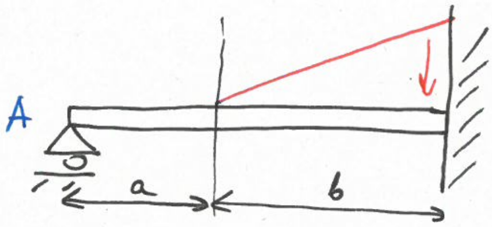
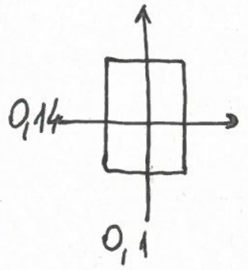
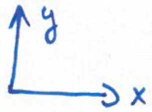
5

2. Feladat

Határozzuk meg az A reakcióerőt Castigliano-tétel segítségével!







Adatok:

$p_{max} = 5\ kN/m$

$a = 4\ m$

$b = 6\ m$

Statikailag határozatlan

↳ Befogás: x, y, φ } 4 DoF

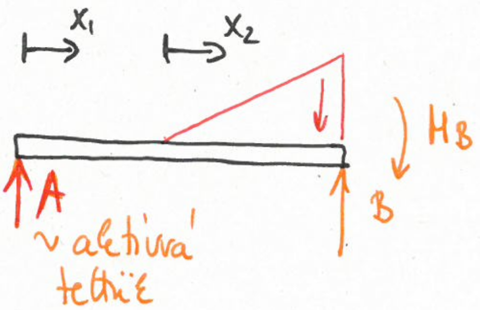
↳ görgős: y

De csak 3 skalár egyenlet!

4 reakció: $A,\ B_x,\ B_y,\ M_B$; $B_x = 0$

Legyen A aktív erő: + $w_A = 0$

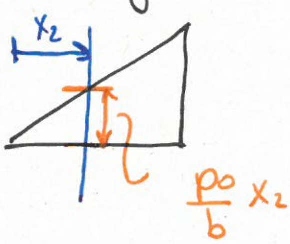
SZTA:



Reakciók:

- $B = \frac{p_{max} \cdot b}{2} - A$
- $M_B = \frac{p_{max} \cdot b^2}{6} - A(a+b)$

~ most nincs erre szükség



	$0 < x_1 < a$	$0 < x_2 < b$
M_h	$-A x_1$	$-A(x_2+a) + \frac{p_0\, x_2^2}{b \cdot 2} \frac{x_2}{3}$

$$\frac{\partial M_{h1}}{\partial A} = -x_1$$

$$\frac{\partial M_{h2}}{\partial A} = -(x_2+a)$$

$$\longrightarrow w_A = 0 = \frac{1}{IE}\left[\int_0^a M_{h1} \frac{\partial M_{h1}}{\partial A} dx_1 + \int_0^b M_{h2} \frac{\partial M_{h2}}{\partial A} dx_2\right]$$

$$w_A = \frac{1}{IE}\left[\int_0^a A x_1^2\, dx_1 + \int_0^b A(x_2-a)^2 - \frac{p_0}{6b}x_2^3(x_2+a)\, dx_2\right] =$$

$$= \frac{1}{IE}\left(\left[\frac{A_1 x_1^3}{3}\right]_0^a + \left[\frac{A(x_2+a)^3}{3} - \frac{p_0 x_2^5}{30b} - \frac{p_0 a x^4}{24b}\right]_0^b = \right.$$

$$= \frac{1}{IE}\left(\cancel{\frac{A_1 a^3}{3}} + \frac{A(a+b)^3}{3} - \cancel{\frac{A a^3}{3}} - \frac{p_0 b^5}{30b} - \frac{p_0 a b^4}{24b}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow A = \frac{1}{(a+b)^3}\, p_0\left(\frac{b^4}{10} + \frac{ab^3}{8}\right) = \underline{\underline{1188\ N}}$$

