Rugalmas szál differenciálegyenlete

Kihajlás

Példatár 2.1

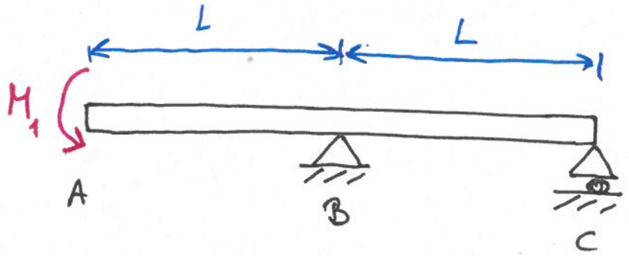
1. feladat Az alábbi rúd terhelése az A keresztmetszetben működő $M_1 = 2\ \text{Nm}$ nyomaték. A tartó hajlítómerevsége $150\ \text{Nm}^2$, $L = 1\ \text{m}$.

Feladatok

a) Határozzuk meg a CB szakaszon a maximális lehajlás értékét és helyét!

b) Számítsuk ki az A, B, C keresztmetszetekben a szögelfordulásokat és az A keresztmetszetben a lehajlás értékét!

c) Mekkora d átmérőjű kör keresztmetszetű acélból készítsünk tartót, ha azt szeretnénk, hogy az A km lehajlása 10 mm legyen?



Adatok:

$L = 1\ \text{m}$

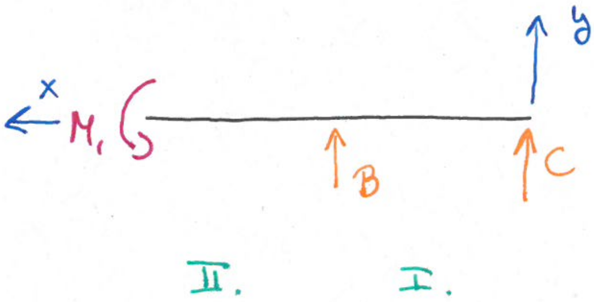
$IE = 150\ \text{Nm}^2$

$M_1 = 2\ \text{Nm}$

$E = 200\ \text{GPa}$

$w_{A\,meg} = 10\ \text{mm}$

Reakciók



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0 : \quad 0 = 0$

$\sum F_y = 0 \quad B + C = 0$

$\sum M_C = 0 \quad M_1 - B \cdot L = 0$

$\hookrightarrow B = \dfrac{M_1}{L} = \underline{\underline{2\ \text{N}}}$

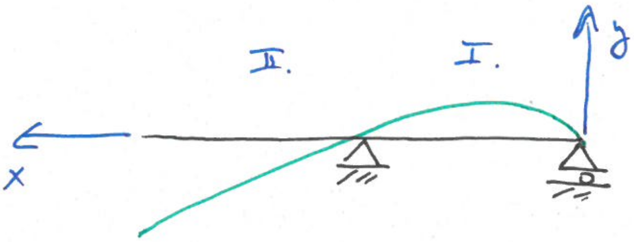
$\hookrightarrow C = -B = \underline{\underline{-2\ \text{N}}}$

Igénybevételi függvények

$$M_{h1}(x) = -C \cdot x = \underline{\underline{\frac{M_1}{L} \cdot x}}$$

$$M_{h2}(x) = -Cx - B(x-L) = \frac{M_1}{L}x - \frac{M_1}{L}(x-L) = \underline{\underline{M_1}}$$

A deformált alak.



1es szakasz:

$$M_{h1}(x) = -IE\, w_1''(x)$$

PF: $w_1(0) = 0$

$w_1(L) = 0$

2es szakasz:

$$M_{h2}(x) = -IE\, w_2''(x)$$

Illesztési feltétel! $\longrightarrow$ PF: $w_2(L) = w_1(L) = 0$

$w_2'(L) = w_1'(L)$

I. szakasz.

$$-IE\, w_1''(x) = \frac{M_1}{L} \cdot x \quad / \int$$

$$-IE\, w_1'(x) = \frac{M_1}{L} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \quad / \int$$

$$-IE\, w_1(x) = \frac{M_1}{L} \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$\hookrightarrow w_1(x) = \frac{1}{IE}\left(-\frac{M_1}{L}\frac{x^3}{6} - C_1 x + C_2\right)$$

