Szilárdságtan - 11.hét ①

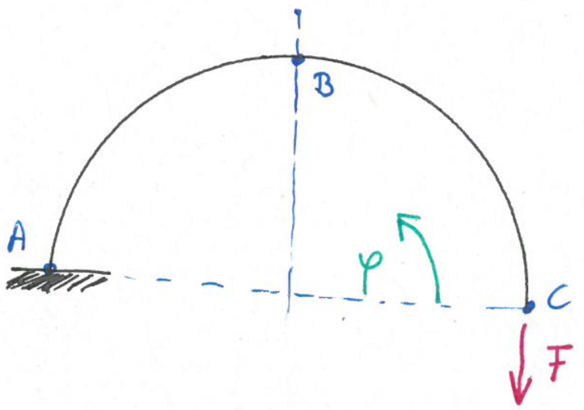
Példatár 7.1

Castigliano-tétel

1. feladat Határozzuk meg a végkeresztmetszet függőleges elmozdulását!

a) Az alakváltozási energia számításakor hanyagoljuk el a normál igénybevétel hatását

b) Vegyük figyelembe a normál igénybevétel hatását!



Írjuk fel az igénybevételi függvényeket φ koordináta segítségével!

$$N(\varphi) = F\cos\varphi$$

$$V(\varphi) = F\sin\varphi$$

$$M_h(\varphi) = FR(1-\cos\varphi)$$

a) eset $u \approx u^{M_h}$ → azaz u^N és u^V-t elhanyagoljuk

$$f = \frac{1}{IE}\int_{(l)} M_h \cdot \frac{\partial M_h}{\partial F}\, dl = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} M_h \frac{\partial M_h}{\partial F}\, \underbrace{R\,d\varphi}_{ds}$$

ds ⇒ elemi ívhossz

hossz mentén

$$\frac{\partial M_h}{\partial F} = R(1-\cos\varphi)$$

$$f = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} FR(1-\cos\varphi)\,R(1-\cos\varphi)\,R\,d\varphi$$

$$\delta = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} FR^3\left(1-2\cos\varphi+\underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}}\right)d\varphi = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} FR^3\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{IE}FR^3\left[\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{FR^3}{IE}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3\pi FR^3}{2IE}$$

Felhasználhatjuk, hogy $I = \frac{d^4\pi}{64} \Longrightarrow \delta = \frac{96FR^3}{d^4E}$

b) eset $U \approx U^{Mh} + U^{N}$

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \underbrace{\frac{\partial U^{Mh}}{\partial F}}_{\frac{96FR^3}{d^4E}} + \frac{\partial U^{N}}{\partial F}$$

$$\frac{\partial U^{N}}{\partial F} = \frac{1}{AE}\int_0^{\pi} N\frac{\partial N}{\partial F}R\,d\varphi = \frac{1}{AE}\int_0^{\pi} F\cos^2\varphi\,R\,d\varphi = \frac{1}{AE}\int_0^{\pi} FR\underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}}d\varphi$$

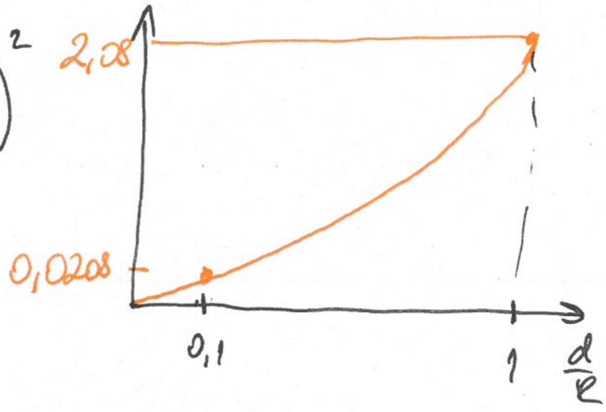
$$\frac{\partial N}{\partial F} = \cos\varphi \qquad = \frac{1}{AE}FR\left[\frac{1}{2}\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{FR\pi}{2AE} = \frac{2FR}{d^2E}$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4}$$

Behelyettesítve: $\delta = \underbrace{\frac{96FR^3}{d^4E}}_{\delta_{Mh}} + \underbrace{\frac{2FR}{d^2E}}_{\delta_N}$

