Szilárdságtan - 4. hét

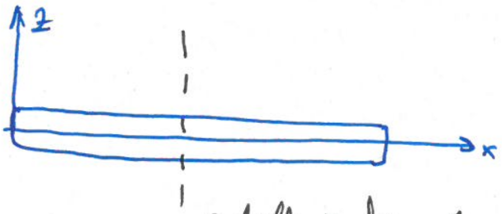
Egyenes rúd nyírása és hajlítása

Körkeresztmetszetű rúd csavarása.

Elméleti összefoglaló

Rudak nyírása

$V(x)$ fgv ismert $\quad M_h'(x) = -V(x)$



adott x km-ben!

$$\tau_{xz} = \frac{-V(x)}{I_y} \cdot \frac{S_y(z)}{a(z)}$$

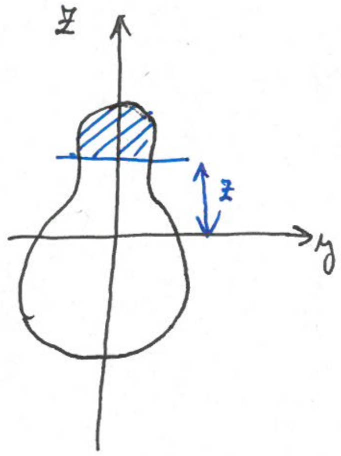
(VISA-képlet / Zsurovszkij)

$V(x)$ - a nyíró igénybevétel (z irányú)

I_y - a km. 2rendű nyomatéka

$S_y(z)$ - az adott z magasság feletti rész statikai nyomatéka

$a(z)$ - a km. vastagság



$|\tau_{xz}|$-t kell ábrázolni!

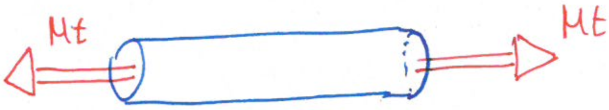
~ parabolikus eloszlás!

a km szélső pontjaiban zérus!

Elnevezés: τ_{xz} → ezzel párhuzamos

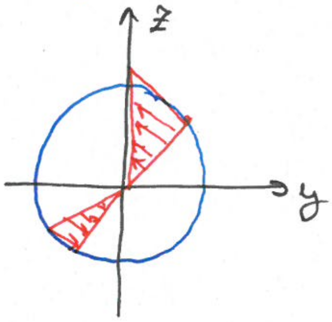
erre merőleges

Kör keresztmetszetű rúd csavarása



$$\tau_{xt} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r$$

hengerkoordináta rendszerben!



tangenciális irányú

$$\tau_{xt} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r$$

$$\boxed{\tau_{xt} = G \cdot \gamma_{xt}}$$

~ Egyszerű Hooke-tv.

csúsztató fesz

csúsztató rug. modulus

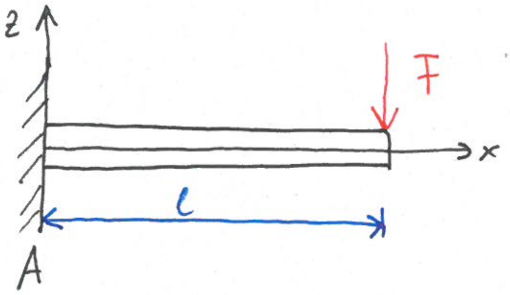
fajlagos elcsavarodás

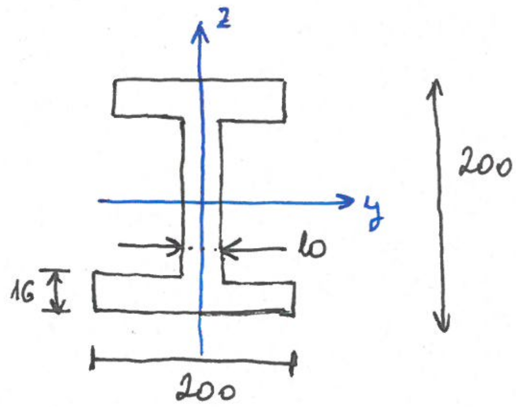
$$\gamma_{xt} = r \frac{d\varphi}{dx} \longrightarrow \varphi = \int_0^\ell \frac{\gamma_{xt}}{r} dx = \int_0^\ell \frac{M_t}{I_p \cdot G} \cdot \frac{\cancel{r}}{\cancel{r}} dx$$

ϑ fajlagos elcsavarodás

1. Feladat

Rajzoljuk meg a normál és a csúsztatófeszültség eloszlását a befogás km-ében!





