

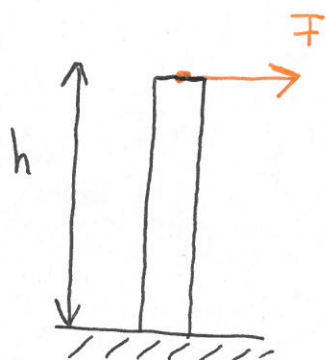
Rudak, gerendák feszültségi állapota
Hajlítónyomatéki igénybevétel

Példatár 1.8

1. feladat

Egy függőleges terhelésű oszlop terhelése a felso végén található koncentrált erő az ábrán látható módon. Célszám megkutatározni az oszlop anyagát és keresztmetszetét, ha

- Tömör kör keresztmetszetű faból
- aluminium csőből gyártjuk le, ha a csővastagság az átmérő egytizede.



Adatok:

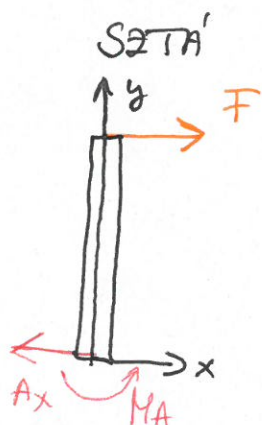
$$h = 2,5 \text{ m}$$

$$F = 12 \text{ kN}$$

$$\sigma_{fa} = 15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{al} = 50 \text{ MPa}$$

1) Reakciók és igénybevételei ábra

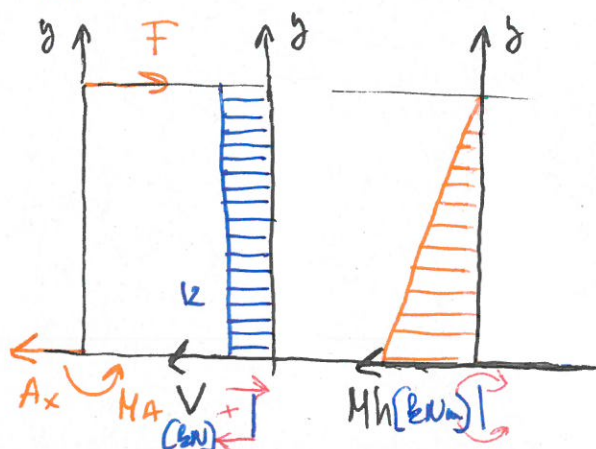


$$\sum F_x = 0 \quad F - A_x = 0$$

$$A_x = F = 12 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -F \cdot L + M_A = 0$$

$$M_A = F \cdot L = 30 \text{ kNm}$$



Ugye! $M_{max} = 30 \text{ kNm}$

A szűrőleges km-i teigezo: $|\sigma| \leq \sigma_{meg}$

$$\sigma_y = \frac{M_{hz}}{I_z} \cdot x \Rightarrow |\sigma_{y_{max}}| = \left| \frac{M_{hz} \cdot e}{I_z} \right| = \left| \frac{M_{hz}}{K_{mh}} \right| = \sigma_{meg}$$

(2)
legkisebb
K érték
kell

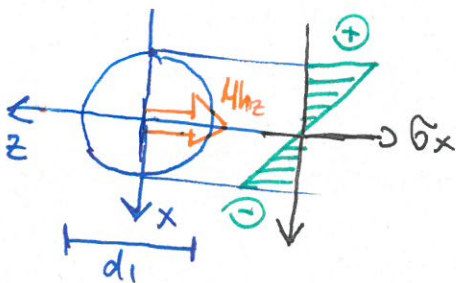
$$K_{mh} = \left| \frac{M_{hz}}{\sigma_{meg}} \right|$$

a) fa tömör néd

(N, mm, MPa) dimenzió

$$K_{mh}^{fa} = \frac{M_{hz}}{\sigma_{meg}^{fa}} = \frac{30000000 \text{ Nmm}}{15 \text{ MPa}} = 2000000 \text{ mm}^3$$

Ha tömör kör

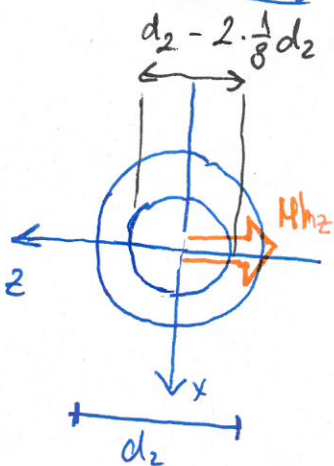


$$K_1 = \frac{I_{z1}}{e_x} = \frac{\frac{d_1^4 \pi}{64}}{\frac{d_1}{2}} = \frac{d_1^3 \pi}{32}$$

