel, idő-és frekvenciatartományban. Numerikus esetben a karakterisztikus egyenlet és a mért átviteli függvények segítségével előállítottuk a CSS stabilitási görbéket egy többdimenziós felezőmódszert alkalmazva (MDBM). Numerikusan pedig időtartományban a szemi-diszkretizáció (SDM) és az implicit-altér iteráció (ISIM) módszerek kombinálásával egy változó fordulatszámú esztergálás vizsgálatára is alkalmas módszert dolgoztunk ki.



2. ábra. Analitikus és numerikus stabilitási térképek összehasonlítása különböző iteráció és altér méretekkel

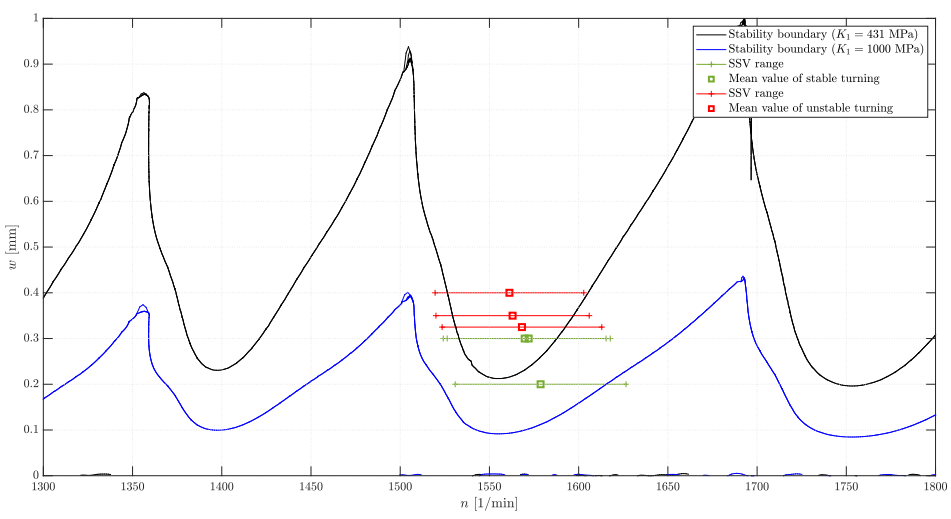
3. Eredmények

A CSS esetében a forgácsolási együttható finomhangolásával a mérések a szimulációval kielégítő egyezést mutattak.



3. ábra. CSS stabilitási térkép analitikus, numerikus és mérési adatokkal

Az SSV alkalmazásával a szimulációk és a mérések során is beláttuk, hogy a stabilizáló hatás érvényesült.



4. ábra. SSV stabilitási térképek numerikus és mért adatokkal

Egy további optimalizációs lépéssel pedig megállapíthattuk az elméletben megvalósítható SSV paramétereket.

4. Összefoglalás

A konstans fordulatszámmal végzett stabilitás tesztek megegyező eredményt mutattak a numerikus predikciókkal. Változó fordulatszámú esetre pedig szimulációkkal és mérésekkel is beláttuk az SSV stabilizáló hatását. Jövőbeli vizsgálatainkhoz azonban fontosnak tartjuk az erőkarakterisztika újramérését.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Korlátolt beavatkozású biztonságkritikus szabályzás alkalmazása járműfékezésre μ-split felületen

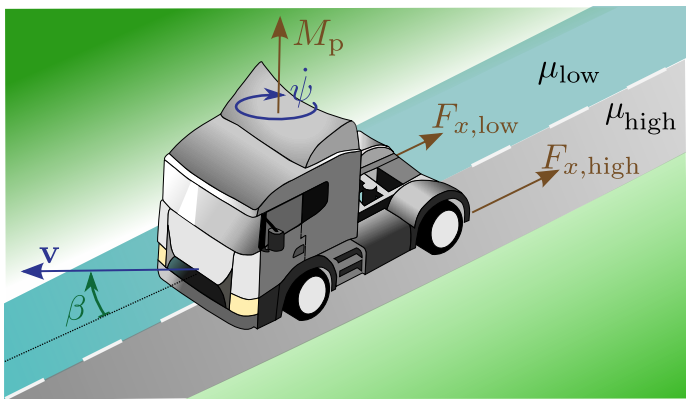
Gácsi László

Gépészmérnöki MSc Alkalmazott Mechanika Specializáció, 2023/2024/I.

Témavezető: Dr. Kiss Ádám, tudományos segédmunkatárs, kiss_a@mm.bme.hu

1. Bevezetés

A járműirányítás területén az egyik legveszélyesebb szituáció a μ-split felületen fékezés, hiszen ekkor a jármű bal és jobb oldali kerekei különböző súrlódási tényezőjű felületen fékeznek, a jármű függőleges tengelye körül perdítőnyomatékot generálva. Ennek következményeként olyan mértékben megnőhet a jármű függőleges tengelye körüli $\dot{\psi}$ szögsebessége és β oldalkúszási szöge – mérési adatok alapján –, hogy átlagos sofőrök könnyedén elveszíthetik a jármű feletti irányítást, így célszerű őket kisegíteni.

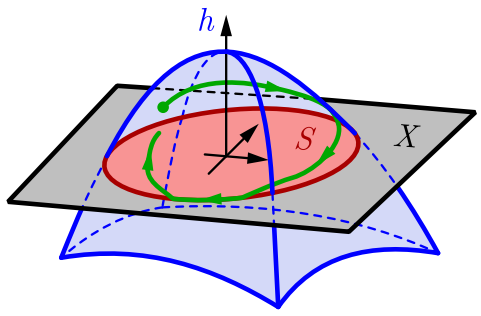


1. ábra. A μ-split fékezési szituáció közben fellépő dinamikai mennyiségek.

Megoldásként olyan fékezőerőbeavatkozás szükséges, mely képes az előbb említett két mennyiséget korlátok között tartani. Ezen kívül figyelembe kell venni, hogy maga a fékezőerő, mint beavatkozás is korlátos: felső határát a tapadás, mint fizikai jelenség idézi elő, alsó határát pedig az írja elő, hogy a fékezőerő az adott kereket csak lassíthatja.

2. Alkalmazott módszerek

A célra a biztonságkritikus szabályzás lett felhasználva, hiszen alkalmazásával dinamikai rendszerekhez olyan beavatkozás tervezhető, melyre a rendszer állapotváltozói a fázistér egy előre definiált részén maradnak.



2. ábra. *Control Barrier Function* grafikai értelmezése (Molnar: "Model-free safety-critical control for robotic systems, 2021.)

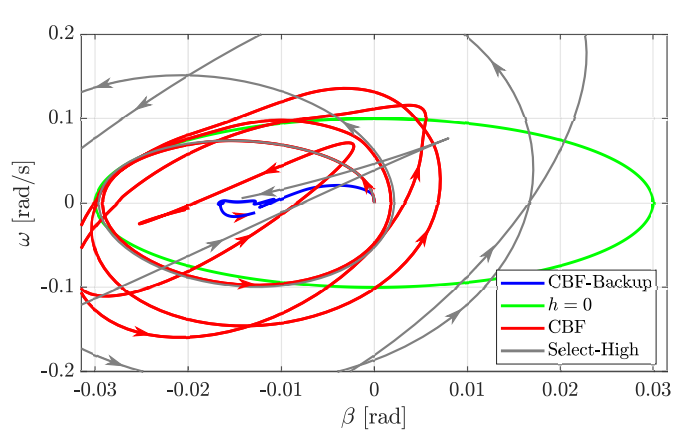
Ezt biztonságos tartománynak nevezzünk, és az alábbi skalárfüggvénnyel definiáltuk:

$$h = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta_{\text{kr}}}\right)^2 - \left(\frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi}_{\text{kr}}}\right)^2, \tag{1}$$

ahol h a 2. ábrán látható *Control Barrier Function*. Amennyiben pozitív, úgy a biztonságos tartományon belül vannak a rendszer állapotváltozói, ezzel biztosítva, hogy a jármű két kitüntetett mennyisége β_{kr} és $\dot{\psi}_{\text{kr}}$ által jelölt korlátok között marad. Annak érdekében, hogy korlátolt beavatkozás mellett is alkalmazható legyen a biztonságkritikus szabályzás, az előreprediktáláson alapuló *Backup set módszer*rel volt szükséges azt kiterjeszteni.

3. Eredmények

A járműszimuláció elvégzéséhez négykerekű, síkbeli bicikli-modell, lineáris kerékmodell és *Look-Ahead* sofőrmodell lett felhasználva. A 3. ábrán 3 módszer összehasonlítása látható a fázistér azon metszetén, melyen az (1)-es egyenlettel a biztonságos tartomány lett definiálva. A szürke görbe esetében mindegyik kerék a saját felületén elérhető maximális erővel fékezett, a pirosnál a *Backup set módszer* nélküli, kékkel az azzal megerősített biztonságkritikus szabályzás alkalmazásával. Látható, hogy csak az utolsó esetben sikerült az eredeti célnak megfelelően szabályozni.



3. ábra. Szimuláció eredményei összehasonlítva a biztonságos tartomány síkján.

4. Összefoglalás

A biztonságkritikus szabályzás alkalmazása járművek μ-split felületen fékezésére hatékonynak bizonyult. Azonban a *Backup set módszer* felhasználása a korlátolt beavatkozás miatt elengedhetetlen volt, melynek komponensei (*backup set* és *kontroller*) saját ötlet alapján lettek megkonstruálva.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Practical aspects of pressure relief valve design

GALAMBOS DOMINIK
Mechanical Engineering Modelling MSc, Major in Solid Mechanics, 2023/2024/I.
Supervisor: Kádár Fanni, PhD student, fanni.kadar@mm.bme.hu

1 Introduction

Pressure relief valves are safety critical elements in high pressure systems due to their simple mechanical design consisting of a precompressed spring pushing the a closing body against the valve seat. They are suitable for protection against overpressure in applications such as boilers and high pressure pipelines. Pressure relief valves operate in the following order: the pressure level reaches the set pressure, the discharging process occurs, and the system pressure reaches a safe level, after which the PRV closes. However, practical experience has shown that their operation can cause vibrations.

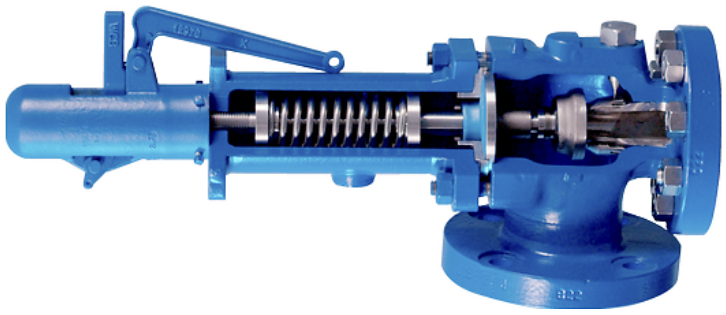


Figure 1: A direct spring loaded pressure relief valve

2 Applied methods

Stability limits for the equilibrium position were determined by a linear stability investigation using the Routh-Hurwitz criterion. To decide whether the operation is safe in the linearly stable zone, the investigation of the bistable regions was conducted, by numeric simulations. The bistable zone can be seen in Fig. 2.

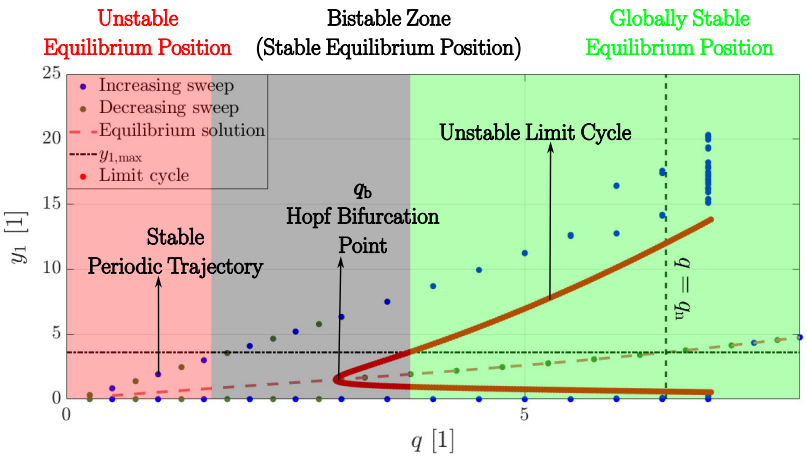


Figure 2: Bifuraction diagram with the unstable limit cycle

The placement of an upper stopper at $y_{1,\max}$, which is part of the design consideration, could theoretically slow down the closing body in the expected pressure range, which could result in stable valve openings, as seen in Fig. 3.

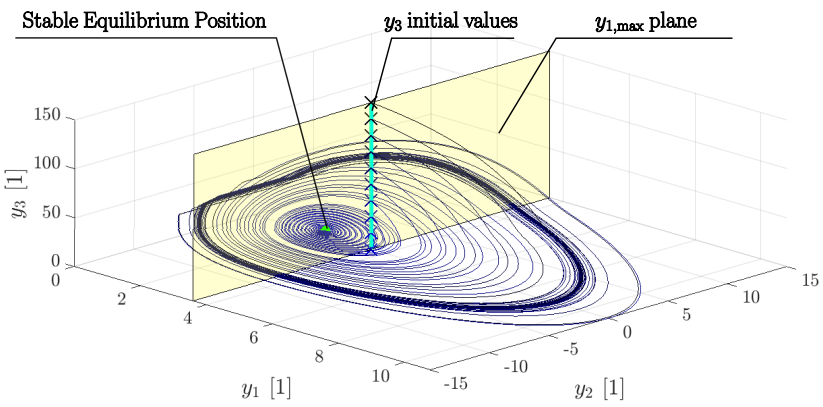


Figure 3: Different initial pressures in the phase space

A position time signal stabilized by the upper stopper can be seen in Fig. 4.

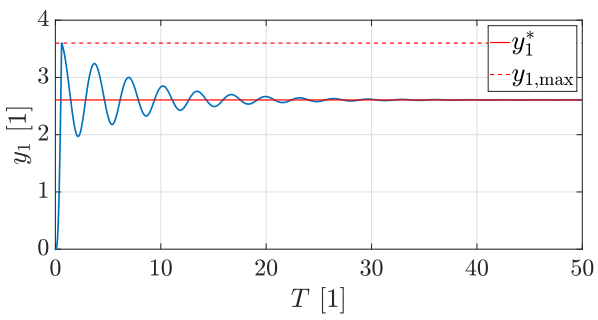


Figure 4: Stabilized time signal due to the upper stopper

3 Results

According to the simulations, to ensure the safe operation of the pressure relief valve a low coefficient of restitution would be the most beneficial. To realize this, a possible schematic design was presented. This design strives to ensure a low coefficient of restitution, and tries to ensure a centric impact by the addition of a thin metallic annulus.

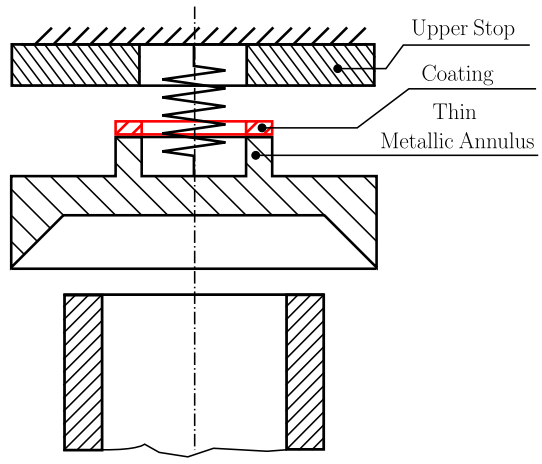


Figure 5: The schematic figure of the design considerations

4 Summary

The safe operation of the valve is significantly influenced by the upper stopper, as in certain conditions the impact can greatly decrease the velocity of the closing body, which results in stable valve openings.

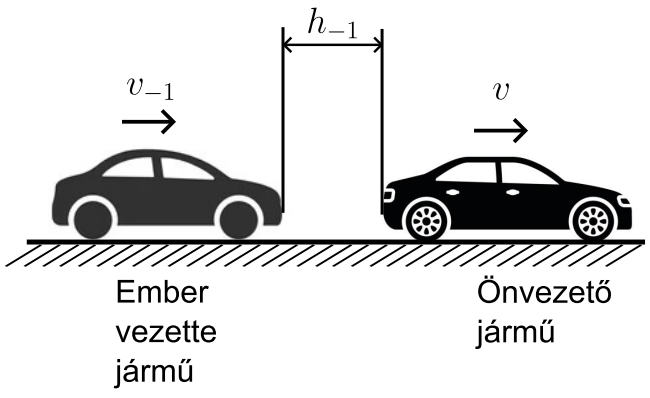
Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. – www.mm.bme.hu

Digitális szabályozás hatása önvezető felvezető jármű esetén

Bálint Gergely
Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Szaksz Bence, doktorandusz, szaksz@mm.bme.hu

1. Bevezetés

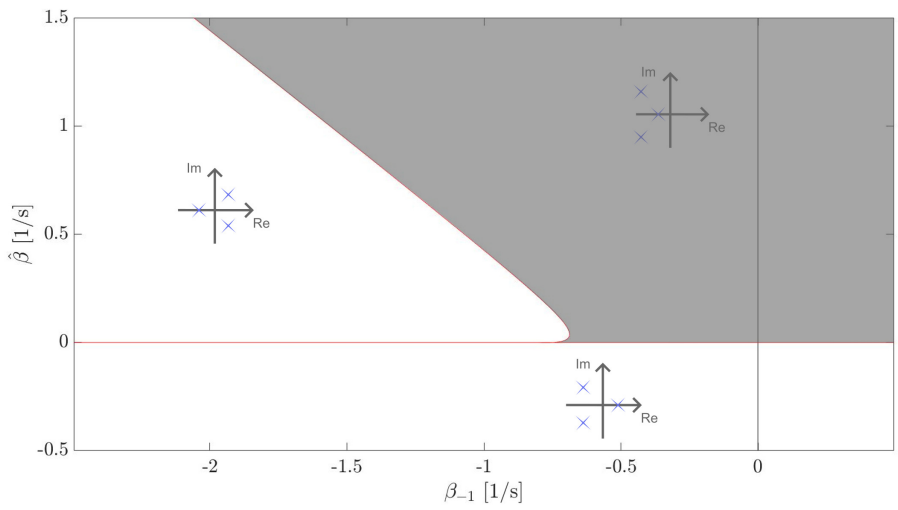
A közutak hatékonyságának fő hátráltatói a forgalmi dugók, melyek növelik az utazási időt, a járművek üzemanyag használatát és a szennyezést. Az ember vezette járműforgalom gyakran szenved az úgy nevezett "stop-and-go"-féle (állj-és-menj) torlódásoktól. Ezek az emberi vezetési magatartás hatására is létrejöhetnek anélkül, hogy baleset történne. Ha az egy sávon közlekedő, ember vezette járműlánc legelső tagja lelassít, akkor a második jármű hajlamos arra, hogy túlreagálva jobban fékez a kelleténél, majd a következő még inkább, s a többiek a sorban egyre jobban lelassítanak, míg az egyiküknek teljesen meg nem kell állnia. Az ilyen instabil forgalmi közlekedést nevezik "string unstable"-nek (húr instabilitás), mely tipikus az ember vezette forgalomra.



