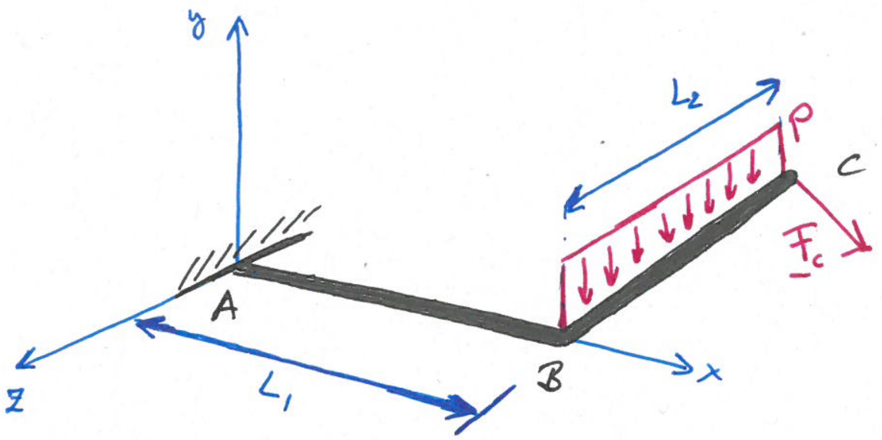
Szilárdságtan - 5. gyakorlat

Összetett igénybevételek, feszültségi állapot

Példatár 1.25

1. feladat Egy törtvonalú tartó terhelését és méreteit mutatja az ábra. A tartó keresztmetszete állandó, d átmérőjű kör



Adatok:

$L_1 = 3\,m$

$L_2 = 2\,m$

$p = 40\ N/m$

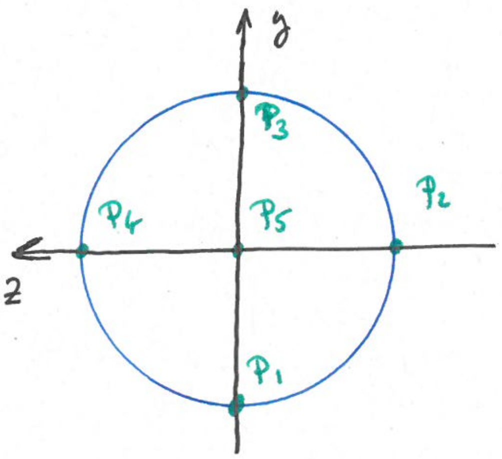
$\underline{F}_C = \begin{bmatrix} -150 \\ 200 \\ -50 \end{bmatrix} N$

$d = 30\,mm$

Feladatok

a) Határozza meg a befogási keresztmetszetben az igénybevételekből adódó feszültségeloszlásokat

b) Ábrázolja a $P_1 - P_5$ pontokban a feszültségeket!



a) Redukáljuk az erőrendszert az A pontban! $(\underline{F};\underline{M}_A)_A = ?$

↳ Erők redukálása:

$$\underline{F} = \underline{F}_C + \underbrace{p \cdot L_2 \cdot (-\underline{j})}_{\underline{F}_p} = \begin{bmatrix} -150 \\ 200 \\ -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \end{bmatrix}$$

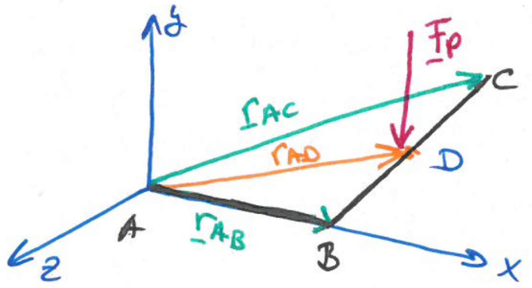
$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -150 \\ 120 \\ -50 \end{bmatrix} N$$

↳ Nyomaték

- Az $\underline{F}_C$ erő erőkarja $\underline{r}_{AC} = \underline{r}_C - \underline{r}_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ m

- A p megoszló erőt helyettesítsük $\underline{F}_p$ erővel a D pontban!

$$\underline{r}_{AD} = \frac{1}{2}\left(\underline{r}_{AB} + \underline{r}_{AC}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ m}$$