Vizsgáljuk δ_N és δ_{Mh} arányát:

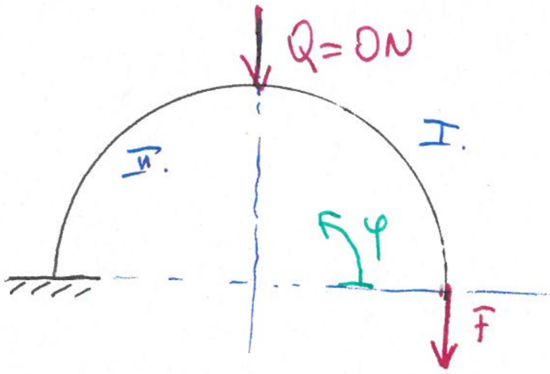
$$\frac{\delta_N}{\delta_{Mh}} = \frac{2\cancel{F}R}{\cancel{d^2}\cancel{E}}\cdot\frac{d^{4\,2}\cancel{E}}{96\cancel{F}R^{3\,2}} = \frac{1}{48}\left(\frac{d}{R}\right)^2$$



Példatár 7.2

2. feladat Számítsuk ki az előző feladatnál a B keresztmetszet elmozdulását és szögelfordulását! Az alakváltozási energiánál csak a hajlítást vegyük figyelembe!

a) Elmozdulás → vegyünk fel $Q = 0$ N erőt a B km-ben!



$$U \approx U^{M_h}$$

A hajlítónyomatéki igénybevételi fgv.:

- $M_{h_1}(\varphi) = FR(1-\cos\varphi)$
- $M_{h_2}(\varphi) = FR(1-\cos\varphi) + QR(-\cos\varphi)$

A B km lehajlása:

$$q = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{IE}\left[\int_0^{\pi/2} M_{h_1}\frac{\partial M_{h_1}}{\partial Q} R\,d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} M_{h_2}\frac{\partial M_{h_2}}{\partial Q} R\,d\varphi\right]$$

A deriváltak

$$\underline{\underline{\frac{\partial M_{h_1}}{\partial Q} = 0}}\ ; \qquad \underline{\underline{\frac{\partial M_{h_2}}{\partial Q} = -R\cos\varphi}}$$

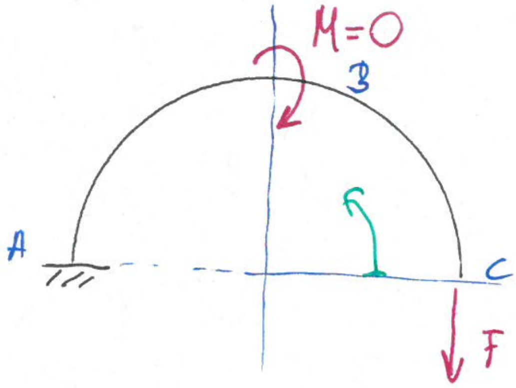
Behelyettesítve

$$q = \frac{1}{IE}\left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} FR(1-\cos\varphi)\cdot 0\cdot R\,d\varphi}_{=0} + \int_{\pi/2}^{\pi}\left[FR(1-\cos\varphi) + \underbrace{QR(-\cos\varphi)}_{=0}\right](-R\cos\varphi)R\,d\varphi\right]$$

$$= \frac{1}{IE}\int_{\pi/2}^{\pi} FR(1-\cos\varphi)(-R\cos\varphi)R\,d\varphi = \frac{1}{IE}\int_{\pi/2}^{\pi} FR^3(\underbrace{\cos^2\varphi}_{=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}} - \cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{IE}FR^3\left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} - \sin\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{FR^3}{IE}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 1\right) = \underline{\underline{\frac{FR^3}{IE}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)}}$$

b) elfordulás ⇒ B-be egy M = 0 Nm nyomatékot veszünk fel!