$K_{mh}^{fa} = K_1$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{K_{mh}^{fa} \cdot 32}{\pi}} = \underline{\underline{273,1 \text{ mm}}}$$

b) Alumínium gyűrű



$$d_2 - 2 \cdot \frac{1}{8} d_2 = \frac{3}{4} d_2$$

$$K_{mh}^{Al} = \frac{M_{hz}}{\sigma_{meg}^{Al}} = 600000 \text{ mm}^3$$

$$I_{z2} = \frac{\left[d_2^4 - \left(\frac{3}{4} d_2 \right)^4 \right] \pi}{64} = \frac{175}{256} d_2^4 \approx 0,33556 d_2^4$$

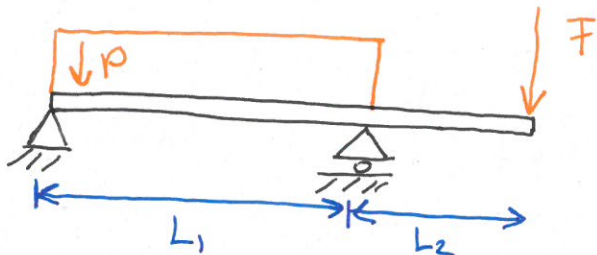
$$K_2 = \frac{I_{z2}}{e_x} = \frac{0,33556 d_2^4}{\frac{d_2}{2}} = 0,67112 d_2^3$$

$$K_2 = K_{mh}^{Al}$$

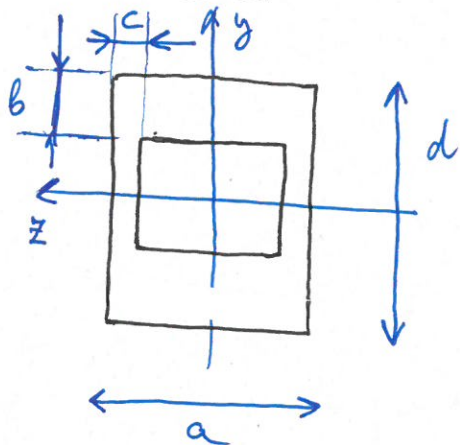
$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{K_{mh}^{Al}}{0,67112}} = \underline{\underline{207,55 \text{ mm}}}$$

2. feladat

Az alábbi tartóval a megengedett maximális normál feszültség 6 MPa . Határozzuk meg a tartó d átmérőjét, hogy az helyezésre megfeleljen!



Keresztmetszet (szimmetrikus)



Adatok:

$$L_1 = 4 \text{ m}$$

$$L_2 = 2 \text{ m}$$

$$F = 12 \text{ kN}$$

$$p = 8 \text{ kN/m}$$

$$\sigma_{\text{meg}} = 6 \text{ MPa}$$

$$b = 75 \text{ mm}$$

$$a = 175 \text{ mm}$$

$$c = 25 \text{ mm}$$

1. STAT. és reakciók



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0: A_y + B_y - p \cdot L_1 - F = 0$$

$$\sum M_A = 0: B_y \cdot L_1 - F \cdot (L_1 + L_2) - p \frac{L_1^2}{2} = 0$$

$$\hookrightarrow B_y = \frac{F(L_1 + L_2) + \frac{pL_1^2}{2}}{L_1} = \underline{\underline{4 \text{ kN}}}$$

$$\hookrightarrow A_y = F + pL_1 - B_y = \underline{\underline{10 \text{ kN}}}$$

Két részre bontás

I. $x \in (0, L_1)$

II. $x \in (L_1, L_1 + L_2)$

Legyeneteli függvények

I.

