XI. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA
MaMeK, 2011
Miskolc, 2011. augusztus 29-31.

KÍSÉRLETEK VENTILÁTORRAL HAJTOTT ALULAKTUÁLT INGA SZABÁLYOZÁSÁRA

Zelei Ambrus[1], **Móra Máté**[2] **és Stépán Gábor**[3]
[1] MTA-BME Gépek és Járművek Dinamikája Kutatócsoport
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. MM Épület
zelei@mm.bme.hu
[2,3] BME, Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5. MM Épület
mora.mate@gmail.com, stepan@mm.bme.hu

Absztrakt: *A szabályozott dinamikai rendszerek egy speciális csoportját képezik az alulaktuált rendszerek, amelyeknél a beavatkozó jelek száma kisebb, mint a rendszer szabadsági fokainak a száma. Az alulaktuált rendszerek közös jellemzője, hogy az aktuátoroknak az ún. zéró dinamikára nincs közvetlen befolyásuk. Alulaktuált dinamikai rendszerek kiszámított nyomaték szabályozásához szükséges inverz kinematikai és inverz dinamikai feladat egymástól nem választható szét, megoldásuk pedig az ismeretlen beavatkozójelekre és leíró koordinátákra nézve differenciál-algebrai egyenletre vezet. A szakirodalom többféle lehetőséget kínál az alulaktuált rendszerek kiszámított nyomaték szabályozására amennyiben a szabályozott rendszer dinamikai modellje minimális számú koordinátákkal áll rendelkezésre. Bonyolultabb, sok testből felépülő dinamikai rendszerek esetében a minimális számú koordinátákkal felépített dinamikai modell nagyon bonyolultá válhat, és a valósidejű számítások szempontjából megéri a minimálisnál nagyobb számú koordinátát felvenni. A redundáns leíró koordinátákat használva geometriai kényszerek felírása szükséges, ami miatt már önmagában a dinamikai modell is differenciál-algebrai egyenletté válik. Az alulaktuált rendszerek kiszámított nyomaték szabályozása a nem minimális számú redundáns koordinátákkal leírt rendszerekre általánosítva is megtalálható a szakirodalomban. Jelen munkában a szakirodalomban fellelhető megoldási módszerek közül a differenciál-algebrai egyenletrendszer implicit Euler módszerrel történő közvetlen numerikus megoldására épülő algoritmus alkalmazását vizsgáljuk kísérleti úton. A kísérleti berendezés egy ventilátorral szabályozott ingából és az arra rugalmasan rögzített inverz ingából áll. A kísérletek során különös figyelmet fordítottunk a stabilitási kérdésekre, a pályakövetési pontosságra és a számítási igény nagyságára.*

1. BEVEZETÉS

Az utóbbi évtizedekben a robotok szabályozásának legelterjedtebb módszerévé az vált, hogy a rendszer dinamikájának visszacsatolásával egy lineáris dinamikai rendszert állítunk elő. Ezután tetszőleges mozgás írható elő a robot számára, ami mindaddig megvalósítható, amíg az aktuátorok elegendő nyomatékot tudnak biztosítani. Alulaktuált rendszereknél ez az eljárás közvetlenül nem alkalmazható. Ennek általános vizsgálatához tekintsük a következő általános mozgásegyenletet:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\mathbf{u}, \tag{1}$$

ahol $\mathbf{q}$ a rendszert leíró minimális számú koordináták vektora, $\mathbf{u}$ pedig a szabályozó bemenetek vektora. Az (1) megfogalmazásánál azzal a feltételezéssel élünk, hogy az $\mathbf{u}$ bemenet lineárisan szerepel a rendszerben. A rendszer teljes aktuáltságú, ha az $\mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ bemeneti mátrix rangja megegyezik a szabadsági fokok számával, azaz

$$\mathrm{rank}(\mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)) = \dim(\mathbf{q}). \tag{2}$$

Ebben az esetben megválaszthatjuk a bemenő jelet az $\mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ invertálásával:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)^{-1}\left[-\mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \tilde{\mathbf{u}}\right]. \tag{3}$$

Ezt az (1) mozgásegyenletbe visszaírva a

$$\ddot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{u}} \tag{4}$$

lineáris rendszert kapjuk, ami azt jelenti, hogy ha az $\mathbf{u}$ bemenetet a (3) szerint választjuk meg, akkor a $\mathbf{q}$ és $\dot{\mathbf{q}}$ ismeretében a rendszer gyorsuálát tetszőlegesen írhatjuk elő az $\tilde{\mathbf{u}}$ szintetikus bemenet segítségével. Ehhez az $\mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ vektort és az $\mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ mátrixot tökéletesen ismertnek feltételezzük.

