

Példatár 8.1

Vékonyfalú tartályok

1. feladat

Számítsuk ki, hogy mekkora feszültség ébrednek a membrán terület alkalmazásakor az alábbi $r = 5 \text{ mm}$ falvastagságú tartály falában a jellegzetes helyeken! Adjunk becslést a hengerrész hossz és átverőválasztására is

Adatok:

$$p = 20 \text{ bar} = 20 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$r = 5 \text{ mm}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\sigma_m = \frac{p r t}{2r}$$

$$\sigma_t = \frac{p r t}{2r} \left(2 - \frac{r t}{r_m} \right)$$

A geometria alapján 4 szakaszra osztható a tartály:

I. gömb (A-B)

II. henger (B-C)

III. Törzsrész (C-D)

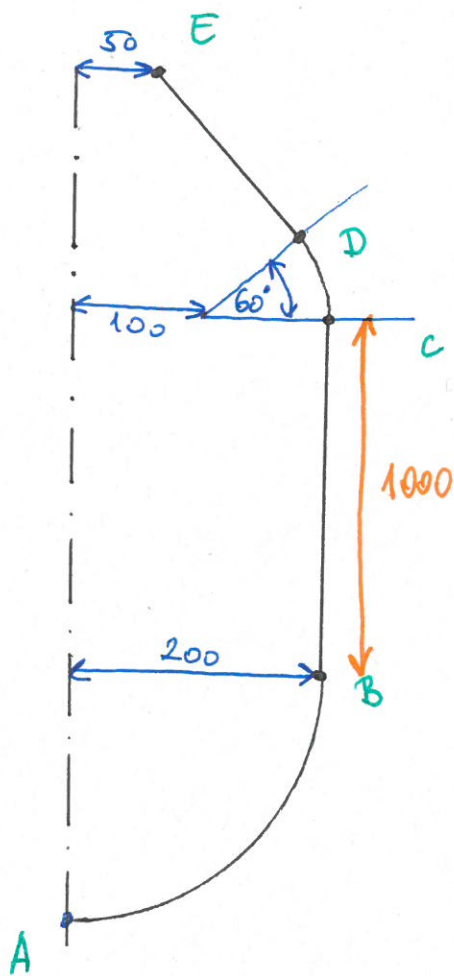
IV. kúp (D-E)

I. Gömb:

$$\left. \begin{aligned} r_t &= \frac{d}{2} = 200 \text{ mm} \\ r_m &= \frac{d}{2} = 200 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \text{ A és B pontban is}$$

$$\textcircled{A} \quad \sigma_m^A = \sigma_t^A \rightarrow \sigma_m^A = \frac{p r_t}{2r} = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t^A = 40 \text{ MPa}$$



B₁

$$\sigma_m^{B_1} = \sigma_t^{B_1} \rightarrow \sigma_m^{B_1} = \frac{p s_t}{2r} = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t^{B_1} = 40 \text{ MPa}$$

mutlak a g\u00fcnl\u00fck l\u00e9me!

II. H\u00e4ng\u00f6r:

$$\left. \begin{aligned} s_t &= \frac{d}{2} = 200 \text{ mm} \\ s_m &= \infty \end{aligned} \right\} \text{B \u00e9s C pontban is!}$$

B₂

$$\sigma_m^{B_2} = \frac{pd}{4r} = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t^{B_2} = \frac{pd}{2r} = 80 \text{ MPa}$$

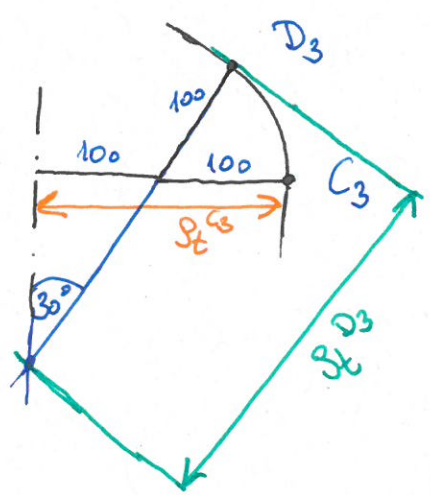
(K\u00e1z\u00e1n formula\u00e9!)