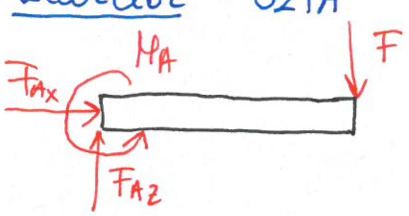
Adatok:

$l = 0,3\ m$

$I_y = 5,826 \cdot 10^{-5} \cdot m^4$

$F = 100\ kN$

1) Reakciók - SZTA



$\Sigma F_x = 0: \quad \boxed{F_{Ax} = 0}$

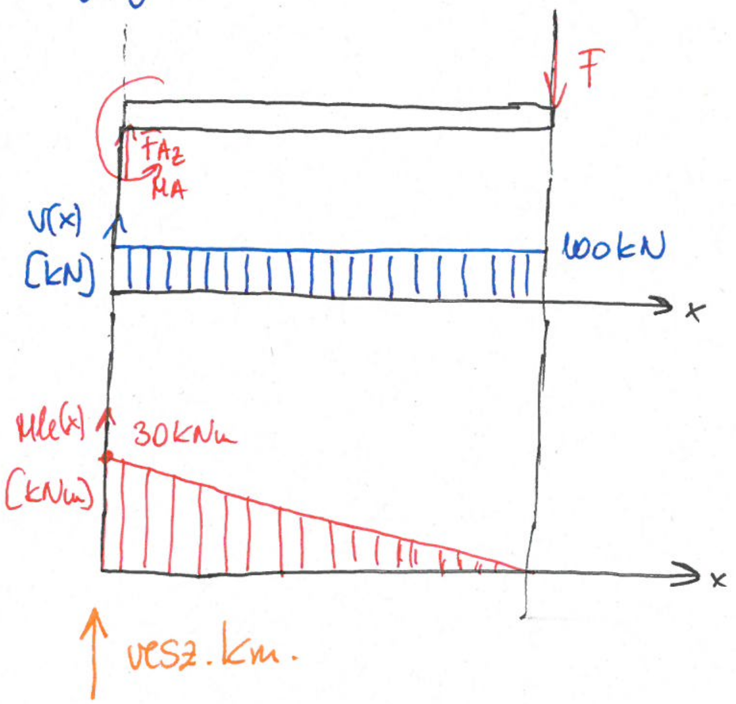
$\Sigma F_z = 0: \quad F_{Az} - F = 0$

$\boxed{F_{Az} = F = 100 kN}$

$\Sigma M_A = 0: \quad M_A - Fl = 0$

$\boxed{M_A = Fl = 30 kNm}$

2) Igénybevételi ábrák



$V(x) = 100 \quad [kN]$

$M_h(x) = \int -V(x)\,dx + M_A = \underline{-100 \cdot x + M_A}$

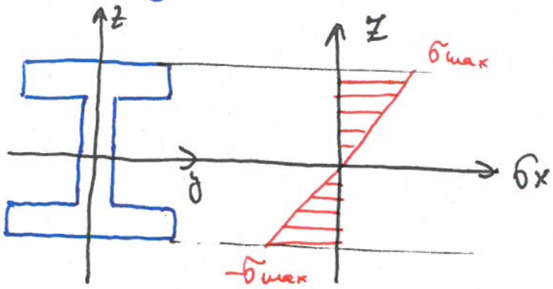
A vesz. km-ben „A”