A fent bemutatott állapotvisszacsatolással történő linearizálás azonban alulaktuált rendszereknél nem valósítható meg, mivel $\mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ilyenkor nem invertálható. Alulaktuált rendszerről tehát akkor beszélünk, ha a beavatkozó jelek száma kisebb, mint a rendszer szabadsági fokainak a száma [1, 2], vagyis

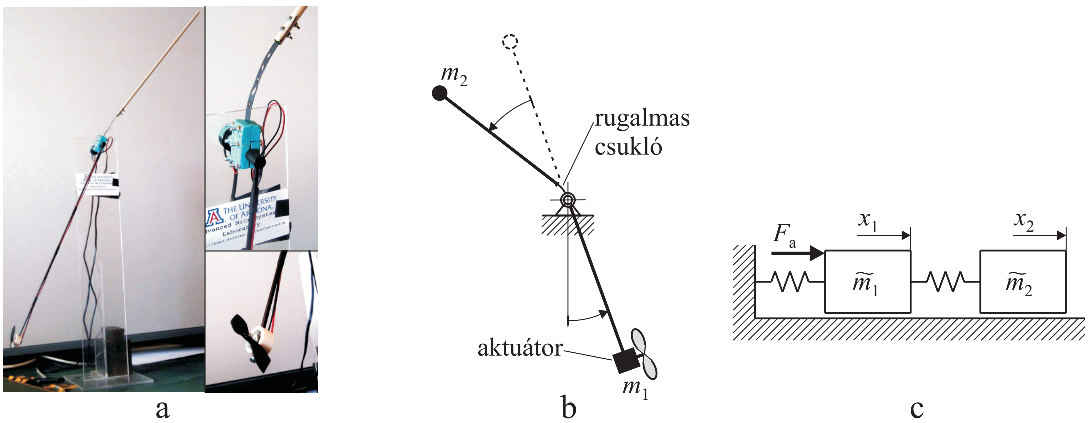
$$\mathrm{rank}(\mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)) < \dim(\mathbf{q}). \tag{5}$$

A fent leírtak miatt az alulaktuált rendszerek általános vizsgálata összetettebb feladat a teljes aktuáltságú rendszerekénél. Az alulaktuált rendszerekre vonatkozó ismeretek azonban energiahatékonyabb és fürgébb robotok építését teszik lehetővé, illetve az eddig is alkalmazott alulaktuált rendszerek szabályozása válhat pontosabbá.

Tipikusan alulaktuált rendszer például egy daru, mivel nincs közvetlen befolyásunk a lengő teherre. A kötél felső végpontjának a mozgását közvetlenül irányíthatjuk, de a lengő teher mozgását a rendszer dinamikája határozza meg. Nagyon sokféle szabályozási stratégiát alkalmaznak a daruk nemkívánt kilengéseinek minimalizálására [3, 4], de az alulaktuált rendszerek szabályozásával kapcsolatos ismeretek további lehetőségeket tárnak fel. Egyes újszerű robot koncepciók is kihasználják az alulaktuált dinamikai rendszerek előnyét. Az ACROBOTER szervízrobot a darukhoz hasonlóan egy kábelen lóg le a mennyezetről, és képes az inga szerű gyors mozgást előnyösen kihasználni [5]. A gyakorlatban gyakran előfordul, hogy rugalmas elemek okozzák a rendszer alulaktuáltságát [6]. Ilyen lehet például egy rugalmas tengelyen vagy tengelykapcsolón keresztül hajtott alkatrész.

A jelen munkában vizsgált, 1./a és 1./b ábrán látható kísérleti berendezéssel azt esetet vizsgáljuk, amikor rugalmas elem okozza az alulaktuáltságot. A vizsgált rendszer egy ventilátorral hajtott ingából és arra rugalmasan rögzített inverz ingából áll. A szabadsági fokok száma kettő (γ és ψ szögek), a beavatkozó jelek száma egy (a ventilátorra adott feszültség), tehát a rendszer alulaktuált. A szabályozás szempontjából ezzel analóg rendszer a 1./c ábrán látható $\tilde{m}_1$ és $\tilde{m}_2$ testekből kialakított lengő rendszer, ahol a két szabadsági fokhoz szintén egyetlen $\mathbf{F_a}$ beavatkozó erő van. Az általunk végzett kísérletben annak a szabadsági foknak a mozgását írjuk elő, amelyiken a beavatkozó erő is van. A másik szabadsági fok dinamikája ilyenkor zavarásként van jelen, de ha a szabályozó algoritmus ezt a dinamikát is figyelembe veszi, akkor hatása kiküszöbölhető.