C₂

$$\sigma_m^{C_2} = \frac{pd}{4r} = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t^{C_2} = \frac{pd}{2r} = 80 \text{ MPa}$$

III. T\u00f6r\u00f6sz



$s_m = 100 \text{ mm}$ (C \u00e9s D pontban is)

$$s_t^{C_3} = 200 \text{ mm}$$

$$s_t^{D_3} = 100 + \frac{100}{\sin 30^\circ} = 100 + 200 = 300 \text{ mm}$$

C₃

$$\sigma_m^{C_3} = \frac{p s_t^{C_3}}{2r} = 40 \text{ MPa}$$

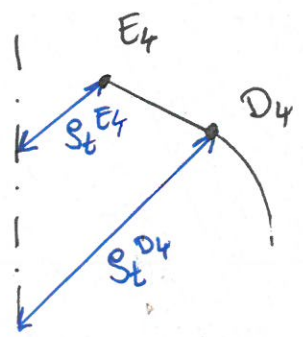
$$\sigma_t^{C_3} = \sigma_m^{C_3} \left(2 - \frac{s_t}{s_m} \right) = 0 \text{ MPa}$$

D₃

$$\sigma_m^{D_3} = \frac{p s_t^{D_3}}{2r} = 60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t^{D_3} = \sigma_m^{D_3} \left(2 - \frac{s_t}{s_m} \right) = -60 \text{ MPa}$$

IV. K\u00e9p



$s_m = \infty$ (D \u00e9s E pontban is)

$$s_t^{D_4} = s_t^{D_3} = 300 \text{ mm}$$

$$s_t^{E_4} = \frac{50}{\sin 30^\circ} = 100 \text{ mm}$$

D₄

$$\sigma_m^{D_4} = \frac{p s_t^{D_4}}{2r} = 60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t^{D_4} = 2 \sigma_m^{D_4} = 120 \text{ MPa}$$

E₄

$$\sigma_m^{E_4} = \frac{p s_t^{E_4}}{2r} = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t^{E_4} = 2 \sigma_m^{E_4} = 40 \text{ MPa}$$

$$s_t = s_m \left(2 - \frac{s_t}{s_m} \right) = 2 \quad (\text{mivel } s_m = \infty)$$

Összefoglaló

	Pont	S_m (mm)	S_t (mm)	σ_m (MPa)	σ_t (MPa)
Gyűrű	A	200	200	40	40
	B ₁	200	200	40	40
Henger	B ₂	∞	200	40	80
	C ₂	∞	200	40	80
Törés	C ₃	100	200	40	0
	D ₃	100	300	60	-60
Kúp	D ₄	∞	300	60	120
	E ₄	∞	100	20	40

← Görbületi átváltozás
előtt
a membrán-
terület
közlekedésnek
se jó!

Hengeres alak

$$\underline{\sigma}_{(m,t,u)} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

$$\underline{\varepsilon}_{(m,t,u)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_u \end{pmatrix}$$

Hooke-törvény:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} (\sigma_m - \nu \sigma_t) = 8 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_m) = 3,4 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E} (-\nu \sigma_t - \nu \sigma_m) = -1,8 \cdot 10^{-4}$$

a hosszváltozás:

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_m \rightarrow \Delta L = \varepsilon_m \cdot L = \underline{\underline{0,08 \text{ mm}}}$$

az átmérőváltozás \rightarrow A körületváltozásból!

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta K}{K} = \frac{(D + \Delta D)\pi - D\pi}{D\pi} = \frac{\Delta D}{D}$$

$$\rightarrow \Delta D = \varepsilon_t \cdot D = \underline{\underline{0,136 \text{ mm}}}$$

2. feladat. Laboratóriumi használatra készített hengeres tartályban a gáz nyomása 15 bar. A tartály közepes átmérője 250 mm. Mohr-jellel elvégezve alapján határozzuk meg a szükséges falvastagságot, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 32 \text{ MPa}$!



Adatok:

$$p = 15 \text{ bar} = 15 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$D = 250 \text{ mm}$$

$$\sigma_{meg} = 32 \text{ MPa}$$

Henger esetén

$$r_m = \infty$$

$$r_t = D/2 = 125 \text{ mm}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{pD}{4\sigma} \\ \sigma_t &= \frac{pD}{2\sigma} \end{aligned} \right\} \text{Kárcinformula!}$$

$$\sigma_m < \sigma_t$$

• A feszültség állapot (kén külső pont)