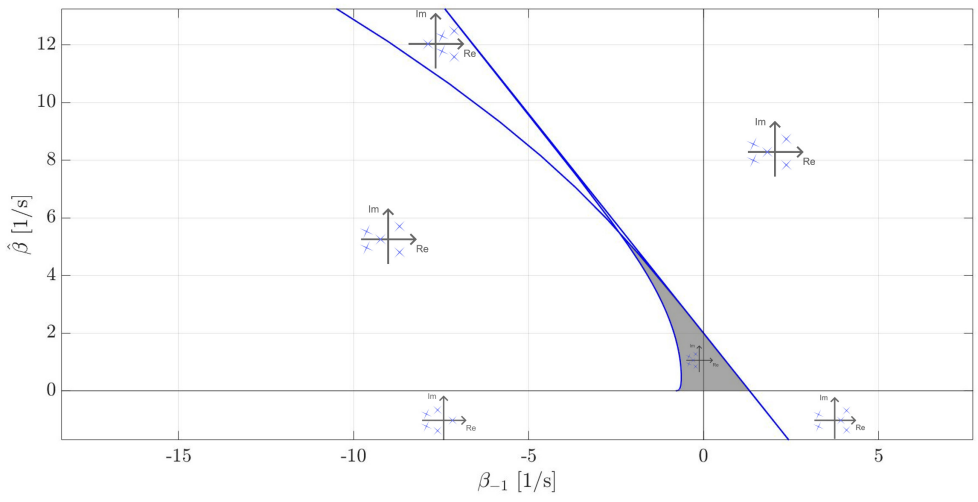
1. ábra. Járműkövetési modell

2. Stabilitásvizsgálat

Egy két járműből álló rendszert vizsgáltam s felállítottam a mechanikai modelljét. Az első esetben azt feltételezve, hogy az első autó önvezető, a követő pedig ember vezette jármű. A modell linearizáltam és eltoltam a stabil helyzet értékeivel. Először, az időkésést elhanyagolva vizsgáltam az így folytonosnak tekinthető rendszert. A modell folytonos diff erencia egyenletek formájában leírható, s abban a karakterisztikus gyökök könnyedén kifejezhetőek voltak. Belőlük alkotott függvények segítségével felvázoltam a stabilitás térképet. Másodszor, bevezettem a mintavételezés hatását a modellbe. Ilyenkor mindkét járműről azt feltételeztem, hogy önvezetőek. A matematikai modell jelentősen bonyolultabb lett a diszkrét idő lépések miatt. Az időkésés miatt a rendszer karakterisztikus gyökeit nem lehetett könnyen vizsgálni, így a Möbius transzformáció segítségével egyszerűbb alakra hoztam őket. Az így kiszámolt függvények segítségével ismét felvázoltam a stabilitási térképet.



2. ábra. Stabilitási térkép valós idejű szabályozás esetben



3. ábra. Stabilitási térkép diszkretizáció esetén

3. Szimulációs példák

Mind a két esetben lettek mutatva példák az egyes régiókra, szemléltetve a rendszer viselkedését az adott tartomány paramétereivel. Meg lettek vizsgálva a statikus (rezgés nélküli) és a dinamikus (rezgéssel rendelkező) stabilitásvesztések, valamint a stabil tartomány, ahol rezegve lecseng a rendszer. Végül a határgörbén szereplő paraméterek is meg lettek mutatva, ahol a rendszer neutrálisan stabil s egy fix érték körül oszcillál.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Zárt kinematikai láncú manipulátorok szabályozása

JÁRÓ NORBERT
Gépészmérnöki MSc, Alkalmazott Mechanika Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Bodor Bálint, doktorandusz, bodor@mm.bme.hu

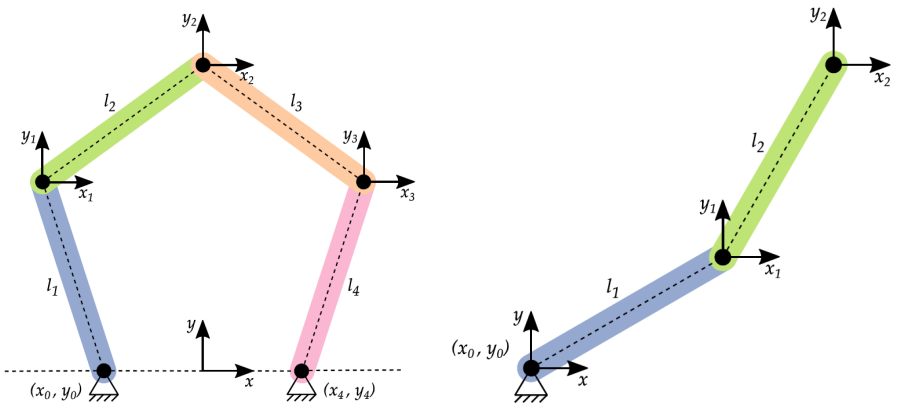
1. Bevezetés

Dolgozatom céljának a síkbeli két szabadságfokú robot rendszerek dinamikai vizsgálatát választottam. Ehhez egy soros és egy párhuzamos kinematikájú robot mozgását szimuláltam eltérő pályákon, majd ezeket a mozgásokat elemeztem eltérő aktuációs modellek alkalmazása esetén.

2. Alkalmazott módszerek

Első lépésként felírtam a soros és párhuzamos kinematikájú robot kinematikai és inverz kinematikai egyenleteit, amelyek segítségével pontosan meghatározható a robot pozíciója.

Második lépésként elkészítettem a robotkarok mozgás-egyenletét, amelyhez az elsőfajú Lagrange-egyenleteket használtam, amelyben nem minimális számú koordinátákat alkalmazva felírtam a többtestből álló dinamikai rendszer egyenleteit.



1. ábra. A vizsgált rendszerek

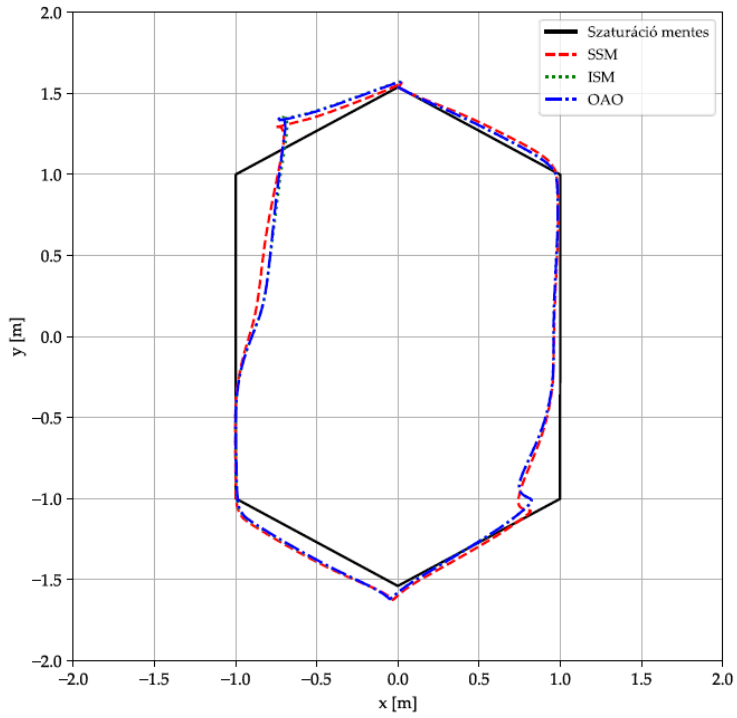
Az alulaktuált bemenetek modellezésére három eltérő módszert is alkalmaztam, amelyek eltérő módon közelítik meg a problémát. Az egyszerű szaturációs módszer (SSM) a szaturált bemenetek értékét limitálja a maximálisan elérhető nyomatékokra. Az iteratív szaturációs módszer (ISM) a bemeneteket iteratív módon határozza meg, úgy, hogy a végponti gyorsulás maximalizálása a cél. A kimeneti gyorsulások optimalizációja (OAO) pedig a végponti gyorsulások terének felhasználásával határozza meg a bemenet értékeket.

A robotok szimulációjához két eltérő pályát választottam. Az első pálya egy hat pontból álló hosszabb pálya, ezzel modellezve egy munkadarab szállítását. Második pálya pedig egy rövidebb körpálya, ezzel heggesztő vagy ragasztó réteg felvivő folyamatot modellezve.

A rendszer végpontját az előre megszabott két pályán való vezetéséhez pedig elkészítettem egy PD szabályozót.

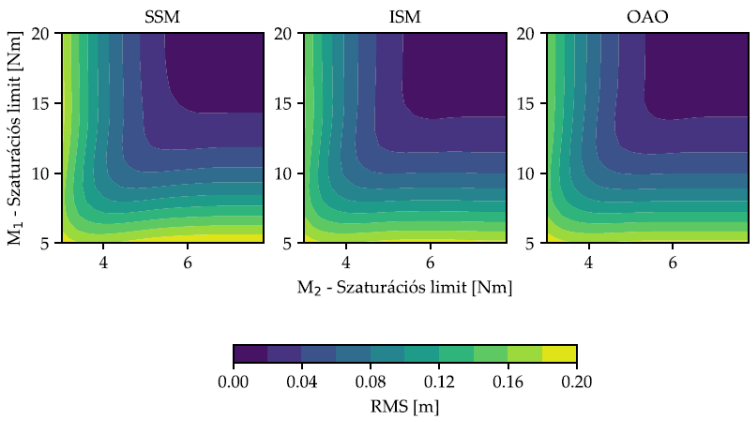
3. Eredmények

Az öt csuklós robot mozgása esetén meghatároztam a bemeneti nyomaték értékeket és a végponti abszolút hibát az idő függvényében. Emellett ábrázoltam a pályán az eltérő aktuációs modellek esetén a végpont által bejárt utat, amely az első pálya esetén:



2. ábra. Öt csuklós robot végponti pályája alulaktuáció esetén

A végponti hiba függvényekből RMS hibát számoltam eltérő aktuációs modellek és limitek esetén:



3. ábra. Öt csuklós robot végponti RMS hibája

4. Összefoglalás

A dolgozatom során sikeresen elkészítettem két eltérő felépítésű robot szimulációját. Ezekhez három különböző alulaktuált bemenetek modellezésére alkalmas módszert felhasználtam. A rendszer előre megszabott pályán való vezetéséhez pedig elkészítettem egy PD szabályozót.

Szimuláció segítségével meghatároztam, hogy öt csuklós robot esetén az egyszer szaturációs módszerrel számolt pályának a legkisebb a végponti hibája.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Daruhorog feszültség analízise

KAPOSI JEROMOS
Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Dr. Kovács Ádám, egyetemi docens, adamo@mm.bme.hu

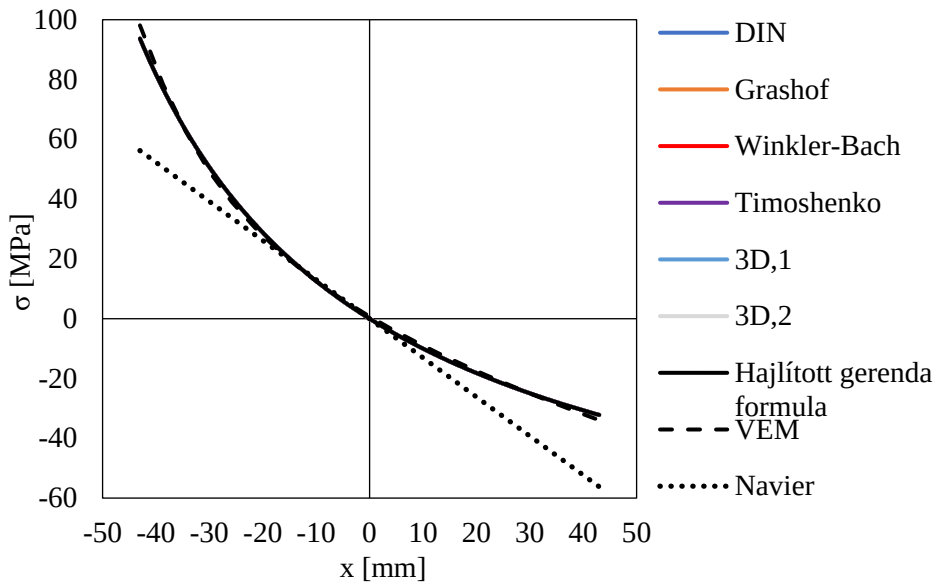
1. Bevezetés

A daruhorog mechanikai modellje a befoglaló méretekben megegyező, állandó keresztmetszetű, koncentrált erővel terhelt hajlított görbe rúd. A szakirodalomkutatásban a görbe rudak szilárdsági vizsgálatára vonatkozó elméleteket gyűjtöttem össze. Analitikus megoldást kerestem trapéz profil redukált másodrendű nyomatékának számítására, numerikus módszerrel pedig meghatároztam azt a kiválasztott daruhorog összetett keresztmetszetére. A maximális feszültséget az egyenes gerendára vonatkozó képletet korrekciós faktorral (K) figyelembe vevő elmélettel is meghatároztam. A VEM szimuláció eredményét analitikusan 3 profil típussal közelítettem:

- a befoglaló szélességet 14%-kal csökkentő téglalap és
- trapéz,
- valamint a veszélyes keresztmetszetet még pontosabban leíró összetett keresztmetszettel.

2. Alkalmazott módszerek

A 7 darab kigyűjtött elmélet összevetését a téglalap keresztmetszetű modellen végeztem el. Ez az 1. ábrán látható:



1. ábra Normális feszültségeloszlás a veszélyes keresztmetszetben a 1-7. sz. elmélet, a VEM szimuláció, illetve az egyenes rudakra vonatkozó Navier-képlet szerint

A 7 görbe egybe esik, ezért nem látszik az összes. Ebből a módszerek egyenértékűségére következtettem. Más paramétereket használnak, viszont ugyanabból a meggondolásból indulnak ki. A VEM megoldás is közel azonos téglalap keresztmetszetre, a relatív hiba a belső pontban 4,5%. A trapéz és a szabványos összetett keresztmetszetnél azonban ez már 11, illetve 13%.

(1) a K-tényezős módszert, (2) empirikus képlet a gerenda belső oldalára érvényes korrekciós faktort írja le:

$$\sigma = \frac{F}{A} + K\left(\frac{M_h}{I_y}x\right) \quad (1) \qquad K_b = 1 + 0{,}5\frac{I_z}{{s_1\eta_1}^2}\left[\frac{1}{R-|\eta_1|}+\frac{1}{R}\right] \quad (2)$$

(3) zárt alakú megoldás a hajlított gerenda formula integrál paraméterét adja meg (s_1, s_2, c, a méret jelölések). (4) az átszámítás módját mutatja redukált másodrendű nyomatékká:

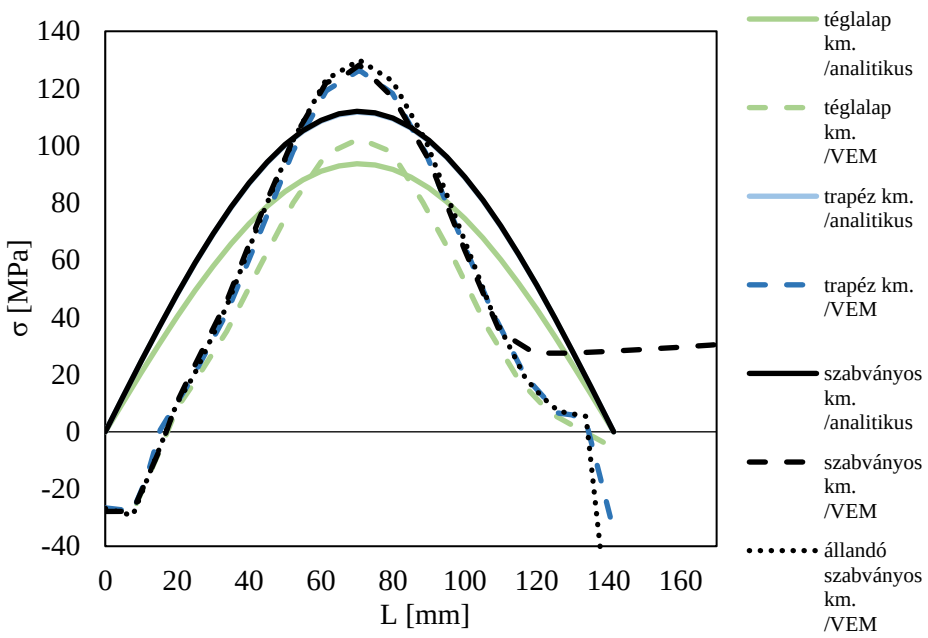
$$A_{m,trapéz} = \frac{s_1 c - s_2 a}{c-a} ln\frac{c}{a} - s_1 + s_2 \quad (3) \qquad I_0 = A_m R^3 - AR^2 \quad (4)$$

3. Eredmények

Az eredményekből az látszik, hogy a szélesség növelése és a keresztmetszet pontosabb leírása nem ad jobb közelítést, mint a trapéz profillal számolt eredmény. Az 1. táblázatban a veszélyes pontra kapott normálfeszültség értékek szerepelnek. A jobb alsó cella az egzakt geometriára és az állandó keresztmetszeti esetre vonatkozó eredményt is tartalmazza. A 3. ábra a horog belső oldalára kirajzolt feszültségeloszlásokat mutatja. A trapéz és a szabványos km. függvények közel azonos eredményt adnak mindkét számítási módszerrel.

