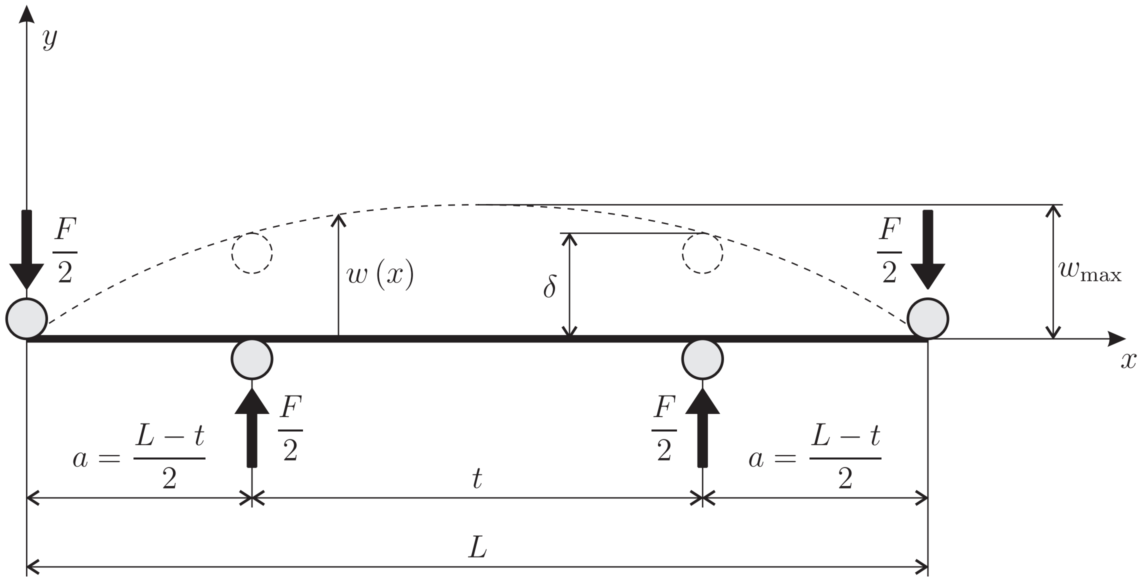
Példa: 4-pontos hajlítás

Készítette: Dr. Kossa Attila (kossa@mm.bme.hu)
BME, Műszaki Mechanikai Tanszék
2013. január 17.

Határozzuk meg a négypontos hajlító vizsgálat esetén a terhelő erő és a nyomócsapok elmozdulásának kapcsolatát a rugalmas szál differenciálegyenletének felhasználásával[1], valamint ezek ismeretében fejezzük ki a vizsgált próbatest rugalmassági modulusát.

A négypontos hajlítás elrendezési vázlatát a 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. A négypontos hajlítás vázlata

Az elrendezés szimmetriájából adódóan elegendő a tartó felét ($x = 0...L/2$ tartomány) vizsgálni. A hajlítónyomatéki függvény felírásához a tartó felét két részre kell osztanunk. Ezeken a szakaszokon a hajlítónyomatéki függvények az alábbiak:

$$M_{h1}(x) = \frac{F}{2}x, \qquad x = 0...a, \tag{1}$$

$$M_{h2}(x) = \frac{F}{2}a, \qquad x = a...\frac{L}{2}. \tag{2}$$

A rugalmas szál differenciál-egyenletének felírása (amennyiben a keresztmetszetek szögelfodulása kicsi):

$$\frac{M_h(x)}{IE} = -w''(x)\,. \tag{3}$$

Alkalmazva az egyes szakaszokra kapjuk, hogy

$$w_1''(x)\,IE = -\frac{F}{2}x, \tag{4}$$

$$w_1'(x)\,IE = -\frac{F}{4}x^2 + C_{11}, \tag{5}$$

$$w_1(x)\,IE = -\frac{F}{12}x^3 + C_{11}x + C_{21}, \tag{6}$$

[1] A levezetéseket az alakváltozás linearizált elméletén belül végezzük el.

valamint

$$
\begin{aligned}
w_2''(x)\,IE &= -\frac{F}{2}a, && (7)\\
w_2'(x)\,IE &= -\frac{F}{2}ax + C_{21}, && (8)\\
w_2(x)\,IE &= -\frac{Fa}{4}x^2 + C_{21}x + C_{22}. && (9)
\end{aligned}
$$

A feladathoz tartozó perem- és illesztési feltételek:

PF1: Az $x = 0$ helyen a súlypontvonal eltolódása zérus, vagyis $w_1(0) = 0$;

PF2: Az $x = L/2$ helyen a keresztmetszet szögelfordulása zérus, vagyis $w_2'(L/2) = 0$;

PF3: Az $x = a$ helyen a két lehajlásfüggvény azonos elmozdulást kell adjon, tehát $w_1(a) = w_2(a)$;

PF4: Az $x = a$ helyen a két lehajlásfüggvény deriváltja azonos szögelfordulást kell adjon tehát $w_1'(a) = w_2'(a)$.

A perem- és illesztési feltételek felhasználásával a C_{11}, C_{12}, C_{21} és C_{22} konstansok meghatározhatóak. **PF2** peremfeltételből következik, hogy

$$C_{21} = \frac{FLa}{4}. \tag{10}$$

Behelyettesítve **PF4**-be kapjuk, hogy

$$C_{11} = \frac{Fa}{4}(L-a). \tag{11}$$

PF1-ből közvetlenül számítható

$$C_{12} = 0. \tag{12}$$

Legvégül **PF3**-ból adódik

$$C_{22} = -\frac{F}{12}a^3. \tag{13}$$

Tehát a keresett elmozdulás és szögelfordulás függvények:

$$
\begin{aligned}
w_1(x) &= \frac{Fx}{12IE}\left(3a(L-a) - x^2\right), && (14)\\
\varphi_1(x) &= \frac{F}{4IE}\left(a(L-a) - x^2\right) && (15)
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
w_2(x) &= \frac{Fa}{12IE}\left(3x(L-x) - a^2\right), && (16)\\
\varphi_2(x) &= \frac{Fa}{4IE}(L-2x). && (17)
\end{aligned}
$$

A maximális elmozdulás a tartó közepén adódik, értékét megkapjuk ha a $w_2(x)$ függvénybe $x = L/2$ értéket behelyettesítünk:

$$w_{\max} = \frac{Fa}{48IE}\left(4a^2 - 3L^2\right). \tag{18}$$

A görgös támaszok közti δ elmozdulást pedig az $x = a$ behelyettesítéssel kapjuk:

$$\delta = \frac{Fa^2}{12IE}(3L - 4a). \tag{19}$$

Az utóbbi összefüggésből a rugalmassági modulusz kifejezhető:

$$\boxed{E = \frac{Fa^2}{12I\delta}\left(3L - 4a\right)}. \tag{20}$$