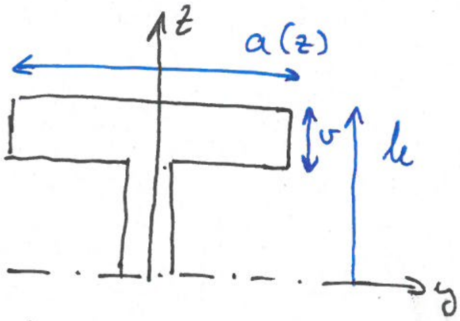
$M_A = 30\ kNm$

$V_A = 100\ kN$

3 Normálfeszültség

$$\sigma_x = \frac{M_h}{I_y}\cdot z \rightarrow \sigma_{max} = \frac{M_h}{I_y}\cdot \overset{100\,mm}{z_{max}} = \underline{\underline{51{,}49\ MPa}}$$





4 Csúsztatófesz. eloszlás:

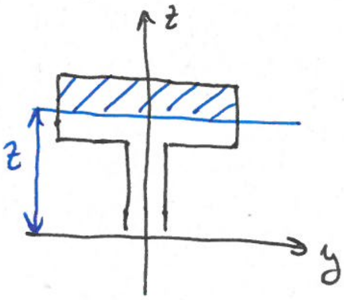
$$\tau_{xz}(z) = -\frac{V(x)}{I_y(x)}\cdot\frac{S_y(z)}{a(z)}$$

ismeretlen!

szimmetrikus y-tengelyre!

fentről haladunk lefele

I. fejrész (1es rész) $z \in \left[\frac{h}{2}-v;\ \frac{h}{2}\right]$



$$S_{y1}(z) = A_1(z)\cdot s_{1z}$$

az adott km feletti rész területe

az adott terület

$$A_1(z) = \left(\frac{h}{2}-z\right)\cdot \overset{h}{a(z)}$$

$$s_{1z}(z) = \frac{\left(\frac{h}{2}-z\right)}{2} + z = \frac{\left(\frac{h}{2}+z\right)}{2}$$

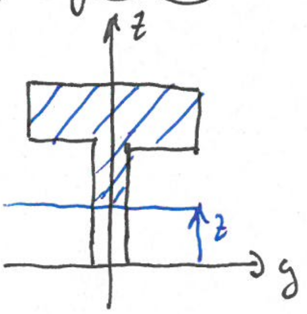
$$S_{y1} = A_1(z)\cdot s_{1z}(z) = \left(\frac{h}{2}-z\right)\cdot h\,\frac{\left(\frac{h}{2}+z\right)}{2} = \frac{h}{2}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right) = 10^6 - 100z^2$$

mm-ben!

$$\tau_{1xz}(z) = \frac{-100kN}{5{,}826\cdot 10^7\,mm^4}\,\frac{(10^6-100z^2)}{200} = -8{,}58 + 0{,}0000858\,z^2\ [MPa]$$

mm-ben

II. gerincrész (2es) $z \in \left[0,\ \frac{h}{2}-v\right)$



$$A_2(z) = v\cdot h + \left(\frac{h}{2}-v-z\right)\cdot \overset{10\,mm}{a_2(z)}$$

$$S_{2z}(z) = \frac{v\cdot h\cdot\left(\frac{h}{2}-\frac{v}{2}\right) + \left(\frac{h}{2}-v-z\right)\cdot a_2\,\frac{\left(\frac{h}{2}-v+z\right)}{2}}{v\cdot h + \left(\frac{h}{2}-v-z\right)\cdot a_2}$$