$$V_1(x) = A_y - px$$

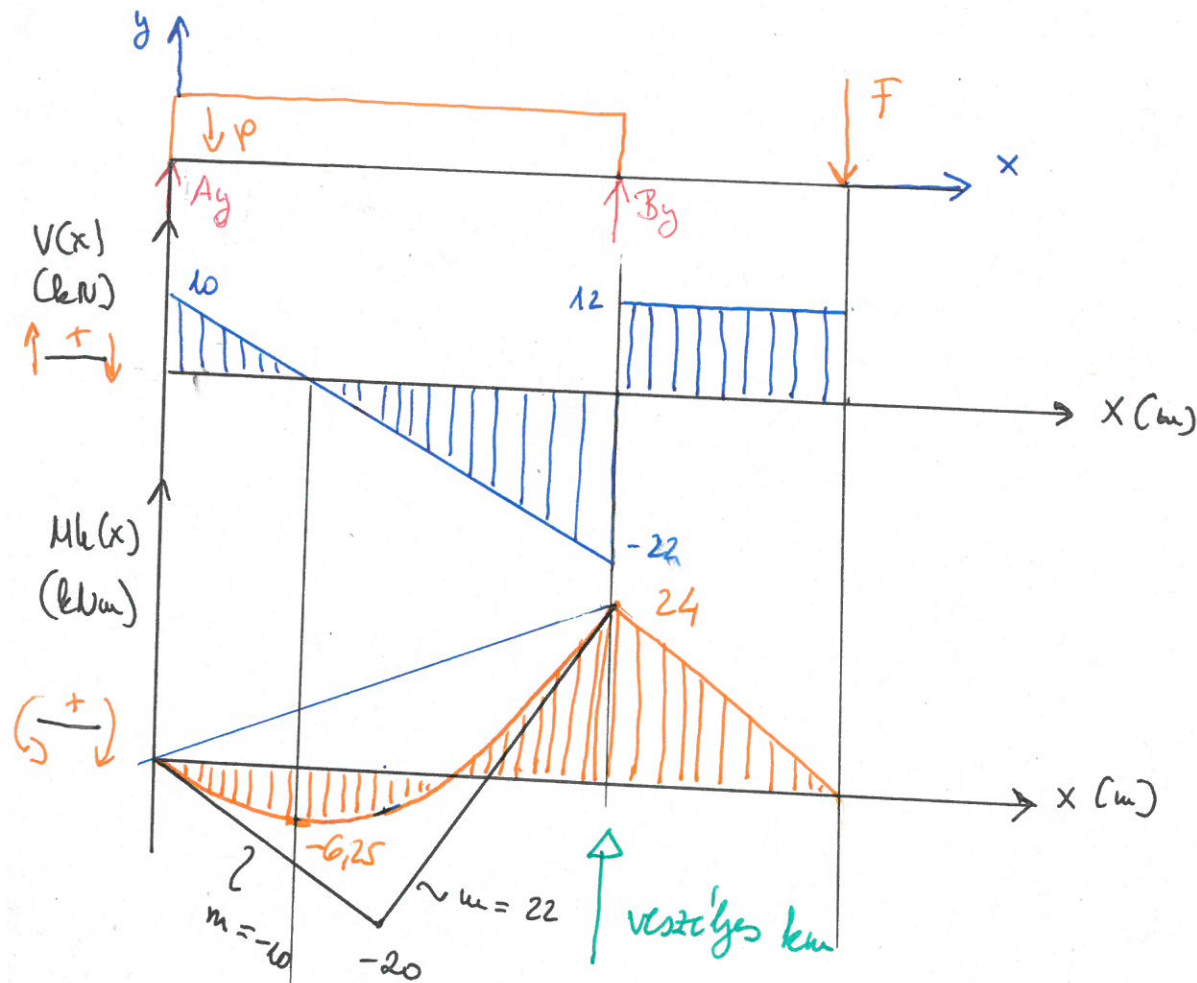
II.

$$V_2(x) = F$$

$$M_{k1}(x) = -A_y x + \frac{px^2}{2}$$

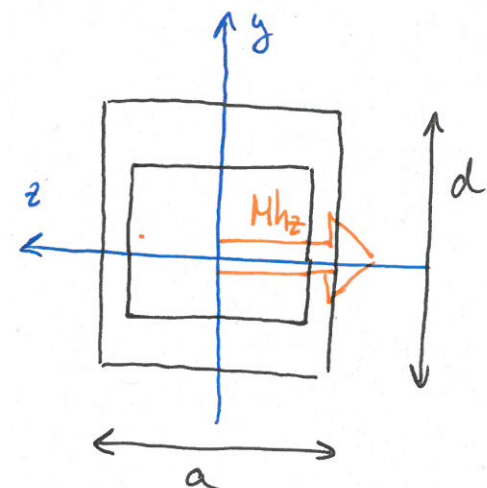
$$M_{k2}(x) = F(L_1 + L_2 - x)$$

② egyenletes ábra



Verzélys konstruálva. $V = -22$ kN

$M_{kz} = 24$ kNm (jobbba mutat!)



$$I_z = \frac{a \cdot d^3}{12} - \frac{(a-2c) \cdot (d-2b)^3}{12}$$

$$= \frac{25}{6} d^3 + \frac{9375}{2} d - 78125 d + 35156250$$

$$K_z = \frac{I_z}{d} = \frac{25}{3} d^2 + 9375 d + \frac{70312500}{d} - 1406250$$

Méretezés: $|\sigma| \leq \sigma_{meg}$

$$|\sigma_{max}| = \sigma_{meg}$$

$$\left| \frac{M_{kz}}{K_{kz}} \right| = \sigma_{meg} \Rightarrow K_{kz} = \frac{M_{kz}}{\sigma_{meg}} = 4000000 \text{ mm}^3$$

