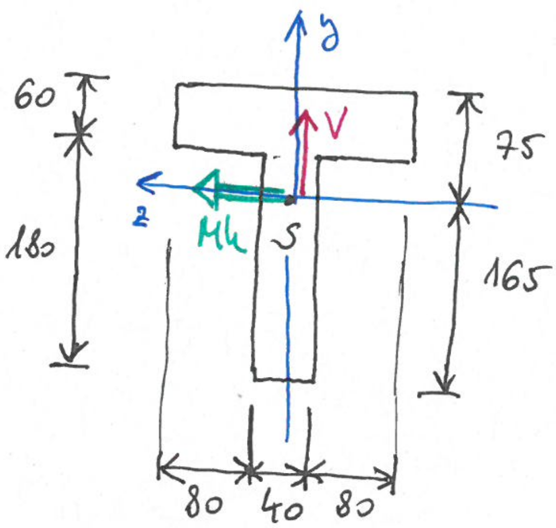
FIGYELEM, A Példatár a 1.19-1.21-es feladatai a pdf második felében találhatóak!

Szilárdságtan - 4. gyakorlat

Nyírásból származó csúsztatófeszültség
kör keresztmetszetű rudak csavarása

Példatár 1.22

1. feladat Az alábbi T-szelvényt terheli $\underline{M}_h = 20\,\underline{k}$ kNm hajlítónyomaték és $\underline{V} = 50\,\underline{j}$ kN nyíróerő. Írjuk fel a hajlításból származó normálfeszültség-eloszlást leíró $\sigma(y)$ függvényt, valamint a csúsztatófeszültséget leíró $\tau(y)$ függvényt! Adjuk meg a maximális értékeket!



Adatok:

$I_z = 8784\ \text{cm}^4$

$M_h = 20\ \text{kNm}$

$V = 50\ \text{kN}$

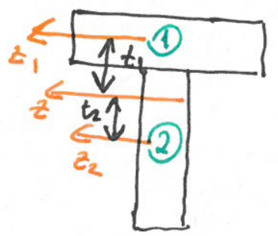
Másodrendű nyomaték a z-tengelyre!

$$I_z = I_{z1} + I_{z2}$$

$$I_{z_1} = \frac{200 \cdot 60^3}{12} + t_1^2 A_1 = 27\,900\,000\ \text{mm}^4$$

$$I_{z_2} = \frac{40 \cdot 180^3}{12} + t_2^2 A_2 = 59\,940\,000\ \text{mm}^4$$

$$\underline{\underline{I_z = 87\,840\,000\ \text{mm}^4}}$$



$A_1 = 60 \cdot 200 = 12000\ \text{mm}^2$

$A_2 = 40 \cdot 180 = 7200\ \text{mm}^2$

Steiner-taghoz az eltolások

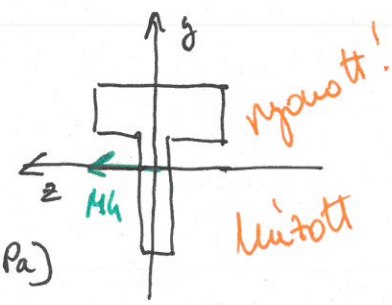
$t_1 = 75 - 30 = 45\ \text{mm}$

$t_2 = 165 - 90 = 75\ \text{mm}$

Hajlításból ⟶ Normálfeszültség

$$\sigma(y) = -\frac{M_h}{I_z}\, y = -0{,}2277\, y\ \text{(MPa)}$$

(mm)



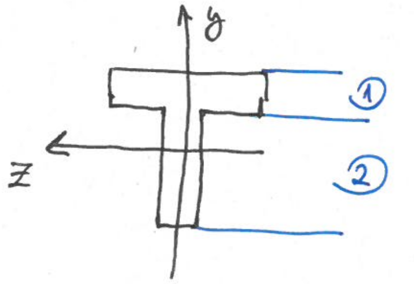
Nyírásból → Csúsztatófeszültség

⇓ VISA-képlet

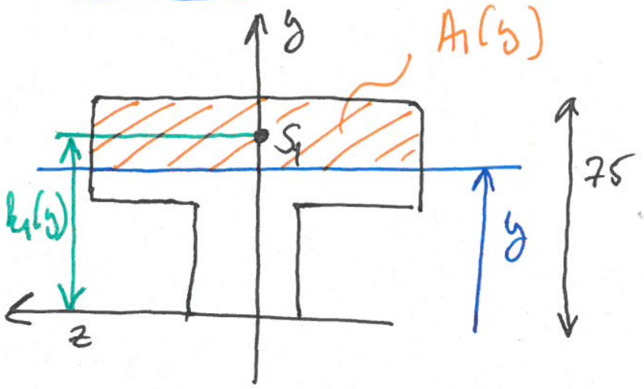
mivel a húsvastagságban ugrás van ⇒ 2 szakaszt kell nézni