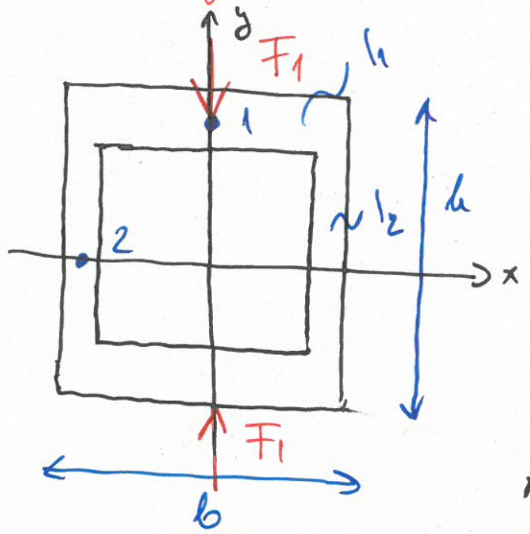
Ebbo'l:

$$\Sigma F_y = A + B - \frac{pb}{2} = 0 \Rightarrow \quad B = \frac{pb}{2} - A = \underline{\underline{13812\ N}}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad -A(a+b) + \frac{p \cdot b}{2}\cdot\frac{b}{3} - M_B = 0$$

$$\hookrightarrow M_B = -A(a+b) + \frac{pb^2}{6} = \underline{\underline{18120\ Nm}}$$

3. Feladat Egy állandó vastagságú, de különböző szélességű rudakból készített rugalmas keretet az ábra szerinti erővel terheljük. Határozzuk meg a keret 1 és 2-es keresztmetszetében ébredő hajlítónyomatékot!



Adatok:

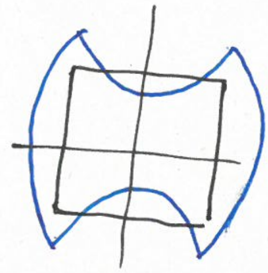
$I_1 E = 5{,}35 \cdot 10^5\ \mathrm{Nm}^2$

$I_2 = I_1/2$

$b = 1\,\mathrm{m}$

$h = 1{,}5\,\mathrm{m}$

$F_1 = 3{,}1\,\mathrm{kN}$

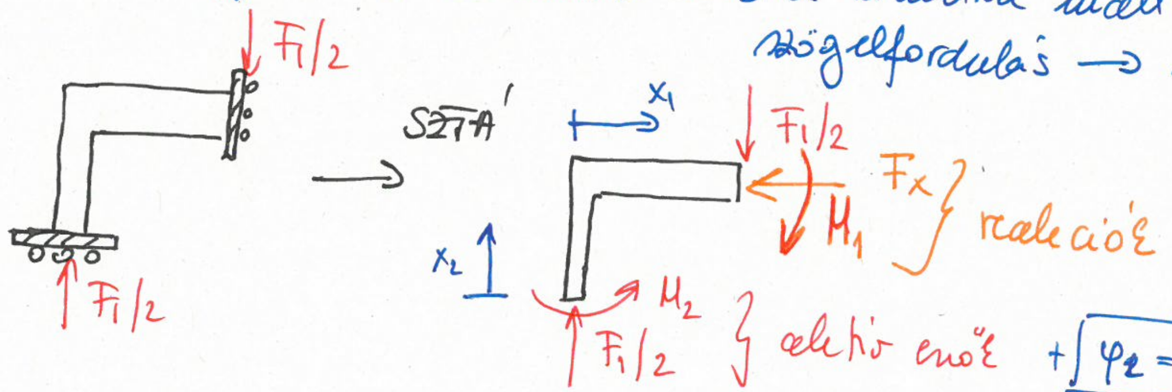


deformált alak!

A számítások során a normáligénybevételtől eltekintünk

Egyszerűsített modell: „negyedmodell"

Az egyszerűsített modellben $\Longrightarrow$ a szimmetria miatt nincs szögelfordulás $\rightarrow$ befogás



$+ \boxed{\varphi_2 = 0}$

Igénybevételi függv.:

	M_{h1}: $0 < x_2 < \frac{h}{2}$	M_{h2}: $0 < x_1 < \frac{b}{2}$
M_h	M_2	$M_2 - \frac{F_1}{2} x_1$
N	$-F_1/2$	0

