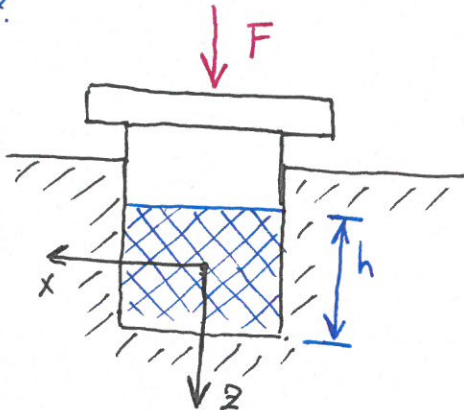


Alakváltozási állapot, Hooke-törv

**Példatár 5.1**

**1. feladat**

Egy axa állandó mélyzet keresztmetszetű, rugalmas betonkaszábot merő fal veszt. körül. A kaszabot egy merő fedéllel keresztir.  $F$  nyomóerővel terheli. Mekkora feszültségig ér el a kaszab belső pontjában és mekkora lesz a  $h$  magasságú kaszab zsugorodása?



Adatok:

$$a = 200 \text{ mm}$$

$$F = 160 \text{ kN}$$

$$E = 50 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,35$$

$$h = 1 \text{ m}$$

Merő fal  $\rightarrow$  gátolja az  $x$  és  $y$  irányú elmozdulást  
 $\epsilon_x = 0;$   
 $\epsilon_y = 0$

$\rightarrow$  egytengelyű terhelés:  $\rightarrow$  nincs fajlagos zsugorodás!

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \epsilon_z = \frac{\Delta h}{h}$$

Hooke-törvény

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left( \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \underline{\underline{E}} \right)$$

$$\epsilon_I = \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \text{spur}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \underline{\underline{\epsilon_z}}$$

Behelyettesítés

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}}$$

Kifejezve az egyes vonalat:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_z$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_z$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_z + \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_z = \frac{E}{1+\nu} \left( 1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \epsilon_z$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \epsilon_z}$$

$$\frac{1-2\nu+\nu}{1-2\nu} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$$

A terhelésből:

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} = -\frac{F}{a^2} = \underline{\underline{-4 \text{ MPa}}}$$

$$\rightarrow \text{ebből: } \epsilon_z = \frac{\sigma_z (1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} = \underline{\underline{-4,985 \cdot 10^{-5}}}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_z = \underline{\underline{-2,154 \text{ MPa}}}$$

Teljes

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,985 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -2,154 & 0 & 0 \\ 0 & -2,154 & 0 \\ 0 & 0 & -4,985 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

A zsugorodás

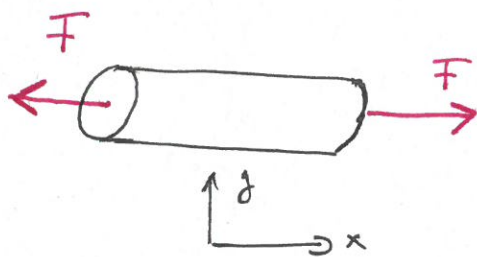
$$\epsilon_z = \frac{\Delta h}{h} \rightarrow \Delta h = \epsilon_z \cdot h = \underline{\underline{-0,04985 \text{ mm}}}$$

2. feladat

Egy  $L$  hosszúságú egyenes,  $d$  átmérőjű kör keresztmetszetű, rugalmas nyomat a végem ható  $10\text{ kN}$  nyomóerő hatására:

Mekkora a nyíl fajlagos terhelésváltozása?

Hogyan változik ez, ha megváltoztatjuk a nyíl keresztirányú alakváltozásait?



Adatok:

$$L = 160\text{ mm}$$

$$d = 79,8\text{ mm}$$

$$E = 200\text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$F = 10\text{ kN}$$

a) Ha nincs gátolás

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A terhelésből

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} = -\frac{F}{\frac{d^2 \pi}{4}} = \underline{\underline{-2\text{ MPa}}}$$

$$\sigma_I = \sigma_x$$

Hooke-törv.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \left[ \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_I \underline{\underline{E}} \right]$$

Behelyettesítés:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \left( \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{1+\nu}{E} \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_x = \underbrace{\left( 1 - \frac{\nu}{1+\nu} \right)}_{\frac{1}{1+\nu}} \frac{1+\nu}{E} \sigma_x$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}}$$

1D Hooke törv.



