Merev test dinamikája, síkmozgás
Lejtőn mozgó forgástest

Megoldás:

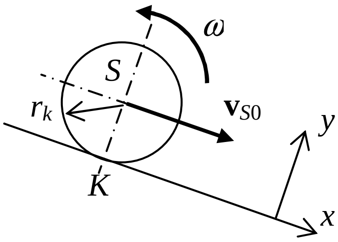
1.

$$m_k = \rho \cdot r_k^2 \cdot \pi \cdot d = 12{,}33 \text{ [kg]}$$
$$m_b = \rho \cdot r_b^2 \cdot \pi \cdot (l - 2d) = 6{,}165 \text{ [kg]}$$
$$\underline{\underline{m}} = 2m_k + m_b = \underline{\underline{30{,}83 \text{ [kg]}}}$$
$$\underline{\underline{\Theta_S}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot r_k^2 + \frac{1}{2} \cdot m_b \cdot r_b^2 = \underline{\underline{0{,}131 \text{ [kgm}^2]}}$$

2. <u>Gördül-e vagy sem</u>?

Gördül, ha az érintkezési pont sebessége zérus, (sebességpólus: $K \equiv P$) $\mathbf{v}_K(t_0) = \mathbf{0}$.

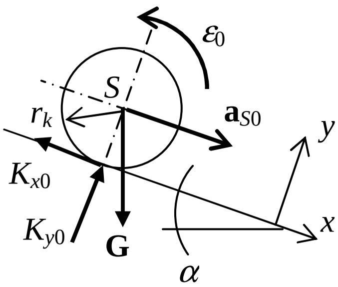
t_0:



$$\mathbf{v}_{K0} = \mathbf{v}_{S0} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{SK}$$
$$= \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{K0} = \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \text{csúszva indul}$$

Szabadtest ábra t_0-kor:



A dinamika alaptételének egyenletei:

$$m \cdot a_{S0} = -K_{x0} + m \cdot g \cdot \sin\alpha \quad (1)$$
$$0 = K_{y0} - m \cdot g \cdot \cos\alpha \quad (2)$$
$$\Theta_S \cdot \varepsilon_0 = -K_{x0} \cdot r_k \quad (3)$$

Kiegészítő egyenlet: csúszás

$$K_{x0} = \mu \cdot K_{y0} \quad (4)$$

A lejtőről az orsóra átadódó kényszererő iránya az érintkezési pontban (vagyis a súrlódóerő) az érintkezési pont sebességével $\mathbf{v}_{K0}$-lal ellentétes.

Az (1), (2), (3), (4) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -41{,}98 \end{bmatrix} [\mathrm{rad/s^2}] \qquad \mathbf{a}_{S0} = \begin{bmatrix} 3{,}12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m/s^2}] \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -55 \\ 261{,}9 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]$$

3.

Amíg a mozgás jellege nem változik meg, addig $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ és $\mathbf{a}_{S0}$ állandó.
A súlypont sebességének változása:

$$\mathbf{v}_S(t) = \mathbf{v}_{S0} + \mathbf{a}_{S0} \cdot t$$

A szögsebesség változása:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot t$$

Az orsó akkor fog gördülni, amikor $\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$ lesz.

$$\mathbf{v}_S(t) = \mathbf{v}_K(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_{KS}$$

$t = t_g$ –nél $\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{v}_S(t_g) = \boldsymbol{\omega}(t_g) \times \mathbf{r}_{KS}$$

$$\mathbf{v}_S(t_g) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t_g) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_k \cdot \omega(t_g) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{S0} + a_{S0} \cdot t_g = -r_k \cdot (\omega_0 + \varepsilon_0 \cdot t_g)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{t_g}} = \frac{-\omega_0 \cdot r_k - v_{S0}}{a_{S0} + \varepsilon_0 \cdot r_k} = \frac{-60 \cdot 0{,}1 - 11}{3{,}12 - 41{,}98 \cdot 0{,}1} = \underline{\underline{15{,}78 \; [\mathrm{s}]}}$$

$$\underline{\underline{x_g}} \equiv x(t_g) = v_{S0} \cdot t_g + a_{S0} \cdot \frac{t_g^2}{2} = \underline{\underline{562{,}44 \; [\mathrm{m}]}}$$

Az orsó sebességállapota t_g –kor:

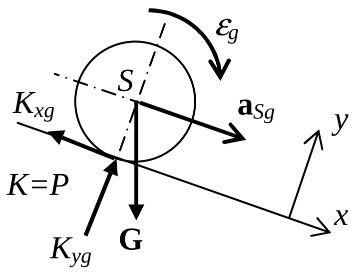
$$\underline{\underline{\boldsymbol{\omega}(t_g)}} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot t_g = \underline{\underline{-602{,}6 \cdot \mathbf{k} \; [\mathrm{rad/s}]}}$$

$$\mathbf{v}_S(t_g) = \mathbf{v}_{S0} + \mathbf{a}_{S0} \cdot t_g = 60{,}26 \cdot \mathbf{i} \; [\mathrm{m/s}]$$

4.