① $15 < y < 75$

② $-165 < y < 15$



①. szakasz



$a_1(y) = 200$ mm (húsvastagság)

$S_1(y) = \underbrace{A_1(y)}_{\text{terület}} \cdot \underbrace{k_1(y)}_{\text{súlypont}}$ ← statikai nyomaték

$A_1(y) = 200 \cdot (75 - y)$

$k_1(y) = \frac{1}{2}(75 + y)$

Ebből:

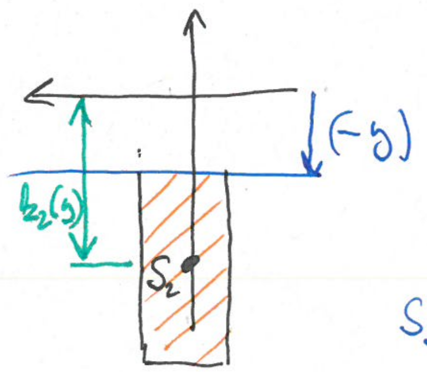
$S_1(y) = 562500 - 100y^2$

A feszültségeloszlás:

$$\tau_1(y) = \frac{V}{I_z} \cdot \frac{S_1(y)}{a(y)} = 1{,}6009 - 0{,}000285\, y^2 \ \text{(MPa)}$$

(mm)

② szakasz (most ezt lentről nézzük)



$a_2(y) = 40$ mm

$A_2(y) = 40 \cdot (165 - (-y)) = 40(165 + y)$

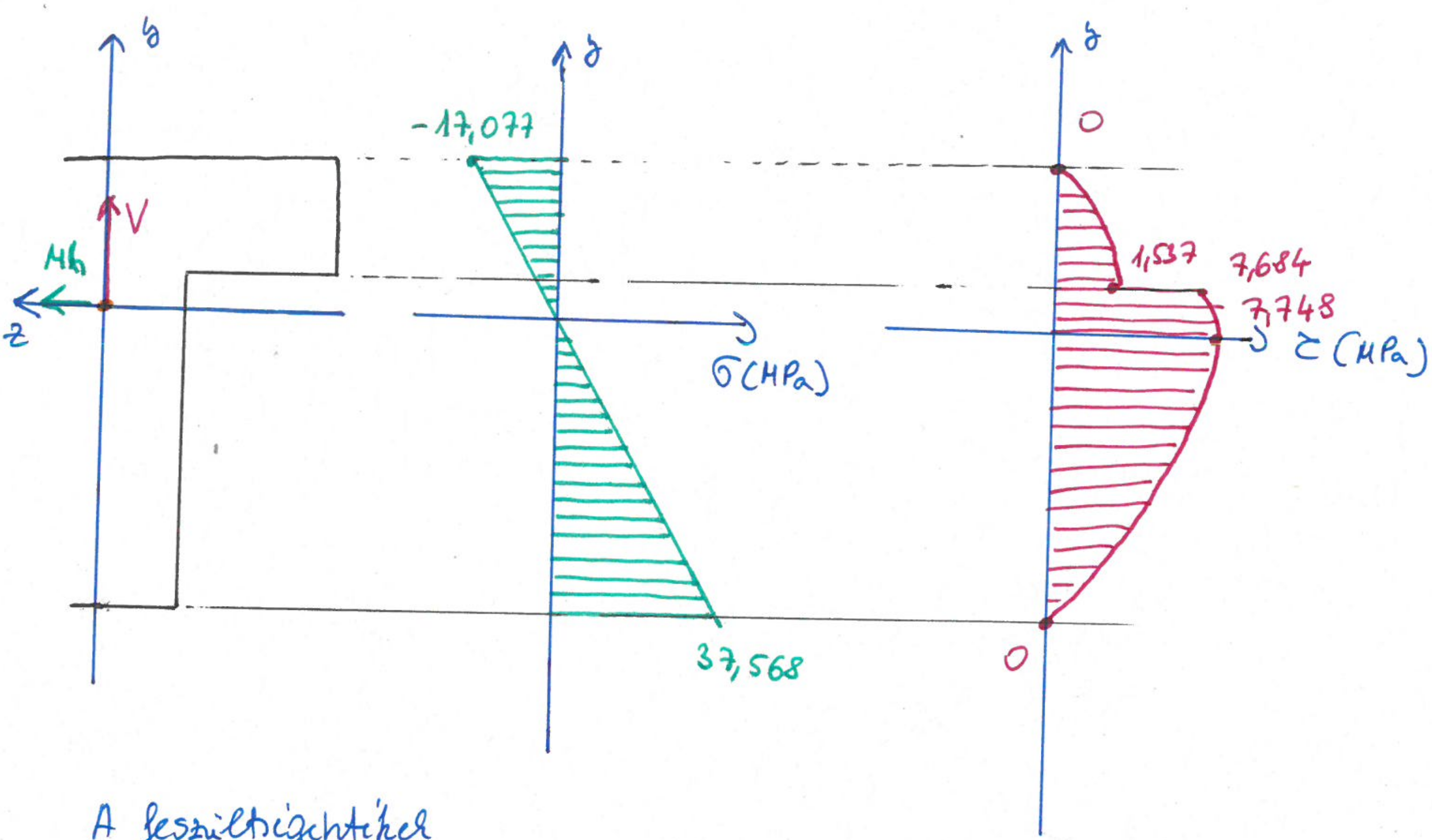
$k_2(y) = \frac{1}{2}(165 + (-y)) = \frac{1}{2}(165 - y)$