PF:

$$\begin{cases} w_1(0) = \frac{1}{IE}(-C_2) = 0 \\ \qquad \hookrightarrow \boxed{C_2 = 0} \\ w_1(L) = \frac{1}{IE}\left(-\frac{M_1 L^3}{6L} - C_1 \cdot L\right) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{C_1 = -\frac{M_1}{6} \cdot L}$$

Visszahelyettesítve:

$$w_1(x) = \frac{1}{IE}\left(-\frac{M_1}{L}\frac{x^3}{6} + \frac{M_1}{6} \cdot Lx\right)$$

$$\varphi_1(x) = w_1'(x) = \frac{1}{IE}\left(-\frac{M_1}{L}\frac{x^2}{2} + \frac{M_1 L}{6}\right)$$

Szélsőérték:

$$w_1'(x^*) = 0$$
$$\varphi_1(x^*) = 0$$

$$-\frac{M_1}{L}\frac{x^2}{2} + \frac{M_1 L}{6} = 0 \quad / \cdot \frac{2L}{M_1}$$

$$x^2 = \frac{L^2}{3} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0{,}577 \cdot L = \underline{\underline{0{,}577\ m}}$$

$$x_2 = -\frac{L}{\sqrt{3}} \quad \lightning$$

Itt a lehajlás:

$$w_1(x_1) = \frac{M_1 L^2}{9\sqrt{3} \cdot IE} = \underline{\underline{0{,}8553\ mm}}$$

Az illesztési feltételhez:

$$\varphi_B = w_1'(L) = \varphi_1(L) = -\frac{M_1 L}{3IE} = -0{,}254°$$

$$\varphi_C = w_1'(0) = \frac{M_1 L}{6IE} = 0{,}127°$$

II. szakasz

$$-IE\, w_2''(x) = M_1 \quad / \int$$

$$-IE\, w_2'(x) = M_1 x + \tilde{C}_1 \quad / \int$$

$$-IE\, w_2(x) = \frac{M_1 x^2}{2} + \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$$

Illesztési feltétel:

$$w_2'(L) = w_1'(L)$$
$$\Downarrow$$

Elegendő az első integrálás utáni egyenletbe visszaírni!

- $w_2'(L) = w_1'(L) = \varphi_B = \dfrac{-M_1 L}{3IE}$

$$-IE \cdot \left(\frac{-M_1 L}{3IE}\right) = M_1 \cdot L + \tilde{C}_1$$

$$\boxed{\tilde{C}_1 = -\frac{2}{3} M_1 L}$$

- $w_2(L) = w_1(L) = 0$

$$-IE \cdot 0 = \underbrace{\frac{M_1 L^2}{2} - \frac{2}{3} M_1 \cdot L^2}_{-\frac{1}{6} M_1 \cdot L^2} + \tilde{C}_2$$

$$\boxed{\tilde{C}_2 = \frac{1}{6} M_1 L^2}$$

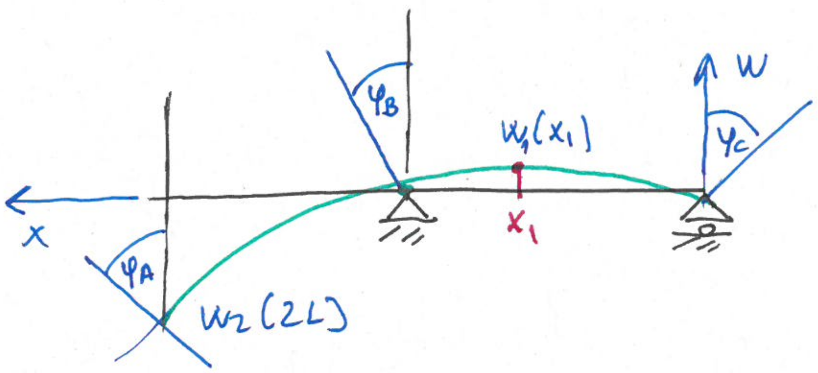
Visszaírva:

$$w_2(x) = \frac{1}{IE}\left(-\frac{M_1 x^2}{2} + \frac{2}{3} M_1 L x - \frac{1}{6} M_1 L^2\right)$$

$$\varphi_2(x) = w_2'(x) = \frac{1}{IE}\left(-M_1 x + \frac{2}{3} M_1 L\right)$$

$$w_A = w_2(2L) = -\frac{5}{6}\frac{M_1 L^2}{IE} = -11{,}111 \text{ mm}$$

$$\varphi_A = w_2'(2L) = -\frac{4}{3}\frac{M_1 L}{IE} = -1{,}019°$$



Méretezés:

. $\tilde{w}_A = -10$ mm lehet

$\Downarrow$ előjelhelyesen!

$$\tilde{w}_A = -\frac{5}{6}\frac{M_1 L^2}{\tilde{I} E}$$

$$\downarrow$$

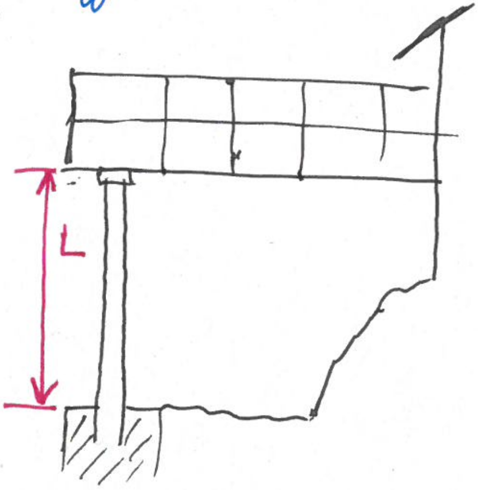
$$\tilde{I} = -\frac{5}{6}\frac{M_1 L^2}{\tilde{w}_A E} = \frac{5000}{6} \approx 833{,}3 \text{ mm}^4$$

$$\tilde{d} = \sqrt[4]{\frac{64 \tilde{I}}{\pi}} = \underline{\underline{11{,}415 \text{ mm}}}$$

Példatár 3.1

2. feladat

Az ábrán látható kilátó $P = 100\ kN$ terhelését az $L = 3,5\ m$ hosszúságú, $d = 100\ mm$ külső átmérőjű alumínium cső tartja. (Rugalmassági modulus $E_{AL} = 72\ GPa$). A cső alsó megtámasztása befogás, míg a felső rögzítés a vízszintes irányú mozgást gátolja, de az elfordulást engedi.
Mekkora legyen a cső t falvastagsága, ha azt szeretnénk, hogy háromszoros biztonsággal megfeleljen kihajlásra?



Adatok:

$L = 3,5\ m$

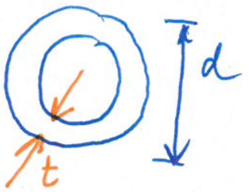
$d = 100\ mm$

$P = 100\ kN$

$E_{AL} = 72\ GPa$

$\sigma_0 = 480\ MPa$

$n = 3$



Geometria:

$$I_2 = \frac{\left[d^4 - (d-2t)^4\right]\pi}{64}$$

A megengedett törőerő: $n \cdot P = F_t$

bizt. tényező

$F_t = 300\ kN$

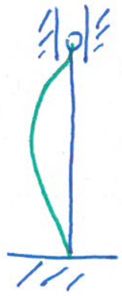
TFH Euler-tartományon vagyunk!

$$\sigma_{kr} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E \longrightarrow \frac{F_t}{A} = \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 \frac{I_2}{A} \cdot E$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = l_0 \sqrt{\frac{A}{I_2}} \qquad F_t = \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 I_2 E$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

Már csak a mértékadó rúdhossz kell



$$l_0 = 0{,}7 \cdot L = \underline{\underline{2{,}45\,m}}$$

Visszaírva mindent:

$$F_t = \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 I_2 \cdot E$$

$$300\,000 = \left(\frac{\pi}{2450}\right)^2 \left(\frac{100^4 - (100-2t)^4}{64} \cdot \pi\right) \cdot 72000$$

$$\hookrightarrow t = \underline{\underline{8{,}3\ mm}}$$

Ellenőrizni kell, hogy tényleg Eulert használhatunk.

$$A = \frac{d^2 - (d-2t)^2}{4} \cdot \pi = 2391{,}1\ mm^2$$

$$I_2 = \frac{d^4 - (d-2t)^4}{64} \cdot \pi = 2533\,899{,}91\ mm^4$$

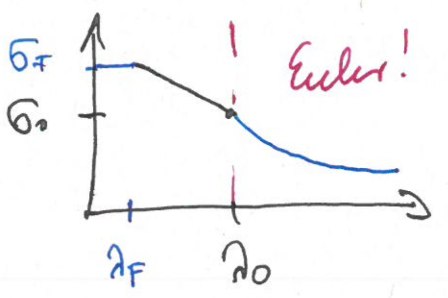
Inerciasugár $\quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = 32{,}55\ mm$