$\frac{\partial M_{h1}}{\partial M_2} = 1$

$\frac{\partial M_{h1}}{\partial M_2} = 1$

$\frac{\partial N_1}{\partial M_2} = 0; \quad \frac{\partial N_2}{\partial M_2} = 0$ ezeket nem kell

$$\varphi_2 = \frac{1}{I_1 E}\left[\int_0^{b/2} M_2 - \frac{F_1}{2} x_1\, dx_1 + 2 \cdot \int_0^{h/2} M_2\, dx_2\right] = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{I_1 E}\left(\left[M_2 x_1 - \frac{F_1 x_1^2}{4}\right]_0^{b/2} + 2\left[M_2 x_2\right]_0^{h/2}\right) = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{I_1 E}\left(\underbrace{\frac{M_2 b}{2} - \frac{F_1 b^2}{16} + \frac{2 M_2 h}{2}}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow M_2 = \frac{F_1 b^2}{16\left(h + \frac{b}{2}\right)} = \underline{96{,}875\ \mathrm{Nm}}$$

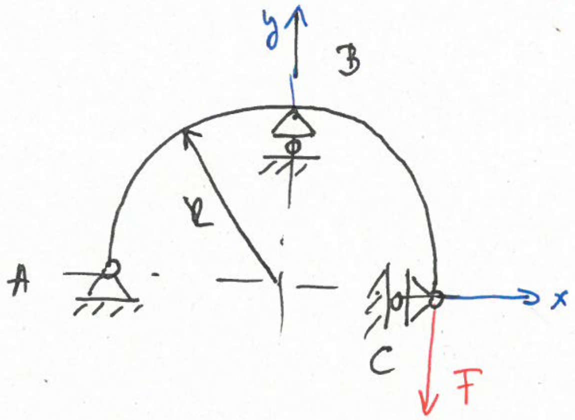
<u>Az „1" es poutban:</u>

$$\overset{\curvearrowleft}{\sum} M_1 = -M_1 - \frac{F_1}{2} \cdot \frac{b}{2} + M_2 = 0$$

$$\hookrightarrow M_1 = M_2 - \frac{F_1 b}{4} = \underline{-678{,}125\ \mathrm{Nm}}$$

5. feladat Az ábrán vázolt ABC félkörívből álló rúd terhelése a C görgőnél ható koncentrált erő.

Fejezzük ki a reakcióerőket az F erő segítségével valamint fejezzük ki a C pont y irányú elmozdulását!



Adott: R, IE

Statikailag határozatlan

A pont – 2 reakció (A_x, A_y)

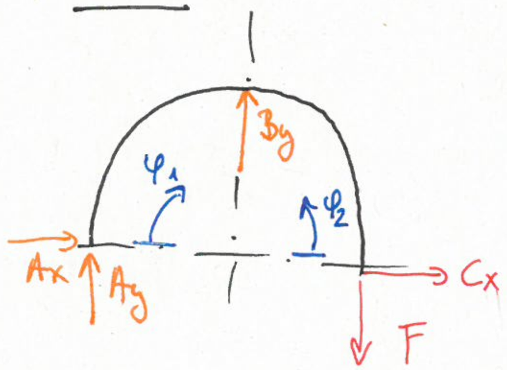
B pont – 1 reakció (B_y)

C pont – 1 reakció (C_x)

Tegyük aktívvá a C_x reakciót

$+ \boxed{w_{Cx} = 0}$ kinematikai feltétel!

SZTA



Egyensúlyi egyenletek

$\sum F_x = 0$: $A_x + C_x = 0$

$\sum F_y = 0$: $A_y + B_y - F = 0$

$\sum M_A = 0$: $B_y R - F 2R = 0$

$\rightarrow B_y = \frac{F2R}{R} = 2F$

$\rightarrow A_y = F - B_y = -F$

A_x és C_x nem határozható meg az egyensúlyi egyenletből!

Igénybevételi függvények:

	$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$	$0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$
M_h	$-A_y R(1-\cos\varphi_1) + A_x R(\sin\varphi_1)$	$FR(1-\cos\varphi_2) - C_x R \sin\varphi_2$
N	$-A_y \cos\varphi_1 - A_x \cdot \sin\varphi_1$	$F\cos\varphi_2 + C_x \sin\varphi_2$

Fontos:

$A_y = -F$

$A_x = -C_x$

} AKTÍV ERŐK KELL, HOGY SZEREPELJENEK

Tehát

	$0<\varphi_1<\frac{\pi}{2}$	$0<\varphi_2<\frac{\pi}{2}$
M_h	$FR(1-\cos\varphi_1)-C_xR\sin\varphi_1$	$FR(1-\cos\varphi_2)-C_xR\sin\varphi_2$
N	$FR\cos\varphi_1+C_x\sin\varphi_2$	$FR\cos\varphi_1+C_x\sin\varphi_2$