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,r)} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - 0 = \sigma_t$$

$$\sigma_1 = \sigma_t$$

$$\sigma_2 = \sigma_m$$

$$\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_{meg}$$

$$\frac{pD}{2\sigma} = \sigma_{meg} \rightarrow \sigma = \frac{pD}{2\sigma_{meg}} = \underline{\underline{2,038 \text{ MPa}}}$$

• A feszültség állapot (belső pont)

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,r)} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \sigma_e^{\text{Mohr}} = \underline{\underline{\sigma_t + p}}$$

Hérvetelés

$$\sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_{meg}$$

$$\frac{pD}{2\sigma} + p = \sigma_{meg}$$

$$\sigma = \frac{pD}{2(\sigma_{meg} - p)} = \underline{\underline{2,07 \text{ MPa}}}$$

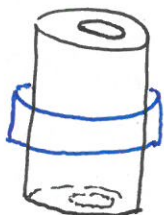
$$\sigma_1 = \sigma_t$$

$$\sigma_2 = \sigma_m$$

$$\sigma_3 = -p$$

3. feladat Egy $d = 400 \text{ mm}$ külső átmérőjű és $u = 5 \text{ mm}$ falvastagságú acél csőre egy $t = 2 \text{ mm}$ vastagságú abracsot akarnak szerelni.

Az abracs kenőleke $\delta = 0,5 \text{ mm}$ -rel kisebb, mint a cső kenőleke. Mekkora feszültség keletkezik a csőben, ha rákényszerítjük az abracsot a csőre?



Adatok:

$$E = 200 \text{ GPa}$$

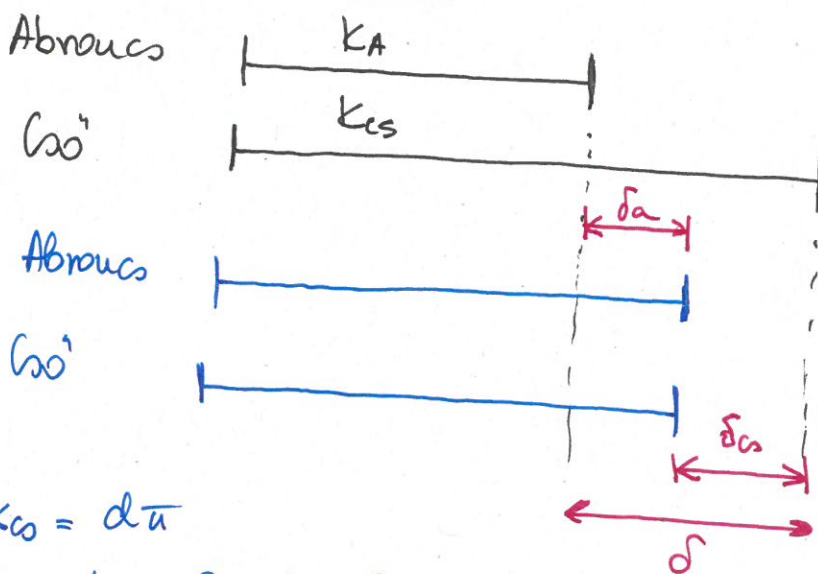
$$d = 400 \text{ mm}$$

$$u = 5 \text{ mm}$$

$$t = 2 \text{ mm}$$

$$\delta = 0,5 \text{ mm}$$

Ábrázoljuk a kenőlekeket:



} előtte

} utána

$$K_{cs} = d \cdot u$$

$$K_A = K_{cs} - \delta = d \cdot u - \delta$$

Valamint: $\delta = \delta_a + \delta_{cs}$

A kenőlektérhosszak:

$$\delta_a = E_{ta} \cdot K_A$$

$$\delta_{cs} = -E_{ts} \cdot K_{cs}$$

$E_{ts} < 0$

(6)

Feszültségi állapot

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,r)} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alakváltozási állapot

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(m,t,r)} = \begin{bmatrix} \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel axiális irányban szabadon deformálódhat $\rightarrow \boxed{\sigma_m = 0}$

Hooke-törv.