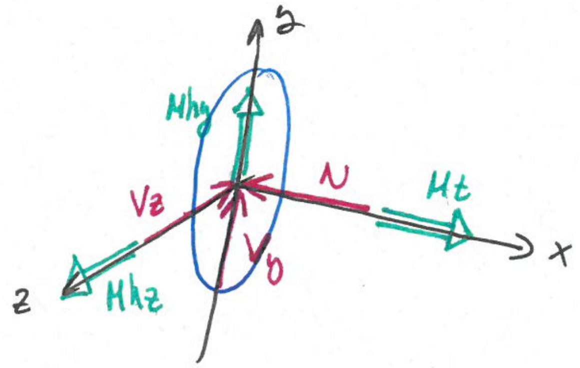
Ebből: $\underline{M}_A = \underline{r}_{AC} \times \underline{F}_C + \underline{r}_{AD} \times \underline{F}_p = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -2 \\ -150 & 200 & -50 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -80 & 0 \end{vmatrix}$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 320 \\ 450 \\ 360 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

Tehát a befogási keresztmetszetben az igénybevételek:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -150 \\ 120 \\ -50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow N \\ \rightarrow V_y \\ \rightarrow V_z \end{matrix}$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 320 \\ 450 \\ 360 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow M_t \\ \rightarrow M_{hy} \\ \rightarrow M_{hz} \end{matrix}$$



A keresztmetszet geometriai jellemzői:

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 706{,}858\ mm^2$$

$$I_z = I_y = \frac{d^4\pi}{64} = 39760{,}8\ mm^4$$

$$I_p = \frac{d^4\pi}{32} = 79521{,}6\ mm^4$$

$$K_y = K_z = \frac{d^3\pi}{32} = 2650{,}72\ mm^3$$

$$K_p = \frac{d^3\pi}{16} = 5301{,}44\ mm^3$$

Az egyes igénybevételekből származó feszültségek

Normáligénybevétel

mert nyomott

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{-150}{706{,}858} = \underline{\underline{-0{,}212\ MPa}}$$

Nyíróigénybevétel

- $$\tau_{xy}(y) = \frac{4}{3}\frac{V_y}{A}\left[1-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right] = 0{,}226 - 0{,}001006\,y^2$$

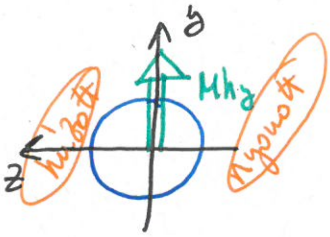
x-re merőleges y irányú

$$\tau_{xy\,max} = \tau_{xy}(0) = 0{,}226\ MPa$$

- $$\tau_{xz}(z) = -\frac{4}{3}\frac{V_z}{A}\left[1-\left(\frac{z}{r}\right)^2\right] = -0{,}094 + 0{,}000419\,z^2$$