$U \approx U^{Mh}$

A hajlítónyomatéki igénybevétel:

- $M_{h1}(\varphi) = FR(1-\cos\varphi)$

  $\frac{\partial M_{h1}}{\partial M} = 0$

- $M_{h2}(\varphi) = FR(1-\cos\varphi) + M$

  $\frac{\partial M_{h2}}{\partial M} = 1$

A B-ben elfordulása:

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{1}{IE}\left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} M_{h1} \overset{\shortparallel}{\underset{0}{\frac{\partial M_{h1}}{\partial M}}} R\,d\varphi}_{=0} + \int_{\pi/2}^{\pi} M_{h2} \frac{\partial M_{h2}}{\partial M} R\,d\varphi\right]$$

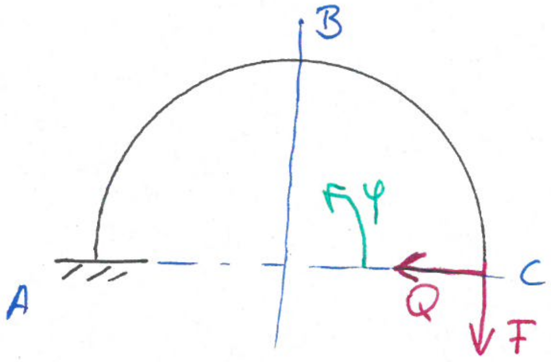
Behelyettesítve: $$\varphi = \frac{1}{IE}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(FR(1-\cos\varphi) + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{M}}\right)\cdot 1\, R\,d\varphi$$

$$\varphi = \frac{1}{IE}\int_{\pi/2}^{\pi} FR^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{IE}FR^2\left[\varphi - \sin\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{IE}FR^2\left[\pi - 0 - \frac{\pi}{2} + 1\right] = \underline{\underline{\frac{1}{IE}FR^2\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

Példatár 7.3

3. feladat Az előző példánál számítsuk ki a C keresztmetszet vízszintes elmozdulását! Az alakváltozási energiánál csak a hajlítást vegyük figyelembe!



A C km-ben nincs vízszintes erő ⇒ fel kell venni!

Hajlítónyomatéki igénybevételi fgv.

$$M_h(\varphi) = FR(1-\cos\varphi) + QR\sin\varphi$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial Q} = R\sin\varphi$$

A vízszintes elmozdulás:

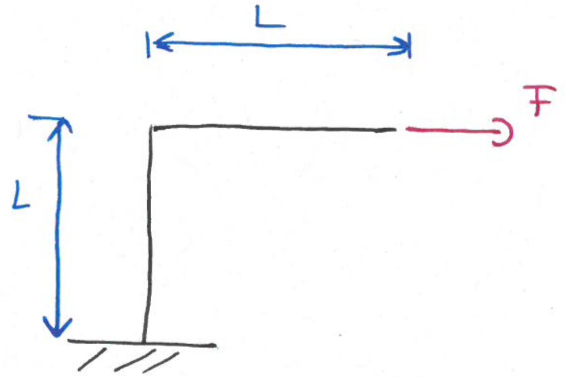
$$q = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} M_h \cdot \frac{\partial M_h}{\partial Q} R\,d\varphi = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi}\left(FR(1-\cos\varphi) + \overbrace{QR\sin\varphi}^{=0}\right) R\sin\varphi\, R\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} FR^3(1-\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{FR^3}{IE}\int_0^{\pi} \sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{FR^3}{IE}\left[-\cos\varphi - \frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{FR^3}{IE}\left[+1-0+1+0\right] = \underline{\underline{\frac{2FR^3}{IE}}}$$

Példatár 7.4

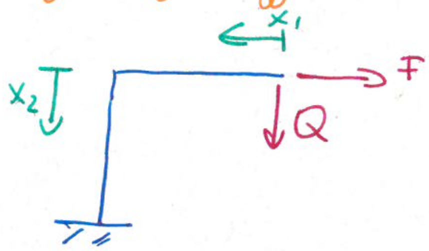
4. feladat Az alábbi kör keresztmetszetű törtvonalú tartó anyaga és keresztmetszete állandó a tartó hossza mentén. Határozzuk meg a végkeresztmetszet q lehajlását



Adatok:

$F = 100\,N$
$d = 30\,mm$
$E = 200\,GPa$
$L = 1\,m$

A függőleges lehajlás miatt végpontban fel egy $Q=0$ erőt!