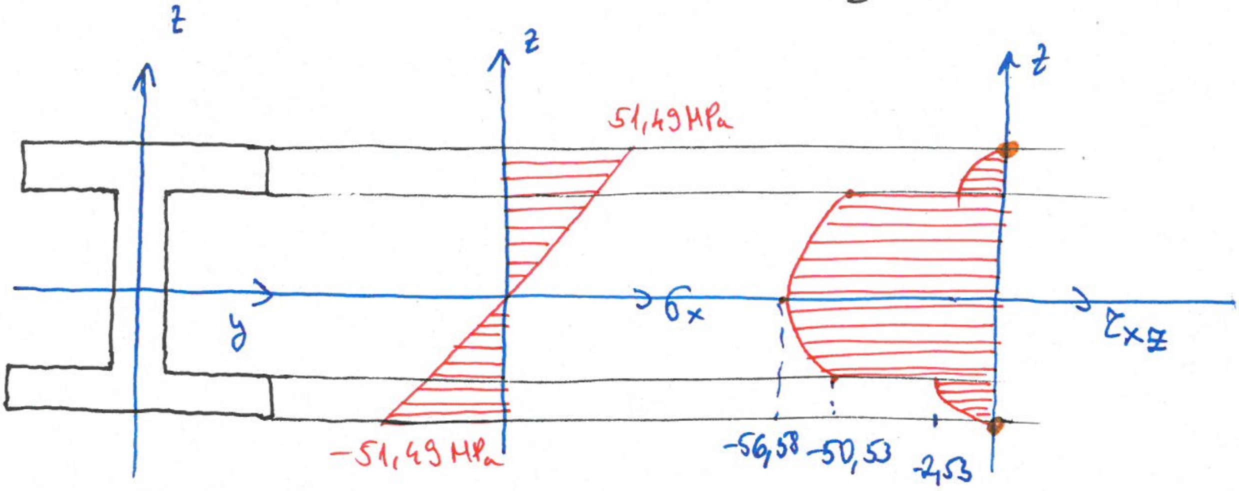
5

$$S_{y2}(z) = A_2(z) \cdot \zeta_{2T}(z) = v \cdot h \left[\frac{h}{2} - \frac{v}{2}\right] + \left(\frac{h}{2} - v + z\right) \cdot a_2 \frac{\left(\frac{h}{2} - v + z\right)}{2}$$

$$= 329600 - 5z^2$$

$$\tau_2(z) = \frac{-100\,kN\,(329600 - 5z^2)}{5{,}826 \cdot 10^7 \cdot 10} = \underline{\underline{-56{,}587 + 0{,}00085822\,z^2}}$$

$\left.\begin{array}{l} z \to mm \\ \tau_2 \to MPa \end{array}\right\}$

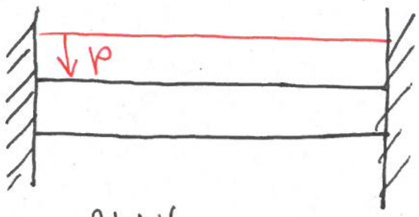


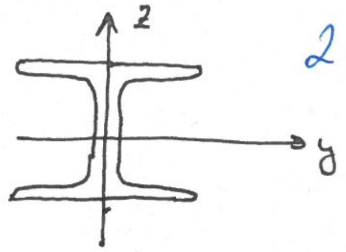
$$\tau_{2xz}\left(z\,\frac{h}{2} - \frac{v}{2}\right) = \tau_2(84) = -50{,}153\ \underline{\underline{MPa}}$$

$$\tau_1(84) = -2{,}53\ MPa$$

$$\tau_2(0) = -56{,}53\ MPa$$

$\boxed{\text{2. feladat}}$ Mekkora maximális τ feszültség ébred a vázolt kettős szabványos U-szelvényű acélgerendában?



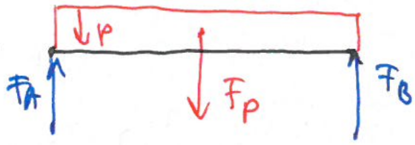


2 × U100
MSZ326

$p = 2\ kN/m$

$l = 4\ m$

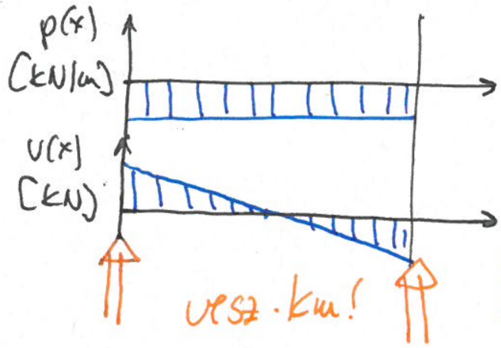
1) Reakciók: ~ szimmetria miatt



$F_p = p \cdot l$

$F_A = F_B = \frac{p \cdot l}{2} = \underline{\underline{4\ kN}}$

2) Igénybevételek



$p(x) = -2\ kN/m$

$V(x) = \int p(x) + F_A = -2x + 4\ kN$

$|V_{max}| = \underline{\underline{4\ kN}}$

$$|\tau_{max}| = \frac{|V_{max}|}{I_y} \cdot \frac{S_y(z)}{a(z)}$$

τ akkor max: $S_y(z)$ maximális és $a(z)$ minimális!