A fenti összefüggésből a megoldandó egyenlet

$$\frac{25}{3} d^2 + 9375d - 1406250 + 70312500 \cdot \frac{1}{d} = 4000000$$

⇓
3ad fajú egyenlet

Megoldások

$$d_1 = -1547,7 \text{ mm} \rightarrow \text{⚡}$$

$$d_2 = 13,317 \text{ mm}$$

$$d_3 = 409,38 \text{ mm}$$

$$\rightarrow d - 26 > 0 \text{ kell legyen!}$$

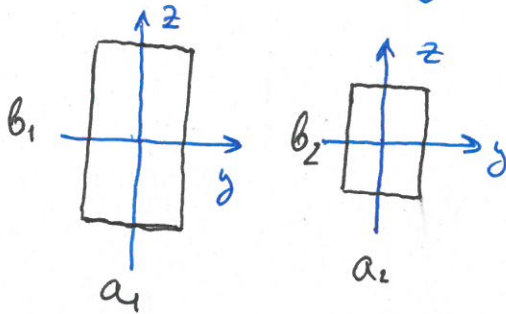
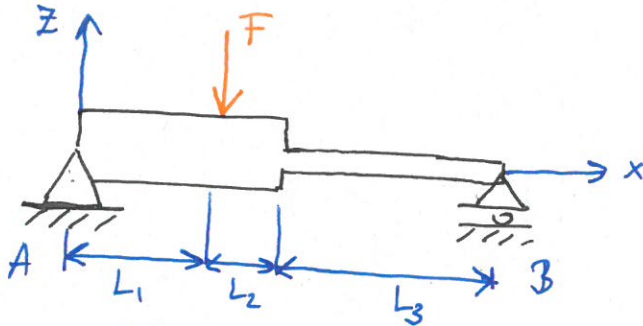


$$d > 26$$

$$\underline{\underline{d > 150 \text{ mm}}}$$

3. feladat

Határozzuk meg az alábbi tartó AC és CB részén a keresztmetszet méretét úgy, hogy $\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1} = 2$ feltétel mellett legkisebbre megfelelően a tartó



Adatok:

$$L_1 = 2 \text{ m}$$

$$L_2 = 1 \text{ m}$$

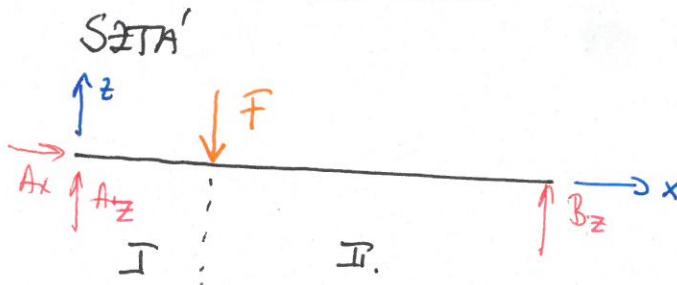
$$L_3 = 4 \text{ m}$$

$$F = 14 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\text{meg}} = 100 \text{ MPa}$$

Figyeljünk a koordináta-rendszerre!

① Reakciók, igénybevételek



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: A_x = 0$$

$$\sum F_z = 0: A_z + B_z - F = 0$$

$$\sum M_A = 0: -F \cdot L_1 + B_z \cdot (L_1 + L_2 + L_3) = 0$$

$$B_z = \frac{F L_1}{L_1 + L_2 + L_3} = 4 \text{ kN}$$

$$A_z = F - B_z = 10 \text{ kN}$$

Ígybevételek

I.