Most csak a hajlítással számoljuk tovább!

$$W_{Cx}=0 \rightarrow \frac{\partial M_{h1}}{\partial C_x}=-R\sin\varphi_1 \qquad \frac{\partial M_{h2}}{\partial C_x}=-R\sin\varphi_2$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial C_x}=\sin\varphi_1 \qquad \frac{\partial N_2}{\partial C_x}=\sin\varphi_2$$

$$W_{Cx}=\frac{1}{IE}\left(\int_0^{\pi/2}M_{h1}\frac{\partial M_{h1}}{\partial C_x}R\,d\varphi_1+\int_0^{\pi/2}M_{h2}\frac{\partial M_{h2}}{\partial C_x}R\,d\varphi_2\right)=$$

$$=\frac{1}{IE}\left(2\int_0^{\pi/2}(FR(1-\cos\varphi_1)-C_xR\sin\varphi_1)(-R\sin\varphi_1)R\,d\varphi_1\right.$$

$$=\frac{1}{IE}2\int_0^{\pi/2}-FR^3(1-\cos\varphi_1)\sin\varphi_1+C_xR^3\underbrace{\sin^2\varphi_1}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\varphi_1)}d\varphi_1=$$

$$=\frac{2}{IE}\left(\left[-\frac{FR^3(1-\cos\varphi_1)^2}{2}\right]_0^{\pi/2}+\left[\frac{C_xR^3}{2}\varphi_1-\frac{C_xR^3}{2}\sin(2\varphi_1)\right]_0^{\pi/2}\right.$$

$$=\frac{2}{IE}\left(-\frac{FR^3}{2}+\frac{C_xR^3}{2}\frac{\pi}{2}\right)=\underline{\underline{0=W_{Cx}}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{C_x\cancel{R^3}\pi}{\cancel{4}\,2}=\frac{F\cancel{R^3}}{\cancel{2}} \rightarrow \underline{\underline{C_x=\frac{2F}{\pi}}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{A_x=\frac{-2F}{\pi}}}$$

y irányú elmozdulás (F aktív erő jelöli ki)

Cx erő már aktív erő ⇒ nem függ F-től!

$$\frac{\partial M_{h1}}{\partial F} = R(1-\cos\varphi_1) \qquad \frac{\partial M_{h2}}{\partial F} = R(1-\cos\varphi_2)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial F} = R\cos\varphi_1 \qquad \frac{\partial M_2}{\partial F} = R\cos\varphi_2$$

$$w_{cy} = \frac{1}{IE}\left(\int_0^{\pi/2} M_{h1}\frac{\partial M_{h1}}{\partial F} R\,d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} M_{h2}\frac{\partial M_{h2}}{\partial F} R\,d\varphi_2\right) =$$

$$= \frac{1}{IE}2\int_0^{\pi/2} FR^3(1-\cos\varphi_1)^2 - C_x\cdot \cancel{F} R^3(1-\cos\varphi_1)\sin\varphi_1\,d\varphi_1$$

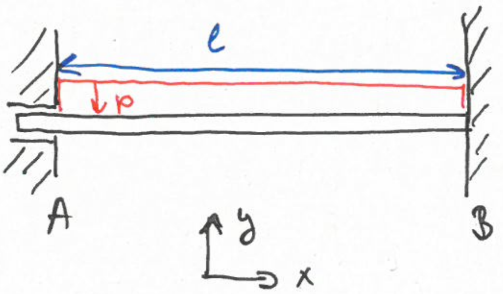
$$1-2\cos\varphi_1+\cos^2\varphi_1 = \frac{3}{2}-2\cos\varphi_1+\cos(2\varphi_1)$$

$$= \frac{2}{IE}\left(\left[\frac{FR^3}{2}\cdot 3\varphi_1 - 2FR^3\sin\varphi_1 + \frac{FR^3}{2}\sin(2\varphi_1)\right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{C_x \cancel{F} R^3(1-\cos\varphi_1)^2}{2}\right]_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{2}{IE}\left(\frac{3FR^3\cdot\pi}{4} - 2FR^3 - C_x\frac{\cancel{F}R^3}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{FR^3}{2IE}\,\frac{3\pi^2-8\pi-4}{\pi}}}$$

$$C_x = \frac{2F}{\pi}$$

6. feladat A vázolt AB rúd B keresztmetszete be van fogva, az A helyzet viszont lehetővé teszi az x-irányú elmozdulást! Határozzuk meg a reakciókat!