Ahogy az előzőekben leírtuk, az alulaktuált dinamikai rendszerek kiszámított nyomaték szabályozása a robotikában leginkább megszokott esetekhez képest kihívást jelent. Ennek oka az, hogy az inverz kinematikai és inverz dinamikai feladat egymástól nem választható szét, megoldásuk pedig az ismeretlen beavatkozójelekre és leíró koordinátákra nézve differenciál-algebrai egyenletrendszerre vezet. A szakirodalomban több lehetőség is található az alulaktuált rendszerek kiszámított nyomaték szabályozására [6, 7, 8]. Jelen munkában ezek közül a differenciál-algebrai egyenletrendszer implicit Euler módszerrel történő közvetlen numerikus megoldására épülő algoritmus [6, 7] alkalmazását vizsgáljuk kísérleti úton a már említett 1./a és b ábrán látható berendezésen. A vizsgált algoritmus a nem minimális számú redundáns koordinátákkal leírt dinamikai rendszerek szabályozására alkalmas, ezért a rendszer mechanikai modelljét is redundáns koordinátákkal fogalmazzuk majd meg.



1. ábra. A kísérleti berendezés és analóg modellje

2. KISZÁMÍTOTT NYOMATÉKOK MÓDSZERE ALULAKTUÁLT, REDUNDÁNS KOORDINÁTÁKKAL LEÍRT RENDSZEREKRE

Összetett, több testből álló dinamikai rendszerek modellezésére a nem minimális számú, azaz redundáns leíró koordináták alkalmazása a számítási igény szempontjából előnyös lehet a minimális számú koordináták alkalmazásával szemben [9, 10]. Redundáns koordináták alkalmazása esetén geometriai kényszerek megfogalmazása szükséges.

A rendszert és a szabályozási feladatot leíró egyenletek redundáns koordinátákat és az elsőfajú Lagrange egyenletet alkalmazva az alábbi módon írhatóak:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{u}, &(6)\\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, &(7)\\ \boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0}, &(8)\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{M}$ a tömegmátrix, $\mathbf{x}$ a rendszert leíró redundáns koordináták vektora, $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ a $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ kényszereket tartalmazó vektor Jacobi mátrixa, $\boldsymbol{\lambda}$ a Lagrange multiplikátorok vektora, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ a tehetetlenségi és szabályozó erőkön kívüli általános erők vektora, $\mathbf{u}$ a szabályozó bemenetek vektora és $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ az általános bemeneti mátrix. A szabályozási feladatot a (8) szervókényszer-egyenlet adja meg [6]. A $\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}, t)$ szervókényszer dimenziója meg kell hogy egyezzen az $\mathbf{u}$ szabályozó bemenet vektor dimenziójával, ami azt jelenti, hogy annyi feladatot írhatunk elő ahány egymástól független szabályozó bemenet áll rendelkezésre.

A kiszámított nyomaték módszer alkalmazásához a $\boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}, t)$ által előírt feladat függvényében meg kell határozni az $\mathbf{x}$ általános koordináták megkívánt értékét és az $\mathbf{u}$ szabályozó bemenetet. Mivel a (7) geometriai kényszeregyenlet és a (8) szervokényszer minden esetben algebrai egyenlet, továbbá a (6) az $\mathbf{u}$-ra nézve algebrai egyenlet ezért a megoldandó egyenletrendszer egy differenciál algebrai egyenletrendszer (DAE) lesz. A (6-8) DAE megoldása történhet közvetetten, a rendszer közönséges differenciál egyenletrendszerré való transzformálásával [10], történhet a kényszerek által meghatározott altérbe történő projekcióval, [9, 10] és történhet közvetlenül numerikus módszerek segítségével [6, 7]. Jelen munkában az egyenletrendszert közvetlenül diszkretizáljuk az implicit Euler módszerrel és az adódó nemlineáris, algebrai egyenletrendszert a Newton-Raphson módszerrel oldjuk meg.