Igénybevételi függvények

$N_1(x_1) = F \qquad N_2(x_2) = -Q$

$V_1(x_1) = Q \qquad V_2(x_2) = F$

$M_{h1}(x_1) = Q\,x \qquad M_{h2}(x_2) = F x_2 + Q \cdot L$

$$U = U^N + \underbrace{U^V}_{\approx 0} + U^{Mh} \approx U^N + U^{Mh}$$

A deriváltak: $\dfrac{\partial N_1}{\partial Q} = 0 \; ; \; \dfrac{\partial M_{h1}}{\partial Q} = x$

$$\frac{\partial N_2}{\partial Q} = -1 \; ; \; \frac{\partial M_{h2}}{\partial Q} = L$$

A lehajlás:

$$q = \frac{\partial U_N}{\partial Q} + \frac{\partial U_{Mh}}{\partial Q} = \frac{1}{AE}\left[\int_0^L N_1 \frac{\partial N_1}{\partial Q}\,dx_1 + \int_0^L N_2 \frac{\partial N_2}{\partial Q}\,dx_2\right] +$$

$$+ \frac{1}{IE}\left[\int_0^L M_{h1} \frac{\partial M_{h1}}{\partial Q}\,dx_1 + \int_0^L M_{h2} \frac{\partial M_{h2}}{\partial Q}\,dx_2\right]$$

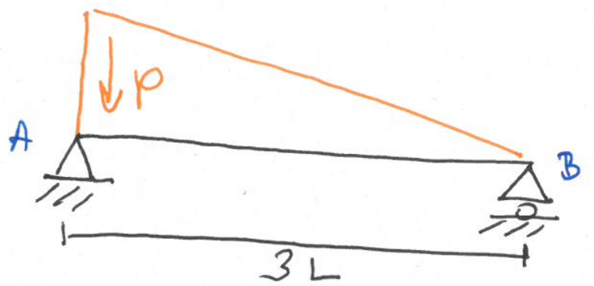
$$q = \frac{1}{AE}\underbrace{\left[\int_0^L 0\,dx_1 + \int_0^L \underbrace{(-Q)}_{=0}(-1)\,dx_2\right]}_{=0} + \frac{1}{IE}\left[\int_0^L \underbrace{Q}_{0} x_1^2\,dx_1 + \int_0^L F x_2 L + \underbrace{Q}_{0} L^2\,dx_2\right]$$

$$q = \frac{1}{IE}\int_0^L F L x_2\,dx_2 = \frac{1}{IE}\left[F L \frac{x_2^2}{2}\right]_0^L = \underline{\underline{\frac{F L^3}{2IE}}} = \underline{\underline{6{,}29\,\text{mm}}}$$

$$IE = \frac{d^4 \pi}{64} \cdot E = 7{,}9521 \cdot 10^9\ \text{Nmm}$$

Példatár 7.5

5. feladat Határozzuk meg az alábbi kéttámaszú tartónak a keresztmetszet szögelfordulását a B helyen. A tartó keresztmetszete „a" élhosszúságú négyzet.



Adatok:

$p = 2\ kN/m$

$a = 20\ mm$

$E = 200\ GPa$

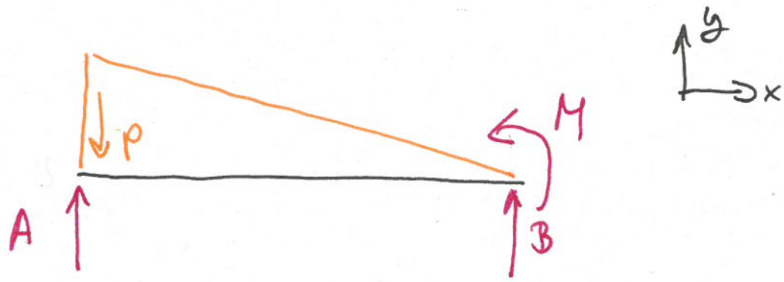
$L = 0{,}5\ m$

1) Reakciók kifejezése

Mivel a B pontban kell szögelfordulást számolni

⇓ vegyünk fel oda $M=0$ nyomatékot!