	Téglalap	Trapéz	DIN 15401
Grashof elmélet	93,7	111,7	112
K-tényezős	92,4	108,6	103,4
VEM	98,1	125,7	128,2 és 129,9

1. táblázat σ_b $[MPa]$ a különböző módszerekkel



2. ábra σ_y feszültségeloszlás a belső oldal alsó pontjától kezdve az ívhossz mentén a 3 keresztmetszeti esetre az analitikus- és a végeselem-módszer szerint

4. Összefoglalás

Több egymásnak megfeleltethető elmélet született már a görbe hajlított gerendákhoz kapcsolódóan. Kijelenthető, hogy a daruhorog feszültség analízisére megfelel Grashof elmélete, a keresztmetszetet a befoglaló méretnél kisebb trapéz alakkal célszerű közelíteni, ilyenkor I_0 számítására zárt alakú megoldás áll rendelkezésre. $R/h = 0{,}86 > 0{,}8$ teljesül a veszélyes keresztmetszetben is, azonban közel van a feltétel határához. Az eredmény a valóságot alulról becsüli, a hiba 10-15%.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Járműdinamikai szimulációs környezet kiértékelése

Kotschy Balázs Levente

Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2023/2024/I.

Témavezető: Dr. Kossa Attila, egyetemi docens, kossa@mm.bme.hu

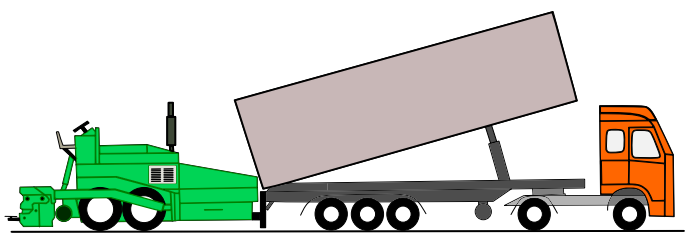
Konzulens: Fazakas Gergely, szoftverfejlesztő, gergely.fazakas@knorr-bremse.com

1. Bevezetés

Napjainkban az áruszállítás nagy része közúton történik tehergépjárművek segítségével. A korszerű járműveken már olyan elektromos fékrendszer található, ami sofőri beavatkozás nélkül is képes a szerelvényt lassítani. Ennek a képességnek köszönhetően sok olyan funkciót lehet beleépíteni egy fékrendszerbe, ami segíti a járművezető munkáját, komfortérzetét és biztonságosabbá teszi a mindennapi közlekedést. Munkám során egy olyan szimulációs környezettel foglalkoztam, aminek a segítségével a fék vezérlőegységének (ECU-Electronic Contorl Unit) tesztelése egyszerűbbé válik.

2. Road Laying Function

A szimulációs környezet megismerése után az aszfaltozó funkció teszteseteinek a szimulátoron való megvalósításával foglalkoztam. A Road Laying Function (útfektető funkció) lényege, hogy a billenős pótkocsiban található forró aszfalt a gép tölcsérébe essen, ne pedig az aszfaltozó gép és a pótkocsi közé. Így biztosítva az egyenletes, sima felületet.



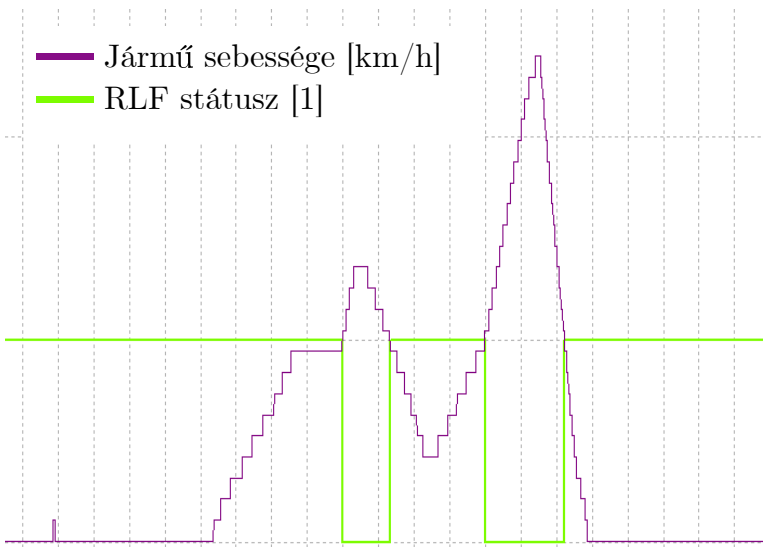
1. ábra. Aszfaltozás

A vezérlőegység fékműködtető nyomást juttat el a fékkamrákba, így még a lejtők aszfaltozásakor sem fog a két jármű egymástól eltávolodni. Azonban ahhoz, hogy az ECU kivezérelje a fékkamrákba a nyomást, három feltételnek kell teljesülnie. Jármű sebességének kisebbnek kell lennie, mint a betáplált határsebesség. A billencsnek megemelve és az RLF kapcsolónak aktívnak kell lennie. Ha ezek a kritériumok mind teljesültek, azzal tudjuk a vezérlőegységnek jelezni, hogy most aszfaltozás következik. Ha ezek közül bármelyik feltétel nem teljesül, akkor a fékműködtető nyomás megszűnik.

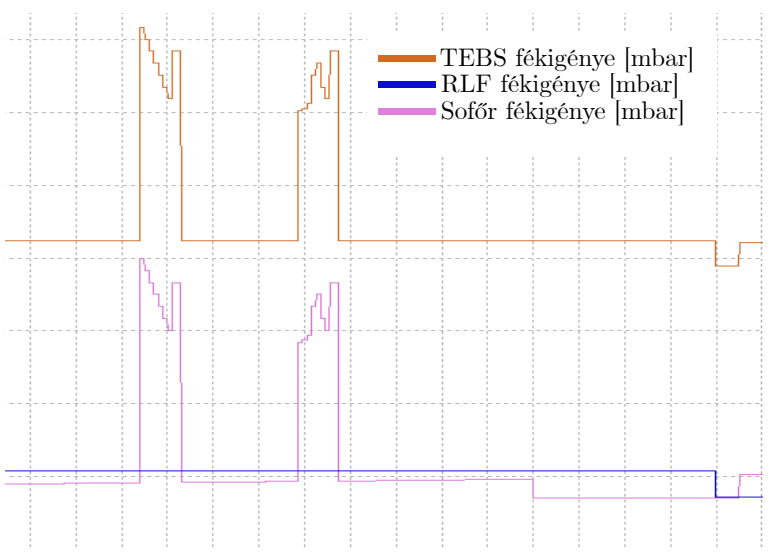
3. Tesztesetek

A fékvezérlést végrehajtó szoftver működését két esetben teszteltük:

- a jármű sebessége túllépte a határsebességet
- a sofőr nagyobb fékparancsot ad, mint amit a funkció igényelne



2. ábra. Sebességhatár túllépése



3. ábra. Fékigény kiválasztása

4. Összefoglalás

A vezérlőegység tesztelését kétféleképpen lehet megoldani: járművön vagy szimulátoron. Elmondható, hogy a szimulátorral való tesztelés kevesebb erőforrást igényel és a tesztesetek jobban reprodukálhatóak. A szimulátor járműdinamikai modelljének a segítségével szinte teljes mértékben meg lehet oldani a járművön végrehajtott manőverek asztalon történő tesztelését. Jövőbeli célom, hogy a modellt olyan szintre fejlesszem, amivel már több dimenziós mozgások is szimulálhatók.

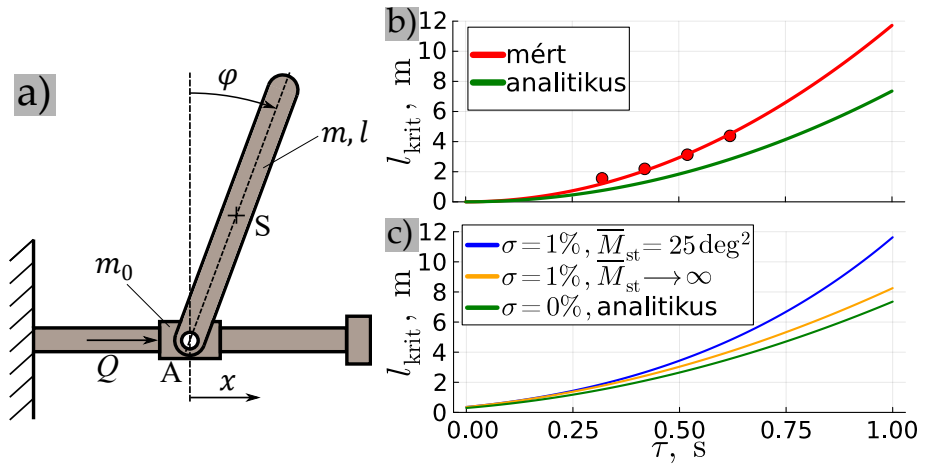
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

A rúdegyensúlyozás modellezése sztochasztikus késleltetett differenciálegyenlettel

Kovács Zoltán
Gépészmérnöki MSc Alkalmazott Mechanika Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Fodor Gergő, doktorandusz, gergo.fodor@mm.bme.hu

1. Bevezetés

Az emberi idegi szabályozás működésének megismerésére egyensúlyozási feladatok elvégzése adhat segítséget. Ebben a munkában a megvezetett rúddal való egyensúlyozást vizsgáltuk. Ez a rendszer instabil, azonban megfelelő szabályozó erővel stabillá tehető. A munkánkban PD és prediktív (MP) szabályozót használtunk egy adott τ időkésés mellett. Az időkésés az emberi reakcióidőt reprezentálja. A PD modell alapján analitikusan kiszámítható az l_{krit} kritikus rúdhossz, ami a legrövidebb egyensúlyozható rúdhossz. Azonban virtuális környezetben végzett mérések azt mutatják, hogy a kritikus rúdhosszok jelentősen nagyobbak, mint ami a modellből számítható. Ezért a modellt kibővítettük, és a rúdegyensúlyozást sztochasztikus folyamatként kezeltük.



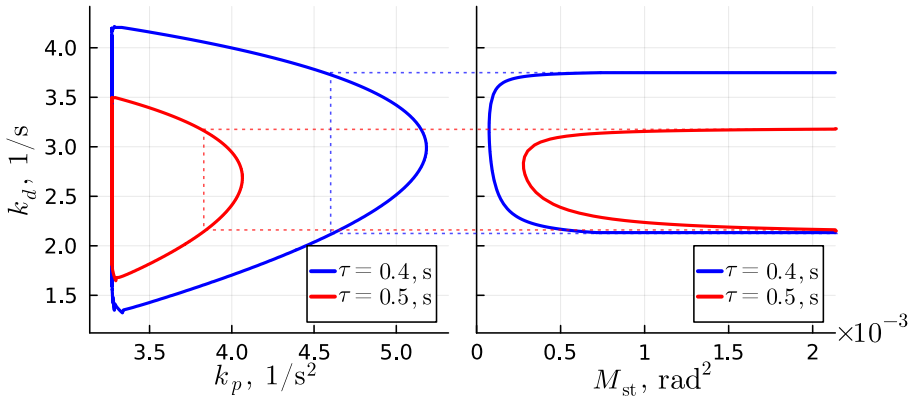
1. ábra. a) Mechanikai modell, b) mért, és c) számított $\tau - l_{\text{krit}}$ görbék

2. Alkalmazott módszerek

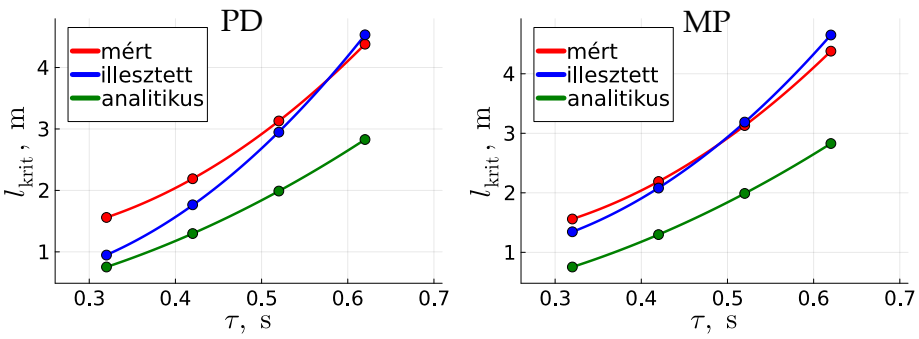
A rúdegyensúlyozást sztochasztikus késleltetett differenciálegyenlettel (SDDE) írtuk le, ahol a szabályozó paraméterekben és az additív tagban egy σ zajszint jelenik meg. Az eredményeket statisztikailag vizsgáltuk a várható érték és a szórás számításával. Továbbá kétféle stabilitást vizsgáltunk: az első és a második momentum stabilitást. Az első momentum stabilitás a várható érték, a második momentum stabilitás pedig a szórás konvergenciáját írja elő. A stabil tartományokat sztochasztikus szemidiszkretizációval határoztuk meg. Továbbá egy felső határt írtunk elő a stacionárius második momentumnak ($\overline{M}_{\text{st}}$), ami egy szigorúbb feltétel. $\overline{M}_{\text{st}}$ a szórás négyzetével becsülhető. Ezek felhasználásával meghatároztuk a mérésekhez tartozó zajszint értékét, valamint egy görbét illesztettünk a mérésekre a $\tau - l_{\text{krit}}$ síkon.

3. Eredmények

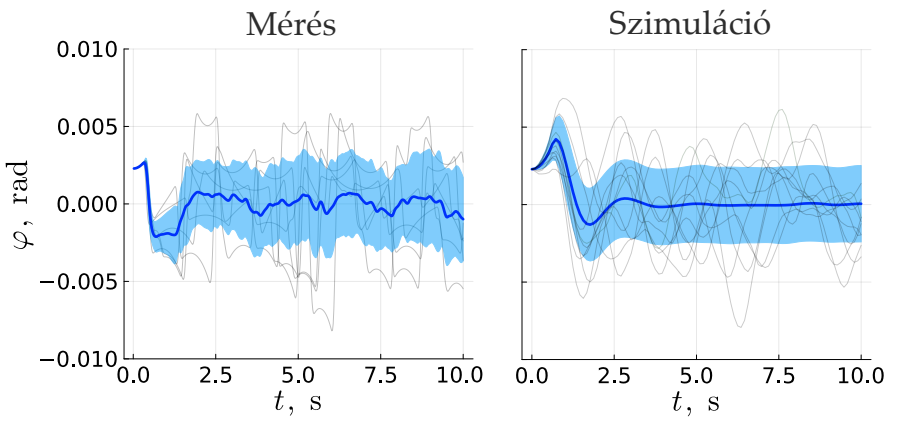
A numerikus számítások elvégzése után azt tapasztaltuk, hogy a zaj jelenléte csökkenti a második momentum stabil tartományt és növeli a kritikus rúdhosszt. Megmutattuk azt is, hogy a kritikus rúdhosszok tovább növekednek, ha a felső határ ($\overline{M}_{\text{st}}$) értéke csökken. A mérések és a számítások eredményeit felhasználva kiszámítottuk a mérésekhez tartozó zajszint értékét, ami kb. 0.05%-1%. Azt tapasztaltuk, hogy a görbeillesztés a prediktív szabályozó esetében pontosabb. A kiszámított zajszinttel numerikus szimulációt is végeztünk, amit összehasonlítottuk a mérések időjelével. A szimulált időjelek egyezést mutattak a mért eredményekkel.



2. ábra. A stacionárius második momentum változása a második momentum stabil tartományon belül



3. ábra. A kritikus rúdhosszok az időkésés függvényében



4. ábra. Mért és szimulációval meghatározott időjelek

4. Összefoglalás

A modelleken végzett számítások alapján megállapítható, hogy a rúdegyensúlyozás sztochasztikus modellje a mérésekhez közelebbi eredményeket ad, mint a determinisztikus. Továbbá a számítások és a szimulációk bizonyítják, hogy az MP szabályozó realisztikusabb, mint a PD. Azonban további következtetések levonásához és a modell validációjához nagy számú mérési eredmények és további statisztikai elemzések szükségesek.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Ultrasound assisted ammonia production

ÁRON KOZÁK
Mechatronic Engineer BSc, Specialisation in Mechanical Engineering Modelling, 2023/2024/I.
Consultant: Dr. Ferenc Hegedűs, associate professor, fhegedus@hds.bme.hu
Supervisor: Dr. Dániel Bachraty, associate professor, bachraty@mm.bme.hu

1. Introduction

Sonochemistry aims to produce chemical compounds in the harsh environment created within acoustically excited micron-sized bubbles. During the collapse phase of the resulting oscillation, the internal temperature can reach several thousands of Kelvins, and the pressure can exceed 100 MPa – far surpassing the capabilities of traditional chemical reactors. However, current practical sonochemistry results very low energy efficiency and yield in most cases.

The aim of this thesis is to investigate and optimize the theoretical energy demand of ammonia production via sonochemistry, utilizing a single cycle of sine wave for pressure excitation. Optimization and estimation were performed through high-performance simulations.

2. Applied methods

Assuming radial symmetry and homogeneity, the bubble is described as a system of ordinary differential equations. The model incorporates NASA polynomials for thermodynamic calculations. Reaction rates employ the Arrhenius equation and various pressure-dependent formalisms, while the Keller-Miksis equation governs bubble dynamics. Viscous, thermal, and acoustic energy dissipation is considered. Such a simulation is shown in Figure 1.