Karcsúság $\quad \lambda = \frac{l_0}{i_2} = \underline{\underline{75{,}27}}$

Tudjuk:

$$\sigma_0 = \left(\frac{\pi}{\lambda_0}\right)^2 E$$

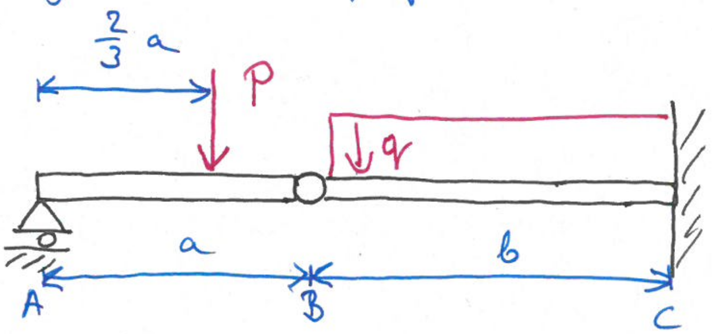
$$\hookrightarrow \lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2}{\sigma_0} E} = \underline{\underline{38{,}48}}$$



mivel $\boxed{\lambda > \lambda_0}$ helyes a megoldás!

3. feladat

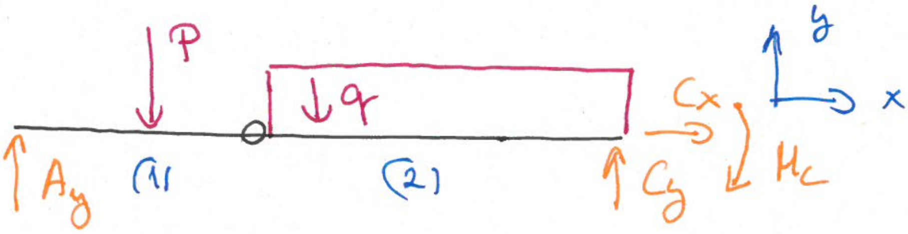
Az ábrán látható AB és BC rúd csuklósan kapcsolódik a B pontban. A tartó terhelése P koncentrált erő és q megoszló terhelés. Határozzuk meg a B csukló lehajlását a szuperpozíció elvének és a járulékképletek felhasználásával!



Adatok:

P, q, a, b, IE

Reakciók



$\sum F_x = 0: \quad C_x = 0$

$\sum F_y = 0: \quad A_y + C_y - P - qb = 0$

$\sum M_B = 0$ balról: az (1) es rúdra

$$-A_y \cdot a + P \cdot \frac{a}{3} = 0$$

$$\underline{\underline{A_y = \frac{P}{3}}}$$

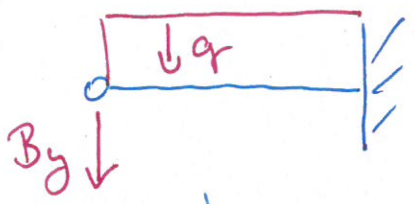
$$\hookrightarrow C_y = P + qb - A_y = \frac{2}{3}P + qb$$

jobbról, a (2) es rúdra

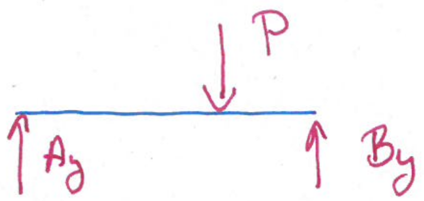
$$\sum M_B = -q \cdot \frac{b^2}{2} + C_y \cdot b - M_C = 0$$

$$M_C = -q\frac{b^2}{2} + C_y \cdot b = \frac{1}{6}b(4P + 3bq)$$

Tehát a BC-rúd:



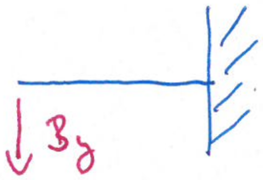
Az AC-rúd:



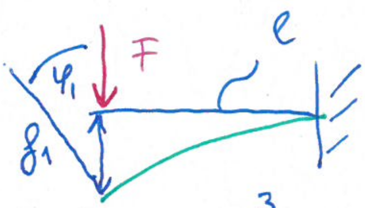
$$B_y = P - F_A = \underline{\underline{\frac{2}{3}P}}$$

felírható mint

I. és II. szuperpozíciója



A két esetre vonatkozó járulékképletek



$$f_1 = \frac{F \cdot \ell^3}{3IE}$$

$$\varphi_1 = \frac{F\ell^2}{2IE}$$

$$f_2 = \frac{p\ell^4}{8IE}$$

$$\varphi_2 = \frac{p\ell^3}{6IE}$$

Ezek alapján

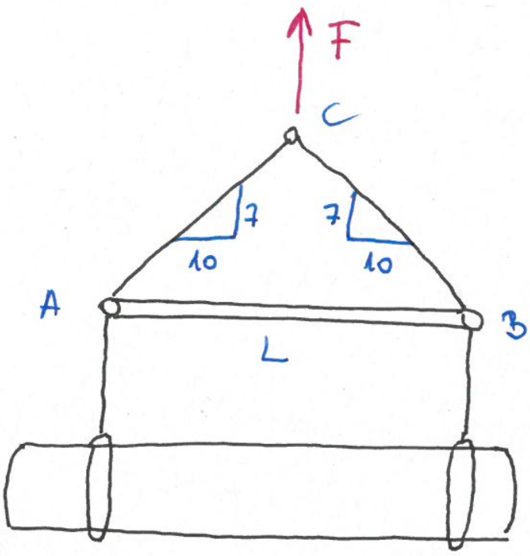
- $$f_B = f_1 + f_2 = \frac{B_y \cdot b^3}{3IE} + \frac{q \cdot b^4}{8IE} = \underline{\underline{\frac{2}{9}\frac{Pb^3}{IE} + \frac{qb^4}{8IE}}}$$

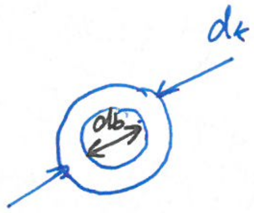
- $$\varphi_B = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{B_y \cdot b^2}{2IE} + \frac{qb^3}{6IE} = \underline{\underline{\frac{Pb^2}{3IE} + \frac{qb^3}{6IE}}}$$

Példatár 3.2

4. feladat

Egy hosszú csövet az ábrán látható acélsodrony segítségével kívánunk felemelni; ahol az A és B közé egy távtartót illesztünk be. A távtartó keresztmetszete körgyűrű, ahol a külső és belső átmérők 70 illetve 54 mm, míg AB hossza 2,6 m. Mekkora lehet a cső súlya, ha azt szeretnénk, hogy a távtartó 2,25-szörös biztonsággal feleljen meg kihajlásra? (A távtartó és az acélsodrony súlyát elhanyagoljuk)





Adatok:

$d_k = 70\,mm$

$d_b = 57\,mm$

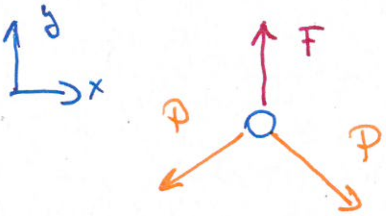
$L = 2{,}6\,m$

$E = 200\,GPa$

$\lambda_0 = 100$

$n = 2{,}25$

C - csukló



$\sum F_x = 0 \qquad P_x - P_x = 0$

$\sum F_y = 0 \qquad F - 2P_y = 0$

$$P_y = \frac{F}{2}$$

Geometriából

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{7}{10}$$

$$P_x = \frac{10}{7} P_y = \frac{5}{7} F$$

A távtartó geometriája:

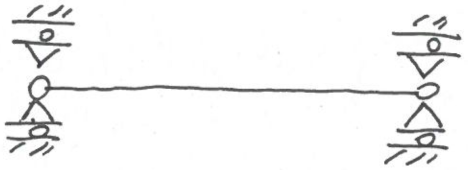
$$A = \frac{(d_k^2 - d_b^2)\pi}{4} = 1256{,}7\,mm^2$$

$$I_z = \frac{(d_k^4 - d_b^4)\pi}{64} = 660422\,mm^2$$

Inerciasugár

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 22{,}57\,mm$$

↳ Megtámasztás módja



c = 1

Csuklós-csuklós

$l_0 = c \cdot L = 2600\,mm$

Karcsúság:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = 115,21 > \lambda_0$$

