Szilárdságtan 9. hét Plusz 1 Megoldással

Egy rugalmas test egy pontjában ismert a feszültségi tenzor mátrixa $\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}}$. Az alakváltozási tenzor ($\underline{\underline{\varepsilon}}$) kiszámítása nélkül határozzuk meg az alakváltozási energiasűrűséget, valamint a deviátoros (torzulási) és a hidrosztatikus (térfogati) részt!

$$u = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \Bigg(\overbrace{\frac{1+\nu}{E}\Big[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}\Big]}^{\underline{\underline{\varepsilon}} \text{ a Hooke trv. szerint}}\Bigg)$$

definíció szerint

Most el lehet végezni a kétpont szorzást!

$$u = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}}\Big(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underbrace{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{E}}}\Big)$$

A konstansok kiemelhetők

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \underline{\underline{\sigma_I}}$$

$$\underline{\underline{u = \frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\Big(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I^2\Big)}} = \underline{\underline{\frac{1}{4G}\Big(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I^2\Big)}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E} = \frac{2(1+\nu)}{4E}\,{=}\frac{1}{G} = \frac{1}{4G}$$

Most nézzük a hidrosztatikus részt (gömbi), térfogatváltozásra fordítódik

$$u_g = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}_g : \underline{\underline{\varepsilon}}_g = \frac{1}{2}\sigma_I \underline{\underline{E}}\frac{1}{3} : \Bigg(\underbrace{\frac{1+\nu}{E}\Big[\underline{\underline{\sigma}}_g - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}_g\Big]}\Bigg)$$

$\underline{\underline{\sigma}}_g = \frac{1}{3}\sigma_I \underline{\underline{E}}$ (definíció)

a Hooke trv a gömbi részre

$$\underline{\underline{E}}_g = \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A szorzást el lehet már végezni:

$$u_g = \frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\left[\frac{1}{3}\sigma_I \underline{\underline{E}} : \left(\frac{1}{3}\sigma_I \underline{\underline{E}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}\right)\right]$$

Felhasználva, hogy $\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \underline{\underline{3}}$

$$u_g = \frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{1}{\cancel{9}_3}\sigma_I^2 \cdot \cancel{3} - \frac{\nu}{1+\nu}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\sigma_I^2 \cancel{3}\right)$$

$$u_g = \frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\frac{\sigma_I^2}{3}\underbrace{\left(1 - 3\frac{\nu}{1+\nu}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{1+\nu}}{E}\frac{\sigma_I^2}{3}\frac{1-2\nu}{\cancel{1+\nu}} \Rightarrow$$

$$\frac{1+\nu}{1+\nu} - \frac{3\nu}{1+\nu} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}$$

$$\boxed{u_g = \frac{1-2\nu}{6E}\sigma_I^2}$$

<u>Végül a deviátoros rész:</u>

Az egységtenzor deviátoros része

$$u_d = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}_d : \left(\frac{1+\nu}{E}\left(\underline{\underline{\sigma}}_d - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}_d\right)\right)$$

$$\underline{\underline{E}}_d = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}_g \quad \text{mivel} \quad \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_g \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{E}}_d = \underline{\underline{0}}}$$

Az egyszerűsítés után:

$$u_d = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}_d : \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}}_d = \boxed{\frac{1+\nu}{2E}\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d}$$

<u>Összefoglalva:</u>

$$u = \frac{1}{4G}\left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I^2\right)$$

$$u_g = \frac{1-2\nu}{6E}\sigma_I^2 \qquad u_d = \frac{1+\nu}{2E}\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d$$