(4)

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \frac{1+\nu}{E} \cdot \left(-\frac{\nu}{1+\nu}\right) \sigma_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = \boxed{-\nu \epsilon_x}$$

Beliebigesite:  $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \underline{\underline{-10^{-5}}}$

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = \underline{\underline{3 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\epsilon_V = \epsilon_I = \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \underline{\underline{-4 \cdot 10^{-6}}}$$

b) gibt es

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ Hooke tw:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \frac{E}{1+\nu} \left( \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \underline{\underline{E}} \right) \quad \leftarrow \epsilon_x$$

$$\downarrow \quad \sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x + \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_x = \frac{E}{1+\nu} \underbrace{\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right)}_{\frac{1-\nu}{1-2\nu}} \epsilon_x$$

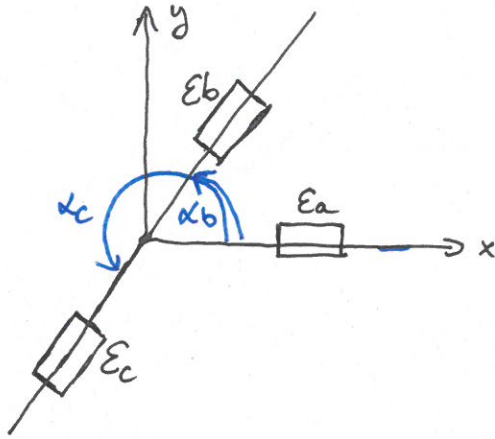
$$\boxed{\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \epsilon_x}$$

$$\epsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_x = \underline{\underline{-7,43 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\epsilon_V = \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \epsilon_x + \underbrace{\epsilon_y + \epsilon_z}_{=0} = \underline{\underline{-7,43 \cdot 10^{-6}}}$$

## 3. feladat

Egy acélszerkezetet alkotó I-szelvény P pontjában nyúlásminőségi vizsgálat végeztek és mérjék az alakváltozásokat az a, b, c irányokban. Határozzuk meg a P-ben előforduló feszültség állapotát!



Adatok:

$$\epsilon_a = 100 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_b = 50 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_c = -70 \cdot 10^{-6}$$

$$\alpha_a = 0^\circ$$

$$\alpha_b = 70^\circ$$

$$\alpha_c = 200^\circ$$

} az x-tengellyel  
bezárt szög

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

A nyúlásminőségi vizsgálat irányvektorai

$$\underline{u}_a = \begin{bmatrix} \cos \alpha_a \\ \sin \alpha_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{u}_b = \begin{bmatrix} \cos \alpha_b \\ \sin \alpha_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,342 \\ 0,94 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\underline{u}_c = \begin{bmatrix} \cos \alpha_c \\ \sin \alpha_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,94 \\ -0,342 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az egyes irányokban előforduló nyúlások beírhatóak, mint:

$$\epsilon_a = (\underline{\epsilon} \cdot \underline{u}_a) \underline{u}_a$$

$$10^{-4} = \epsilon_x \cos(\alpha_a) + \epsilon_y \sin^2(\alpha_a) + \underbrace{2\epsilon_{xy} \sin(\alpha_a) \cos(\alpha_a)}_{\frac{1}{2} 2\epsilon_{xy} \sin(2\alpha_a)} = \epsilon_x$$

$$\epsilon_b = (\underline{\epsilon} \cdot \underline{u}_b) \underline{u}_b = \epsilon_x \cos^2(\alpha_b) + \epsilon_y \sin^2(\alpha_b) + 2\epsilon_{xy} \sin(\alpha_b) \cos(\alpha_b)$$

$$5 \cdot 10^{-5} = 0,117 \epsilon_x + 0,883 \epsilon_y + 0,321 2\epsilon_{xy}$$

⑥

$$\epsilon_c = (\underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{u_c}}) \cdot \underline{\underline{u_c}} = \epsilon_x \cos^2(\kappa_c) + \epsilon_y \sin^2(\kappa_c) + \gamma_{xy} \sin(\kappa_c) \cos(\kappa_c)$$

$$-7 \cdot 10^{-5} = 0,883 \epsilon_x + 0,117 \epsilon_y + 0,321 \gamma_{xy}$$

3 ismeretlenes egyenletrendszer.