⇓ Euler-képlet

$$F_t = \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2 I_2 E = 192843\,N$$

↓ Kritikus törőerő

A tartó axiális terhelése: P_x

$$F_t \le n \cdot P_x$$

$$F_t \le n \cdot \frac{5}{7} F$$

⇓

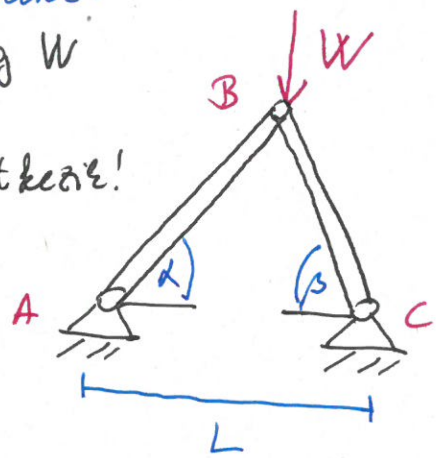
$$F_{max} = \frac{7}{5}\frac{F_t}{n} = \underline{\underline{119991\,N}}$$

Példatár 3.3

5. feladat

Az ábrán látható csuklós szerkezet terhelése a B csuklóban működő W koncentrált erő. Mindkét rúd körkeresztmetszetű $d = 100$ mm külső átmérővel és $t = 6$ mm falvastagsággal. Mindkét rúd kellően karcsú ahhoz, hogy az Euler-féle elmélettel számolhassunk!

Határozzuk meg W értékét, amikor kihajlás jelentkezik!



Adatok:

$L = 7$ m

$\alpha = 40°$

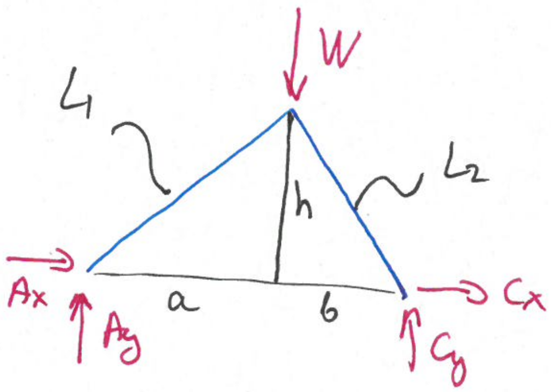
$\beta = 55°$

$E = 200$ GPa

$d = 100$ mm

$t = 6$ mm

Szabadtest ábra



$$\left.\begin{aligned} h &= a \cdot tg\,\alpha \\ h &= b \cdot tg\,\beta \\ a + b &= L \end{aligned}\right\} \quad a\,tg\,\alpha = (L-a)\,tg\,\beta$$

$$\Downarrow$$

$a = 4409{,}33$ m

$b = 2590{,}67$ m

$h = 3699{,}86$ m

$$L_1 = \sqrt{a^2 + h^2} = 5755{,}97 \text{ mm}$$

$$L_2 = \sqrt{b^2 + h^2} = 4516{,}7 \text{ mm}$$

$\sum F_x = 0: \quad A_x + C_x = 0$

$\sum F_y = 0 \quad A_y + C_y - W = 0$

$\sum M_C = 0 \quad W \cdot b - A_y \cdot L = 0$

$\hookrightarrow A_y = 0{,}37\,W$

$\hookrightarrow C_y = 0{,}63\,W$

$\dfrac{A_y}{A_x} = tg\,\alpha$

$\hookrightarrow A_x = \dfrac{A_y}{tg\,\alpha} = 0{,}441\,W$

$\hookrightarrow C_x = -0{,}441\,W$

A rúderőé

$$N_1 = -\sqrt{A_x^2 + A_y^2} = -0{,}5757\,W$$

$$N_2 = -\sqrt{C_x^2 + C_y^2} = -0{,}769\,W$$

Kihajlás:

$$I_2 = \frac{(d^4 - (d-2t)^4)\pi}{64} = 1964991\ mm^4$$

$$F_t^{AB} = \left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2 I_2\,E = 117{,}072\ kN$$

$$F_t^{BC} = \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2 I_2\,E = 190{,}129\ kN$$

