Elméleti összefoglaló

Hooke-törvény

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}\right)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right)$$

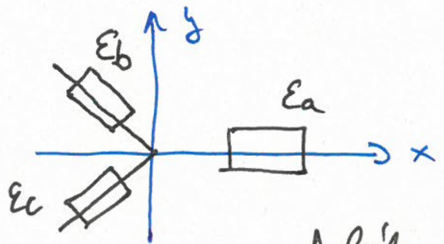
$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 1/2\,\gamma_{xz} \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 1/2\,\gamma_{yz} \\ 1/2\,\gamma_{xz} & 1/2\,\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\varepsilon_n = \underline{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{n}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\gamma_{nm} = \underline{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{m}}$$

4. Feladat — Nyúlásmérő bélyeg kiértékelése

Egy rugalmas test felületén nyúlásmérő bélyegekkel az alábbi értékeket mérjük:



$\varepsilon_a = -70 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_b = 400 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_c = 100 \cdot 10^{-6}$

Adatok

$E = 200\,GPa$

$\nu = 0{,}3$

A bélyegek 120°-os szöget zárnak be egymással

Feladatok:

a) Határozzuk meg az alakváltozási tenzor komponenseit az (x,y) síkban!

b) Számítsuk ki a feszültség komponensek értékeit!

c) Mohr körökkel számoljuk ki a főfeszültségeket!

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 1/2\,\gamma_{xz} \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ 1/2\,\gamma_{xz} & 1/2\,\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Nyúlásmérő bélyeg esetén

↳ feltételezzük, hogy $\boxed{\sigma_z = 0}$

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

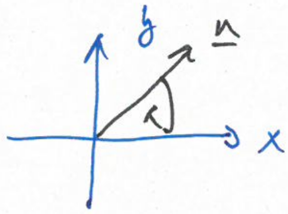
Nem zérus!

Az $\underline{n}$ vektor irányában az alakváltozás (nyúlás)

$$\varepsilon_n = \underline{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{n}$$

↳ Nálunk 3 db bélyeg van amelyek az x-tengellyel különböző szöget zárnak be:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_a = 0^\circ \\ \alpha_b = 120^\circ \\ \alpha_c = 240^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \text{ábra}$$



$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Ezt beírva:} \quad \varepsilon_n = (\cos\alpha \;\; \sin\alpha \;\; 0)\, \underline{\underline{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_n = \underline{\varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin\alpha \cos\alpha}$$

↳ Alkalmazzuk a három bélyegre!

- $\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2(0^\circ) + \varepsilon_y \sin^2(0^\circ) + \gamma_{xy} \sin 0^\circ \cos 0^\circ = \varepsilon_x$

  azaz $\varepsilon_a = \boxed{\varepsilon_x = -70 \cdot 10^{-6}}$

- $\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2(120^\circ) + \varepsilon_y \sin^2(120^\circ) + \gamma_{xy} \sin(120^\circ) \cos(120^\circ) =$

  $= \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = 400 \cdot 10^{-6}$ (1)

- $\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos(240^\circ) + \varepsilon_y \sin^2(240^\circ) + \gamma_{xy} \sin(240^\circ) \cos(240^\circ) =$

  $= \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = 100 \cdot 10^{-6}$ (2)

Adjuk össze az egyenleteket: (1) + (2)

$$\underbrace{\varepsilon_b + \varepsilon_c}_{\text{adott!}} = 2\frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \varepsilon_y \rightarrow$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_b + \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_x}{2}}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{356{,}67 \cdot 10^{-6}}}$$

Visszaírva (1) be:

$$\gamma_{xy} = \frac{-\varepsilon_b + \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \underline{\underline{-346{,}4 \cdot 10^{-6}}}$$

b) Feszültségkomponensek:

Hooke tv.: $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right)$

Nálunk:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Komponensenként:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right]$$

$\sigma_z = 0!$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] = 0!$$

↳ Ebből $\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) = 0$

$$\varepsilon_z\left(1+\frac{\nu}{1-2\nu}\right) = -\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z\left(\frac{1-\nu}{\cancel{1-2\nu}}\right) = \frac{-\nu}{\cancel{1-2\nu}}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

Tehát $\varepsilon_z = \underline{\underline{-122{,}86\cdot 10^{-6}}}$

Ebből $\varepsilon_I = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\left(\frac{-\nu}{1-\nu}\right)(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = \underbrace{\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)}$

visszaírva σ_x, σ_y képletébe!

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right) = \boxed{\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)}$$

Hasonlóan

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

Ebből a feszültségek

$\sigma_x = 8,13$ MPa

$\sigma_y = 73,77$ MPa

τ_{xy}-t a Hooke törvből

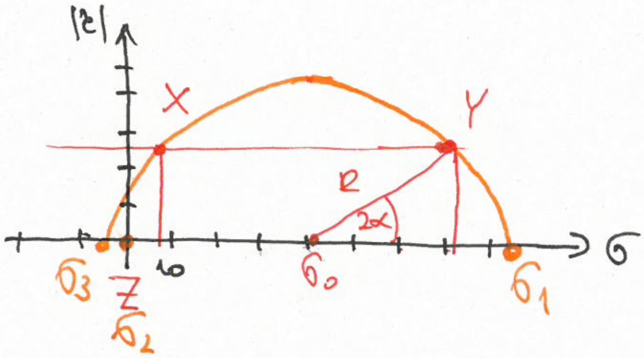
$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\right) = \underline{\underline{-26,64 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 8,13 & -26,64 & 0 \\ -26,64 & 73,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{\text{MPa}}}$$

c) Mohr kör

$\to \sigma_z = 0$ MPa főfesz.