A súlyponti tengelyen: S_y max. $a(z)$ min.

↳ $S_{fél} = 24{,}5\ cm^3$

↳ $I_{y0} = 206\ cm^4$

↳ $v = 6\ mm$

Mivel 2 db van:

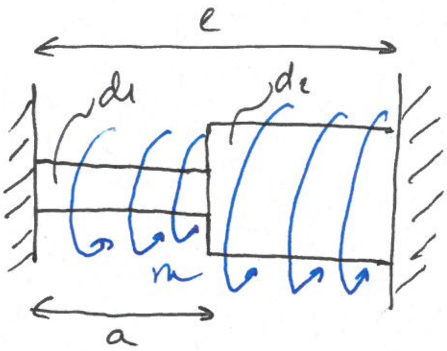
$S_y = 2 \cdot S_{fél} = 49\ cm^3$

$a(z) = 2v = 12\ mm$

$I_y = 2 \cdot I_{y0} = 412\ cm^4$

$$|\tau_{max}| = \frac{V_{max}}{2 \cdot I_{y0}} \cdot \frac{2 \cdot S_{fél}}{2 \cdot v} = \frac{4000 \cdot 49 \cdot 10^3}{2 \cdot 206 \cdot 10^4 \cdot 12} = \underline{\underline{3{,}96\ MPa}}$$

3. feladat Mekkora reakciónyomatékok ébrednek és mekkora a maximális csúsztatófeszültség a két végén befogott, csavart rúdban!



Adatok

$l = 1\,m$

$d_1 = 50\,mm$

$d_2 = 60\,mm$

$a = 0{,}6\,m$

$m = 5\,kNm/m$

1.) Reakciók

$$\sum M_{cs} = 0 \qquad -M_A + M_B + m l = 0$$

Kell még egyenlet! $\boxed{M_{cs}(x) = M_A - m x}$

geometriai helyzet → alakvált. feltétel: $\underbrace{\varphi_1 + \varphi_2}_{\text{a teljes szögelfordulás}} = 0$

- $$\varphi_1 = \int_0^a \frac{M_{cs1}}{I_{p1} \cdot G}\,dx = \frac{1}{I_{p1} G}\int_0^a M_A - m x\,dx = \frac{1}{I_{p1} G}\left[M_A \cdot x - \frac{m x^2}{2}\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{I_{p1} G}\left[M_A \cdot a - \frac{m \cdot a^2}{2}\right] = \frac{1}{I_{p1} G}\left(0{,}6\,M_A - 900\right)$$

$$I_{p1} = \frac{d_1^4 \pi}{32} = 613592\,mm^4$$

$$I_{p2} = \frac{d_2^4 \pi}{32} = 1.272\,350\,mm^4$$

- $$\varphi_2 = \int_a^l \frac{M_{cs}}{I_{p2} G} = \frac{1}{I_{p2} G}\left[M_A \cdot x - \frac{m x^2}{2}\right]_a^l = \frac{1}{I_{p2} G}\left[M_A \cdot l - \frac{m l^2}{2} - M_A \cdot a + \frac{m a^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{I_{p2} G}\left[0{,}4\,M_A - 1600\right]$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

$$\frac{1}{I_{p1}G}(0{,}6M_A - 900) + \frac{1}{I_{p2}G}(0{,}4M_A - 1600) = 0$$

$$\frac{0{,}6M_A}{I_{p1}} + \frac{0{,}4M_A}{I_{p2}} = \frac{900}{I_{p1}} + \frac{1600}{I_{p2}}$$

$$M_A\left(\frac{0{,}6}{I_{p1}} + \frac{0{,}4}{I_{p2}}\right) = \frac{900}{I_{p1}} + \frac{1600}{I_{p2}}$$

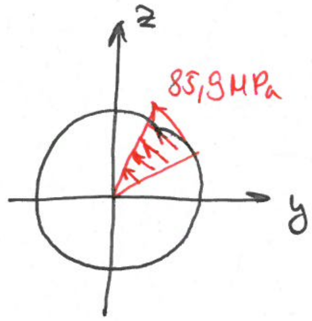
$\hookrightarrow M_A = \underline{\underline{2{,}108\ kNm}}$

