Példa: Cardano-képlet alkalmazása főfeszültségek számítására

Készítette: Dr. Kossa Attila (kossa@mm.bme.hu)
BME, Műszaki Mechanikai Tanszék
2012. március 21.
Frissítve: 2014. szeptember 22.

Határozzuk meg a főfeszültségeket az alábbi feszültségi tenzor esetén:

$$\left[\,\underline{\underline{\sigma}}\,\right] = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 30 \\ -20 & 40 & 50 \\ 30 & 50 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa.} \tag{1}$$

Megoldás

Cardano képlete harmadfokú egyenlet megoldására
A következő összefüggések *G. A. Korn, T. M. Korn: Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975* alapján kerülnek ismertetésre.

Egy harmadfokú egyenlet felírható az alábbi alakban:

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0. \tag{2}$$

Az $x = y - a/3$ helyettesítéssel a fenti egyenlet az alábbi redukált egyenletre egyszerűsödik:

$$\boxed{y^3 + p\,y + q = 0}, \tag{3}$$

ahol

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \qquad q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c. \tag{4}$$

Továbbá vezessük be még az alábbi paramétereket:

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2, \qquad A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \qquad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}. \tag{5}$$

Ezen paraméterek használatával a (3) egyenlet megoldásai:

$$\boxed{y_1 = A + B}, \qquad \boxed{y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\,\frac{A-B}{2}\sqrt{3}}. \tag{6}$$

A fenti megoldások ismeretében az eredeti (2) egyenlet gyökei is számíthatóak az $x = y - a/3$ helyettesítés alapján.

Megjegyzés: A harmadfokú egyenlet „*Cardano-képlet*” néven ismert analitikus megoldását `Gerolamo Cardano` (1501-1576) publikálta először az „Ars Magna” munkájában 1545-ben. A könyv megemlíti, hogy a megoldási módszer `Scipione del Ferro`-hoz (1465-1526) vezethető vissza, valamint azt, hogy az általános megoldás `Niccoló Fontana`-nak (1500-1557) köszönhető, aki Tartaglia „*the stutterer*” (a dadogós) néven is ismert. `Tartaglia` az előállított megoldást titokban tartotta, nem publikálta, és miután `Cardano` ismertette először, így az ő nevéhez kötik a megoldást. Érdekes megjegyezni, hogy `Cardano` diákja volt `Ludovico Ferrari` (1522-1565) aki aztán később a negyedfokú egyenlet analitikus megoldását állította elő. A történet további részletei megtalálhatóak például a Paul J. Nahin: An imaginary tale: The story of $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, 1998 könyvben.

Szimmetrikus másodrendű 3x3-as mátrixok sajátértékeinek analitikus számítása:
Az előzőekben bemutatott algoritmus tetszőleges harmadfokú egyenlet megoldására alkalmas. Szimmetrikus másodrendű 3x3-as mátrixok karakterisztikus egyenlete viszont speciális szerkezetű harmadfokú egyenlet, ami biztosítja, hogy a gyökök mindig valósak. Ebben az esetben a harmadfokú egyenlet megoldóképlete lényegesen leegyszerűsíthető. Az alábbiakban ennek ismertetése következik a szimmetrikus feszültségi tenzor példáján keresztül.

A feszültségi tenzor karakterisztikus egyenlete:

$$\boxed{\lambda^3 - \sigma_I \cdot \lambda^2 + \sigma_{II} \cdot \lambda - \sigma_{III} = 0}, \tag{7}$$

ahol a skalár invariánsok számítási képletei:

$$\sigma_I = \mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}, \tag{8}$$

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2}\left(\left(\mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}\right)^2 - \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\sigma}}\right)\right), \tag{9}$$

$$\sigma_{III} = \det\underline{\underline{\sigma}}. \tag{10}$$

A (7) egyenlet gyökeire az analitikus megoldás számítható az alábbi formulákkal:

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{\sigma_I}{3} + P\cdot\cos\theta}, \tag{11}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{\sigma_I}{3} + P\cdot\cos\left[\theta - \frac{2\pi}{3}\right]}, \tag{12}$$

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{\sigma_I}{3} + P\cdot\cos\left[\theta + \frac{2\pi}{3}\right]}. \tag{13}$$

ahol

$$P = \frac{2}{3}\sqrt{\sigma_I^2 - 3\sigma_{II}}, \tag{14}$$

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left[\frac{4}{27} \cdot \frac{2\sigma_I^3 - 9\sigma_I\sigma_{II} + 27\sigma_{III}}{P^3}\right]. \tag{15}$$

A (11)-(13) formulák biztosítják, hogy teljesüljön a sorrendre vonatkozó $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ feltétel.

A következőkben mindkét megoldási algoritmus használatával számítjuk a főfeszültségeket a jelen példánál.