$$x \in (0, L_1)$$

$$V \quad V_1(x) = A_z$$

$$M_h \quad M_{h1}(x) = -A_z x$$

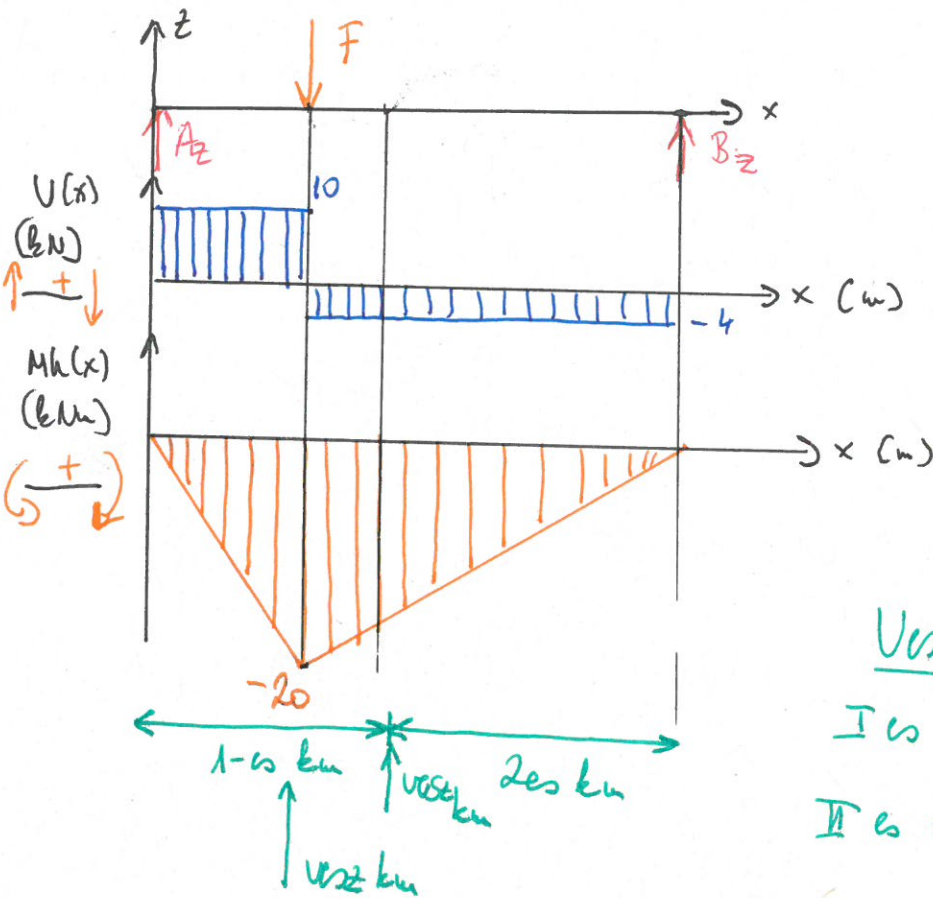
II.

$$x \in [L_1; L_1 + L_2 + L_3]$$

$$V_2(x) = A_z - F$$

$$M_{h2}(x) = -B_z (L_1 + L_2 + L_3 - x)$$

Ígénybeveteli ábra'k



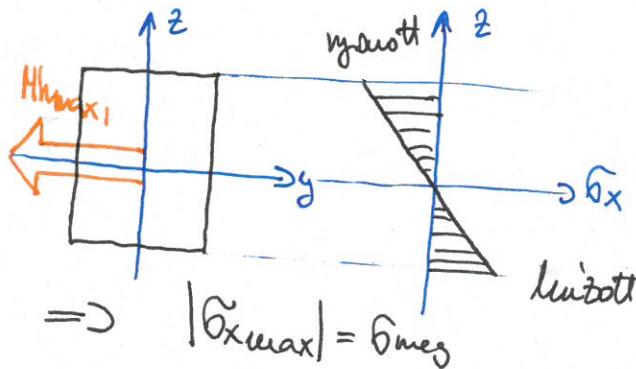
Vezérlés km el

I es km. $M_{hmax1} = -20 \text{ kNm}$

II es km $M_{hmax2} = M_{h2}(L_1 + L_2)$
 $M_{hmax2} = -16 \text{ kNm}$

② Méretzáró

• 1 es km:



$$|\sigma| \leq \sigma_{meg} \Rightarrow |\sigma_{xmax}| = \sigma_{meg}$$

$$\frac{M_{hmax1}}{K_{zmin}} = \sigma_{meg}$$

$$K_{zmin1} = \frac{M_{hmax1}}{\sigma_{meg}}$$

$$K_{z1} = \frac{I_{y1}}{\frac{b_1}{2}} = \frac{a_1 b_1^3}{12} = \frac{a_1 b_1^2}{6}$$

• 2 es km (hasarolóan)

$$|\sigma_{xmax}| = \sigma_{meg} \quad K_{zmin2} = \frac{M_{hmax2}}{\sigma_{meg}}$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{3 M_{hmax2}}{2 \sigma_{meg}}} = 62 \text{ mm}$$

$$b_2 = 124 \text{ mm}$$

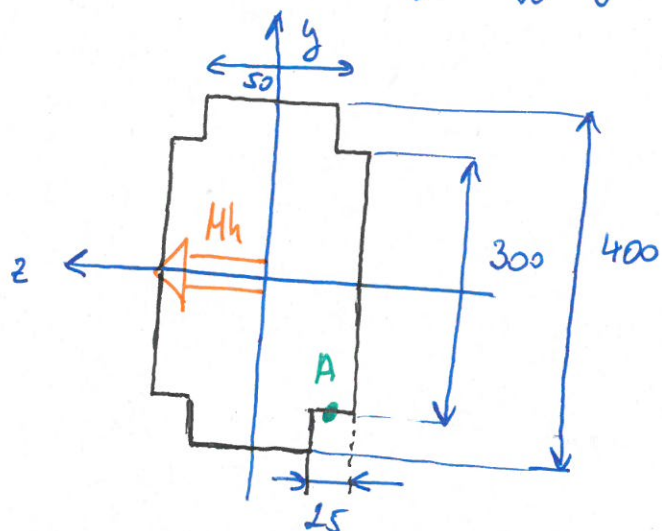
$$K_{z1} = K_{zmin1} \quad \frac{a_1 b_1^2}{6} = \frac{2}{3} a_1^3 = \frac{M_{hmax1}}{\sigma_{meg}}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{3 M_{hmax1}}{2 \sigma_{meg}}} = 67 \text{ mm}$$