SZTÁ



Egyensúlyi egyenletek

$$\Sigma F_x = 0: \quad 0 = 0$$

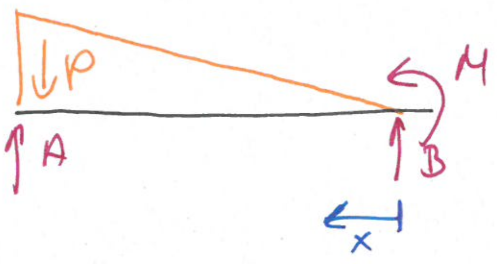
$$\Sigma F_y = 0: \quad A + B - \frac{p \cdot 3L}{2} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad B \cdot 3L + M - \frac{p \cdot 3L}{2} \cdot L = 0$$

$$\hookrightarrow B = \frac{\frac{p \cdot 3L^2}{2} - M}{3L} = \frac{pL}{2} - \frac{M}{3L}$$

$$\hookrightarrow A = \frac{p \cdot 3L}{2} - B = pL + \frac{M}{3L}$$

Igénybevételi függvények



Indítsuk x-koordinátát jobbról!

$$N(x) = 0$$

$$V(x) = -B + \frac{p}{3L}\cdot\frac{x^2}{2} = -\frac{pL}{2} + \frac{M}{3L} + \frac{p}{6L}x^2$$

$$M_h(x) = -M - Bx + \frac{p}{3L}\cdot x\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3} = -M + \frac{M}{3L}x - \frac{pLx}{2} + \frac{px^3}{18L}$$

$$U = \underbrace{U^N}_{=0} + \underbrace{U^V}_{\approx 0} + U^{Mh} + \underbrace{U^{Mt}}_{=0} \approx U^{Mh}$$

$$\varphi = \frac{\partial U^{Mh}}{\partial M} = \frac{1}{IE}\int_{(l)} M_h \cdot \frac{\partial M_h}{\partial M}\, dl = \frac{1}{IE}\int_0^{3L} M_h \cdot \frac{\partial M_h}{\partial M}\cdot dx$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial M} = -1 + \frac{x}{3L} =$$

Behelyettesítve: $\varphi = \frac{1}{IE}\int_0^{3L}\Big(\underbrace{-M + \frac{M}{3L}x}_{\text{felhasználjuk, hogy } M=0} - \frac{pLx}{2} + \frac{px^3}{18L}\Big)\Big(-1 + \frac{x}{3L}\Big)\, dx =$

$$= \frac{1}{IE}\int_0^{3L}\left(-\frac{pLx}{2} + \frac{px^3}{18L}\right)\left(\frac{x}{3L} - 1\right)dx = \frac{1}{IE}\int_0^{3L}\left(\frac{Lpx}{2} - \frac{px^2}{6} - \frac{px^3}{18L} + \frac{px^4}{54L^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{IE}\left[\frac{Lpx^2}{4} - \frac{px^3}{18} - \frac{px^4}{72L} + \frac{px^5}{270L^2}\right]_0^{3L} = \underline{\underline{\frac{21}{40}\,\frac{L^3 p}{IE}}} = 0{,}0492 \text{ rad}$$

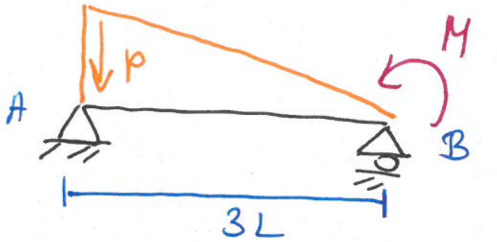
$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{\varphi = 2{,}82^\circ}}$$

Nálunk: $IE = \frac{a^4}{12}\cdot E = 2{,}667\cdot 10^9\ \text{Nmm}^2$

Példatár 7.6

6. feladat Mekkora koncentrált nyomatékot kell a B pontban alkalmazni, hogy a kar elfordulása zérus legyen?