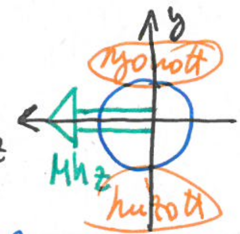
$$\tau_{xz\,max} = 0{,}094\ MPa$$

Hajlító igénybevétel



- $$\sigma_x(z) = \frac{M_{hy}}{I_y}\cdot z = 11{,}318\,z$$

$$\sigma_{x\,max_1} = \frac{M_{hy}}{K_y} = 169{,}77\ MPa$$



- $$\sigma_x(y) = -\frac{M_{hz}}{I_z}\cdot y = -9{,}054\,y$$

$$\sigma_{x\,max_2} = \frac{M_{hz}}{K_z} = 135{,}81\ MPa$$

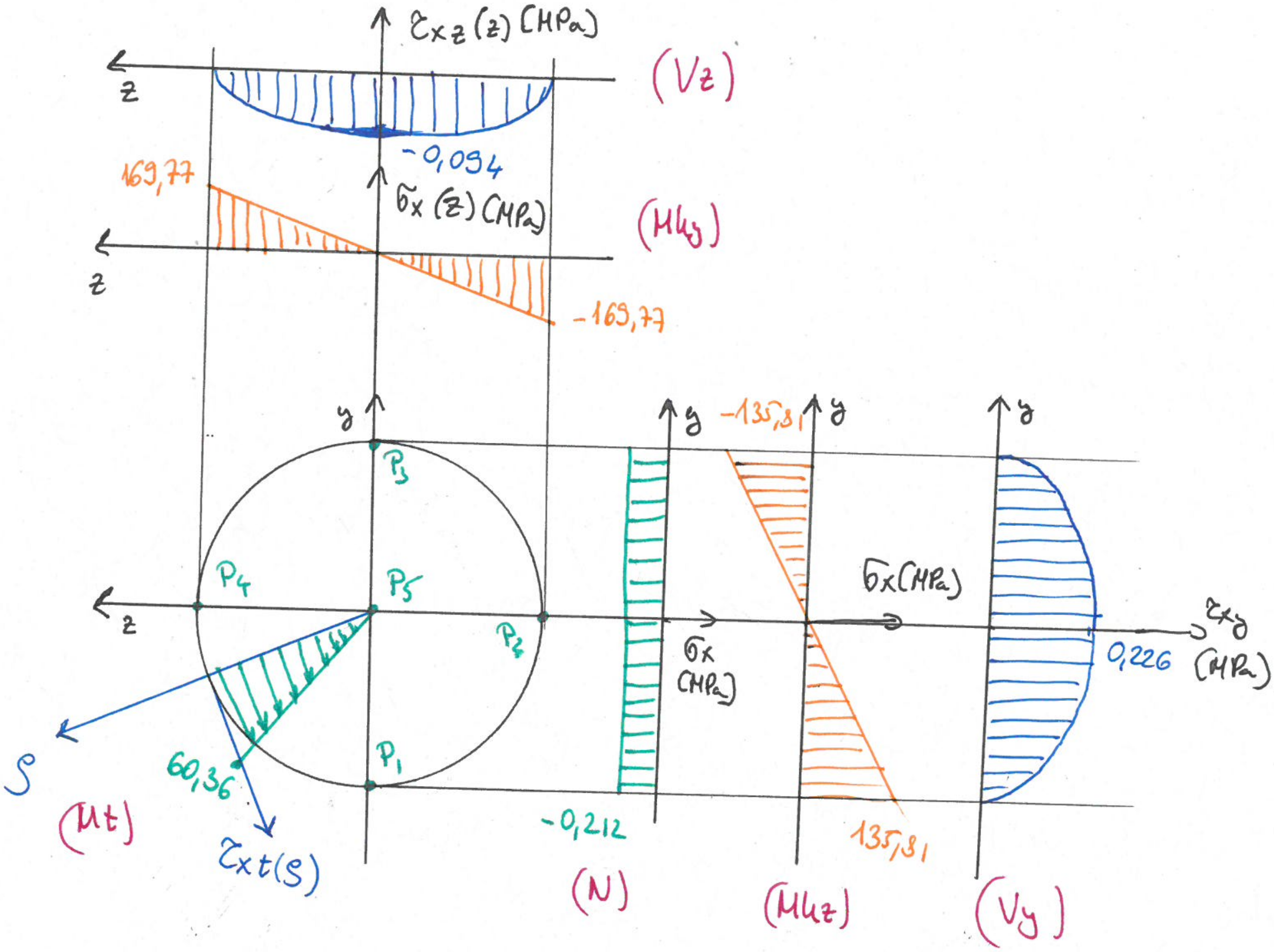
Csavaró igénybevétel

$$\tau_{xt}(\varrho) = \frac{M_t}{I_p} \cdot \varrho = 4{,}024\,\varrho$$

tangenciális irány

$$\tau_{xt_{max}} = \tau_{xt}\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{M_t}{K_p} = \underline{\underline{60{,}36\ MPa}}$$

Feszültségeloszlások



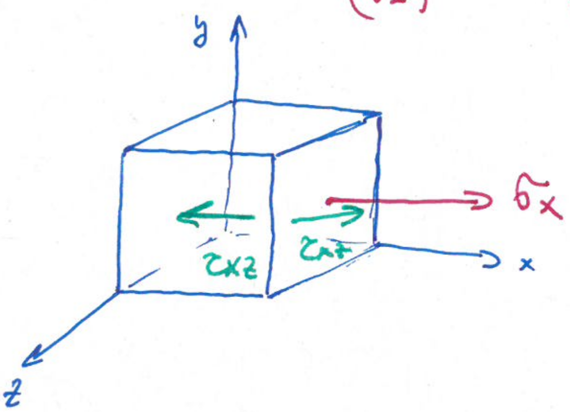
Vizsgáljuk az egyes pontokat:

$\boxed{P_1:}$

$$\sigma_x = \overset{(N)}{-0{,}212} + \overset{(M_{hz})}{135{,}81} + \overset{(M_{hy})}{0} = 135{,}598 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 0 \text{ MPa} \quad (V_y)$$

$$\tau_{xz} = \underset{(V_z)}{-0{,}094} \underset{(M_t)}{-60{,}36} = -60{,}454 \text{ MPa}$$



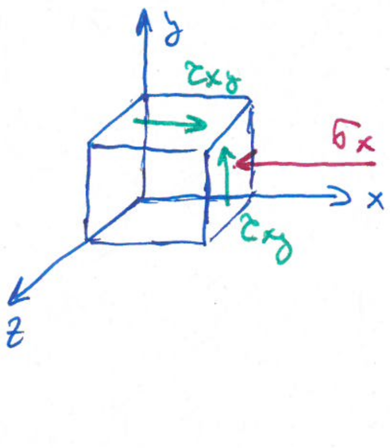
$$\underline{\underline{\sigma}}^{(P_1)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 135{,}598 & 0 & -60{,}454 \\ 0 & 0 & 0 \\ -60{,}454 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$\boxed{P_2:}$

$$\sigma_x = \overset{(N)}{-0{,}212} + \overset{(M_{hz})}{0} \overset{(M_{hy})}{-169{,}77} = -169{,}982 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \overset{(V_y)}{0{,}226} + \overset{(M_t)}{60{,}36} = 60{,}586 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = 0 \text{ MPa}$$



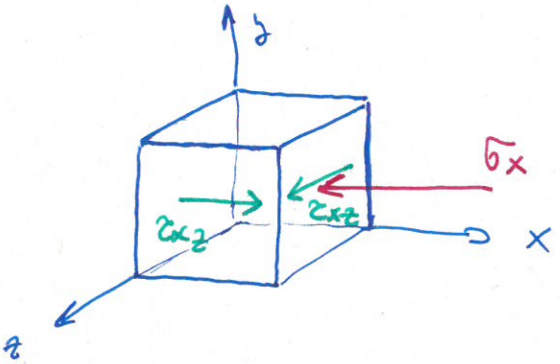
$$\underline{\underline{\sigma}}^{(P_2)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -169{,}982 & 60{,}586 & 0 \\ 60{,}586 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$\boxed{P_3:}$

$$\sigma_x = \overset{(N)}{-0{,}212} \overset{(Mhz)}{- 135{,}81} + \overset{(Mhy)}{0} = -136{,}022 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \overset{(Vy)}{0} \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \overset{(Vz)}{-0{,}094} + \overset{(Mt)}{60{,}36} = 60{,}266 \text{ MPa}$$



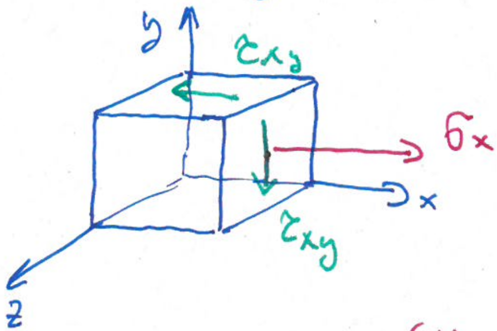
$$\underset{=}{\sigma}^{(P_3)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -136{,}022 & 0 & 60{,}266 \\ 0 & 0 & 0 \\ 60{,}266 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$\boxed{P_4:}$

$$\sigma_x = \overset{(N)}{-0{,}212} + \overset{(Mhz)}{0} + \overset{(Mhy)}{169{,}77} = 169{,}558 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \overset{(Vy)}{0{,}226} - \overset{(Mt)}{60{,}36} = -60{,}134 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \overset{(Vz)}{0} \text{ MPa}$$