$S_2(y) = A_2(y) \cdot k_2(y) = 544500 - 20y^2$

$$\tau_2(y) = \frac{V}{I_z} \cdot \frac{S_1(y)}{a(y)} = 7{,}7485 - 0{,}000285\, y^2 \ \text{(MPa)}$$

(mm)

A feszültségeloszlások



A feszültségértékek

$\sigma(75) = -17{,}077$ MPa → felső szál

$\sigma(0) = 0$ MPa → súlypont

$\sigma(-165) = 37{,}568$ → alsó szál → σ_{max}

$\tau_1(75) = 0$ MPa → felső szál

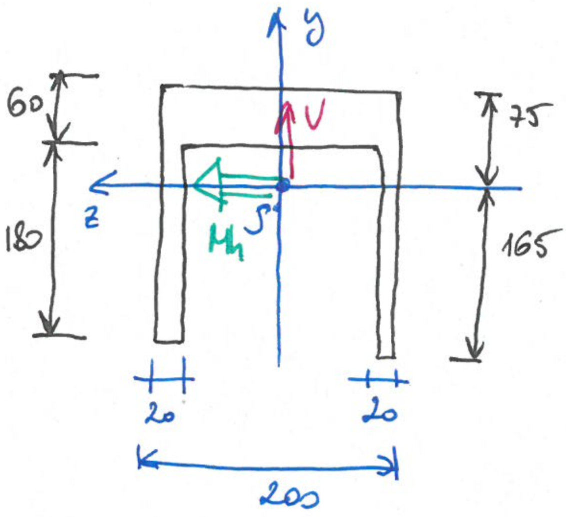
$\tau_1(15) = 1{,}537$ MPa → T csatlakozás felülről

$\tau_2(15) = 7{,}684$ MPa → T csatlakozás alulról

$\tau_2(0) = 7{,}748$ MPa → súlypont → τ_{max}

$\tau_2(-165) = 0$ MPa

2. feladat Az alábbi U-szelvényt $\underline{M_h} = 20\,\underline{k} \cdot$ kNm hajlítónyomaték és $\underline{V} = 50\,\underline{j}$ kN nyíróerő terheli. Írjuk fel a $\sigma(y)$ és $\tau(y)$ függvényeket, valamint a feszültségmaximumokat!



Adatok

$I_z = 8784\ cm^4$

$M_h = 20\ kNm$

$V = 50\ kN$

$\Downarrow$

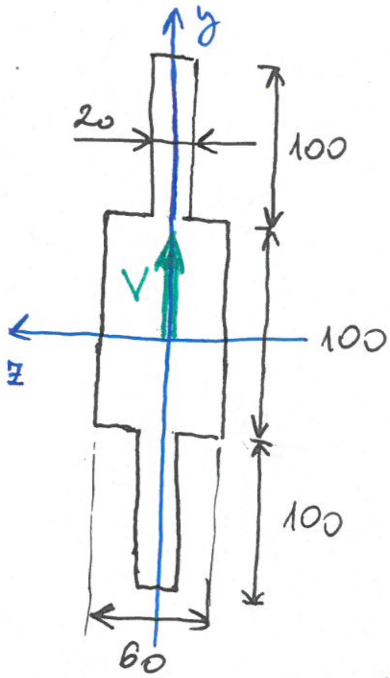
Ez az U-szelvény átrendezhető az 1-es feladatban szereplő T-szelvénnyé, ha az U-szárait középre toljuk!