$\underline{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ főirány



X (8,13 ; −26,64)

Y (73,77, −26,64)

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \underline{\underline{40,55 \text{ MPa}}}$$

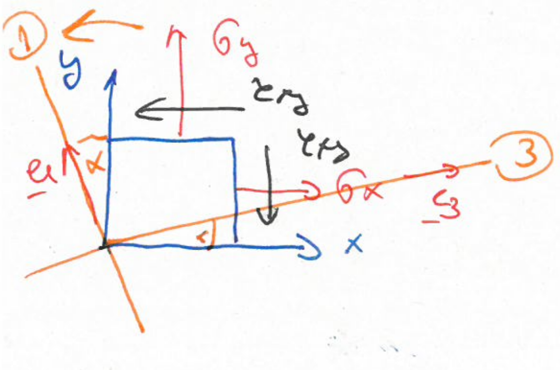
$$R = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_0)^2 + \tau_{xy}^2} = \underline{\underline{42,27 \text{ MPa}}}$$

$\sigma_1 = \sigma_0 + R = 83,22$ MPa

$\sigma_2 = 0$ MPa

$\sigma_3 = -1,32$ MPa

$$\alpha = \frac{1}{2}\arccos\frac{\sigma_y - \sigma_0}{R} = \underline{\underline{19,5\cancel{3}^\circ}}$$



$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,334 \\ 0,942 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,942 \\ 0,334 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. feladat

Egy rugalmas test valamely terheletlen felületi pontjában mért nyúlások értéke: $\varepsilon_x = 350 \cdot 10^{-6}$ és $\varepsilon_y = 50 \cdot 10^{-6}$.
A legnagyobb főnyúlás $\varepsilon_1 = 420 \cdot 10^{-6}$.
Határozzuk meg γ_{xy}-t és a másik két főnyúlás értékét, ha $\nu = 0{,}3$

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mert a felület terheletlen!

Hooke tv alapján

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\overbrace{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}^{\varepsilon_I}\right] = 0!$$

$$\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0$$

$$\varepsilon_z\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) = -\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z\left(\frac{1-2\nu+\nu}{1-2\nu}\right) = \frac{-\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z\left(\frac{1-\nu}{\cancel{1-2\nu}}\right) = \frac{-\nu}{\cancel{1-2\nu}}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \underline{\underline{-171 \cdot 10^{-6}}}$$

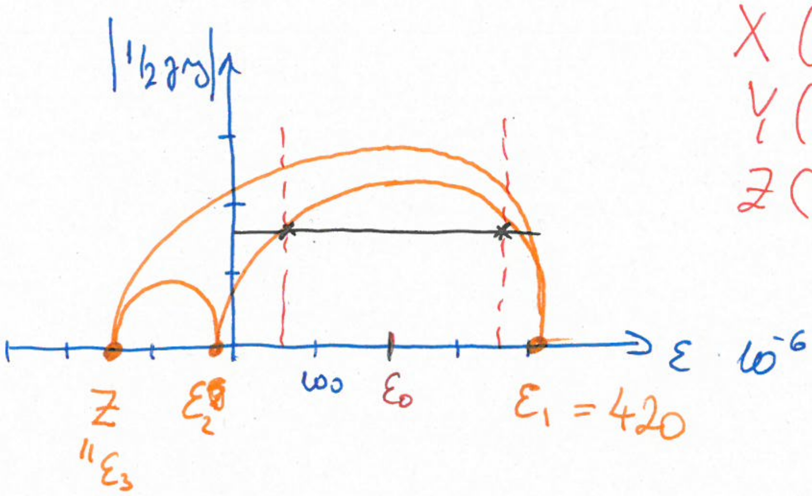
$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

→ ismeretlen

ε_z – főnyúlás!

↳ Mohr köröt! (most az alakváltozásra!

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} 350 & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -141 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$



$X\,(350;\ \frac{1}{2}\gamma_{xy})$

$Y\,(50;\ \frac{1}{2}\gamma_{xy})$

$Z\,(-141;\ 0)$

A legnagyobb főnyúlás

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + R \quad \rightarrow \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = 200 \cdot 10^{-6}$$

$$R = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \qquad R = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_0)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$

$$R = 220 \cdot 10^{-6} \quad \longrightarrow \quad 2\sqrt{R^2 - (\varepsilon_x - \varepsilon_0)^2} = \gamma_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = \underline{\underline{322 \cdot 10^{-6}}}$$

Vissza az ábrába! \(\longleftarrow\)

(ott 1/2 γxy van!)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + R = 420 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_0 - R = -20 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_z = -141 \cdot 10^{-6} \end{aligned}\right\} \text{ főnyúlások}$$

Fajlagos térfogatváltozás

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \underline{\underline{259 \cdot 10^{-6}}}$$