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_m) = \underline{\underline{\frac{\sigma_t}{E}}}$$

$$\sigma_{tA} = \frac{pd}{2t}$$

$$\sigma_{tr} = -\frac{pd}{2r}$$

Kifejezzük δ -t

$$\delta = \delta_A + \delta_r = \frac{\sigma_{tA}}{E} \cdot K_A - \frac{\sigma_{tr}}{E} K_r$$

$$\delta = \frac{1}{E} \frac{pd}{2t} (d\bar{u} - \delta) + \frac{1}{E} \frac{pd}{2r} d\bar{u}$$

$$\hookrightarrow p = \frac{2trE\delta}{dr(d\bar{u} - \delta) + d\bar{u}t} = 0,568 \text{ MPa} = \underline{\underline{5,68 \text{ bar}}}$$

Ebből:

$$\sigma_{tr} = -22,74 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{tA} = 56,86 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{tr} = -113,7 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_{tA} = 284,3 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_r = 0,143 \text{ mm}$$

$$\delta_A = 0,357 \text{ mm}$$

4. feladat

Egy 15 m átmérőjű gömb alakú gáztartály falak 0,175% szilagos alakváltozást szenvedtek P pontban nyúlásukkal, miközben a tartályt a terhelésen állgatóból 40 bar belső légnyomásra feltekerték. A tartály anyagának rugalmassági modulusa 200 GPa, Poisson-egyezője 0,3. Mekkora a falvastagság?



$$\underline{\underline{\sigma}}_{(r, t, u)} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a külső} \\ \text{probléma}$$

Mivel gömbről van szó: $\sigma_r = \sigma_t = r = \frac{D}{2}$

$$\Downarrow \quad \sigma_r = \frac{pD}{4\sigma}$$

$$\sigma_t = \sigma_r \left(2 - \frac{\sigma_t}{\sigma_r} \right) = \sigma_r = \frac{pD}{4\sigma}$$

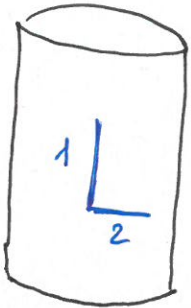
\Downarrow A gömbszimmetriát kihasználva a felület bármely pontjában a nyúlás

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma - \nu \sigma) = \frac{1-\nu}{E} \frac{pD}{4\sigma} = 0,00175$$

$$\hookrightarrow \sigma = \frac{1-\nu}{E} \frac{pD}{4\varepsilon} = \underline{\underline{30 \text{ MPa}}}$$

5. feladat

Egy $d = 400$ mm átmérőjű, $\nu = 5$ mm falvastagságú
 henger tartály falán nyílásmentő bejegyekkel alakváltozásokat
 mértek. A tartály hosszirányúval párhuzamos 1-es irányban
 $375 \cdot 10^{-6}$, míg erre merőleges 2-es irányban $1312,5 \cdot 10^{-6}$ értékű
 alakváltozást mértek. A tartály rugalmassági modulusa 80 GPa,
 a megengedhető belső nyomás 20 bar. Mekkora a tartály
 Poisson tévesztése? Bizonyítható-e a tartály a mérésnél
 használt nyomás esetében?



Feszültség állapot:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,r)} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alakváltozás állapot:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(m,u,t)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Adatok:

$$d = 400 \text{ mm}$$

$$\nu = 5 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_1 = 375 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = 1312,5 \cdot 10^{-6}$$

$$E = 80 \text{ GPa}$$

a Hooke-törvény alapján:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} (\sigma_m - \nu \sigma_t)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_m)$$

Geometria:

Henger $S_m = \infty$; $S_t = \frac{d}{2}$

$$\sigma_m = \frac{pd}{4\nu}$$

$$\sigma_t = \frac{pd}{2\nu}$$

} írjuk vissza
 a nyílásmentő
 eredményre:

(9)

$$\epsilon_m = \frac{1}{E} \left(\frac{pd}{4\sigma} - \nu \frac{pd}{2\sigma} \right) = \frac{pd}{4\sigma} \frac{(1-2\nu)}{E} = \epsilon_1$$

$$\epsilon_t = \frac{1}{E} \left(\frac{pd}{2\sigma} - \nu \frac{pd}{4\sigma} \right) = \frac{pd}{4\sigma} \frac{(2-\nu)}{E} = \epsilon_2$$

2 ismeretlen, 2 egyenlet

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{1-2\nu}{2-\nu} \rightarrow \nu = \frac{2\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 - 2\epsilon_2} = \underline{\underline{0,25}}$$

$$p = \frac{4\sigma E \epsilon_1}{d(1-2\nu)} = 3 \text{ MPa} \rightarrow p = \underline{\underline{30 \text{ bar}}}$$

Mivel $p > p_{krit} = 20 \text{ bar}$

||
 ∇ nem vizsgáltható! ez a nyomás!