Ez sem a Navier-képletben, sem a VISA-képletben nem okoz változást

$\Downarrow$

a megoldás menete és minden értéke megegyezik az 1-es feladatban szereplő értékekkel!

3. feladat Az ábrán látható keresztmetszet terhelése 20 kN nagyságú nyíró igénybevétel. Határozza meg a csúsztatófeszültség eloszlást leíró $\tau(y)$ függvényt és annak maximumát!



Adatok:

$V = 20\ kN$

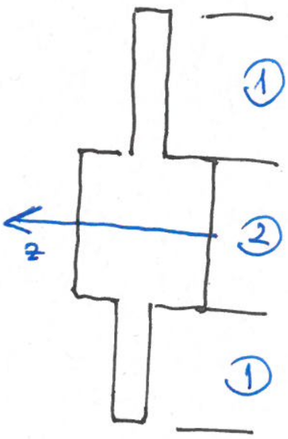
Kérdés: $\tau(y) = ?$

$\tau_{max} = ?$

- Keresztmetszet másodrendű nyomatéka a z-tengelyre:

$$I_z = \frac{20 \cdot 300^3}{12} + 2 \cdot \frac{20 \cdot 100^3}{12} = 48\,333\,333\ mm^4$$

A csúsztató feszültség eloszláshoz 2 szakaszra kell bontani a szelvényt!

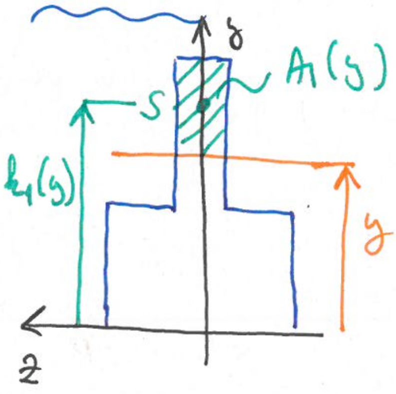


① $-150 < y < -50$ és $50 < y < 150$

② $-50 < y < 50$

Szimmetria miatt elég $y > 0$ esettel foglalkozni!

① es rész:



$a_1(y) = 20\ mm$ (húrvastagság)

$A_1(y) = 20 \cdot (150 - y)$

$k_1(y) = \frac{1}{2}(150 + y)$

$S_1(y) = A_1(y) \cdot k_1(y) = 225000 - 10y^2$

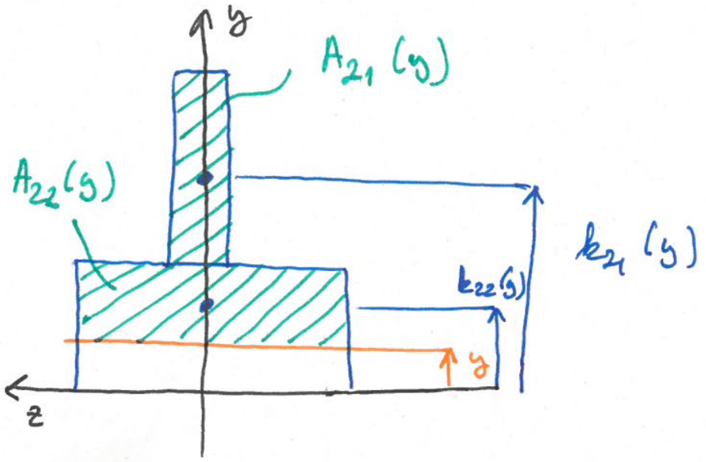
↳ Az elhagyott keresztmetszet statikai nyomatéka

A feszültségeloszlás

$$\tau_1 = \frac{V}{I_z} \cdot \frac{S_1(y)}{a_1(y)} = 4{,}655 - 0{,}0002069\, y^2 \ [\mathrm{MPa}]$$

(mm)