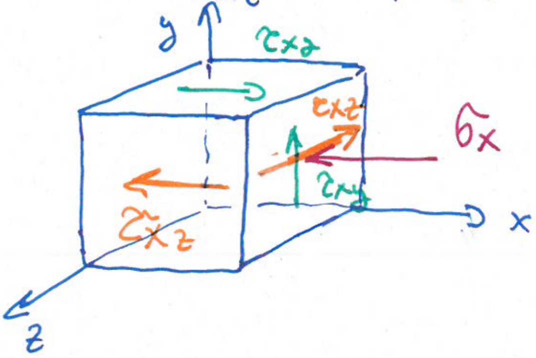
$$\underset{=}{\sigma}^{(P_4)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 169{,}558 & -60{,}134 & 0 \\ -60{,}134 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$\boxed{P_5:}$

$$\sigma_x = \overset{(N)}{-0{,}212} + \overset{(Mhz)}{0} + \overset{(Mhy)}{0} = -0{,}212 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \overset{(Vy)}{0{,}226} \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \overset{(Vz)}{-0{,}094} \text{ MPa}$$

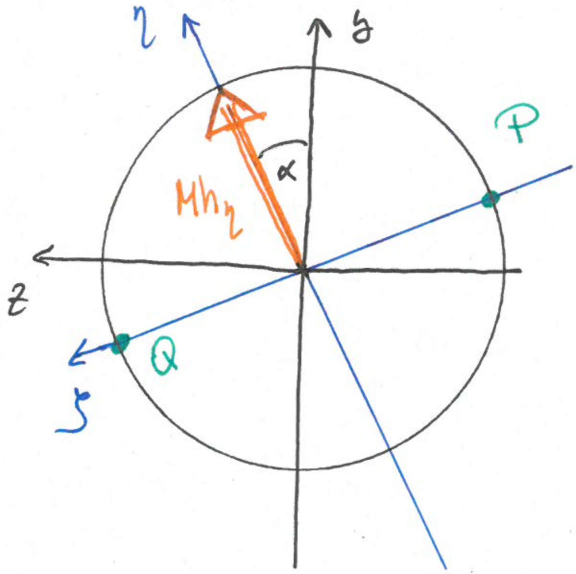


$$\underset{=}{\sigma}^{(P_5)}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -0{,}212 & 0{,}226 & -0{,}094 \\ 0{,}226 & 0 & 0 \\ -0{,}094 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Mivel kör keresztmetszet → minden irány főirány

$\Downarrow$

mindig egyenes hajlítás lesz



$$\underline{Mh}_\eta = \underline{Mh}_y + \underline{Mh}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 450 \\ 360 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

$$Mh_\eta = \sqrt{Mh_y^2 + Mh_z^2} = 576{,}281 \text{ Nm}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{Mh_z}{Mh_y}\right) = 38{,}69°$$

$$I_\eta = I_y = 39760{,}8 \text{ mm}^4$$

$$K_\eta = K_y = 2650{,}72 \text{ mm}^3$$

Innen a hajlításból származó fesz. eloszlás.

$$\sigma_x = \frac{Mh_\eta}{I_\eta} \cdot \xi = 14{,}49\xi$$

$$\sigma_{max} = \frac{Mh_\eta}{K_\eta} = \underline{\underline{217{,}4 \text{ MPa}}}$$

Maximális normálfeszültség

normál + hajlítás

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{Mh_\eta}{I_\eta} \cdot \xi = -0{,}212 + 14{,}49\xi$$

$\Downarrow$

a maximális σ feszültség

$$\sigma_x^Q = \sigma_x\left(\frac{d}{2}\right) = 217{,}188 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^P = \sigma_x\left(-\frac{d}{2}\right) = -217{,}612 \text{ MPa}$$ ← ez a vesz. pont!

A P pont koordinátái:

$$y_P = \sin\alpha \frac{d}{2} = 9{,}38\ \text{mm}$$

$$z_P = -\cos\alpha \cdot \frac{d}{2} = -11{,}71\ \text{mm}$$

Zérustengely

$$\sigma_x(\zeta^*) = 14{,}49\,\zeta^* - 0{,}212 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\zeta^* = 0{,}0146\ \text{mm}$$