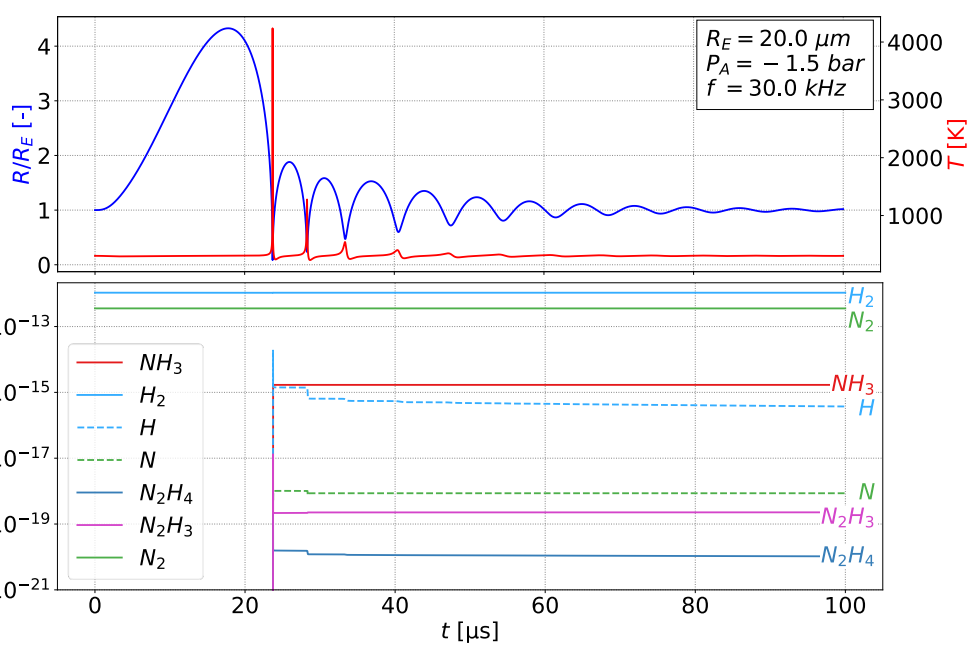


Figure 2: The bubble radius (blue), the internal temperature (red) and the amount of the most important compounds as a function of time.

The resultant differential equation shows stiff behavior and features sudden changes, which require implicit numerical methods with adaptive time steps. The LSODE and Radau solvers are used.

The software is written in Python. A just in time compiler and parallelization is used to reduce the computational time.

3. Results

The optimization of the energy demand is achieved by tuning control parameters, such as equilibrium bubble size (R_E), excitation amplitude (P_A), excitation frequency (f), ambient pressure (P_∞), and material properties. A brute-force parameter study, as the one shown in Figure 2, is feasible using 2 or 3 parameters.

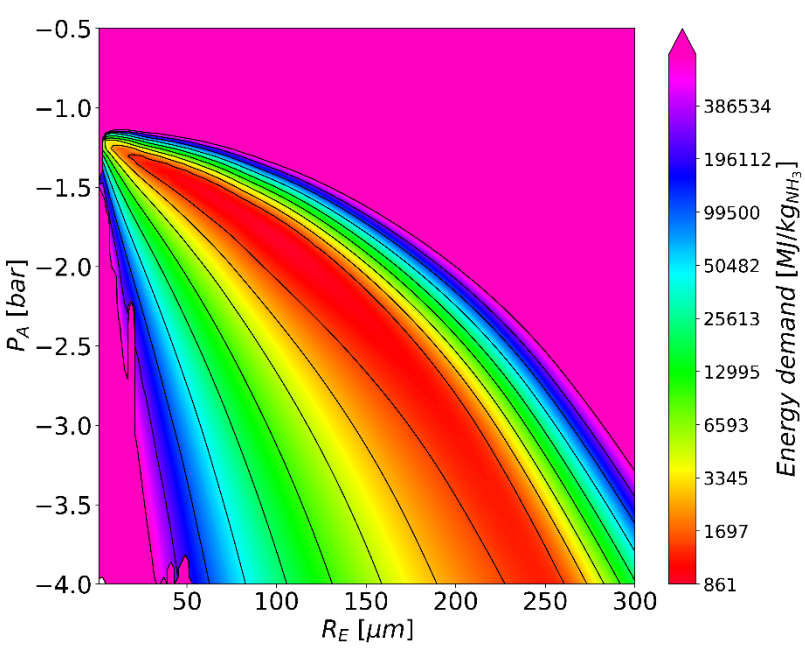


Figure 1: 2D contour plot of the energy demand. The ambient pressure is 1 bar, the excitation frequency is 10 kHz.

A gradient-descent-like method is used for additional parameters. One such search was performed for several different pressure values, as shown in Figure 3. The best possible energy demand is 35 MJ/kg at an extremely low pressure of 500 Pa (excluding evaporation), utilizing custom material properties tuned within a reasonable range. This is comparable to the industry-standard Haber-Bosch process.

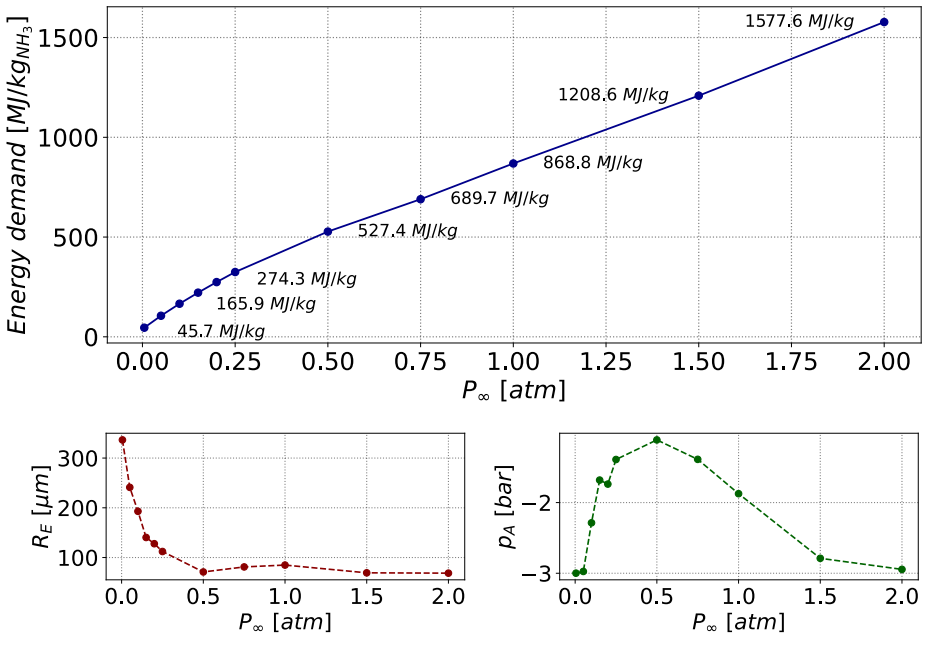


Figure 3: The best possible energy demand as a function of ambient pressure. The optimal settings are aslo plotted.

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. www.mm.bme.hu

DIGITAL CONTROL FOR CONTACT TASKS

VIKTOR LANDOR
Mechanical Engineering Modelling MSc, Major in Solid Mechanics, 2023/2024/I.
Supervisor: Máté Benjámin VIZI, research assistant, mate.vizi@mm.bme.hu

1. Introduction

This research is dedicated to advancing control strategies for the effective management of physical interactions in robotic systems. Focusing on force and position control, the study explores the application of admittance and impedance controllers. After setting up a mechanical and then a discrete model, the accuracy of the theory is analysed through numerical simulation, and the results are evaluated. Rigorous analyses of stability ensure the reliable and safe operation of the proposed models, particularly in dynamic environments. Admittance and impedance controllers are explored to enable compliant behaviour in robotic systems, these control algorithms effectively manage the robot's interactions with external forces and responses to these forces, this allows adaptability and responsiveness in various scenarios.

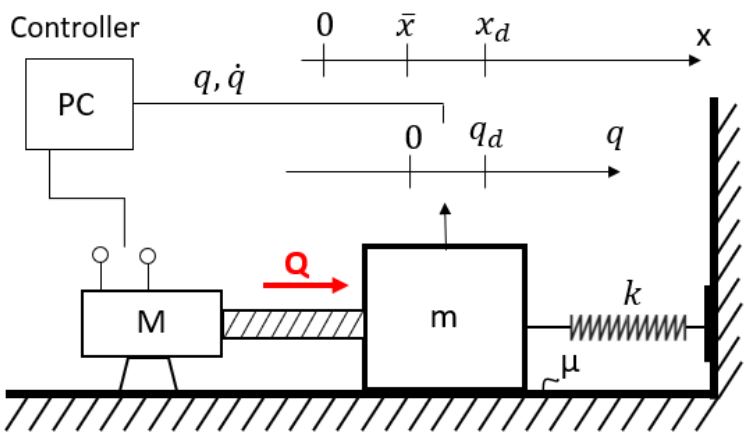


Figure 1 *– Schematic model of the 1DoF system*

2. Applied methods

The equation of motion is first written in continuous time, then the discrete time model is derived. For both the impedance and admittance controllers, the equation of motion is determined by considering the properties and effects of the digital controllers. Based on the quotient matrixes obtained after the solution, the stability analysis is performed. After the solution of the characteristic equation, the stability cannot yet be unambiguously investigated, so the Möbius transformation is used to transform the equation to the η plane. The fastest set-up and the corresponding control parameters have also been defined. After the stability analysis, a numerical solution is carried out as a verification.

3. Results

In the case of the impedance controller, the stability maps are very similar to those of the force controller, but the admittance controller is completely different. In case of admittance controller three independent variable must be investigated.

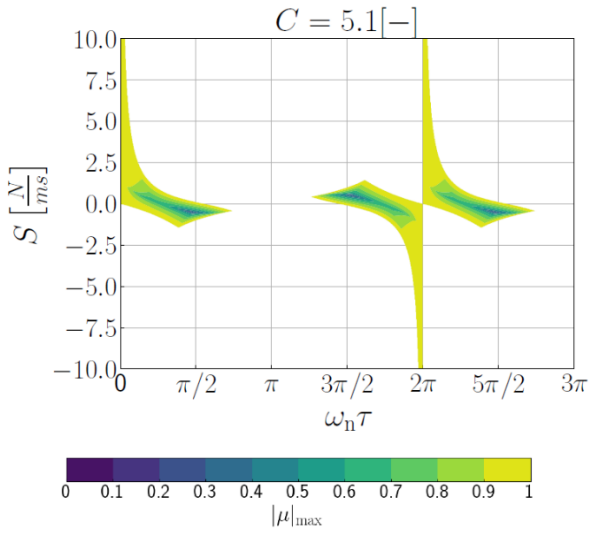


Figure 2 *– Stability map for the fastest set-up (admittance controller)*

The verification of the stability maps by numerical simulation is successful. In the numerical simulation, the continuous solution is also plotted, showing the high accuracy.

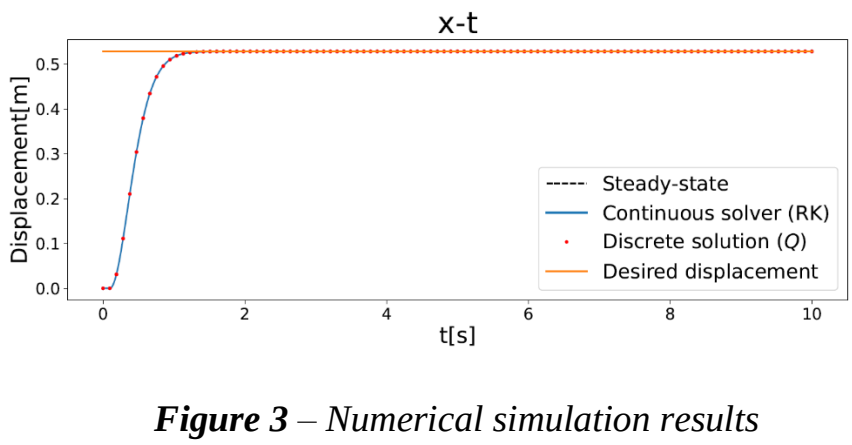


Figure 3 *– Numerical simulation results*

4. Summary

The stability maps for both controllers clearly describe the stable parameter combinations. The variables associated with the fastest settling are also determined. The numerical simulations confirm the theory and the explicit relations, and the numerical solution (RK4) is in full agreement with the results and values obtained by the discrete solution.

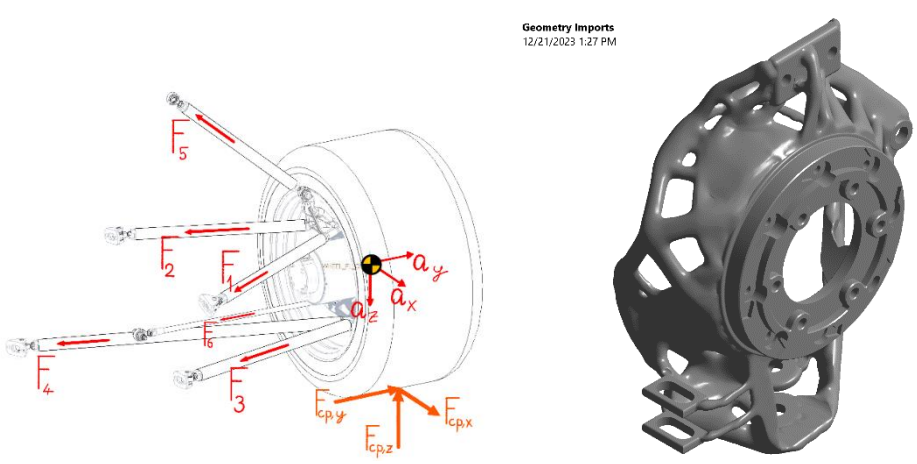
Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. www.mm.bme.hu

Generative design kerékcsonkállvány tervezése Formula Student autón

MEZEI ZSOMBOR
Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Dr. Bachrathy Dániel Sándor, egyetemi docens, bachrathy@mm.bme.hu

1. Bevezetés

A Formula Student egyik fő jellemzője a prototípusgyártás és az innovatív tervezési módszerek alkalmazása. A szakdolgozatom témája az autó egy alkatrészének generetive design alkalmazásával történő tervezéséhez szükséges terhelések meghatározása, valamint a kész alkatrész végeselem szoftverrel történő validációja volt. A kerékcsonkállvány egy sok szerepet ellátó futóműalkatrész, a hajtásban és a fékezésben is szerepet játszik. Ezek a kapcsolatok alkotják a kerékcsonkállvány terhelésállapotát, melyek meghatározása jelentette a fő problémát.



1. ábra Rúderők (F_i) számításához szükséges erők és gyorsulások rendszere balról, az elkészült generative modell jobbról

2. Alkalmazott módszerek

A dinamika alapegyenletét alkalmaztam a rúderők analtikius kiszámításához. A kerékcsonkállványra ható erők minden pillanatban egyensúlyt tartottak az autó, illetve a negyed gyorsulásállapotával.

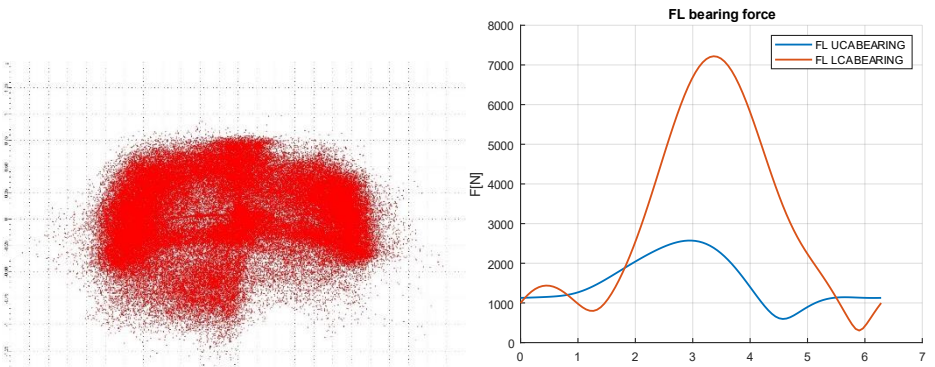
$$[\dot{\mathbf{I}}, \mathbf{D}_{\mathrm{CoG}}]_{\mathrm{CoG}} = [\mathbf{F}, \mathbf{M}_{\mathrm{CoG}}]_{\mathrm{CoG}}.$$

Az első körben felállított modellben a negyedre ható kinetikai nyomaték zérus. A valósághoz képest ez egy közelítés, azonban a hiba mértékéről megállapítottam, hogy csekély, jó közelítéssel elhagyható.

Továbbá megvizsgáltam milyen terhelésnövekményt jelent a kerékcsonkállványra nézve egy úthibán vagy bukkanón történő áthajtás. Ehhez a negyedjármű állapottér modelljét állítottam fel, ez alapján határoztam meg a negyed felfelé történő gyorsulását. A bemenetet a kerék függőleges elmozdulása és sebessége, a kimenetet pedig a kerékcsonkállvány függőleges elmozdulása és gyorsulása adta.

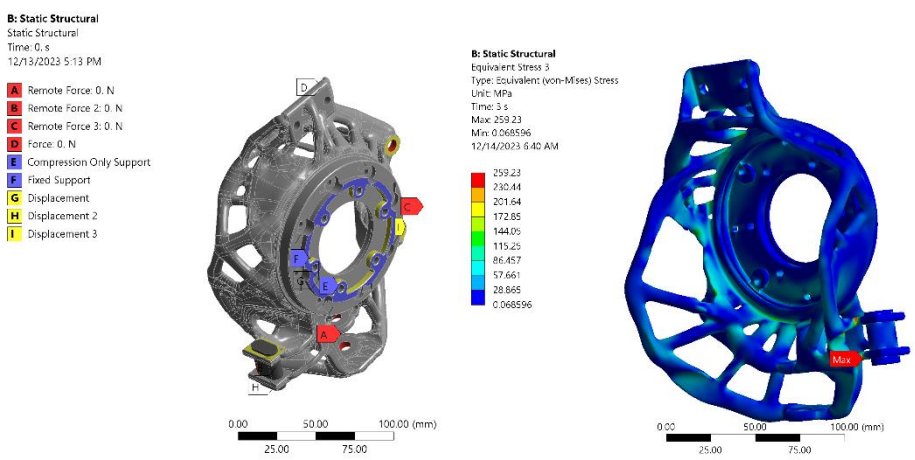
3. Eredmények

A kiegészített rúderőket Matlab környezetben számítottam ki az autó GG-diagrammja alapján, mely a longitudinális és transzverzális gyorsulásokat ábrázolja.



2. ábra GG-diagram jobbról, balról a bal első kerékcsonkállványra ható kerékoldali csapágyakba redukált erők

Ezek után felállítottam a végeselem szimulációhoz szükséges modellt, melyben egy többlépéses terhelésállapot alkalmaztam. Ezzel a képlékenységtan esetleges pozitív hatásait is vizsgálni tudtam az alumínium alkatrészen.



3. ábra A szimuláció perem- és kezdeti feltételei balról, jobbról a maximális feszültségeloszlás

A megjelenő feszültségállapot, valamint az alapanyagra jellemző folyáshatár alapján az alkatrész másfeles biztonsággal megfelelt. A szimulációban egy olyan esetnél jelentkeztek a maximális feszültségek, ahol egy rekuperatív és mechanikus fékezés mellett egy bukkanón halad át az autó, ez a két lassítás egyszerre még nem történt meg az autó élete során.