2-es rész



$a_2(y) = 60$ mm

$S_2(y) = A_{21}(y) \cdot k_{21}(y) + A_{22}(y) \cdot k_{22}(y)$

$A_{21}(y) = 20 \cdot 100 = 2000\ \mathrm{mm}^2$

$k_{21}(y) = 100$ mm

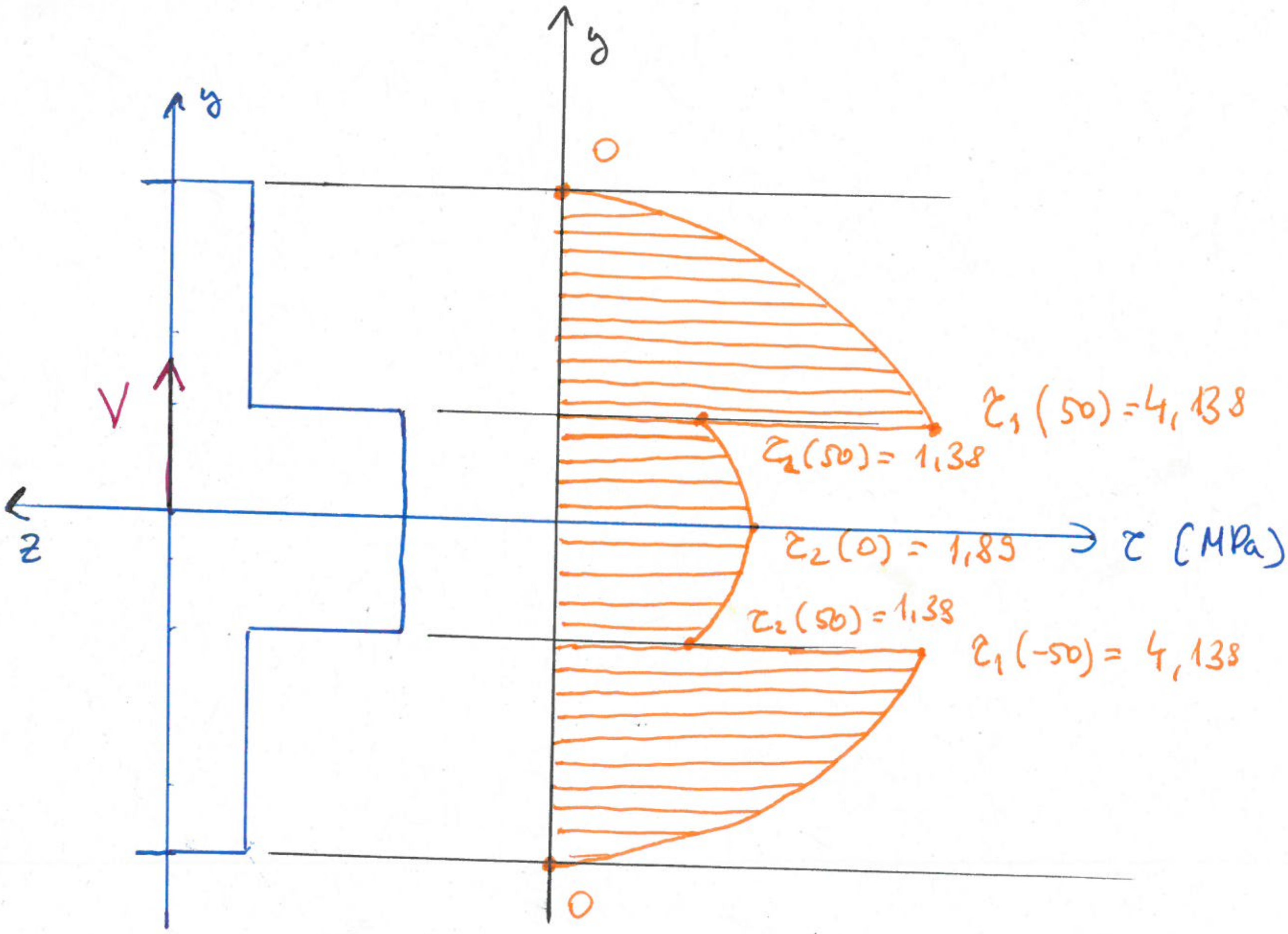
$A_{22}(y) = 60 \cdot (50 - y)$

$k_{22}(y) = \frac{1}{2}(50 + y)$

$S_2(y) = 275000 - 30y^2$

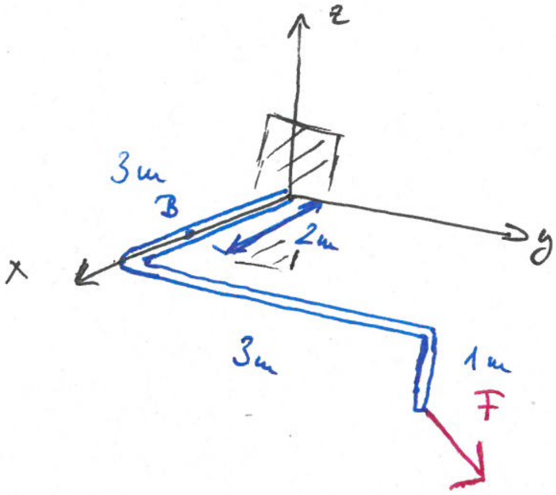
$$\tau_2(y) = \frac{V}{I_z} \cdot \frac{S_2(y)}{a_2(y)} = 1{,}8966 - 0{,}0002069\, y^2 \ [\mathrm{MPa}]$$