$$b_1 = 134 \text{ mm}$$

4. feladat

Az alábbi keresztmetszet terhelése $M_k = 5 \text{ kNm}$, amely az ábrán látható. Határozzuk meg az A pontban a normál feszültség nagyságát



$$M_k = 5 \text{ kNm}$$

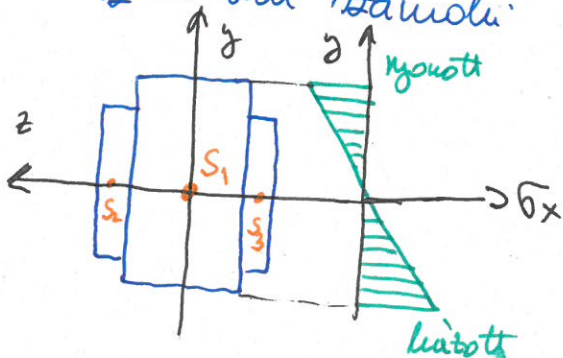
Az A pont koordinátái:
 $A(32,5; -150) \text{ mm}$

A feszültség eloszlást az alábbi összefüggésekkel a Navier - képlet:

$$\sigma_x(y) = - \frac{M_k}{I_z} \cdot y$$

a felő szál nyomott

I_z -t kell számolni.



$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} = I_{z1} + 2 I_{z2} =$$

$$I_z = \frac{50 \cdot 400^3}{12} + 2 \cdot \frac{25 \cdot 300^3}{12}$$

$$I_z = 3,79167 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_A = \sigma_x(y_A) = - \frac{M_k}{I_z} y_A = 1,98 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{\max}| = \left| - \frac{M_k}{I_z} \cdot y_{\max} \right| = \underline{\underline{2,63 \text{ MPa}}}$$

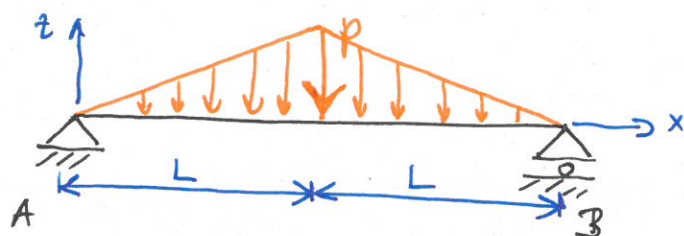
±200.

5. feladat Mekkora lehet a megengedett terhelés p intenzitása (a mid közepén), ha a gerendaára megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 50 \text{ MPa}$

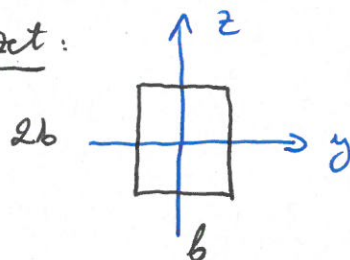
Adatok:

$$L = 6 \text{ m}$$

$$b = 100 \text{ mm}$$



Keresztmetszet:



① Reakciók



$$\sum F_x = 0: A_x = 0$$

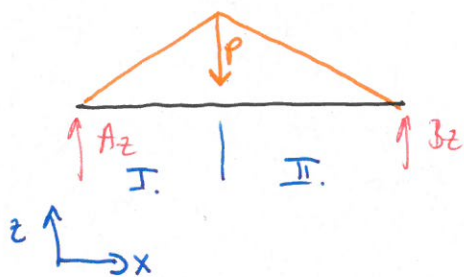
$$\sum F_z = 0: A_z + B_z - pL = 0$$

$$\sum M_A = 0: B_z \cdot 2L - pL^2 = 0$$

$$\hookrightarrow B_z = \frac{pL^2}{2L} = \frac{pL}{2}$$

$$\hookrightarrow A_z = pL - B_z = \frac{pL}{2}$$

② Igénybeveteli függvény



Mivel szimmetrikus elég csak az I-es szakaszt keresni $M_{h,max}$ értéket!