Adatok

$p = 2\ \mathrm{kN/m}$

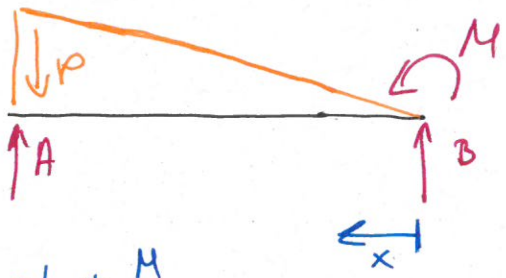
$a = 20\ \mathrm{mm}$

$E = 200\ \mathrm{GPa}$

$L = 0{,}5\ \mathrm{m}$

Reakciók, igénybevételi függvek: (lásd előző feladat)

$U \approx U^{Mh}$



$$A = pL + \frac{M}{3L}$$

$$B = \frac{pL}{2} - \frac{M}{3L}$$

$$N(x) = 0$$

$$V(x) = -Bx + \frac{p}{3L}\frac{x}{2}^2 = \frac{M}{3L}x - \frac{pL}{2}x + \frac{px^2}{6L}$$

$$M_h(x) = -M - Bx + \frac{p}{3L}\cdot x\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}$$

$$M_h(x) = -M + \frac{M}{3L}x - \frac{pL}{2}x + \frac{px^3}{18L}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial M} = -1 + \frac{x}{3L}$$

Most M ismeretlen!

de tudjuk, hogy

$$\boxed{\varphi = \frac{\partial U^{Mh}}{\partial M} = 0}$$

$$\varphi = \frac{1}{IE}\int_0^{3L}\left(-M + \left(\frac{M}{3L} - \frac{pL}{2}\right)x + \frac{px^3}{18L}\right)\left(-1 + \frac{x}{3L}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{IE}\int_0^{3L} M + \left(\frac{pL}{2} - \frac{M}{3L} - \frac{M}{3L}\right)x + \left(\frac{M}{9L^2} - \frac{p}{6}\right)x^2 - \frac{px^3}{18L} + \frac{px^4}{54L^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{IE}\left[Mx + \frac{\left(\frac{pL}{2} - \frac{2M}{3L}\right)}{2}x^2 + \left(\frac{M}{9L^2} - \frac{p}{6}\right)\frac{x^3}{3} - \frac{px^4}{72L} + \frac{px^5}{270L^2}\right]_0^{3L} = \boxed{LM + \frac{21pL^3}{40} = 0}$$

Tehát az alakváltozási feltételből $\varphi_B = 0$

↳ $$\boxed{LM - \frac{21\, p L^3}{40} = 0}$$

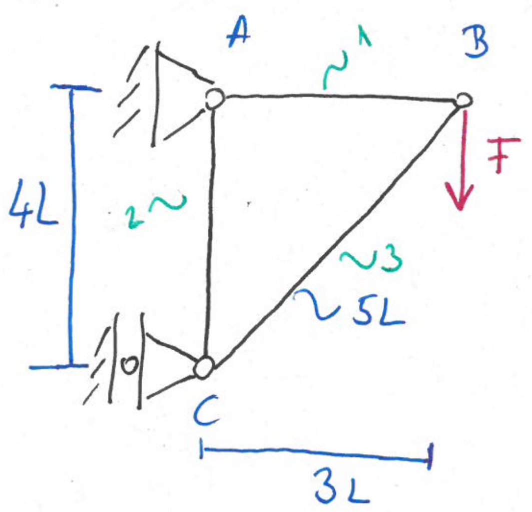
↳ Megoldva: $M = \frac{-21\, p L^2}{40} = \underline{\underline{-262{,}5\ \mathrm{Nm}}}$

↓

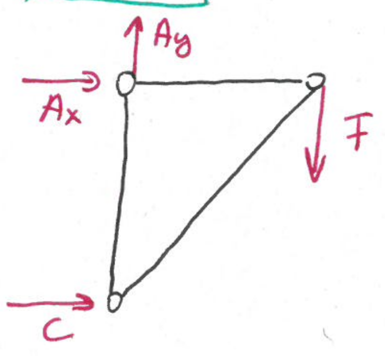
a negatív előjel azt jelenti, hogy a felvettel ellentétes irány!

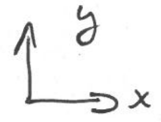
7. feladat

Az alábbi rácsos szerkezetben a rudak keresztmetszete és anyagtulajdonsága azonos. Határozza meg a B-ben függőleges elmozdulását!