(mm)



Példatár 1.19

4. feladat Egy 50 mm átmérőjű kör keresztmetszetű törtvonalú tartót mutat az ábra, amelynek vége az origóban be van fogva. A tartó terhelése a szabad végén működő koncentrált erő. Határozzuk meg a B keresztmetszetben a csavarásból adódó csúsztatófeszültség eloszlást!



Adatok

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ -200 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$d = 50$ mm

Számítsuk ki a redukált nyomatékot a B pontban:

$$\underline{M}_B = \underline{r}_{BF} \times \underline{F}$$

$$\underline{r}_{BF} = \underline{r}_F - \underline{r}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ m}$$

Ebből:

$$\underline{M}_B = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 300 & 400 & -200 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -100 \\ -500 \end{bmatrix} \text{ Nm} \Longrightarrow$$ Ez csavaró és hajlító nyomaték is.

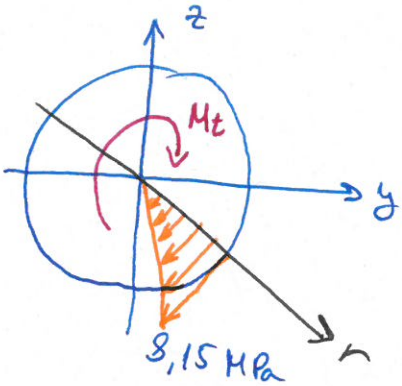
↳ $M_t = \underline{M}_B \cdot \underline{i} = \underline{\underline{-200 \text{ Nm}}}$ ← ez a csavaró komponens!

A poláris másodrendű nyomaték: $I_p = \dfrac{d^4 \pi}{32} = 613\,592 \text{ mm}^4$

A fesz. eloszlás:

$$\tau(r) = \frac{|M_t|}{I_p} \cdot r = 0{,}326\, \overset{(\text{mm})}{r} \text{ (MPa)}$$

A feszültségeloszlás:

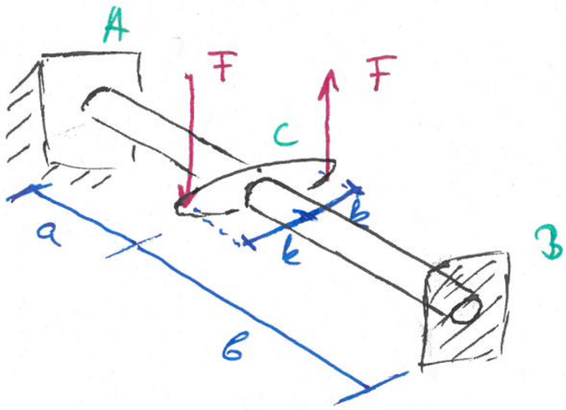


$$\tau_{max} = \frac{|M_t|}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \underline{\underline{8,15\ MPa}}$$

A keresztmetszeti tényező bevezetésével: $K_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{d^3 \pi}{16} = \underline{\underline{24543,7\ mm^3}}$

$$|\tau_{max}| = \frac{|M_t|}{K_p} = \underline{\underline{8,15\ MPa}}$$

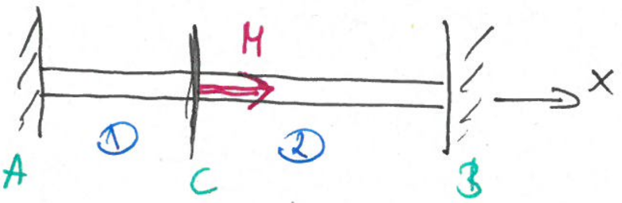
5. feladat Egy kör keresztmetszetű tömör tengely két vége be van fogva, terhelése az ábrán látható. Határozzuk meg a reakciónyomatékokat! Méretezzük a tengelyt, ha $\tau_{meg} = 100$ MPa! Mekkora a C keresztmetszet A-hoz képesti elcsavarodási szöge?



Adatok:
$F = 3$ kN
$k = 50$ mm
$a = 400$ mm
$b = 600$ mm
$E = 70$ GPa
$\nu = 0{,}34$

A C pontban csavarónyomaték: $M = 2 \cdot F \cdot k = 300$ Nm

↓ egyszerűsített ábra



Reakciók:

SZTA

$\Sigma M_t = 0 \qquad M_A + M + M_B = 0$

↳ 2 ismeretlen!