$$V_1(x) = A_z - \frac{p}{L} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{pL}{2} - \frac{px^2}{2L}$$

$$M_{h1}(x) = -A_z \cdot x + \left(\frac{p}{L} \cdot x\right) \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

$$M_{h1}(x) = -\frac{pL}{2}x + \frac{px^3}{6L}$$

M_{h1} szélsőértéke

$$M_{h1}'(x) = -V(x) = 0$$

$$-\frac{pL}{2} + \frac{px^2}{2L} = 0 \quad \rightarrow$$

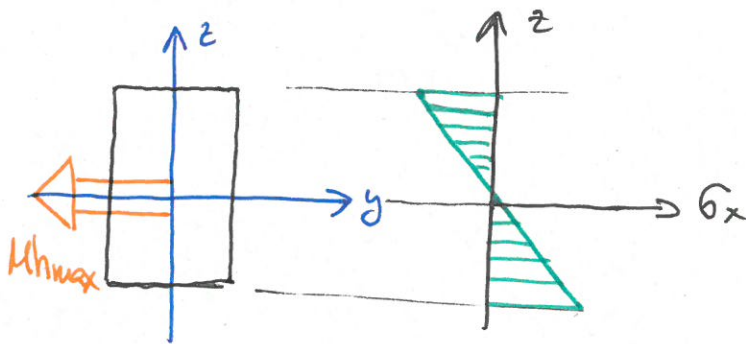
$$\frac{px^2}{2L} = \frac{pL}{2}$$

$$x^2 = L^2$$

$$\boxed{x = L}$$

Tehát a tartó felel van $M_{h,max}$!

$$M_{\max} = M_{H_1}(L) = -\frac{pL^2}{2} + \frac{pL^3}{8L} = -\frac{pL^2}{3}$$



$$\sigma(z) = \frac{M}{I_y} \cdot z = \frac{M_{\max}}{I_y} \cdot z$$

$$|\sigma_{\max}| \leq \sigma_{\text{meg}} \quad \text{Hercotae's!}$$

$$\left| \frac{M_{\max}}{K_y} \right| = \sigma_{\text{meg}} \rightarrow$$

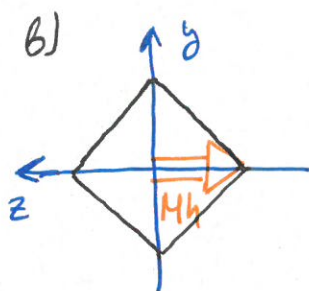
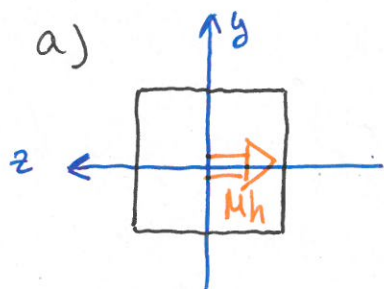
Az adott téglalap km re:

$$K_y = \frac{I_y}{b} = \frac{b \cdot (2b)^3}{12} = \frac{8b^4}{12} = \frac{2}{3}b^3$$

$$\left| \frac{M_{\max}}{K_y} \right| = \frac{pL^2}{3 \cdot \frac{2}{3}b^3} = \frac{pL^2}{2b^3} = \sigma_{\text{meg}}$$

$$p = \frac{\sigma_{\text{meg}} \cdot 2b^3}{L^2} = 2,778 \text{ N/mm} = \underline{\underline{2,778 \text{ kN/m}}}$$

6. feladat Tiszta hajlítással terhelt távtól keresztmetszete „a” oldalhosszúságú négyzet, a hajlítás tengelye z-tengely. Ha valahányszor a max. feszültség a keresztmetszetben, ha azt 45°-kal elforgatjuk?



a) eset

$$\sigma_{x \max_1} = \frac{M_h}{I_{z_1}} \cdot y_{\max_1} = \frac{6 M_h}{a^3}$$

$$I_{z_1} = \frac{a^4}{12}$$

$$y_{\max_1} = \frac{a}{2}$$

$$\rightarrow K_{z_1} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6}$$

b) eset

$$\sigma_{x \max_2} = \frac{M_h}{I_{z_2}} \cdot y_{\max_2} = \frac{6\sqrt{2} M_h}{a^3}$$

$$I_{z_2} = \frac{a^4}{12}$$

$$y_{\max_2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

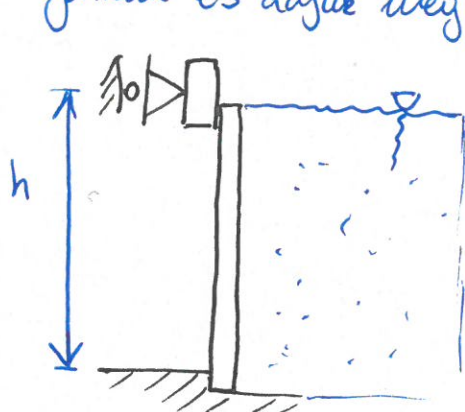
$$K_{z_2} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sigma_{x \max_2}}{\sigma_{x \max_1}} = \sqrt{2} = 1,414 \Rightarrow \underline{\underline{41,4\% - kal nőtt!}}$$

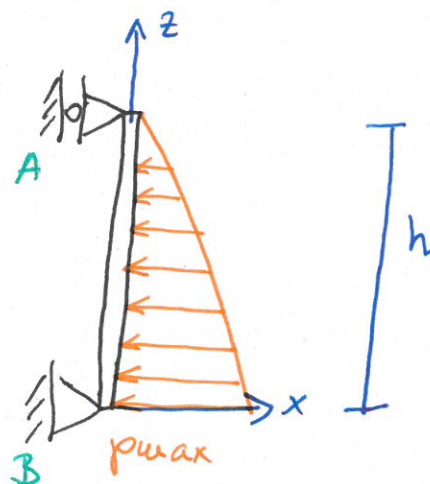
7. feladat

Az ábrán egy fa vizeskő gát modelleje látható!