Az implicit Euler módszer alkalmazásához a rendszert elsőrendűvé kell alakítani. A (6)-os mozgásegyenlet elsőrendű alakja a következő:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^d &= \mathbf{y}^d, &(9)\\ \dot{\mathbf{y}}^d &= \mathbf{M}^{-1}[-\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^d)\boldsymbol{\lambda}^d + \mathbf{Q}(\mathbf{x}^d, \mathbf{y}^d) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^d)\mathbf{u}], &(10)\end{aligned}$$

ahol a d felső index a szervókényszerek által meghatározott előírásra (desired) utal. A (9) és (10) egyenleteket az implicit Euler módszerrel diszkretizálva a változók $i+1$ időpillanatbeli ismeretlen értékére egy nemlineáris algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{x}_{i+1}^d - \mathbf{x}_i^d}{h} &= \mathbf{y}_{i+1}^d, &(11)\\ \frac{\mathbf{y}_{i+1}^d - \mathbf{y}_i^d}{h} &= \mathbf{M}^{-1}[-\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{i+1}^d)\boldsymbol{\lambda}_{i+1} + \mathbf{Q}(\mathbf{x}_{n+1}^d, \mathbf{y}_{n+1}^d) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_{i+1}^d)\mathbf{u}_{i+1}], &(12)\\ 0 &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_{i+1}^d), &(13)\\ 0 &= \boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}_{i+1}^d, t_{i+1}). &(14)\end{aligned}$$

A [7] irodalomban közöltekhez képest annyi egyszerűsítést alkalmaztunk, hogy a hibakompenzációra szolgáló PD szabályozót nem vettünk figyelembe, azaz vezérlést valósítunk meg. Bevezetve a $\mathbf{z} = [\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{u} \quad \boldsymbol{\lambda}]^{\mathrm{T}}$ ismeretleneket tartalmazó vektort, írható hogy $\mathbf{F}(\mathbf{z}_{i+1}) = 0$, ahol

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_{i+1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i+1}^d - \mathbf{x}_i^d - h\mathbf{y}_{i+1}^d \\ \mathbf{y}_{i+1}^d - \mathbf{y}_i^d - h\mathbf{M}^{-1}[-\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_{i+1}^d)\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^d + \mathbf{Q}(\mathbf{x}_{n+1}^d, \mathbf{y}_{n+1}^d) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_{i+1}^d)\mathbf{u}_{i+1}] \\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_{i+1}^d) \\ \boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}_{i+1}^d, t_{i+1}) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

A kapott nemlineáris algebrai egyenletrendszer megoldására kézenfekvő a Newton-Raphson módszer alkalmazása, de a Newton-Raphson módszer módosított változatainak alkalmazása is szóba jöhet. Valódi gyakorlati alkalmazások esetén előnyös lehet például a Broyden módszer, vagy az un. thrust-region módszer alkalmazása. Ezekkel az alternatív módszerekkel a számítás gyorsítása és megbízhatóságának növelése érhető el. A Newton-Raphson módszer alkalmazásához szükség van az $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ függvényvektor Jacobi mátrixának előállítására. A Jacobi mátrix analitikusan is kiszámítható, ami a tapasztalatok szerint az algoritmus gyorsabb futását eredményezi. A Jacobi mátrix analitikusan előállítva a következő formában adható meg:

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -h\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -h\mathbf{M}^{-1}\frac{\partial(-\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^d + \mathbf{Q} + \mathbf{H}\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}^d} & \mathbf{I} - h\mathbf{M}^{-1}\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{y}^d} & -h\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H} & h\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_s}{\partial \mathbf{x}^d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{16}$$

A Jacobi mátrix numerikus számítására is van lehetőség, de a nagy számú redundáns koordinátákkal leírt rendszerek esetén ez nagyon számításigényes lehet. A numerikus módszert alkalmazva a Jacobi mátrix oszloponként számítható ki:

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}_i) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{z}^+_{i,j}) - \mathbf{F}(\mathbf{z}^-_{i,j})}{2\Delta}, \tag{17}$$

ahol Δ egy megfelelően kicsi szám, az i és j indexek a $\mathbf{z}$ vektor i-edik időpillanatbeli j-edik változóját jelölik, amivel

$$\mathbf{z}^+_{i,j} = \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ \vdots \\ z_{i,j} + \Delta \\ \vdots \\ z_{i,2n+l+m} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}^-_{i,j} = \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ \vdots \\ z_{i,j} - \Delta \\ \vdots \\ z_{i,2n+l+m} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

A bemutatott módszert alkalmaztuk a nem minimális számú koordinátával modellezett, alulaktuált kettősinga kiszámított nyomaték szabályozására.