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= 100 \cdot 10^{-6} \\ \epsilon_y &= 256,65 \cdot 10^{-6} \\ \gamma_{xy} &= -585,96 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \right\}$$

A Hooke-törvény

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_z = 0$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left( \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_I \underline{\underline{E}} \right)$$

$$\rightarrow 0 = \frac{E}{1+\nu} \left( \epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \right)$$

$$\hookrightarrow \epsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) = \underline{\underline{-152,85 \cdot 10^{-6}}}$$

Teljes

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 100 & -292,98 & 0 \\ -292,98 & 256,65 & 0 \\ 0 & 0 & -152,85 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

A fajlagos térfogatváltozás:  $\epsilon_I = \epsilon_v = \underline{\underline{203,8 \cdot 10^{-6}}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left( \begin{bmatrix} 100 & -292,98 & 0 \\ -292,98 & 256,65 & 0 \\ 0 & 0 & -152,85 \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot 203,8 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 40,844 & -47,33 & 0 \\ -47,33 & 66,15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Gyakorlat: Főfeszítések és főnyúlások

$$\bullet \det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\sigma_1 = 102,49 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 4,51 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

$$\bullet \det(\underline{\underline{\epsilon}} - \epsilon \underline{\underline{E}}) = 0$$

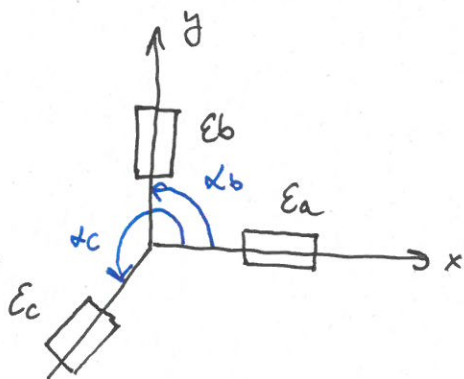
$$\epsilon_1 = 481,53 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_2 = -124,95 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_3 = -152,85 \cdot 10^{-6}$$



**4. feladat** Egy acél szerkezetet alkotó I- rúd végén P pontjába nyúlásukhoz béklyogot ragasztunk és mérjük az alakváltozásokat az a, b, c irányokban. Határozzuk meg a P pontbeli feszültségi állapotot!



Adatok:

$$\epsilon_a = 10 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_b = 10 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_c = -40 \cdot 10^{-6}$$

$$\alpha_a = 0^\circ$$

$$\alpha_b = 90^\circ$$

$$\alpha_c = 225^\circ$$

$$E = 150 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,25$$

} x-tengellyel  
bezárt szög

Teljesen analóg az előző példával

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -50 & 0 \\ -50 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6,66 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_1 = 8 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_1 = 60 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$$

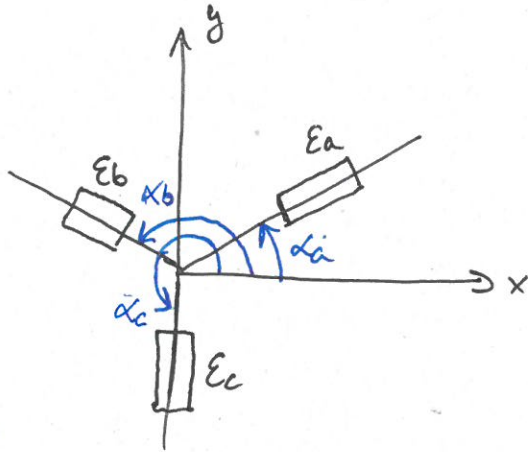
$$\epsilon_2 = -6,66 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_3 = -4 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_3 = -40 \cdot 10^{-6}$$

## 5. feladat

Egy acél szerkezetet alkotó I-szelvény P pontjába nyúlásnyúló béléget ragasztunk és helyjére az alakváltozókat az  $a, b, c$  irányokba. Határozzuk meg a P pontbeli feszültség állapotot!



Adatok:

$$E_a = 40 \cdot 10^{-6}$$

$$E_b = 40 \cdot 10^{-6}$$

$$E_c = 40 \cdot 10^{-6}$$

$$\alpha_a = 30^\circ$$

$$\alpha_b = 150^\circ$$

$$\alpha_c = 270^\circ$$

x - tengellyel  
bezárt szög

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

Teljesen analóg az előző példával:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -34,285 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_1 = 12 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_1 = 40 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_2 = 12 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_2 = 40 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_3 = -34,285 \cdot 10^{-6}$$