4. Összefoglalás

A szakdolgozat célja egy jól átgondolt tervezés kidolgozása volt. A kerékcsonkállványra, de az autó többi futóműelemeire is részletes terhelésállapottal tudunk szimulációkat végezni, ezzel javítva a generative design nyújtotta lehetőségeket.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Design, manufacturing, and testing of a carbon composite monocoque for a Formula Student race car

NÓRA NÉMETH
Mechanical Engineering Modelling MSc, Major in Solid Mechanics, 2023/2024/I.
Supervisor: Dr. András Szekrényes, associate professor, szeki@mm.bme.hu

1. Introduction

Throughout my work, my objective revolved around designing a carbon composite monocoque chassis for a Formula Student race car. The target was clear: to create a 20 kg monocoque with a torsional stiffness surpassing 2500 Nm/°, in contrast to the previous year's 25 kg chassis. Achieving this required developing a new geometry, shaped by the demands of other components and new layup design. Moreover, I focused on establishing a workflow for composite mechanical calculations, aiming to enhance layup optimization for future advancements.

Figure 1: The race car of the BME Formula Student Team

2. Applied methods

To create the car's layups and design its torsional stiffness, I established a simulation environment. I verified this environment using the Levy analytical solution method for rectangular plates. After validating the base simulation method, I used this environment to craft the local layups for the chassis.

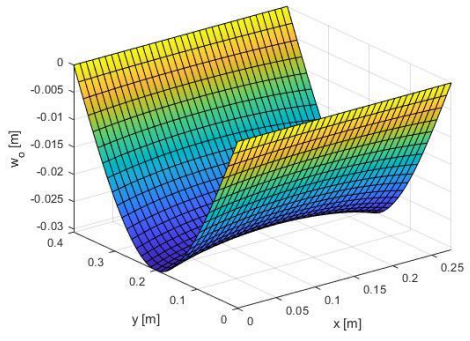


Figure 2: Deflection function of a plate subjected to line load

These layups underwent a 3-point bending test and shear test, providing data that further validated the simulation. Additionally, 3-point bending test yielded crucial information about the layups' Young's modulus, Flexural Rigidity, and the shear test the shear strength of the layups. Following the acceptance of the layups in Ansys Workbench, I conducted a torsional stiffness simulation.

Upon obtaining satisfactory results from this simulation, the team manufactured the chassis. Subsequently, we tested the finished chassis for torsional stiffness at the team's workshop to verify the accuracy of the torsional stiffness simulation environment.

Figure 3: 3-point bending test with the sandwich panel

3. Results

The discrepancy between the analytical method and the simulation for deflection and distributed bending/twisting moments was around 5-10%. Certain local layups were designed using an aluminium honeycomb sandwich structure, while others remained as monolithic layups. I noted a difference of about 5-10% between the 3-point bending simulation and the actual 3-point bending test.

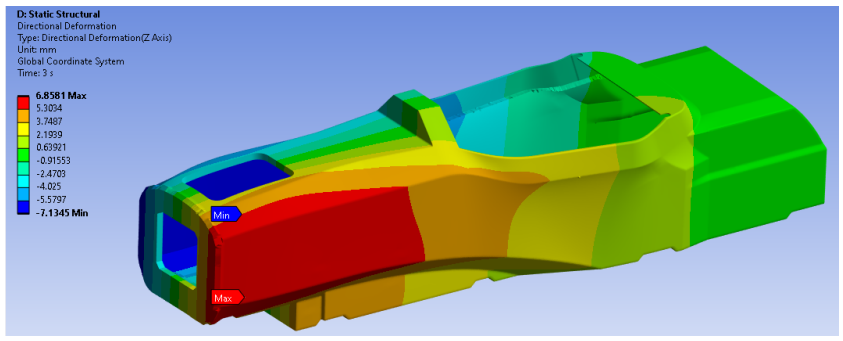


Figure 4: Global directional deformation of the Chassis

After the calculations, the chassis was manufactured in Austria within 5 weeks. Subsequently, it was assembled and positioned on the torsional stiffness test table. The torsional stiffness results measured 2986 Nm/°, exhibiting a 5.53% difference compared to the simulation values.

4. Summary

The tested values displayed differences of 5-10%, which erred on the conservative side. The chassis was successfully laminated and tested without any failures. The calculation workflow was accepted and served its purpose effectively.

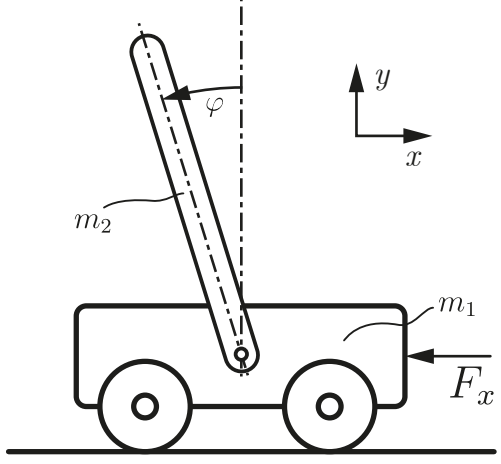
Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. www.mm.bme.hu

Inverz inga egyensúlyozása periodikus pálya mentén

Németh Szabolcs
Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Dr. Insperger Tamás, egyetemi tanár és tanszékvezető, insperger@mm.bme.hu

1. Bevezetés

Az inverz inga egy alapvető modell a robotok egyensúlyozásában, a rakétatechnológiák tervezésében, és az emberi egyensúlyozás vizsgálatánál. Általában a cél a függőleges pozíció megtartása, azonban jelen szakdolgozatban azt kutattam, hogy az inga periodikus lengése során hogyan változik a stabilitás.



1. ábra. *A rendszer illusztrációja.*

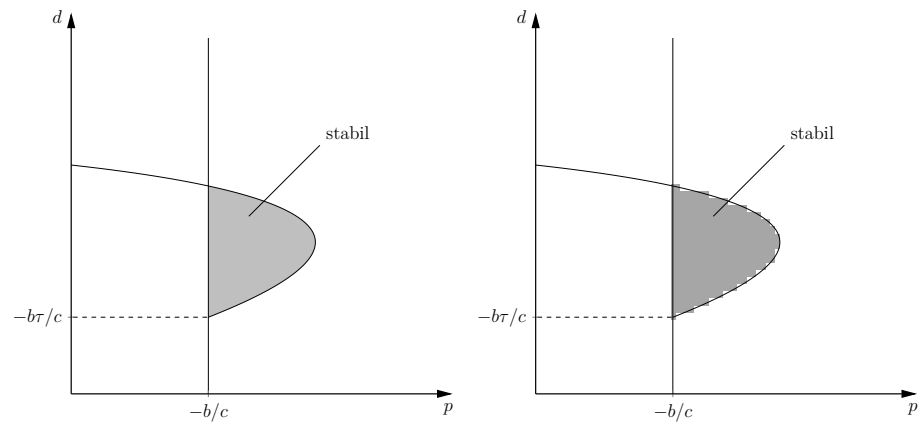
Az 1. ábra mutatja, hogy a szabályozáshoz az x irányú erőt alkalmaztam, és válaszul egy φ szögkitérés történik.

2. Alkalmazott módszerek

A stabilitásvizsgálathoz meghatároztam a klasszikus mechanika módszereivel analitikusan a rendszer mozgásegyenleteit. Ehhez a másodfajú Lagrange-egyenletet használtam.

$$\begin{cases} -F_x(t) = (m_1+m_2)\ddot{x} - \frac{1}{2}m_2 l\cos\varphi\,\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2 l\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 \\ 0 = \frac{2}{3}l\ddot{\varphi} - \ddot{x}\cos\varphi - g\sin\varphi \end{cases}$$

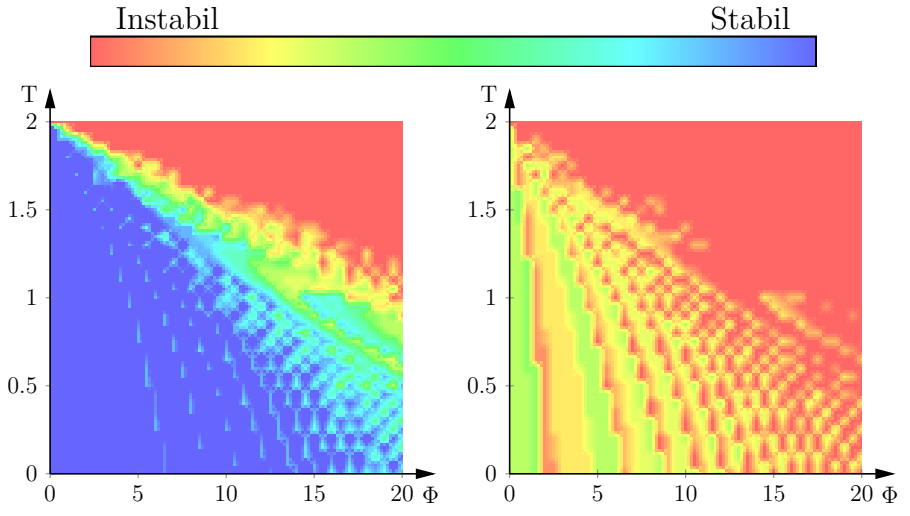
Az egyenletek levezetése után a proporcionális és differenciáló tényező meghatározásához két különböző módszert használtam. A kritikus időkésést, amely felett a rendszer instabil, a D görbék segítségével számítottam ki, ám ez azonban csak a függőleges pozícióra beállított ingánál használható. Abban az esetben, amikor az inverz inga egy periodikus pályára van előírva ez a módszer nem használható. Ekkor egy numerikus módszert, a szemidiszkretizációt használtam, amely adott p-d párhoz tartozó stabilitást vizsgál meg. A két módszer összehasonlítása a következő ábrán látható.



2. ábra. *Az analitikus (bal oldalon) és szemidiszkretizációs (jobb oldalon) megoldások stabil tartománya.*

3. Eredmények

A következő ábrán látható a szemidiszkretizációs módszerrel meghatározott stabilitástérkép adott paraméterek mellett.



3. ábra. *Stabilitástérkép balról jobbra növekvő időkésés esetén.*

Látható, hogy ahogy haladunk a kritikus időkésés felé, úgy megy át a térkép a pirosba, vagyis az instabilitásba. Ennek a térképnek a segítségével a tetszőleges paraméterű összeállításra tervezhető egy szabályozó rendszer, amely stabil.

4. Összefoglalás

Megállapítottam, hogy az inverz inga stabilizálása lehetséges vízszintes periodikus pálya mentén is. A stabilitási térképekből leolvasható, hogy a legstabilabb és legkisebb erőbehatással járó pálya az a függőleges helyzet tartása, azonban nem feltétlen mindig ez a legcélszerűbb. A valóságban egy pontos szöghelyzet beállítása nem lehetséges, mivel különböző körülmények miatt az ingát érhetik erőhatások, amitől lengésbe kerül. Ekkor jobb, ha ezeket nem ellensúlyozzuk, hanem az ingát egy ezzel megegyező pályára állítjuk.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Forgó nyeregfelületen egyensúlyozó labda

PÉK BARNABÁS
Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Dr. Bachrathy Dániel Sándor, egyetemi docens, bachrathy@mm.bme.hu

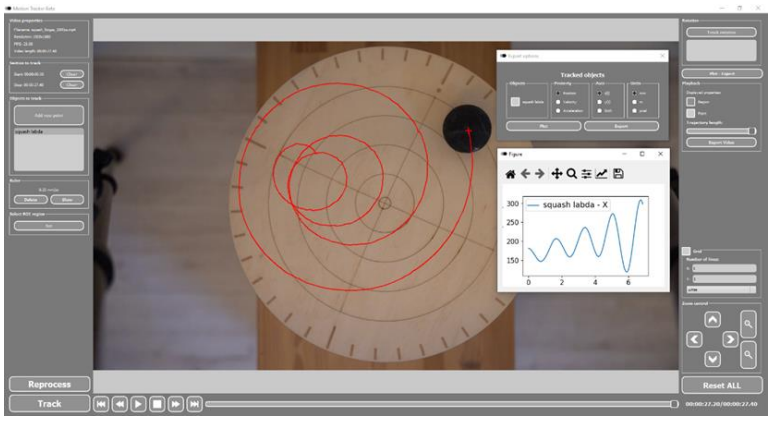
1. Bevezetés

A dolgozat során két gördülési jelenséget vizsgálhattam. Elsőként egy megforgatott korongon gördülő labdának a körpályáját figyeltem meg. A korong és a pálya középpontjának forgási frekvenciája közötti arány a labda tehetetlenségi nyomatékától függ. A második jelenség a forgó nyeregfelületen egyensúlyozó labda mozgása volt. Ezen az ívelt felületen, a ráhelyezett gömb az egyik irányban instabilan viselkedik. A felület megfelelő sebességű megforgatásával stabilizálható a helyzet. Előzetes elvárásokat állítottam fel az elméleti modellek alapján, amelyeket bizonyítani kívántam méréssel és szimulációs úton is. A mérésre készítettem egy forgó platformot.

1. ábra A mérési összeállítás

2. Alkalmazott módszerek

A méréseket a megépített platformon végeztem. Videófelvételeket készítettem a labdák gördüléséről és a *Motion Tracker Beta* mozgáskövető szoftver segítségével kiértékeltem ezeket.

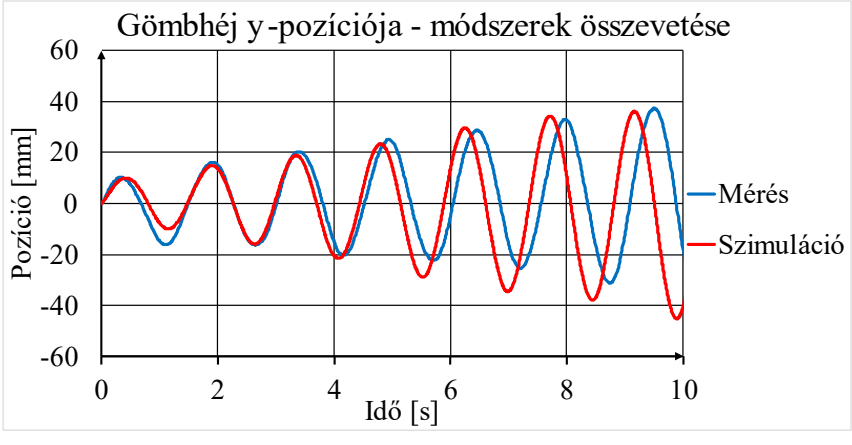


2. ábra Pozíció követő program kezelőfelülete

A görbékről leolvashattam a forgási frekvenciákat, illetve elemezhettem a leírt pályákat. A másik megközelítés a numerikus szimuláció volt, amellyel összehasonlítottam a mért adatokat és az elméleti modellt. Első lépéseként felírtam a mozgás- és kényszeregyenleteket, amelyek algebrai differenciálegyenlet-rendszert (DAE) alkotnak. Az eredményt Matlab segítségével kaptam meg, egy DAE rendszerre fejlesztett megoldóval. Végezetül a szimulációt kiegészítettem egy csillapításként szolgáló taggal, így valósághűbb megoldást kaptam. A csillapítást a Coulomb-súrlódási, illetve a viszkózus csillapítási modellel szimuláltam.

3. Eredmények

Az elméleti modellel felállított értékek helyességét bizonyították a mérések, a frekvenciaviszonyok közötti eltérés csekély volt. Nyeregfelület esetén a stabil fordulatszám, a labda gördülésének sajátfrekvenciájával összefüggött, amennyiben a labda a felület tetején oszcillált volna. A stabil helyzetben két különböző frekvenciájú hullámból adódott össze a pályát leíró görbe. Síklap esetén a szimuláció hitelesen adta vissza a mérés során tapasztalt mozgást. Az elméleti modellt mindkét módszer sikeresen alátámasztotta.



3. ábra Forgó síkfelületre helyezett pingponglabda pozíciója – m

4. Összefoglalás

Matematikai és mechanikai megközelítésben is érdekes jelenségeket vizsgálhattam a szakdolgozat során. A mérések során leolvasott értékekből kis hibával rendelkező eredményeket kaptam a frekvenciaviszonyokra. Az analitikusan felírt mozgás- és kényszeregyenletekkel numerikus szimulációt futtattam. Az egyenletrendszert kiegészítettem a futtatások után egy csillapításként szolgáló taggal. A különböző megközelítési módokkal jól alá lehetett támasztani, a kezdeti feltevéseket. A nyeregfelületen stabil helyzetben levő labda pályájáról érdekes tulajdonság derült ki, két különböző oszcillálásból adódik össze. A dolgozat betekintést nyújtott a mechanikai jelenségek matematikai modellezésébe és ennek létjogosultságába.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Vibration isolator for floating LIDAR

Péter Ónódy
Mechanical Engineering Modelling MSc, Major in Solid Mechanics, 2023/2024/I.
Supervisor: Dr. Habib Giuseppe, associate professor, habib@mm.bme.hu

1 Introduction

Floating lidar systems (FLS) in addition to their great number of advantages they have their challenges. This study is aiming to investigate one of the biggest challenges regarding the FLS device, which is the vibration of the measurement system. Being an offshore device the FLS is exposed to wave patterns which introduce motion that distracts the measurement data. The negative effect of the disturbance is investigated during the thesis and mitigated through a carefully designed vibration isolator.