Szabadtest ábra:

Az érintkezési pont sebességpólus: $K \equiv P$



A súrlódóerő most nyugvásbeli, nagysága ismeretlen.

$$m \cdot a_{Sg} = -K_{xg} + m \cdot g \cdot \sin\alpha \qquad (1)$$

$$0 = K_{yg} - m \cdot g \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

$$\Theta_P \cdot \varepsilon_g = m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot r_k \qquad (3)$$

Kiegészítő egyenlet: ε_g és a_{Sg} nem függetlenek, a kinematikai kapcsolat:

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{Sg} + \boldsymbol{\varepsilon}_g \times \mathbf{r}_{SP} - \omega_g^2 \cdot \mathbf{r}_{SP}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_P \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Sg} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon_g \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r_k \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_g^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -r_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

x irányú komponense:

$$0 = a_{Sg} - \varepsilon_g \cdot r_k \qquad (4)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -34{,}42 \end{bmatrix} [\mathrm{rad/s^2}] \qquad \mathbf{a}_{Sg} = \begin{bmatrix} 3{,}44 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{m/s^2}] \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -45 \\ 261{,}9 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]$$

5.

Munkatétel t_0 és t_g között:

$$T(t_g) - T(t_0) = U(t_0) - U(t_g) + W_{súrl}$$

$$\frac{1}{2}m\cdot v_{Sg}^2+\frac{1}{2}\Theta_S\cdot\omega_g^2-\left(\frac{1}{2}m\cdot v_{S0}^2+\frac{1}{2}\Theta_S\cdot\omega_0^2\right)=m\cdot g\cdot x_g\cdot\sin\alpha+W_{súrl}$$

$$W_{súrl}=\frac{1}{2}m\cdot\left(v_{Sg}^2-v_{S0}^2\right)+\frac{1}{2}\Theta_S\cdot\left(\omega_g^2-\omega_0^2\right)-m\cdot g\cdot x_g\cdot\sin\alpha$$

$$\underline{\underline{W_{súrl}=-7379{,}2\ [\mathrm{J}]}}$$

Megjegyzés:

A súrlódóerő munkáját nem csak a munkatételből lehet kiszámítani, hanem közvetlenül a munka definíciójából is:

$$W=\int_{t_0}^{t_g}P\cdot dt=\int_{t_0}^{t_g}\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{v}_K\cdot dt$$

A $\mathbf{K}_0$ kényszererő a gördülés beálltáig állandó, $\mathbf{v}_K$ a kényszererő támadáspontjának (vagyis az érintkezési pontnak) a sebessége.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{v}_K&=\mathbf{K}_0\cdot\left(\mathbf{v}_S+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{SK}\right)\\&=\mathbf{K}_0\cdot\left(\mathbf{v}_{S0}+\mathbf{a}_{S0}\cdot t+\left(\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot t\right)\times\mathbf{r}_{SK}\right)=\\&=K_{x0}\cdot\left(v_{S0}+a_{S0}\cdot t+\left(\omega_0+\varepsilon_0\cdot t\right)\cdot r_k\right)=\\&=K_{x0}\cdot\left(v_{S0}+\omega_0\cdot r_k+\left(a_{S0}+\varepsilon_0\cdot r_k\right)\cdot t\right)=\\&=-55\cdot\left(17-1{,}08\cdot t\right)\end{aligned}$$

$$W=-55\cdot\int_0^{15{,}78}\left(17-1{,}08\cdot t\right)dt=-55\cdot\left[17\cdot t-1.08\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^{15{,}78}$$

$$\underline{\underline{W_{súrl}=-7379\ [\mathrm{J}]}}$$

6. a.

$t\in\left[t_0,t_g\right]$:

forgásirányváltás t_f –kor:

$$\boldsymbol{\omega}(t_f)=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{\varepsilon}_0\cdot t_f=\mathbf{0}$$

$$\omega_0+\varepsilon_0\cdot t_f=0\quad\Rightarrow\quad t_f=-\frac{60}{-41{,}98}=1{,}429\ [\mathrm{s}]$$

$t_0<t_f<t_g$ teljesül, tehát $\underline{\underline{t_f=1{,}429\ [\mathrm{s}]}}$ időpillanatban forgásirányt vált.

$$\underline{\underline{x_f}} = v_{S0} \cdot t_f + a_{S0} \cdot \frac{t_f^2}{2} = \underline{\underline{18{,}9\ [\mathrm{m}]}}$$

haladási irányváltás t_h –kor:

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_{S0} + \mathbf{a}_{S0} \cdot t_h = \mathbf{0}$$

$v_{S0} + a_{S0} \cdot t_h = 0 \quad \Rightarrow \quad t_h$ negatív, tehát <u>nincs</u> haladási irányváltás

b.

$t > t_g$:

$\boldsymbol{\omega}_g + \boldsymbol{\varepsilon}_g \cdot t^* = \mathbf{0}$ és

$$\mathbf{v}_{Sg} + \mathbf{a}_{Sg} \cdot t^* = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow \quad t^*$ negatív <u>nincs</u> irányváltás a gördülés beállta után.