Reakciók





Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0$: $A_x + C = 0$

$\sum F_y = 0$: $A_y - F = 0$

$\sum M_A = 0$: $-F\,3L + C \cdot 4L = 0$

$\hookrightarrow A_y = F$

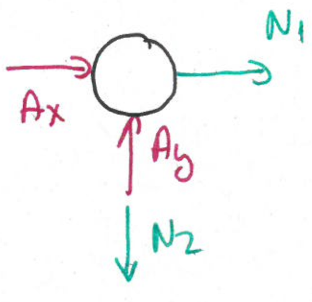
$\hookrightarrow C = \frac{3}{4} F$

$\hookrightarrow A_x = -\frac{3}{4} F$

Csuklós szerkezet → húzott/nyomott rudak

↳ Csomóponti módszer

„A"



$\sum F_x = 0$ $A_x + N_1 = 0$

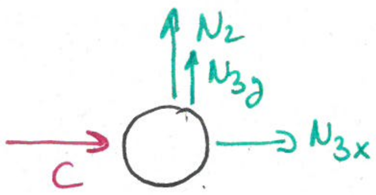
$\hookrightarrow N_1 = -A_x = \underline{\underline{\frac{3}{4} F}}$ húzott

$\sum F_y = 0$ $A_y - N_2 = 0$

$\hookrightarrow \underline{\underline{N_2 = A_y = F}}$ húzott

13

„C"-csukló



$\Sigma F_x = 0: \quad C + N_{3x} = 0$

$\hookrightarrow N_{3x} = -C = -\frac{3}{4}F$

$\Sigma F_y = 0: \quad N_2 + N_{3y} = 0$

$\hookrightarrow N_{3y} = -N_2 = -F$

$N_3 \Rightarrow$ nyomott

$$N_3 = -\sqrt{N_{3x}^2 + N_{3y}^2} = -\frac{5}{4}F$$

Most csak U^N komponens ébred

$$U = U^N = U^{N_1} + U^{N_2} + U^{N_3}$$

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial U^{N_1}}{\partial F} + \frac{\partial U^{N_2}}{\partial F} + \frac{\partial U^{N_3}}{\partial F}$$

Ehhez kell: $\quad \frac{\partial N_1}{\partial F} = \frac{3}{4}; \quad \frac{\partial N_2}{\partial F} = 1; \quad \frac{\partial N_3}{\partial F} = -\frac{5}{4}$

$$\delta = \frac{1}{AE}\left[\int_0^{3L} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial F}\,dx_1 + \int_0^{4L} N_2 \frac{\partial N_2}{\partial F}\,dx_2 + \int_0^{5L} N_3 \frac{\partial N_3}{\partial F}\,dx_3\right]$$

$$\delta = \frac{1}{AE}\left[\int_0^{3L} \frac{9}{16}F\,dx_1 + \int_0^{4L} F\,dx_2 + \int_0^{5L} \frac{25}{16}F\,dx_3\right] = \frac{1}{AE}\left(\frac{27}{16}FL + 4FL + \frac{125}{16}FL\right)$$

$$\boxed{\delta = \frac{27FL}{2AE}}$$

Második megoldás

↳ Mivel csak 1db F – δ kapcsolat van

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} F \cdot \delta}$$

A rudakban tárolt rugalmas energia:

$$U = \int_0^{3L} \frac{N_1^2}{2AE}\, dx_1 + \int_0^{4L} \frac{N_2^2}{2AE}\, dx_2 + \int_0^{5L} \frac{N_3^2}{2AE}\, dx_3 =$$

$$= \int_0^{3L} \frac{9F^2}{32AE}\, dx_1 + \int_0^{4L} \frac{F^2}{2AE}\, dx_2 + \int_0^{5L} \frac{25F^2}{32AE}\, dx_3 = \underbrace{\left(\frac{27}{32} + 2 + \frac{125}{32}\right)}_{\frac{27}{4}} \frac{F^2 L}{AE}$$

Azaz: $\boxed{U = \frac{27}{4} \frac{F^2 L}{AE}}$

Mivel: $U = W \Longrightarrow \frac{1}{2} F\delta = \frac{27}{4} \frac{F^2 L}{AE}$

↳ $\boxed{\delta = \frac{27}{2} \frac{FL}{AE}}$