A gát vastagsága $t = 12 \text{ cm}$, magassága 2 m . Hatalozzuk meg mekkora a hajlóból adódó maximális normáljeleltség a gátkon és adjuk meg a helyét!



Modell



Adatok

$$h = 2 \text{ m}$$

$$t = 12 \text{ cm}$$

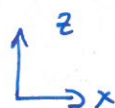
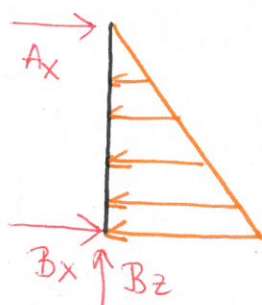
$$\rho_{\text{víz}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A hidrosztatikai nyomásból:

$$p_{\text{max}} = \rho_{\text{víz}} \cdot h \cdot L = 19620 \text{ L} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Reakciók



$$\sum F_x = 0: A_x + B_x - p_{\text{max}} \cdot \frac{h}{2} = 0$$

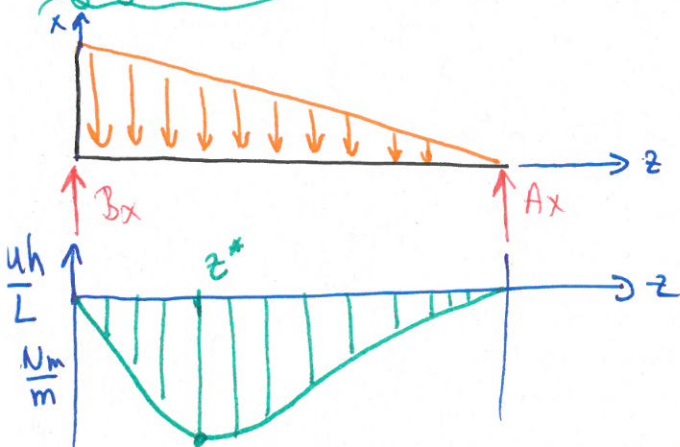
$$\sum F_z = 0: B_z = 0$$

$$\sum M_B = 0: -A_x \cdot h + p_{\text{max}} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} = 0$$

$$\hookrightarrow A_x = p_{\text{max}} \cdot \frac{h}{6} = \underline{\underline{6540 \text{ L}}}$$

$$\hookrightarrow B_x = p_{\text{max}} \cdot \frac{h}{2} - A_x = \underline{\underline{13080 \text{ L}}}$$

Hajlóbemutató



Függvények:

$$V(x) = -A_x - \frac{p_{\text{max}}}{h} \cdot (h-z) \cdot \frac{(h-z)}{2}$$

$$M_h(x) = -A_x(h-z) - \frac{p_{\text{max}}}{h} \cdot (h-z) \cdot \frac{(h-z)}{2} \cdot \frac{(h-z)}{3}$$

$$M_h(x) = [-1635z^3 + 3810z^2 - 13080z] \text{ L}$$

$$M_h(z^*) = M_{h\text{max}}$$

$$M_h'(z) = -V(z) = 0 =$$

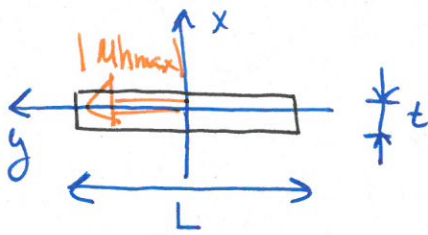
$$-V(z) = (-4905 z^2 + 19620 z - 13080)L = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{z_1 = 0,8453 \text{ m}} \quad \checkmark$$

$$\hookrightarrow z_2 = 3,154 \text{ m} \quad \text{⚡} \quad z \in [0, 2] \text{ m}$$

$$M_{h\max} = M_h(z^*) = \underline{\underline{-5034,5 L}}$$

A keresztmetszet



$$I_y = \frac{L \cdot t^3}{12}$$

$$x_{\max} = \frac{t}{2}$$

Navier - képlet :

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{h\max}}{I_y} \cdot x_{\max} = \frac{-5034,5 \cdot L}{\frac{L \cdot t^3}{12}} \cdot \frac{t}{2} = \underline{\underline{-2,1 \text{ MPa}}}$$