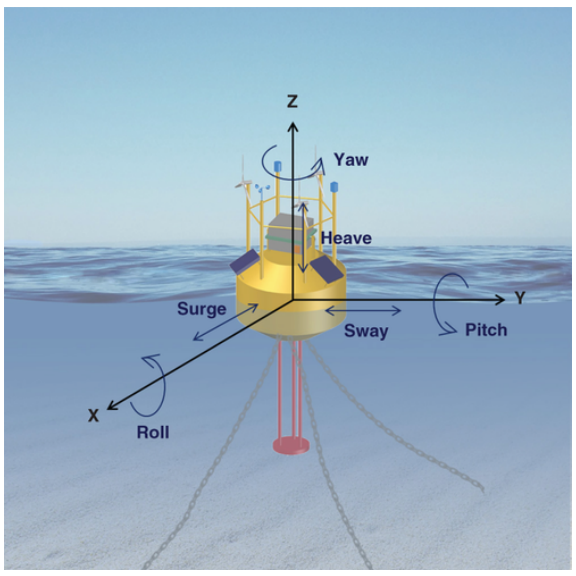


Figure 1: Floating LIDAR system (FLS)

2 Mechanical model

The mechanical model of the system consists of three parts, the lidar system, the counterweight, and a pendulum rod connecting the two masses. Thus the vibration isolator is similar to a spherical pendulum, where the lidar system is placed on top of the structure, and a counterweight is added to the structure to counteract the motion induced by the floating platform. Through the pendulum system, roll and pitch motions can be compensated. Then the equation of motion was obtained for the system through the Lagrange equation as a function of the generalized coordinates and the investigated parameters e-eccentricity, and ζ - relative damping:

$$\ddot{\varphi} = f_1(\varphi, \theta, e, \zeta)$$
$$\ddot{\theta} = f_2(\varphi, \theta, e, \zeta)$$

Using the equation the model was investigated through direct numerical simulations and was validated by Simscape Simulink.

3 Results

From the data generated, we can conclude that the isolator provides great improvement in vibration mitigation. The improvement was achieved by keeping eccentricity at a small level since the natural frequency increases with rising eccentricity. Hence with keeping the eccentricity value at a small level the natural frequency is tuned under the operating frequency range.

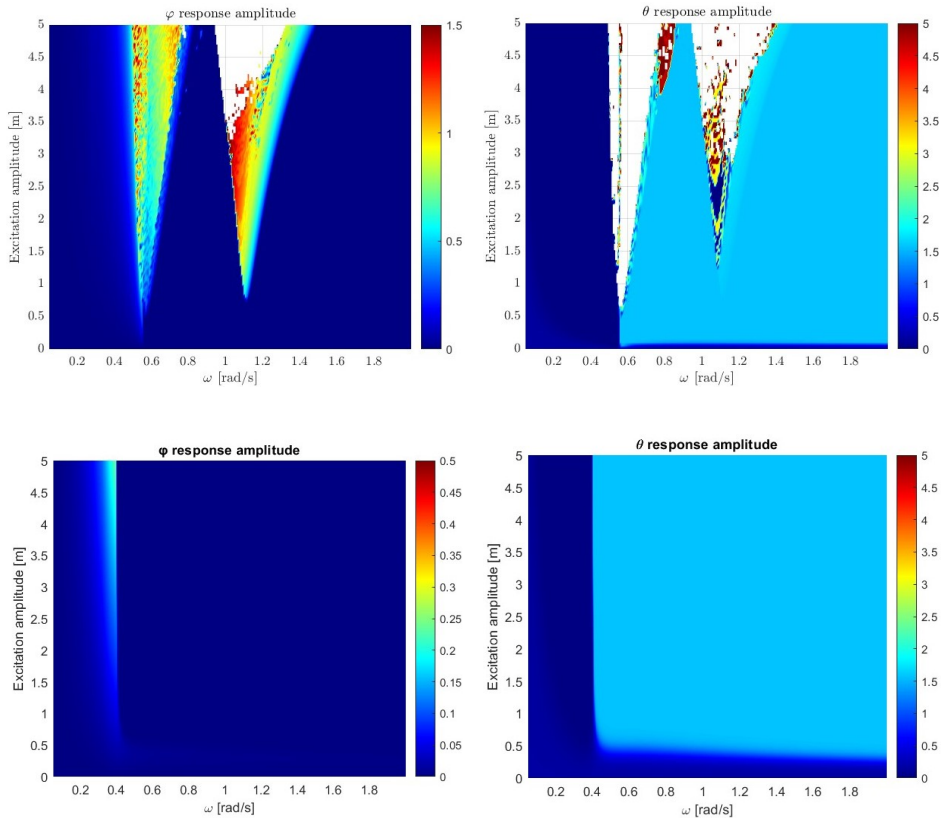


Figure 2: Response amplitudes for different isolator parameters

With damping added to the system the vibration of the system is mitigated over time, and high peaks of response amplitude are reduced. The system can have both parametric excitation and spinning effect but through the damping effect, they can be made less dangerous. Hence the crucial tilt angle response remains within the limit even for excitation waves with amplitude of 5 meter.

4 Summary

One can conclude that the given model provides an efficient motion-compensation technique. The results show that the model with smaller eccentricity and higher damping is the most effective strategy for vibration mitigation. However, with the perks of the isolator, a new problem appeared as the freedom in one extra direction, the yaw, resulted in a less stable system at some scenarios.

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. – www.mm.bme.hu

Vasúti kerék-sín érintkezésének feszültség analízise

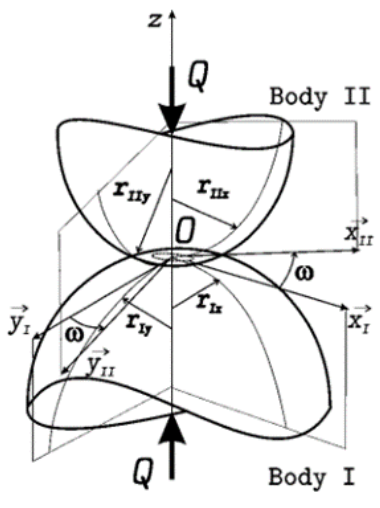
BODÓ MARCELL
Gépészmérnöki MSc, Alkalmazott Mechanika Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Dr. Kovács Ádám, egyetemi docens, adamo@mm.bme.hu

1. Bevezetés

A vasúti járművek teljesítménye szükségszerűen függ a kerekek és a sínek találkozásának apró területeitől. Így a kerék-sín érintkezés feszültséganalízise elengedhetetlen része a vasúti rendszerek teljesítményének és biztonságának megértéséhez. Napjainkban, a nehezebb tengelyterhelések és nagyobb sebességek iránti növekvő piaci igények miatt mind az infrastruktúra, mind a vasúti járművek költséges karbantartásának elkerülése az első helyen szerepel a tervezés fontossági sorrendjében. A témában folyamatosan jellennek meg egyre pontosabb modellezési módszerek az optimális üzemelés és karbantartási igények előtérbe helyezése miatt. Ennek bemutatására ez a tanulmány a tudományág jelenlegi helyzetét vázolja fel, illetve különböző modelleken keresztül betekintést nyújt a kerék-sín érintkezés jellemző feszültségállapotáról.

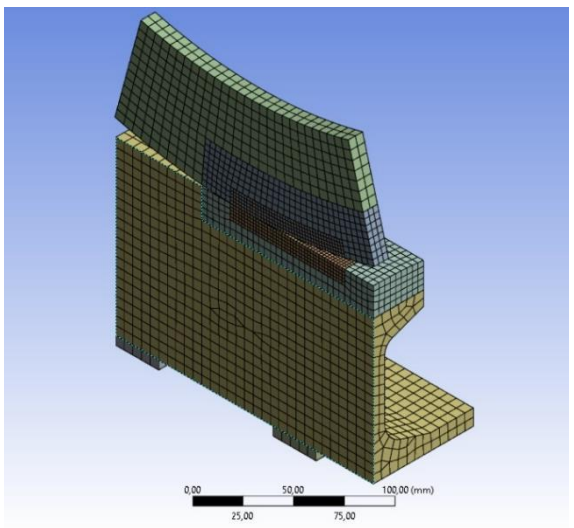
2. Alkalmazott módszerek

A téma kivizsgálása érdekében több, a Hertz-elméleten alapuló analitikus modellt felvázoltam. Továbbá megvizsgáltam, hogy az elliptikus paraméterek meghatározásának módja milyen hatással lehet az érintkezést jellemző geometriai és mechanikai eredményekre.



1. ábra: Az érintkezés geometriája analitikus modell esetén

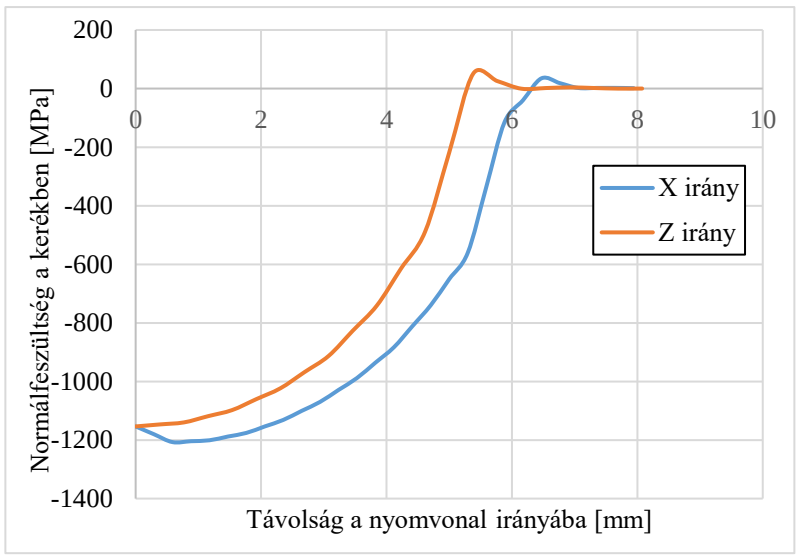
Ezenkívül több különböző részletességű végeselem modellt is készítettem a jelenség realisztikusabb szimulációjára. Ehhez az *Ansys* végeselem szoftver *Student* verzióját használtam, amelynek köszönhetően - illetve a számítógép kapacitási korlátjainak - csak a valóságot mérsékelten lekövető modelleket tudtam létrehozni. A dinamikus hatásokat a vonatkerék gördülése és a sínpárnak modellezése segítségével vettem figyelembe. Továbbá ugyanezen modellen vizsgáltam numerikus szimuláció segítségével a kerék-sín kapcsolatot jellemző tönkremeneteli folyamatokat, amelyek jelen esetben a gördülési érintkezési fáradás (RCF), illetve a kopás.



2. ábra: Végeselem modell

3. Eredmények

Az analitikus és végeselem modellekkel meghatározott eredményből általánosságba elmondható, hogy az egyszerűbb végeselem modellek jó egyezést mutattak az analitikus eredményekkel. A 2. ábrán látható elrendezés alapján azonban ezek a feszültségek fokozott mértékben csökkentek, amely betudható a feszültségelosztást és szigetelést végző sínpárnák modellezésének, a durvább hálónak és a rugalmas-képlékeny anyagmodell használatának. A gördülésből származó dinamikus hatásokat is sikerült kimutatni. Továbbá a felület alatti repedések megindulására is sikerült egy mérőszámot adni, a várható ciklusszám meghatározásával.



3. ábra: Normálfeszültség eloszlása a kerékben ez érintkezési felületen

4. Összefoglalás

Egy átfogó és érthető tanulmányt sikerült létrehozni, amely alaposan megvizsgálja és jellemzi a kerék-sín érintkezés feszültségállapotát. Ezenkívül az analitikus- és végeselem modellek kiváló alapot nyújthatnak a téma további, részletesebb feldolgozásában.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Digital control of dynamical systems with friction

ÁKOS ISTVÁN SOMODI

Mechatronic Engineer BSc, Specialisation in Mechanical Engineering Modelling, 2020/2021/I.

Supervisor: Dr. Gábor Csernák, associate professor, csernak@mm.bme.hu

1. Introduction

To date, countless mathematical friction models exist, each striving to resemble reality as closely as possible.

The aim of this paper was to get a greater understanding on how some of these models (namely Stribeck and LuGre models) influence the behaviour of a digitally controlled inverted pendulum.

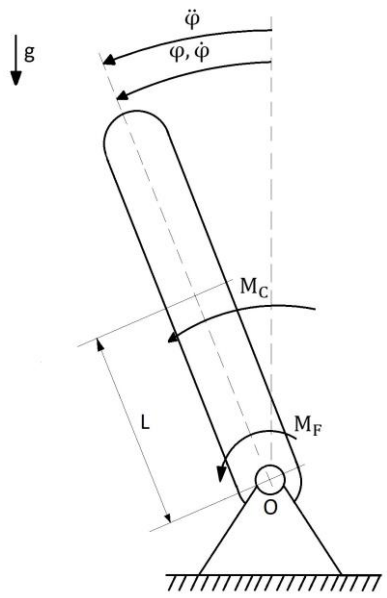


Figure 1 - Torque controlled inverted pendulum.

2. Applied methods

The equations of motion were determined using Newtons law of motion. The resulting differential equations were discretized utilizing linear multistep methods, thus creating one continuous time and one digital control model for both the Stribeck and the LuGre models. After this, several simulations were run, each with different settings to study the effects of parameter changes. The system of differential equations for the LuGre model case can be seen below.

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{1}{J}\Big(mgL\sin\big(\varphi(t)\big) - P\varphi(t) - \big(\sigma_0 z + \sigma_1(v)\,\dot{z}(t) + f(v)\big)\Big)$$

$$\dot{z}(t) = \dot{\varphi}(t) - \frac{|\dot{\varphi}(t)|}{g\big(\dot{\varphi}(t)\big)}z(t)$$

3. Results

Many different effects which occurred during the control simulations are discussed in the paper. In this section, some examples are shown.

Figure 2 shows how the characteristic of the Stribeck friction-velocity curve influences the amplitude decay rate of the angular position.

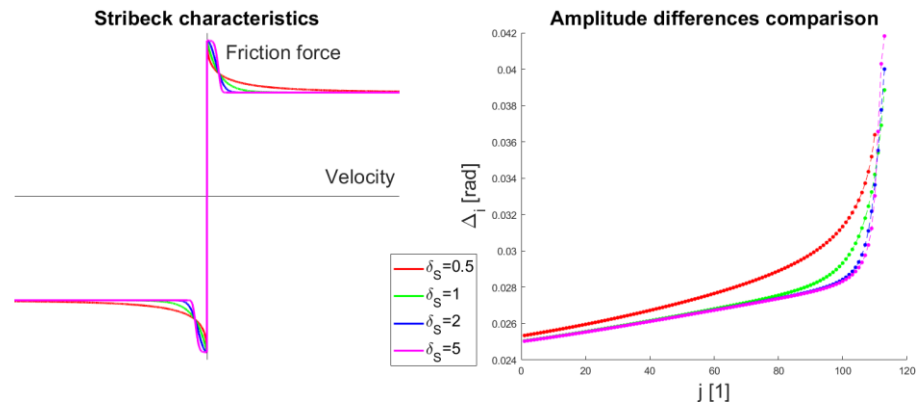


Figure 2 - Amplitude decay rate relation to Stribeck characteristics.

Figure 3 depicts the limits of proportional gain relating to model stability for different sampling times. Simulation results have shown that the relation can be estimated with a function in the form of $\tau_u(P) = \frac{C_1}{P^{C_2}}$.

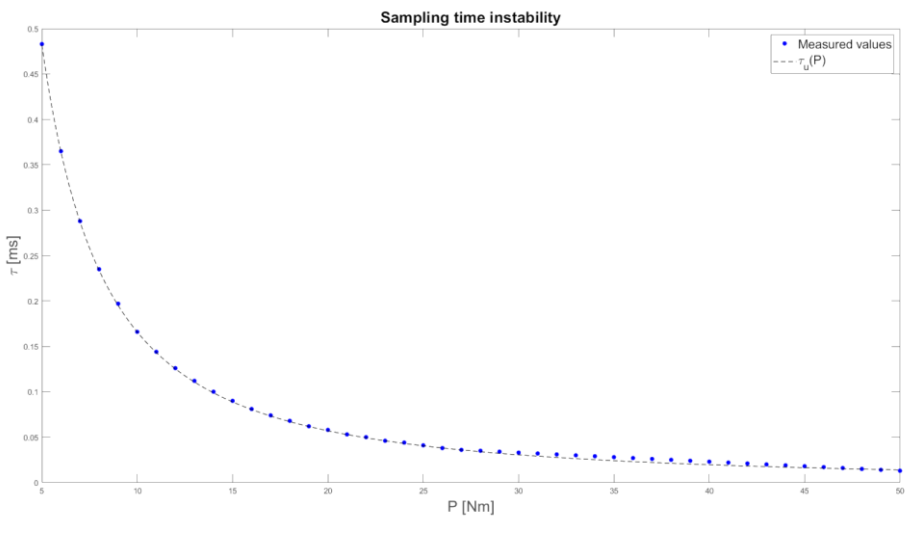


Figure 3 - Stability limits for proportional gain and different sampling time. The dashed line shows the approximation function.

4. Summary

The results show us what we must keep in mind when choosing model parameters and the variety of effects that occur during digital control simulation with friction. The model established in this paper proved to be a useful tool for analysing different friction models.

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. www.mm.bme.hu

Rázórosták forgórész-elrendezésének hatása a mechanikai szinkronizációra

Szabó Márton
Gépészmérnöki MSc Alkalmazott Mechanika Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Dr. Miklós Ákos, adjunktus, miklosa@mm.bme.hu

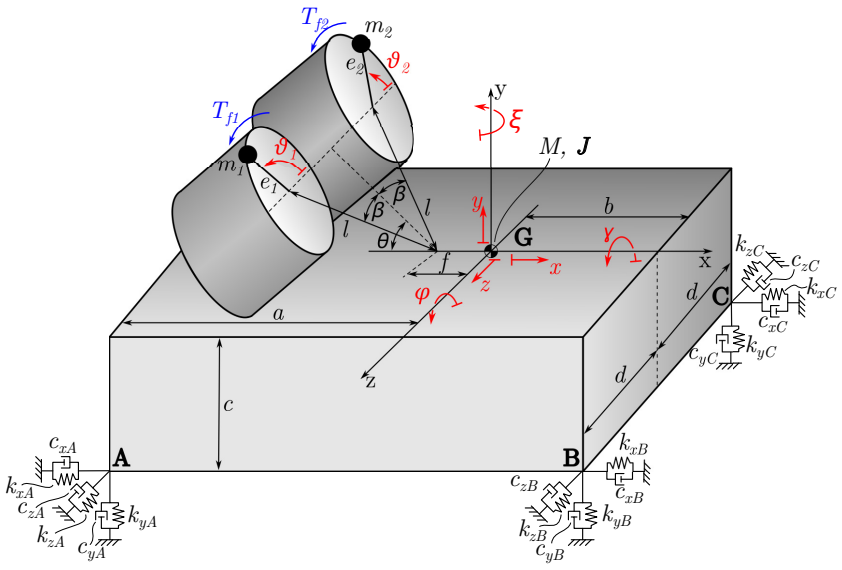
1. Bevezetés

A dolgozatom célja a különböző rázórosta fajták mélyebb megismerése volt, a matematikai modelljeik felírásával és azok numerikus szimulációjával. Tehát ennek megfelelően elsőként az ipari rosták osztályozásával foglalkoztam, illetve ezek mozgásegyenleteivel. Ezt követően pedig kiemelt figyelmet szenteltem a két forgórésszel ellátott gépek szinkronizációjának megértésére és a rostát gerjesztő excentrikus tengelyek erre a folyamatra vett hatásának feltárására. Ebben a feladatban két különböző tengelyelrendezésű gépet szimuláltam, egyrészt egy olyat, melynél a forgórészek merőlegesek az anyagszállítás irányára, másrészt pedig egy olyat, amelynél a gerjesztő tengelyek azzal szöget zárnak be.