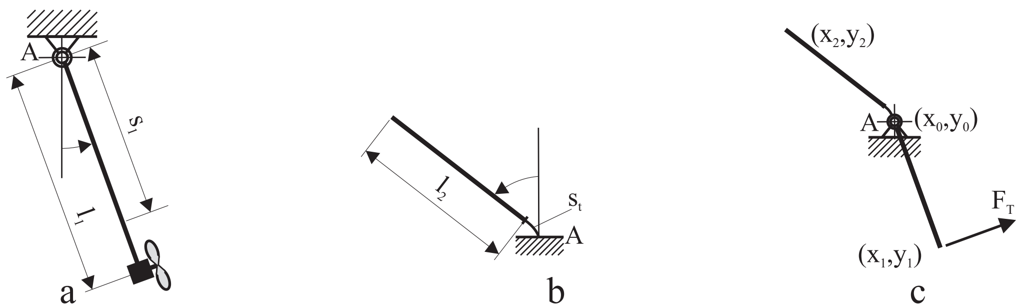
3. A RENDSZER MECHANIKAI MODELLJE ÉS PARAMÉTERIDENTIFIKÁCIÓJA

A vizsgált, ventillátorral ellátott inga mechanikai paraméterei számunkra ismeretlenek voltak ezért első lépéseként magát a rendszert kellet identifikálnunk, vagyis meg kellet határoznunk a mozgást befolyásoló ismeretlen paramétereket külön az alsó és külön a felső ingára nézve. A továbbiakban elölje 1-es index az alsó, 2-es index a felső ingát és kezeljük ezeket egymástól függetlenül (lásd: 2. ábra). Az 1-es inga mozgásegyenletét az alábbi alakban keressük:

$$\Theta_{a1}\ddot{\gamma} + B\dot{\gamma} + Csgn(\dot{\gamma}) + m_1 g s_1 \sin\gamma = M, \tag{19}$$

$$\dot{M} + DM = Dm_1 g s_1 \sin(\Lambda_\gamma(u)), \tag{20}$$

ahol Θ_{a1} az 1-es inga tehetetlenségi nyomatéka az A pontra, B a rendszer viszkózus csillapítását meghatározó tényező, C a száraz súrlódást meghatározó tényező, M a ventilátor által létrehozott tolóerő nyomatéka az A pontra, m_1 az inga tömege, g a gravitációs gyorsulás, s_1 az inga súlypontjának távolsága az A ponttól és $\Lambda_\gamma(u)$ a ventillátorra adott u feszültségjelhez tartozó statikus szögkitérés. Az u feszültségjelet egy 256 bit felbontású diszkrét skálán lehet kiadni a ventillátor szabályozója számára. A (20)-as egyenlet a ventilátor dinamikáját veszi figyelembe, miszerint a kiadott u feszültségjel hatására csak bizonyos idő elteltével alakul ki az annak megfelelő F_T tolóerő. A tolóerő és így a nyomaték kialakulásának sebességét meghatározó tényezőt D-vel jelöltük.



2. ábra. A paraméteridentifikálás során alkalmazott modellek (a és b), redundáns koordináták (c)

A $\Lambda_\gamma(u)$ statikus szögkitérés értékét méréssel határoztuk meg a ventilátorra adható diszkrét feszültségértékek mindegyikére és "lookup table"-ben tároltuk. A tömeg ismeretében a súlypont helye számítható a két végén, vízszintes helyzetben megtámasztott állapotra felírt nyomatéki egyenletből, amennyiben az egyik reakció erő ismert pl. mérleggel történő mérésből. A tömeg és a súlypont helyének az ismeretében a szabadlengés periodusidejét felhasználva a Θ_{a1} tehetetlenségi nyomaték számítható. A problémát a B, C és D paraméterek meghatározása jelenti. Ezen paramétereket genetikus algoritmus segítségével határoztuk meg. A pontosabb és gyorsabb konvergencia érdekében először a szabadlengés $\gamma(t)$ mérési eredményeit és a (19)-es egyenletet felhasználva a B és C paramétereket határoztuk meg, majd pedig egy egységugrás gerjesztés $\gamma(t)$ mérési eredményei és a (19)-es valamint (20)-as egyenletekből a D paramétert.