Kell még egy egyenlet:

↳ Alakváltozási feltétel:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

teljes szögelfordulás az ①es szakaszon

a ②es szakaszon

- $M_{t_1}(x) = -M_A$
- $M_{t_2}(x) = -M_A - M$

$$\varphi_1 = \frac{M_{t_1} \cdot a}{I_p \cdot G}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{t_2} \cdot b}{I_p \cdot G}$$

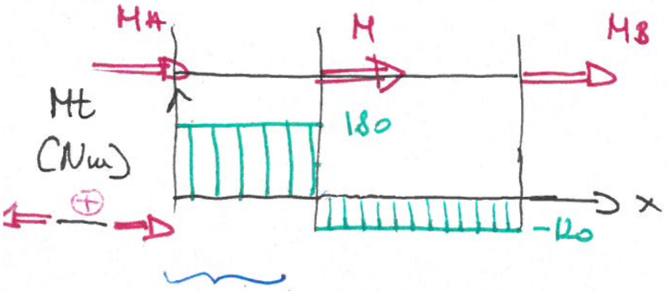
Visszaírva:

$$\frac{M_{t_1} \cdot a}{I_p \cdot G} + \frac{M_{t_2} \cdot b}{I_p \cdot G} = 0$$

$$\frac{-M_A \cdot a}{I_p \cdot G} + \frac{-(M_A + M) \cdot b}{I_p \cdot G} = 0$$

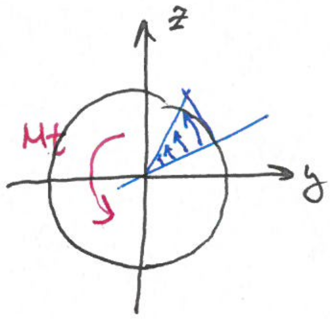
$$M_A (a+b) = -M \cdot b \implies M_A = -\frac{b}{a+b} M_1 = -180 \text{ Nm}$$

Az egyensúlyi egyenletből: $M_B = -M_A - M = -120 \text{ Nm}$



vesz. km $\quad M_{t\,max} = 180 \text{ Nm}$

A-km:



Méretezés: $\quad |\tau_{max}| \le \tau_{meg}$

$$K_p = \frac{d^3 \pi}{16}$$

$$\frac{M_{t\,max}}{K_{p\,min}} = \tau_{meg}$$

$$K_{p\,min} = \frac{M_{t\,max}}{\tau_{meg}}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_{t\,max}}{\pi \cdot \tau_{meg}}} = 20{,}93 \text{ mm}$$

$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = 18836{,}1 \text{ mm}^4$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 26{,}92 \text{ GPa}$$

A C pont elfordulása

$$\varphi_1 = \frac{M_{t_1} \cdot a}{I_p \cdot G} = 0{,}1464 \text{ rad} = 8{,}38^\circ$$

Példatár 1.21

6. feladat

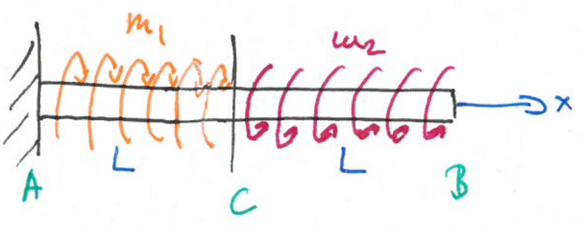
Egy befogott tartó terhelése az alábbi ábrán látható megoszló csavaró nyomatékrendszer. A megengedett csúsztatófesz. $\tau_{meg} = 150$ MPa, a csúsztató rugalmassági modulusz $G = 70$ GPa.

Méretezzük a tartót:

a) tömör kör keresztmetszetre

b) körgyűrű km-re, ha a belső átmérő 60%-a a külsőnek!

Ábrázoljuk a keresztmetszetek elcsavarodását a befogáshoz képest a rúd hossza mentén a tömör keresztmetszet esetén!