1. ábra. Példa döntött tengelyű, két forgórészes rostára

2. Alkalmazott módszerek

A feladat megoldása során három különböző módszerrel is készítettem numerikus szimulációt.

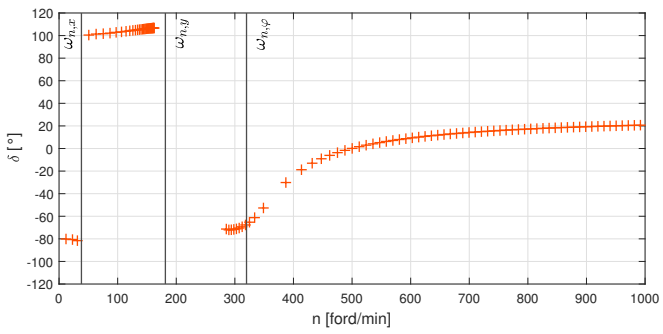


2. ábra. Döntött tengelyű, két forgórészes rosta modellje

Elsőként szakirodalomból vett egyenleteket *MATLAB* környezetben oldottam meg numerikus megoldóval. Utána saját magam is felrajzoltam, illetve kiszámítottam a második fajú Lagrange-egyenlettel a matematikai modellt, igyekezve minél kevesebb elhanyagolást megtenni, és hasonló módon ezt is szimuláltam. Végül pedig fizikai modellt készítettem a *MATLAB* szoftver *Simscape* moduljával, és ezzel is végeztem futtatásokat a feladat során. A szinkronizációs viselkedés vizsgálatánál a szinkronizáció jelenségét a szimulációkból nyert eredményekből számított forgórészek fázisszögével és a kialakuló rezgés frekvenciájával jellemeztem. Míg a rostatest rezgését pedig elsősorban az amplitúdóval, a rezgés irányával, illetve az ipari berendezések fő paraméterével az úgynevezett hajítási tényezővel írtam le.

3. Eredmények

A vizsgálataim eredményeként azt kaptam, hogy a rosták szinkronizációs fázisszöge függ a frekvenciatartománytól, ahova szinkronizálódnak a sajátfrekvenciákhoz képest, bár ez a jelenség kevésbé jellemző a döntött tengelyelrendezésű rostákra. Továbbá ebből kifolyólag ezeken a különböző frekvenciatartományokon a rosták mozgása is változó, hiszen a fázisszöggel összefügg a gerjesztési irány, ezért előnyös, ha tervezésénél a sajátfrekvenciák egymáshoz közel kerülnek, így elkerülhető a nem üzemszerű működés. Továbbá a szimulációk kimutatták, hogy a forgórészek egymáshoz képesti távolsága nem, de a tömegközépponttól vett táv annál inkább eltávolítja a fázisszöget és a kialakuló mozgást az optimálistól.



3. ábra. A végső fázis a fordulatszám függvényében

4. Összefoglalás

Az eredmények alapján a három szimulációs módszer gyakorlatilag ugyanazt az eredményt adta, tehát a felírt mozgásegyenletek jól leírják a működést. Összességében pedig elmondható, hogy szinkronizálódó forgórészes rosták esetén érdemes úgy tervezni a gépeket, hogy a sajátfrekvenciák minél közelebb legyenek egymáshoz, és az excenterekből eredő gerjesztés hatásvonala a tömegközéppont környezetébe kerüljön, hogy a gép az elvártaknak megfelelően működjön.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Effect of transverse stretch characteristics in mechanical modelling and parameter optimization of polymer foams

Marcell SZÁSZ
Mechatronical Engineer BSc, Specialisation in Mechanical Engineering Modelling, 2023/2024/I.
Supervisor: Dr. Szabolcs BEREZVAI, Assistant professor, berezvai@mm.bme.hu

1 Introduction

As polymer foams become more widely used in industry, it is important to be able to simulate their behaviour with high precision. One of the main challenges in case of closed-cell polymer foams is to determine the transversal deformations, in order to predict the volumetric change of the foam, under load. In this thesis, this task is done with the use of an image processing system, developed in Python environment.

To provide the sufficient data, mechanical tests were performed on two Ethylene Vinyl Acetate closed-cell foams in the form of uniaxial compressions, with and without lubrication.

To the measurement data, the parameter fitting of the Ogden-Hill-Storåkers hyperelastic material model is performed.

Then, the fitted models are used in Finite Element Analyses, as a validation of the models.

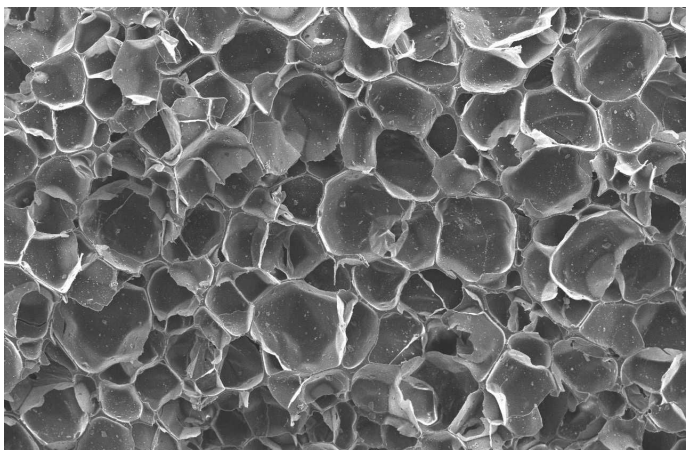


Figure 1: The microscopic image of an investigated foam

2 Applied Methods

For the image processing tasks, *opencv* was used in Python environment. To determine the transversal stretches, the distance of the specimens' contours were calculated within a window, during compression. To find the edges of the specimen, Canny edge detection method was used. Then, the noise were reduced with the help of the Savitzky-Golay filter.

After obtaining the the stress-stretch characteristics in longitudinal end transversal directions, the parameter fitting of the Hyperfoam material model is done with the use of *lmfit* Python library, using the Levenberg–Marquardt algorithm. The strain energy function of this model can be written, as

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 + \frac{1}{\beta_i} \left(J^{-\alpha_i \beta_i} - 1 \right) \right). \quad (1)$$

The fitted material model parameters are then applied in Abaqus environment in Finite Element Analyses, where a compression is simulated to validate the results.

3 Results

The fitted stress-stretch curves and stretch characteristics can be seen in Figure 2. It shows, how the model improves in precision as the number of fitted parameters grow, but in the meantime it tends to become redundant, making the use of higher order models unnecessary.

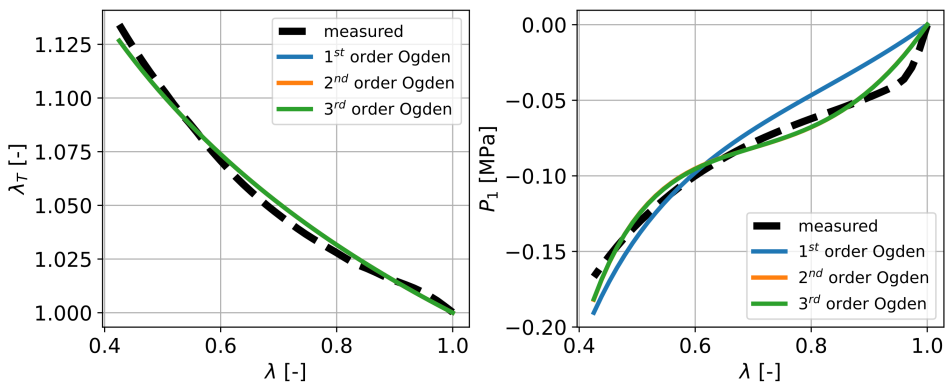


Figure 2: Fitted different order models

The simulated results are following the model accurately.

4 Summary

The method of detecting the transversal deformations of closed-cell polymer foams have great impact on the fitted model. For this task, an automated image processing system were developed in Python and used with success on the measurement data. After that, the parameter fitting of the Hyperfoam material model were performed and the obtained parameters were used in Finite Element simulations.

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. – www.mm.bme.hu

Application of data-driven methods for mechanical problems using Python

Szász Zsolt
Mechatronic Engineer BSc, Specialization in Mechanical Engineering Modelling, 2023/2024/I.
Supervisor: Dr. Kossa Attila, Associate Professor, kossa@mm.bme.hu

1 Introduction

Throughout our engineering studies, we've learned how to model certain laws of the universe and to use these law's to model complex systems and also learned how to use these system models to improve. We need to consider that a model just serves as a tool to capture certain aspects of a real-world phenomena. In this paper we will explore data-driven modelling.

2 Basics of data-driven modelling

Simplifying and broadening the concept of a model, we delve into what it truly means to address physical problems using a data-driven approach.

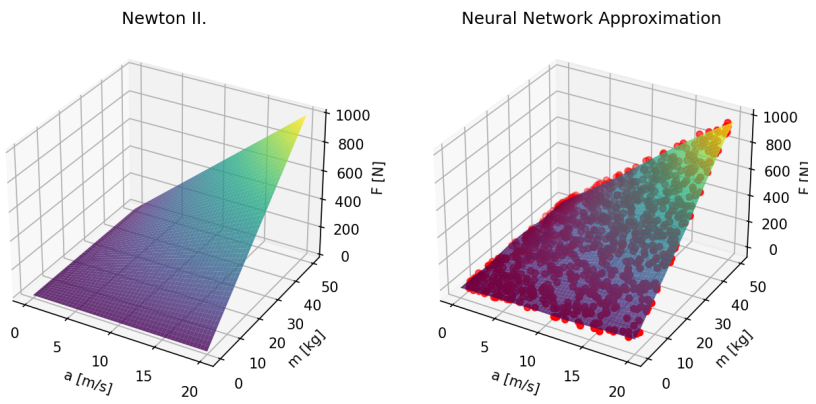


Figure 1: alternative ANN model for Newton II

Essentially, this process can be envisioned as fitting a hypersurface, whose characteristics are contingent on the dimensions of the task, to a set of measurement points.

3 Different Data-Driven methods

The methods employed in data-driven modeling are presented and systematized from a generalized perspective. Two specific categories garner our attention, namely dimension reduction and machine learning methods. As dimension reduction methods, we mention the Discrete Fourier Transform. Additionally, we aim to approach it from a data scientist's perspective, exploring its broader interpretation.

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle \psi_k, f \rangle}{\langle \psi_k, \psi_k \rangle} \cdot \psi_k = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_k \cdot \psi_k$$

We interpret the DFT as a form of projection, examining the data from a coordinate system characterized by directions that induce significant changes in data

4 Ex. Second moment of inertia

The problem will be mathematically defined, followed by discretization, and a general numerical approximation will be provided. Subsequently, a data-driven machine-learning-based solution will also be presented.

$$I_x(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} y^2 \, dA = \sum_{i=1}^{W} \sum_{j=1}^{H} p(i,j) \cdot y_i^2 \cdot L_{pix}^2$$

By creating a synthetic cross-section and employing the numerical solution, we generate data that facilitates addressing the problem through a data-driven approach.

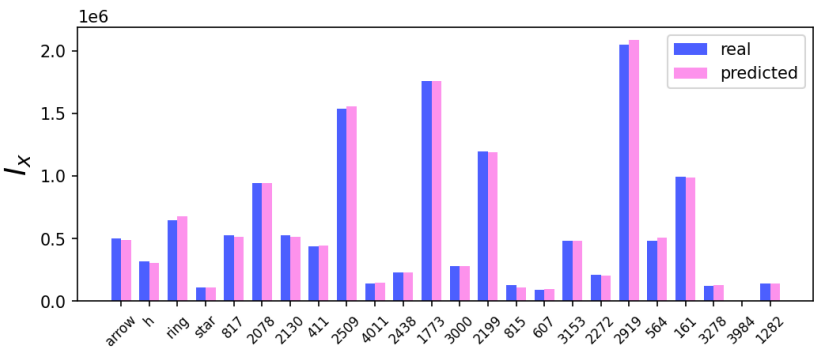


Figure 2: real vs predicted in the case of I_x

Following this, the data employed in constructing the model is subjected to testing, and subsequent adjustments are made based on the test results to enhance the model.

5 Summary

In conclusion, we contextualize the generated model by comparing it with the numerical solution, particularly in terms of its applicability.

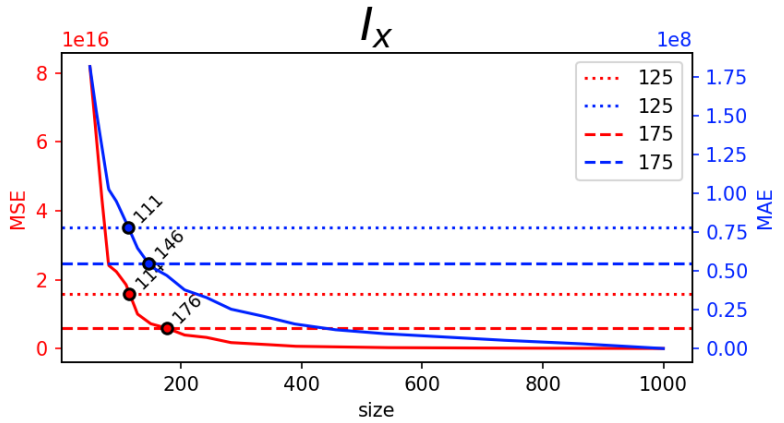


Figure 3: data driven vs numerical precision in the case of I_x

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. www.mm.bme.hu

Gumimembrán és üveglap közötti folyadékfilm numerikus vizsgálata

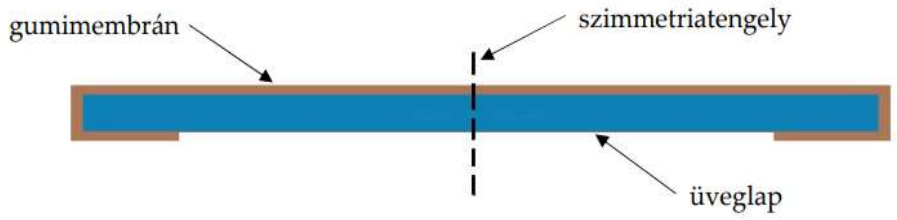
SZIROVICZA CSABA
Gépészmérnöki BSc, Gépészeti Fejlesztő Specializáció, 2023/2024/I.
Témavezető: Dr. Magyar Bálint, adjunktus, magyar@mm.bme.hu

1. Bevezetés

A szakdolgozat célja, hogy egy olyan szimulációs eljárást dolgozzunk ki, amellyel egy vékony folyadékréteg térkitöltése és szétterülése numerikusan számítható. Ennek érdekében irodalomkutatást végzünk a folyadékok felületi feszültsége és az ennek következtében kialakuló nyomáseloszlásokra vonatkozóan, majd ANSYS Mechanical APDL-ben létrehozunk egy végeselemes modellt, mellyel számítható a folyadékfilm szétterülése és térkitöltése a gumimembrán és üveglap között. A szakdolgozat témája az orvosi diagnosztikához szükséges mikroszkópok működése szempontjából merült fel.

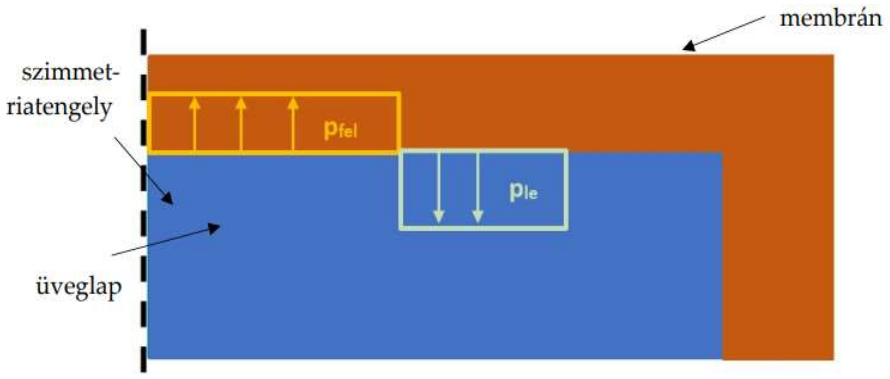
2. Alkalmazott módszerek

A kidolgozás során egy 2 dimenziós, tengelyszimmetrikus modellt használtunk, amely síkfeszültségi állapotot feltételez, és síkelemekből áll.



1. ábra: A 2D modell felépítése

A folyadékréteg és a membrán közötti nedvesítés hatására létrejövő nyomáseloszlást egy előjelváltó nyomáseloszlással közelítettük, ugyanis csak egy irányba ható nyomáseloszlás esetén a megoldó nehezen talál egyensúlyi helyzetet, és a membrán olyan pontjai is felemelkednek, amik távol helyezkednek el a nyomáseloszlás helyétől.