A 2-es inverz inga mozgásegyenletét az alábbi formában keressük:

$$\Theta_{a2}\ddot{\psi} + s_t\psi - m_2 g\frac{l_2}{2}\sin\psi = 0, \tag{21}$$

ahol Θ_{a2} a 2-es inga tehetetlenségi nyomatéka az A pontra, s_t a rugalmas csatlakozás rugómerevsége, l_2 a 2-es inga hossza és m_2 a 2-es inga tömege. Az inga tekinthető egy l_2 hosszúságú és m_2 tömegű homogén rúdnak, melynek tehetetlenségi nyomatéka ismert. A rugalmas csatlakozás jó közelítéssel helyettesíthető egy torziós rugóval, melynek merevségét a lengésidőből számíthatjuk.

Az egyes paraméterek ismeretében a teljes szerkezet mozgásegyenlete az alábbi formában írható:

$$\begin{aligned} \Theta_{a1}\ddot{\gamma} + B\dot{\gamma} + Csgn(\dot{\gamma}) + m_1 g s_1 \sin\gamma - s_t(\psi - \gamma) &= M, & (22)\\ \dot{M} + DM &= D m_1 g s_1 \sin(\Lambda_\gamma(u)), & (23)\\ \Theta_{a2}\ddot{\psi} + s_t(\psi - \gamma) - m_2 g \frac{l_2}{2}\sin\psi &= 0, & (24) \end{aligned}$$

4. A MECHANIKAI MODELL MEGFOGALMAZÁSA REDUNDÁNS KOORDINÁTÁKKAL

A nem minimális számú koordinátával modellezett, alulaktuált rendszerekre kidolgozott szabályozási algoritmus vizsgálatához az 1./a és b ábrán bemutatott rendszert a szabályozási algoritmusban redundáns koordinátákkal írtuk le. Redundáns koordináták vagy más néven Descartes féle koordináták alkalmazása során csak helykoordinátákat használunk, szögeket nem. Síkbeli mozgások esetén minden testnek két pontját kell megadnunk, azonban ezek a pontok tartozhatnak több testhez is [10]. Így tehát a kísérleti berendezés modellezéséhez hat darab egymástól nem független $\mathbf{x} = [x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2]^T$ koordinátára van szükség (lásd: 2./c ábra). Egyik előnye a redundáns koordináták használatának, hogy a tömegmátrix nem függ a koordinátáktól. Előállítása egy test esetén [10] alapján a következő formula alapján történik:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m - \frac{2mx_G}{L_{ij}} + \frac{I_i}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{mx_G}{L_{ij}} - \frac{I_i}{L_{ij}^2} & -\frac{my_G}{L_{ij}} \\ 0 & m - \frac{2mx_G}{L_{ij}} + \frac{I_i}{L_{ij}^2} & \frac{my_G}{L_{ij}} & \frac{mx_G}{L_{ij}} - \frac{I_i}{L_{ij}^2} \\ \frac{mx_G}{L_{ij}} - \frac{I_i}{L_{ij}^2} & \frac{my_G}{L_{ij}} & \frac{I_i}{L_{ij}^2} & 0 \\ -\frac{my_G}{L_{ij}} & \frac{mx_G}{L_{ij}} - \frac{I_i}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{I_i}{L_{ij}^2} \end{bmatrix}, \qquad (25)$$

ahol m a test tömege, L_{ij} a kiválasztott alappontok távolsága, I_i az i alapponra számított tehetetlenségi nyomaték, x_G és y_G pedig a súlypont helye a testhez rögzített koordinátarendszerben. Az alsó és felő ingára egy 6×6 méretű tömegmátrix állítható elő a [10] alapján. Mivel a koordináták redundánsak, kényszeregyenletek megfogalmazására van szükség. Jelen rendszernél a két inga hossza változatlan hosszú, valamint az A pont nem mozdul el, ennek megfelelően a geometriai kényszereket tartalmazó vektort a (26) mutatja. A szervo kényszert (lásd (26)) úgy fogalmaztuk meg, hogy az also inga szöge egy $\mathrm{atan}(t)$ függvény szerint nulláról a értékre növekedjen. Az egyenletben szereplő S a 0 és az a szög közötti váltás sebességét határozza meg, t_v pedig az $a/2$-höz tartozó időpillanat, jelen esetben $t_v = 4$[s] (lásd 3. ábra).