AB rúd esete

$$|N_1| = F_t^{AB}$$

$$0{,}5757\,W = F_t^{AB}$$

$$\hookrightarrow W_1 = \underline{\underline{203{,}355}}\ kN$$

BC rúd esete

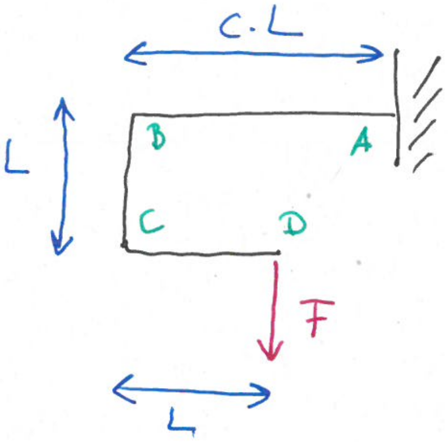
$$|N_2| = F_t^{BC}$$

$$0{,}769\,W_2 = F_t^{BC}$$

$$\hookrightarrow W_2 = \underline{\underline{247{,}242}}\ kN$$

Tehát, mivel $W_1 < W_2$ ezért $W = W_1 = 203{,}355\ kN$ erőnél jelentkezik a kihajlás!

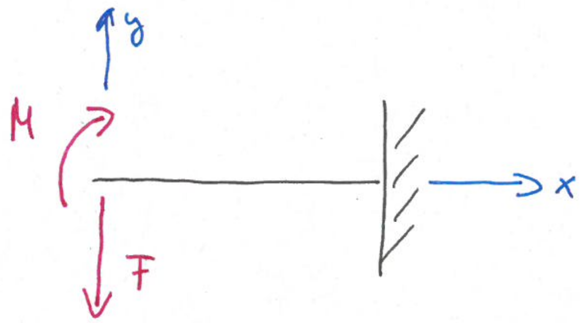
6. feladat Mekkora legyen az AB szakasz hossza, hogy a B keresztmetszet függőleges elmozdulása zérus legyen?



Nekünk csak az AB rúd kell

$\Downarrow$

redukáljuk az erőt B pontba



$$M = F \cdot L$$

Rugalmas szál differenciálegyenlete:

$$M_h(x) = -M + Fx = -FL + Fx = F(x-L)$$

$$-IEw''(x) = M_h(x)$$

$$-IEw''(x) = F(x-L) \quad / \int$$

$$-IEw'(x) = \frac{Fx^2}{2} - FLx + C_1 \quad / \int$$

$$-IEw(x) = \frac{Fx^3}{6} - \frac{FLx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Peremfeltételek:

$$w(c \cdot L) = 0$$

$$w'(c \cdot L) = 0$$

Behelyettesítve

$$w'(c\cdot L)=0$$

$$0=\frac{F(c\cdot L)^2}{2}-FL\cdot(c\cdot L)+C_1$$

$$C_1=-\frac{Fc^2L^2}{2}+FcL^2=\frac{FL^2}{2}(-c^2+2c)$$

$$w(c\cdot L)=0$$

$$0=\frac{F(c\cdot L)^3}{6}-\frac{FL(c\cdot L)^2}{2}+\frac{FL^2}{2}(-c^2+2c)\cdot(c\cdot L)+C_2$$

$$C_2=-\frac{Fc^3L^3}{6}+\frac{FLc^2L^2}{2}+\frac{FL^2}{2}(c^2-2c)cL$$

$$C_2=\frac{FL^3}{6}(-c^3+3c^2+3c^3-6c^2)=\underline{\underline{\frac{FL^3}{6}(2c^3-3c^2)}}$$

Visszaírva:

$$w(x)=-\frac{1}{IE}\left(\frac{Fx^3}{6}-\frac{FLx^2}{2}+\frac{FL^2}{2}(-c^2+2c)x+\frac{FL^3}{6}(2c^3-3c^2)\right)$$

Feltétel: $w(0)=0$

$$\downarrow$$

$$0=-\frac{1}{IE}\left(0-0+0+\frac{FL^3}{6}(2c^3-3c^2)\right)$$

$$\frac{FL^3}{6}(2c^3-3c^2)=0$$

$$2c^3=3c^2$$

$$\boxed{c=\frac{3}{2}} \qquad \boxed{c_1=0}$$

nincs értelme!