1. MEGOLDÁS

Az (1) feszültségi mátrix skalár invariánsai:

$$\sigma_I = \mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}} = 10 + 40 - 20 = 30, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{II} &= \frac{1}{2}\left(\left(\mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}\right)^2 - \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\sigma}}\right)\right) = \begin{vmatrix} 10 & -20 \\ -20 & 40 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 40 & 50 \\ 50 & -20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 30 \\ 30 & -20 \end{vmatrix} && (17) \\
&= 0 - 3\ 300 - 1\ 100 = -4400, && (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{III} &= \det\underline{\underline{\sigma}} = \begin{vmatrix} 10 & -20 & 30 \\ -20 & 40 & 50 \\ 30 & 50 & -20 \end{vmatrix} && (19) \\
&= 10\left(40\left(-20\right) - 50^2\right) + 20\left(\left(-20\right)^2 - 50\cdot 30\right) + 30\left(\left(-20\right)50 - 40\cdot 30\right) && (20) \\
&= -121\ 000. && (21)
\end{aligned}$$

Vagyis a karakterisztikus egyenlet az alábbi alakú:

$$\lambda^3 - 30\cdot\lambda^2 - 4\ 400\cdot\lambda + 121\ 000 = 0. \tag{22}$$

Az elsőként ismertetett megoldási algoritmusban szereplő paraméterek számítása:

$$a = -30, \qquad b = -4\ 400, \qquad c = 121\ 000,$$

$$\begin{aligned}
p &= \left(-4\ 400\right) - \frac{\left(-30\right)^2}{3} = -4\ 700, && (23) \\
q &= 2\left(\frac{\left(-30\right)}{3}\right)^3 - \frac{\left(-30\right)\left(-4\ 400\right)}{3} + 121\ 000 = 75\ 000. && (24)
\end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{-4\ 700}{3}\right)^3 + \left(\frac{75\ 000}{2}\right)^2 = -2,4390463\times 10^9, && (25) \\
A &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{-37\ 500 + \sqrt{-2,4390463\times 10^9}} && (26) \\
&= \sqrt[3]{-37\ 500 + i\cdot 49386,701614} = 29,227367 + i\cdot 26,691341, && (27) \\
B &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} = \sqrt[3]{-37\ 500 - \sqrt{-2,4390463\times 10^9}} && (28) \\
&= \sqrt[3]{-37\ 500 - i\cdot 49386,701614} = 29,227367 - i\cdot 26,691341. && (29)
\end{aligned}$$

Ennek ismeretében a keresett gyökök (6) felhasználásával:

$$\begin{aligned}
y_1 &= A + B = 58,454734, && (30) \\
y_2 &= -\frac{A+B}{2} + i\,\frac{A-B}{2}\sqrt{3} = -29,227367 - 46,23076 = -75,458127, && (31) \\
y_3 &= -\frac{A+B}{2} - i\,\frac{A-B}{2}\sqrt{3} = -29,227367 + 46,23076 = 17,0034. && (32)
\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = y_1 - \frac{-30}{3} = 68,454734, \tag{33}$$
$$\lambda_2 = y_2 - \frac{-30}{3} = -55,458127, \tag{34}$$
$$\lambda_3 = y_3 - \frac{-30}{3} = 27,0034. \tag{35}$$

A gyökök sorbarendezésével kapjuk a keresett főfeszültségeket:

$$\boxed{\sigma_1 = 68,454734 \text{ MPa}, \qquad \sigma_2 = 27,0034 \text{ MPa}, \qquad \sigma_3 = -55,45813 \text{ MPa}}. \tag{36}$$

2. MEGOLDÁS

Elsőként a P paraméter számítjuk:

$$P = \frac{2}{3}\sqrt{30^2 - 3\,(-4\ 400)} = 20\sqrt{\frac{47}{3}} = 79,1623. \tag{37}$$

A θ paraméter számítása (14) alapján:

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left[\frac{4}{27}\cdot\frac{2\cdot 30^3 - 9\cdot 30\,(-4\ 400) + 27\,(-121\ 000)}{79,1623^3}\right] \tag{38}$$
$$= 0,740077 = 42,4033^\circ. \tag{39}$$

A keresett gyökök (11)-(13) képletek felhasználásával:

$$\lambda_1 = \frac{30}{3} + 79,1623\cdot\cos\left[42,4033^\circ\right] = 68,4547, \tag{40}$$
$$\lambda_2 = \frac{30}{3} + 79,1623\cdot\cos\left[42,4033^\circ - 120^\circ\right] = 27,0034, \tag{41}$$
$$\lambda_3 = \frac{30}{3} + 79,1623\cdot\cos\left[42,4033^\circ + 120^\circ\right] = -65,4581. \tag{42}$$

Vagyis ugyanazt kapjuk mint az előző megoldásnál közölt (36) szerinti eredmények. Megállapítható, hogy az egyszerűsített második megoldási algoritmus lényegesen egyszerűbb mint az elsőként közölt általános megoldás. Továbbá, a második módszer esetén az algoritmus biztosítja a főfeszültségek sorbarendezését is.