$\hookrightarrow M_B = -ml + M_A = \underline{\underline{-2{,}891\ kNm}}$

<u>1es km</u> „A"

$M_A = 2{,}108\ kNm$

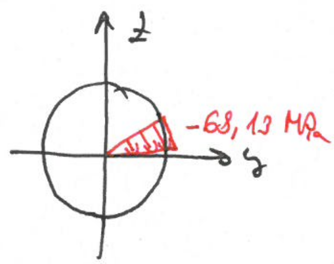
$$\tau_{max_1} = \frac{M_A}{I_{p1}}\cdot\frac{d_1}{2} = \underline{\underline{85{,}9\ MPa}}$$



<u>2es km</u> „B"

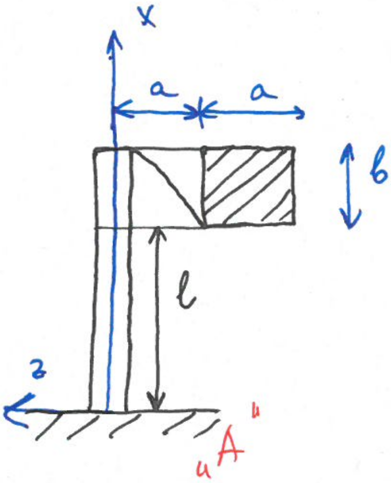
$M_B = -2{,}891\ kNm$

$$\tau_{max_2} = \frac{-M_B}{I_{p2}}\frac{d_2}{2} = -68{,}13\ MPa$$



4. feladat

Egy $v = 3$ mm vastag acélcső egy utcai táblát tart. Mekkora legyen d_k -jú közepes átmérő, ha a táblát 2 kPa szélnyomás terheli. Csak csavarásra kell méretezni!



Adatok:

$l = 6\ m$

$a = 1{,}2\ m$

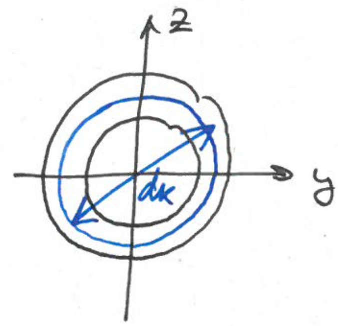
$b = 1\ m$

$v = 3\ mm$

$p = 2000\ Pa$

$\tau_{meg} = 35\ MPa$

Keresztmetszet

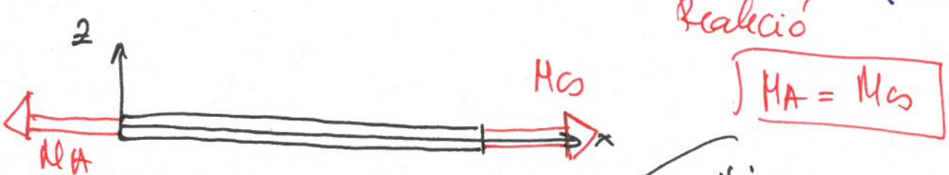


A másodrendű nyomaték: $I_p = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32} \approx \frac{d_k^3 \pi v}{4}$ közelítő formula!

A táblát nyomó erő:

$$F = p \cdot A = p \cdot a \cdot b = 2{,}4\ kN \text{ (a súlypontjában)}$$

Az átadódó nyomaték: $M_{cs} = F \cdot \left(\frac{a}{2} + a\right) = \underline{4320\ Nm}$



pozitív

$$|\tau_{xt}| = \left|\frac{M_{cs}}{I_p} \cdot r\right| = \frac{M_{cs}}{\frac{d_k^3 \pi \cdot v}{4}} \cdot \frac{d_k}{2} \leq \tau_{meg}$$

$$\downarrow \quad d_k = \sqrt{\frac{M_{cs}}{\tau_{meg}} \cdot \frac{2}{\pi \cdot v}} = 161{,}841\ mm$$

$$d_k \approx \underline{162\ mm}$$