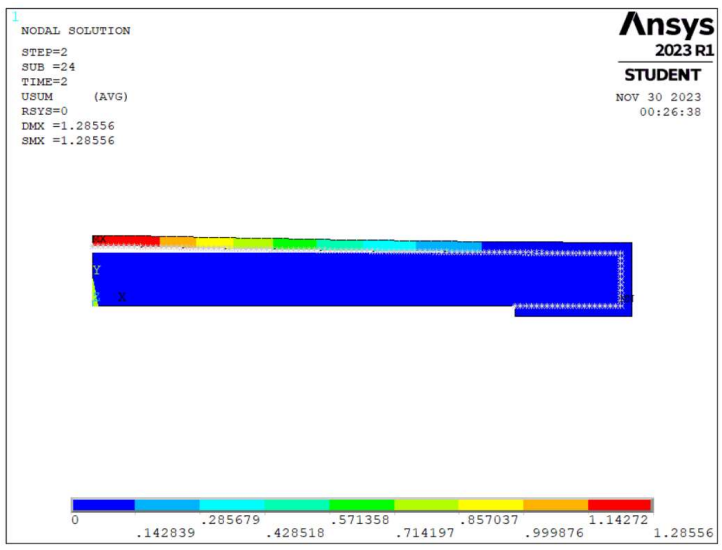


2. ábra: A nedvesítés egyszerűsített modelljében a gumimembrán alsó vonalára átadódó nyomáseloszlás

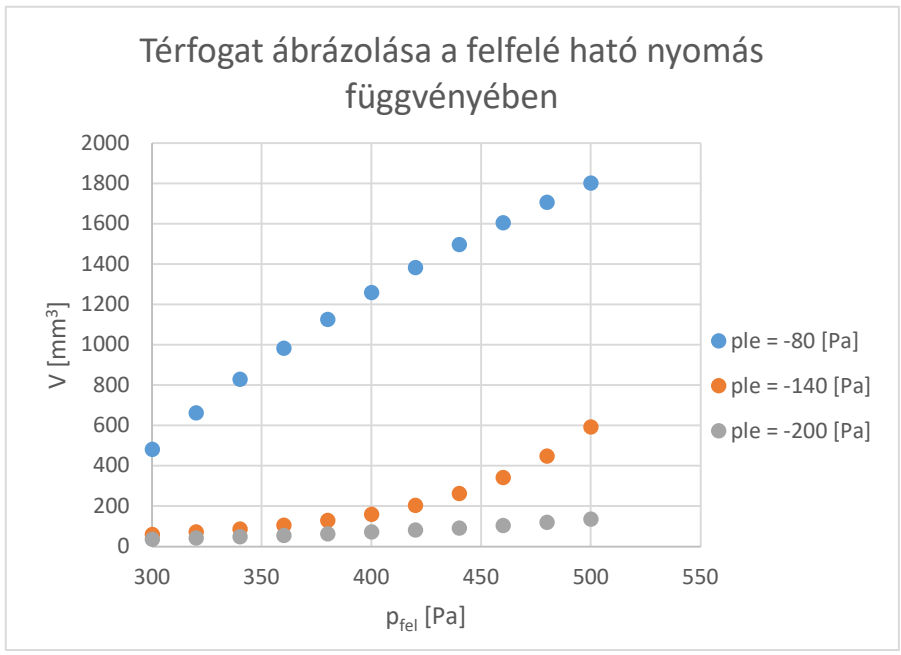
A felépített modellel az üveglap és a gumimembrán közötti térkitöltést vizsgáltuk, ami a folyadékréteg helye. A membrán a nyomás hatására megemelkedett a szimuláció során, és lehetőségünk nyílt a membrán és az üveglap közötti térfogat kiszámítására és a deformációk vizsgálatára.

3. Eredmények

A szimuláció eredményeként tudtuk ábrázolni az elmozdulásokat, és számos diagramot készítettünk. Ilyen például a térfogat-nyomás diagram és a nyomás-hatótávolság diagram.



3. ábra: Adott nyomáseloszlás esetén kialakult elmozdulások



4. ábra: Térfogatok a felfelé ható nyomás függvényében

4. Összefoglalás

A felépített modell segítségével tudtuk szemléltetni a kialakult deformációkat, és több térfogat-nyomás diagramot is készítettünk. Megvizsgáltuk azt is, hogy különböző vastagságú membránok esetén mekkora deformációk és térfogatok alakulnak ki. Ennek ellenére fontos megjegyezni, hogy a modell továbbfejlesztésre szorul, ugyanis a nedvesítés és a membrán és folyadék közötti felületi feszültségek hatását elhanyagolja, ezek pontos modellbe illesztése pedig elengedhetetlen a folyadék térkitöltésének és szétterülésének modellezése szempontjából.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
www.mm.bme.hu

Development of crosslinked all polyethylene shape memory composites

ESZTER TÓTH
Mechatronic Engineer BSc, Spacialisation in Mechanical Engineering Modelling, 2023/2024/I.
Supervisor: Dr. Attila Kossa, associate professor, kossa@mm.bme.hu

1. Introduction

Nowadays, the term "smart" is a very actual phrase both in everyday language and in connection with various scientific findings. It does not come as a surprise, since these devices and materials are at the core of mass automation that our world is currently moving towards. Shape-memory polymers can be gathered under this umbrella, because in response to a certain stimulus (e.g. heat, or a change in pH balance) they can change their shape on their own once, or even several times. Generally, these materials are hard to mass produce in conventional ways like injection moulding, and their recovery strain and strength is significantly lower than those of shape-memory alloys. The aim of the thesis is to develop a better alternative to the nowadays popular XPE, a shape-memory polymer that has an increased recovery strain and physical strength.

1. Figure The shape memory effect

2. Applied methods

My supervisors had done the irradiation of the fibres and the production of the composites beforehand, and I received these test specimens and started working with them. They took the following steps:

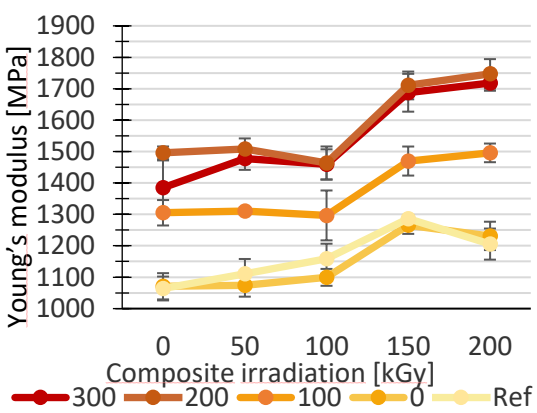
- Cut the Dyneema fibres manually into 8-10 mm long strands, irradiated these with various doses of gamma irradiation in hermetically sealed PE bags using a panoramic type SS-01 γ-irradiator at KFKI (Central Institute of Physics).
- Compounded HDPE and the cut-to-size irradiated fibres.
- Air cooled the material and granulated it. Four types of granules created contained fibres irradiated with 0, 100, 200 or 300 kGy.
- Produced test specimens using an injection moulding machine.
- Created reference HDPE specimens without any fibres.

The results were standard 4 x 10 mm^2 1A dumbbell-shaped specimens, in accordance with ISO 527. Five of each irradiation dosage pairing. As the first step of my work, I took the injection moulded specimens and irradiated them with the same equipment as the first time at the Central Institute of Physics at doses of 50, 100, 150 or 200 kGy. This resulted in 25 samples of different irradiation dosage pairings.

Afterwards, I carried out various mechanical tests such as bending or hardness tests, material structure tests, DSC, DMA and recovery stress measurements to prove my hypothesis that increasing the irradiation dose up to a certain value can improve the mechanical properties and that the material becomes capable of shape memory.

3. Results

The results of the test performed show that in specimens, in which the fibres received more than 200 kGy irradiation dose, the internal orientation started to decrease, causing the mechanical properties to degrade, but until that point, the mechanical properties are improved as the irradiation dosage increased (see Figure 2). Looking the results of the bending test we can conclude that the total irradiation dose, received by the whole composite, and the Young's modulus are directly proportional with each other. This is caused by the increase in crosslink density as a consequence of the irradiation, and is proven by the results of the DSC and structural analysis. When taking a look at the storage modulus of the composites irradiated with 150 kGy, I concluded that an increase was detectable as the irradiation dosage was increasing, which is also due to a higher crosslinked fraction in the material. The recovery stress of the composite also increased directly proportional to the irradiation dosage until the previously mentioned structural changes started to appear for specimen irradiated with more than 200 kGy.



2. Figure The results of the bending tests

4. Summary

We can therefore conclude that the second irradiation resulted in improved mechanical properties compared to the reference HDPE, and the material became capable of exhibiting shape-memory behaviour.

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. www.mm.bme.hu

Modelling the mechanical behaviour of auxetic materials

Tamás Vargovics

Mechanical Engineering Modelling MSc, Major in Solid Mechanics, 2023/2024/I.

Supervisor: Dr. Attila Kossa, associate professor, kossa@mm.bme.hu

1 Introduction

Auxetic structures possess unique mechanical properties that differ from most traditional materials. They exhibit negative Poisson's ratio, meaning they expand laterally when stretched longitudinally. The primary goal of this study was to develop a methodology for better designability and to further extend the potential application areas of such metamaterials.

2 Applied methods

In this study, a complete mechanical analysis was carried out including experiments and numerical analyses. The self-designed structures were fabricated from a 1 mm thick silicone sheet, using a laser cutting machine. A third-order incompressible Ogden hyperelastic constitutive model was used to characterize the behavior of the material. The corresponding strain energy function is given by the following expression.

$$W = \sum_{k=1}^{3} \frac{2\mu_k}{\alpha_k^2}(\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3)\,. \tag{1}$$

The parameter-fitting task was performed in Matlab by minimizing the error between the measurement data and the model prediction. In addition, uniaxial extension was performed on the auxetic structures with the help of a one-column Instron universal testing machine.

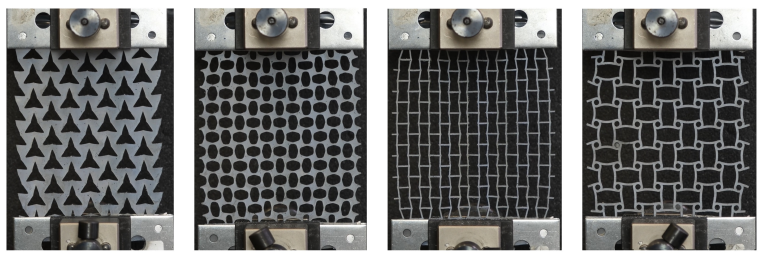


Figure 1: The specimens at a given axial strain

The experiments were recorded with a high-resolution 8K camera, the recordings were post-processed by a special motion tracking software. The apparent Poisson's ratio was calculated from the axial and transverse stretches. Simulia Abaqus version 2022 was used for the corresponding finite element simulations. The next step was a parametric study, which was carried out in Abaqus for the second structure, changing the thickness and the length of the perforations. Finally, two examples were created, which are based on the constructed method. The first is an anisotropic cube, the second is a cylinder with varying cell structure.

3 Results

The numerical results are compared to the experimental results for the second structure in the following figure.

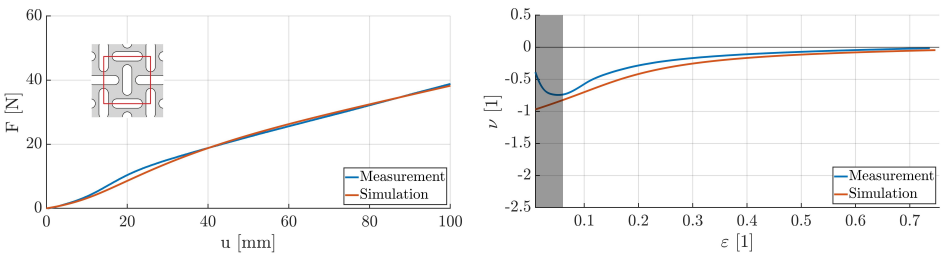


Figure 2: Force-displacement and Poisson's functions

One result for the parametric study can be seen below. The figure show the effect of the geometry change on the apparent Poisson's ratio, for a given axial strain.

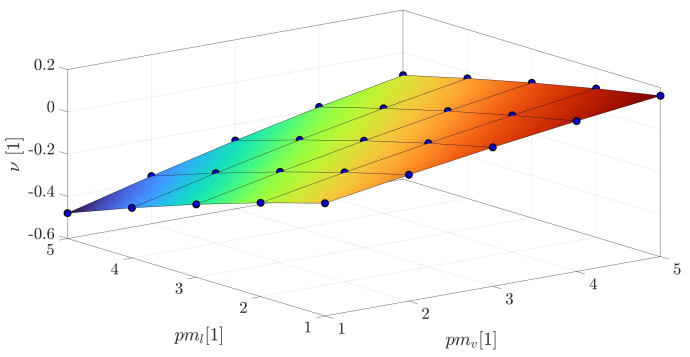


Figure 3: Poisson's ratio surface

Last but not least, the results of the FE tests of the anisotropic cube are presented with a deformed shape and the Poisson's functions of all load cases.

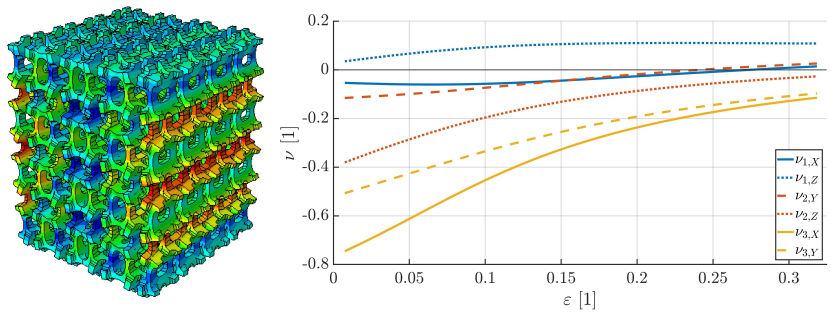


Figure 4: Results of the first example

4 Summary

The overall conclusion is that a highly exploitable and reliable design methodology was developed in this study, which could be utilized in the design of real auxetic parts, and also shows the massive potential and possibilities these kind of materials have.

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. – www.mm.bme.hu

Detecting chaos in dynamical systems using deep learning techniques

Dominik WENESZ
Mechatronical Engineer BSc, Specialisation in Mechanical Engineering Modelling, 2023/2024/I.
Supervisor: Dr. Habib GIUSEPPE, Associate professor, habib.giuseppe@mm.bme.hu

1 Introduction

The goal of this thesis was to investigate different machine learning algorithms to classify chaotic time series. The task of the different algorithms was the classification of time series into chaotic or non-chaotic classes. The time series were generated from three dynamical systems, namely Duffing, Rössler, and Lorenz systems. The Duffing system was used to generate training data, and the other two formed the test data set. The Duffing oscillator is governed by the following second-order ordinary differential equation:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma\cos(\omega t) \tag{1}$$

Here, x represents the displacement of a particle from its equilibrium position, $\dot{x}$ denotes the velocity, and $\ddot{x}$ represents the acceleration. The parameters α, β, δ, and γ influence the system's behavior, while ω denotes the frequency of the external driving force.

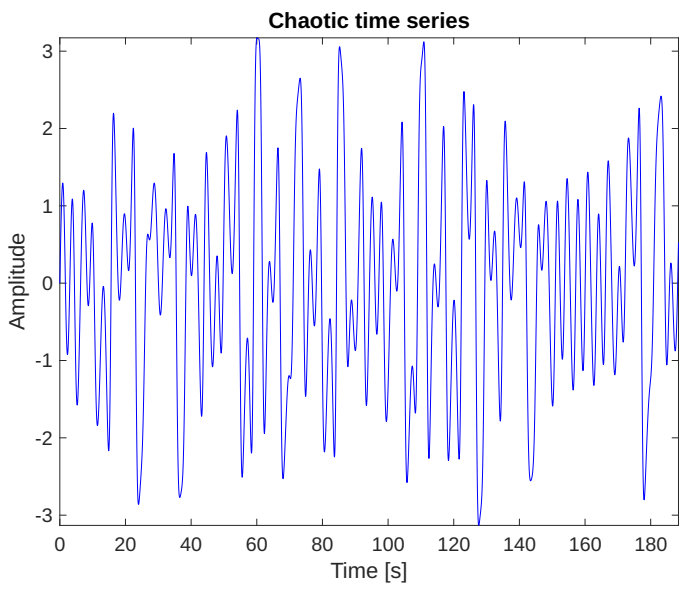


Figure 1: Chaotic time series from the Duffing system

2 Applied Methods

The time series were generated using numerical integration (RK45) and labeled using Lyapunov exponents.

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_i(t)}{\mathrm{d}\mathbf{x}_i(0)}\right| \tag{2}$$

Here, λ_i represents the ith Lyapunov exponent, quantifying the average rate of separation of trajectories in different directions in the phase space.

Among the traditional machine learning models, k-nearest neighbors, random forest, and support vector machine have been studied, and among the neural networks, dense, convolutional, long short-term memory, and transformer networks have been investigated The classification between chaotic and non-chaotic cases was also studied on the basis of the phase diagram and poincare section produced from the time series, using convolution and transformer networks.

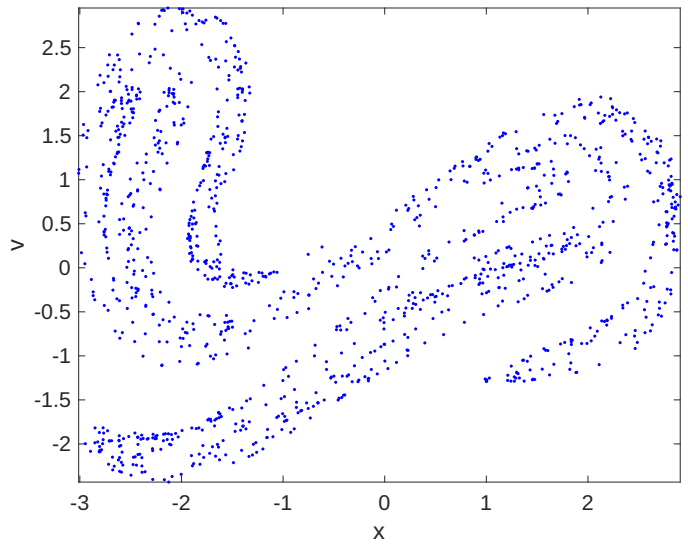


Figure 2: Poincare section of a chaotic time series from Duffing system

3 Results

Traditional machine learning algorithms were not able to produce good results on the test dataset. The neural networks were trained using a large amount of data, so there was no overfitting, which helped the general solution, and thus they produced models that performed well on the test dataset.

Models	Duffing	Lorenz	Rössler
Transformer	0.980	0.951	0.959
Transformer-CNN	0.986	0.966	0.963
Transformer-LSTM	0.980	0.952	0.950

Table 1: Accuracy results of the best performing neural networks on 1D time series data

4 Summary

Overall, some of the machine learning algorithms were not able to provide a general solution. However, among the deep learning based methods, the CNN, LSTM and transformer models were able to provide a good general solution. The best performers were the combined networks, which were created by fusing the best LSTM, CNN and transformer models.

Budapest University of Technology and Economics
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Applied Mechanics
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. – www.mm.bme.hu