Adatok:

$m_1 = 500 \ \frac{Nm}{m}$

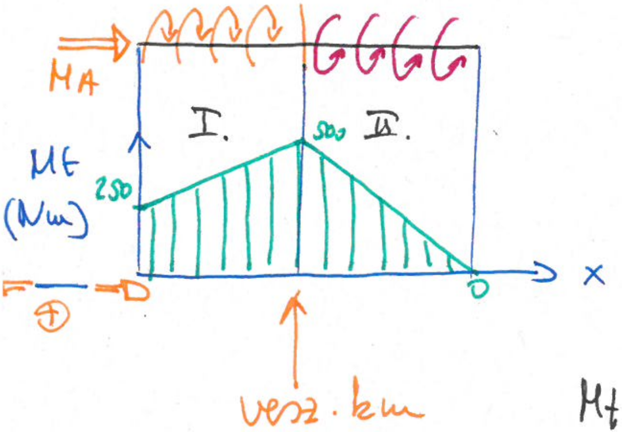
$m_2 = 1000 \ \frac{Nm}{m}$

$L = 0{,}5$ m

$\tau_{meg} = 150$ MPa

$G = 70$ GPa

Reakciók:



$$\sum M_t = 0: \quad M_A - m_1 \cdot L + m_2 \cdot L = 0$$

$$M_A = -m_2 L + m_1 \cdot L = \underline{\underline{-250 \ Nm}}$$

$$M_{t_1} = -M_A + m_1 \cdot x = 250 + 500x$$

$$M_{t_2} = -M_A + m_1 L - m_2 (x - L) = 1000 - 1000x$$

$$M_{t\,max} = \underline{\underline{500 \ Nm}}$$

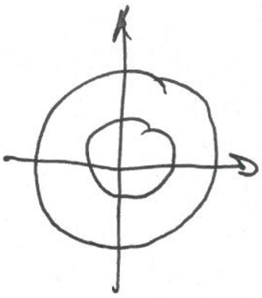
a) Tömör kör:

$$K_p = \frac{d_1^3 \pi}{16}$$

$$|\tau_{max}| \le \tau_{meg}$$

$$\frac{M_{t\,max}}{K_{p\,min}} = \tau_{meg} \longrightarrow d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t\,max}}{\pi \cdot \tau_{meg}}} = \underline{\underline{25{,}7 \ mm}}$$

b) Körgyűrű



$$I_p = \frac{d_2^4\pi}{32} - \frac{(0{,}6d_2)^2\pi}{32} = \frac{17}{625}d_2^4\pi$$

$$K_{p_2} = \frac{I_p}{\frac{d_2}{2}} = \frac{34}{625}d_2^3\pi$$

Méretezés: $|\tau_{max}| \leq \tau_{meg} \Rightarrow \dfrac{M_{t\,max}}{K_{p\,min}} = \tau_{meg}$

$$d_{2\,min} = \sqrt[3]{\frac{625\,M_{t\,max}}{34\pi\cdot\tau_{meg}}} = \underline{\underline{26{,}92\ mm}}$$

Hasonlítsuk össze az anyagfelhasználást:

$$A_1 = \frac{d_1^2\pi}{4} = 518{,}79\ mm^2$$

$$A_2 = \frac{\left[d_2^2 - (0{,}6d_2)^2\right]\pi}{4} = 364{,}21\ mm^2$$

} 30%-kal kisebb anyagfelhasználás

c) Elcsavarodás az a) esetben:

$$I_p = \frac{d_1^4\pi}{32} = 42835\ mm^4$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{I_p\cdot G}\int_0^x M_{t_1}(x)\,dx = \frac{1}{I_p\cdot G}\int_0^x(-M_A + mx)\,dx$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{I_p\cdot G}\left(-M_A x + \frac{mx^2}{2}\right) = \frac{1}{I_p\cdot G}\left(250000x + 250x^2\right)$$

$$= 8{,}33765\cdot 10^{-5}x + 8{,}33765\cdot 10^{-8}x^2 \ (rad)$$

[mm]

A C pontban:

$$\varphi_C = \varphi_1(500) = \underline{\underline{0{,}0625\ rad}} = \underline{\underline{3{,}582^\circ}}$$

A második szakasz:

$$\varphi_2(x) = \varphi_C + \frac{1}{I_p \cdot G} \int_{0,5}^{x} M_{t_2}(x)\,dx = \varphi_C + \frac{1}{I_p \cdot G} \int_{0,5}^{x} -M_A + m_1 L - m_2 (x - L)\,dx$$

$$= \varphi_C + \frac{1}{I_p \cdot G}\left(-375 + 1000x - 500x^2\right)$$

$$= \underbrace{+0{,}0625 - 0{,}125}_{-0{,}0625} + 3{,}33506 \cdot 10^{-4} - 1{,}66753 \cdot 10^{-7} x^2 \quad (\mathrm{rad})$$

$$\varphi_2(x) = -3{,}582 + 0{,}019109x - 9{,}55424 \cdot 10^{-6} x^2 \; [^\circ]$$

$$\varphi_2(2L) = \underline{\underline{5{,}97^\circ}}$$