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - l_1^2 \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 - l_2^2 \\ y_0 \\ x_0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varphi}_s(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} a\frac{\mathrm{atan}(S(t - t_v)) + \mathrm{atan}(St_v)}{\mathrm{atan}(S(t_{max} - t_v)) + \mathrm{atan}(St_v)} \end{bmatrix}. \qquad (26)$$

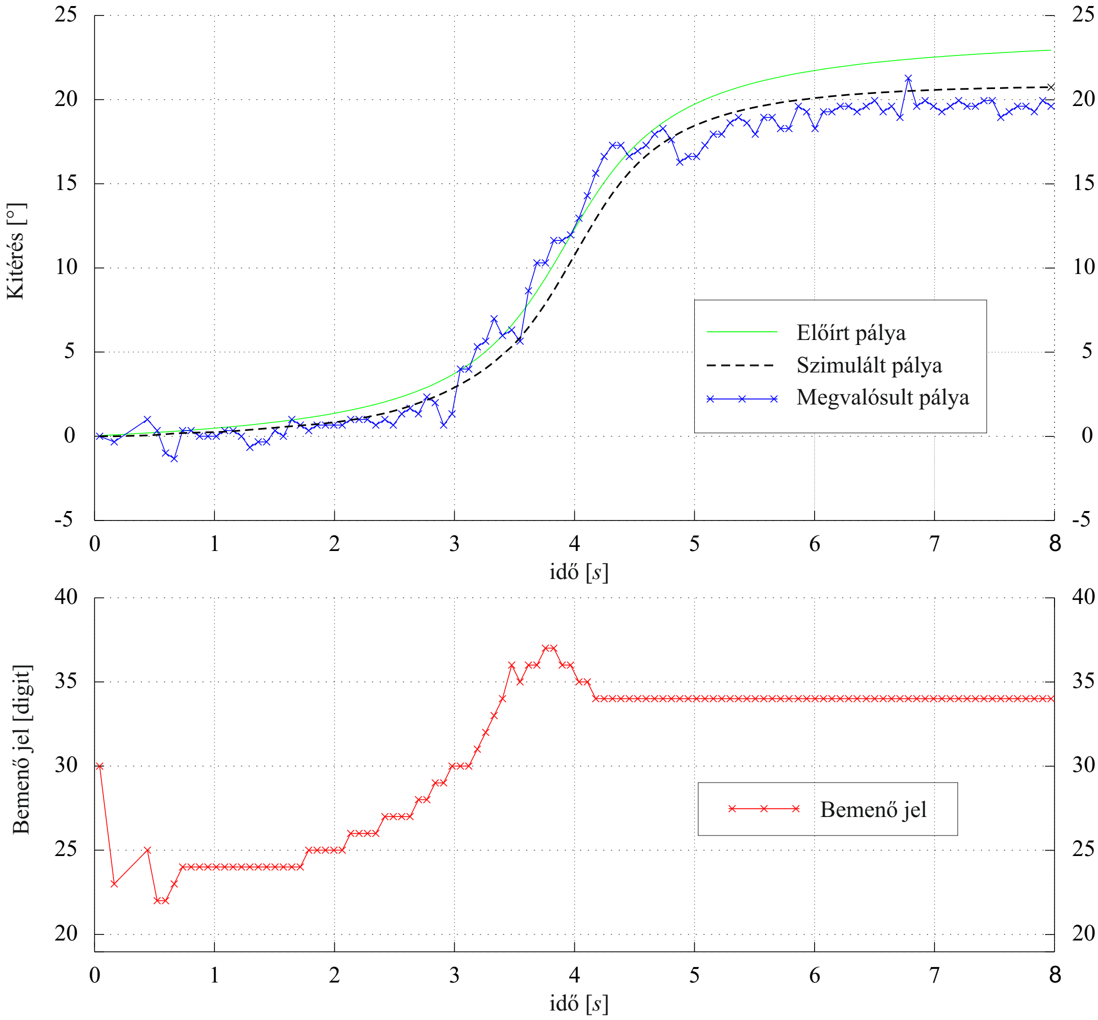
A mozgásegyenlet redundáns koordinátákkal történő felírásához szükséges $\mathbf{\Phi_x}(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ és $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ felírását terjedelmi okok miatt mellőzzük, de ezek előállítása a [10] szakirodalomban megtalálható.