Adott: l, p, IE

A befogások miatt:

B part: 3 reakció: B_x, B_y, M_B

A part: 2 reakció: A_y, M_A

3 db egyensúlyi egyenlet ⟷ 5 reakció

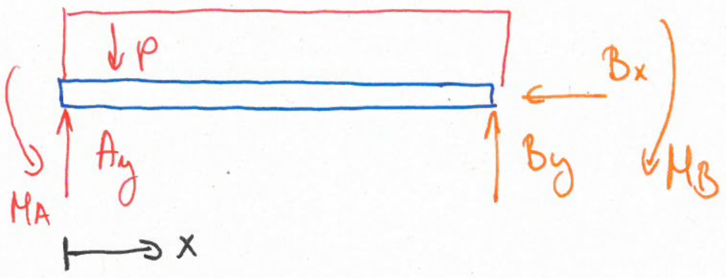
Kétszeresen határozatlan a szerkezet

2 reakciót kell aktívvá tenni! ←

↳ A_y és M_A

$w_A = 0$ és $\varphi_A = 0$

SZTA



$\Sigma F_x = 0$: $\boxed{B_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0$: $A_y + B_y - pl = 0$

$\Sigma M_A = 0$: $+M_A - \frac{pl^2}{2} + B_y l - M_B = 0$

Igénybevételek:

	$0 < x < l$
$M_h(x)$	$M_A - A_y x + \frac{p x^2}{2}$
$N(x)$	0

$M_h(x)$ csak az aktív erőktől függ!

$$\frac{\partial M_h}{\partial M_A} = 1$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial A_y} = -x$$

Tehát

- $$w_A = 0 = \frac{1}{IE}\int_0^l M_h(x)\frac{\partial M_h}{\partial A_y}dx = \frac{1}{IE}\int_0^l -M_A x + A_y x^2 - \frac{p x^3}{2} dx$$

$$= \frac{1}{IE}\left[-\frac{M_A x^2}{2} + \frac{A_y x^3}{3} - \frac{p x^4}{8}\right]_0^l = \underline{\underline{\frac{1}{IE}\left(-\frac{M_A l^2}{2} + \frac{A_y l^3}{3} - \frac{p l^4}{8}\right) = 0}}$$

- $$\varphi_A = 0 = \frac{1}{IE}\int_0^l M_h(x)\frac{\partial M_h}{\partial M_A} = 0 = \frac{1}{IE}\int_0^l M_A - A_y x + \frac{p x^2}{2} dx$$

$$= \frac{1}{IE}\left[M_A x - \frac{A_y x^2}{2} + \frac{p x^3}{6}\right]_0^l = \underline{\underline{\frac{1}{IE}\left(M_A l - \frac{A_y l^2}{2} + \frac{p l^3}{6}\right) = 0}}$$

↳ egyenletrendszer:

$$-M_A\frac{l^2}{2} + A_y\frac{l^3}{3} - p\frac{l^4}{8} = 0 \qquad (1)$$

$$M_A l - A_y\frac{l^2}{2} + p\frac{l^3}{6} = 0 \qquad (2)$$

(1) $+\frac{l}{2}(2)$.

$$M_A\frac{l^2}{2} - A_y\frac{l^3}{4} + \frac{p l^4}{12} = 0 \qquad \frac{l}{2}\cdot(2)$$

$$A_y l^3\underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12}} - p l^4\underbrace{\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)}_{\frac{1}{24}} = 0$$

$$↳ A_y = \frac{pl\left(\frac{1}{24}\right)}{\frac{1}{12}} = \frac{12 pl}{24} = \underline{\underline{\frac{pl}{2}}}$$

$$↳ B_y = pl - A_y = \underline{\underline{\frac{pl}{2}}}$$

$$↳ M_A = A_y\frac{l}{2} - \frac{pl^2}{6} = \frac{pl^2}{4} - \frac{pl^2}{6} = \underline{\underline{\frac{pl^2}{12}}}$$

$$↳ M_B = M_A - \frac{pl^2}{2} + B_y l = \frac{pl^2}{12} - \frac{pl^2}{2} + \frac{pl^2}{2} = \frac{pl^2}{12}$$