5. EREDMÉNYEK, KONKLÚZIÓ

Mivel a felső inga szögének mérésére nem volt lehetőség, az előírt pályát az alsó inga szögére kellett megadnunk. Az alkalmazott algoritmus számára ez azt jelentette, hogy a felső inga mint zavarás hatását kellett kiküszöbölnie a szabályozási bemenet kiszámításakor. További egyszerűsítésként a [7] irodalomban alkalmazott PD szabályozót elhagytuk mivel a felső inga szögét egyébként sem lehetett volna visszacsatolni. Ezzel tulajdonképpen vezérlést valósítottunk meg az ismert dinamikai modell alapján.

Jól látható, hogy a bemenő jel durva felbontása és az alacsony mintavételezési frekvencia ellenére is a megvalósult mozgás jó közelítéssel egyezik az előírt pályával. Az eredmények tovább pontosíthatóak a mintavételezés frekvenciájának növelésével, ami jelen berendezésnél a régi elektronikai eszközök miatt mindössze 15 [Hz] volt, ami egy szabályozási rendszer esetén kevés. Az eredmények további javulását eredményezi, ha a ventilátorra adható feszültségintervallum nagyobb felbontásban áll rendelkezésre, melynek szintén hardware oldali korlátai vannak.

A mérések során azt tapasztaltuk, hogy a megvalósított szabályozási algoritmus igen számításigényes lehet, főleg bonyolultabb rendszerek esetén. Ez a mintavételezési idő csökkentésének szabhat határt, ami stabilitási problémákhoz vezethet PD szabályozóval visszacsatolt rendszer esetén. Ennek ellenére a bemutatott kísérleti eredmények bizonyítják, hogy a vizsgált szabályozási algoritmus megvalósítható.



3. ábra. Mért eredmények

6. KÖSZÖNETNYILVÁNTÁS

Jelen munka az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok (OTKA K068910), az MTA-BME Gépek és Járművek Dinamikája Kutatócsoport, az Oktatásért Közalapítvány (NTP-OKA XXII-111) valamint a University of Arisona Advanced Micro and Nano Systems Laboratory támogatásával jött létre.

HIVATKOZÁSOK

[1] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1980, 672 pages.

[2] J. T.-Y. Wen, Control of nonholonomic systems. *Control Handbook*, W. S. Levine, Ed. Boca Raton, FL: CRC and IEEE, 1996, pp. 1359-1368.

[3] E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, Z. N. Masoud, Dynamics and Control of Cranes: A Review, *Journal of Vibration and Control*, vol. 9, no. 7, 2003, pp. 863-908.

[4] H. M. Omar, A. H. Nayfeh, *Control of gantry and tower cranes*, PHD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.

[5] Stepan G, Toth A, Kovacs L, Bolmsjo G, Nikoleris G, Surdilovic D, Conrad A, Gasteratos A, Kyriakoulis N, Chrysostomou D, Kouskouridas R, Canou J, Smith T, Harwin W, Loureiro R, Lopez R, Moreno M, ACROBOTER: a ceiling based crawling, hoisting and swinging service robot platform, *Proc. of BCS HCI Workshop on Beyond Gray Droids: Domestic Robot Design for the 21st Century* (Cambridge, UK, 2009) paper no. ACM 1-58113-000-0/00/0009, pp. 1-4.

[6] W. Blayer, K. Kolodziejczyk. Modeling of underactuated mechanical systems in partly specified motion, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 46(2): 383-394, 2008.

[7] L. L. Kovács., A. Zelei, et al. Motion Control of an Under-Actuated Service Robot Using Natural Coordinates, *Proc. of ROMANSY 18 - Robot Design, Dynamics and Control*, 331-338, Udine, Italy, 2010.

[8] I. M. M. Lammerts, *Adaptive computed reference computed torque control*, PHD thesis, Eindhoven University of Technology, 1993.

[9] J. Kövecses, J.-C. Piedoboeuf, C. Lange, Dynamic Modeling and Simulation of Constrained Robotic Systems, *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, vol. 8, no. 2, 2003, pp. 165-177.

[10] J.G. de Jalón, E. Bayo, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge*, Springer-Verlag, New York, NY, 1994.