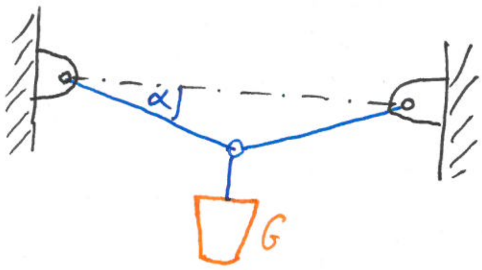
Szilárdságtan 1. gyakorlat

Rudak, gerendák feszültségi állapota

Normáligénybevétel

Példatár 1.1

1. feladat Egy $G = 700\,N$ súlyú lámpatestet szeretnénk felfüggeszteni a merevnek tekintett falak közé egy $\phi d = 3\,mm$ átmérőjű huzallal amelyre húzás esetén a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 285\,MPa$. Határozzuk meg, hogy mekkora lehet a huzal vízszintessel bezárt szöge annak érdekében, hogy a huzalban ébredő normálfeszültség a megengedett érték alatt maradjon.



Adatok:

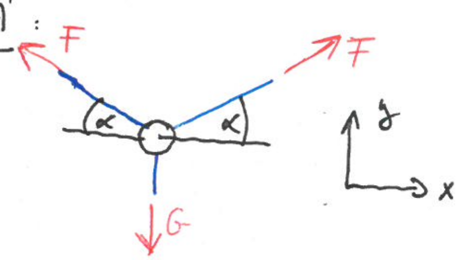
$G = 700\,N$

$d = 3\,mm$

$\sigma_{meg} = 285\,MPa$

Határozzuk meg a kötelekben ébredő F erőt:

SZTÁ:



Egy. egy.

$\sum F_x = 0 \qquad F\cos\alpha - F\cos\alpha = 0$

$0 = 0$ ✓

$\sum F_y = 0 \qquad F\sin\alpha + F\sin\alpha - G = 0$

$2F\sin\alpha = G$

$$F = \frac{G}{2\sin\alpha}$$

A kötélben ébredő feszültség (normálfesz)

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{G}{2\sin\alpha \cdot \frac{d^2\pi}{4}} = \frac{2G}{\sin\alpha\, d^2\pi}$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 7{,}0686\,mm^2$$

$$\sigma_{meg} \geq \sigma = \frac{2G}{\sin\alpha\, d^2\pi}$$

Legrosszabb eset:

$$\sigma_{meg} = \frac{2G}{\sin\alpha\, d^2\pi} \longrightarrow \sin\alpha = \frac{2G}{d^2\pi\,\sigma_{meg}}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2G}{d^2\pi\,\sigma_{meg}}\right) = 10^\circ$$

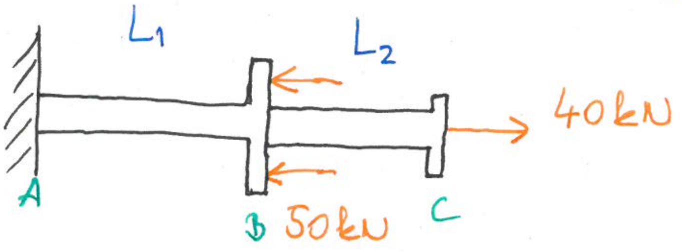
2. feladat

Egy 20 mm átmérőjű acél rudat az ábra szerinti erők terhelik. Az acél rugalmassági modulusza $E_{Acél} = 200\ \text{GPa}$.

a) Rajzoljuk fel a normál igénybevételi ábrát!

b) Számítsuk ki a végkeresztmetszet elmozdulását!

c) Határozzuk meg az egyes szakaszokon ébredő feszültségeket!



Adatok:

$L_1 = 600\ \text{mm}$

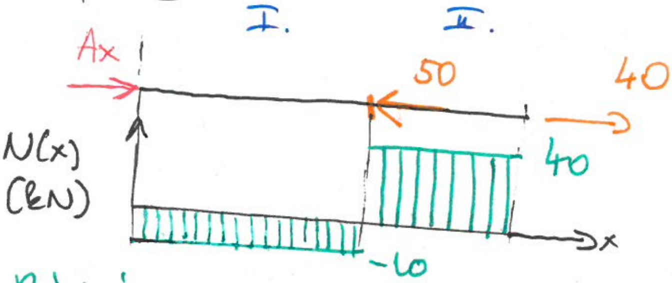
$L_2 = 400\ \text{mm}$

$E_{acél} = 200\ \text{GPa}$

$d = 20\ \text{mm}$

Reakciók:

SZTÁ

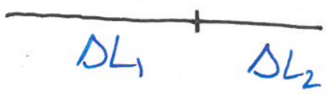


Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x - 50 + 40 = 0$

$\underline{\underline{A_x = 10\ \text{kN}}}$

Rúdvég megnyúlása:



Hooke tv.:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= E \cdot \varepsilon_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\nu\, \varepsilon_x \\ \varepsilon_x &= \frac{\Delta L}{L} \\ \sigma_x &= \frac{N}{A} \end{aligned}\right\} \Delta L = \frac{F \cdot L}{A E}$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \underbrace{\frac{N_1 L_1}{A \cdot E}}_{\Delta L_1} + \underbrace{\frac{N_2 L_2}{A E}}_{\Delta L_2}$$

$N_1 = -10\ \text{kN}$

$N_2 = 40\ \text{kN}$

$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 314{,}159\ \text{mm}^2$

$$\Delta L_1 = \frac{-10000 \cdot 600}{314{,}159 \cdot 200000} = -0{,}0955\ \text{mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{40000 \cdot 400}{314{,}159 \cdot 200000} = 0{,}2547\ \text{mm}$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \underline{0{,}159\ \text{mm}}$$

Feszültségek

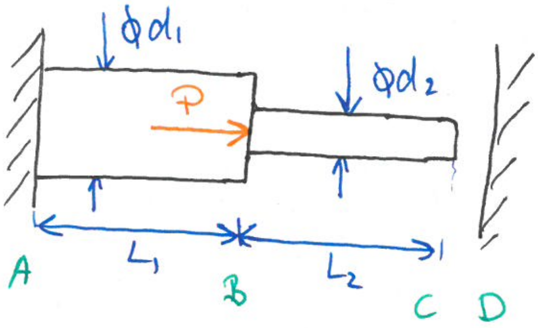
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \underline{\underline{-31{,}83\ \text{MPa}}}$$

(negatív → nyomott)

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \underline{\underline{127{,}324\ \text{MPa}}}$$

(pozitív → húzott) !

3. feladat A C végkeresztmetszet és a fal közötti hézag 0,15 mm az alábbi hengeres tömör rudakból álló szerkezetnél terheletlen állapotban. A terhelés nagysága $P = 300$ kN. Határozzuk meg a reakcióerőket a terhelés alkalmazásakor! Mekkora az egyes részek hosszváltozása és a benne ébredő feszültség?



Adatok:

$d_1 = 50$ mm

$d_2 = 25$ mm

$L_1 = 600$ mm

$L_2 = 600$ mm

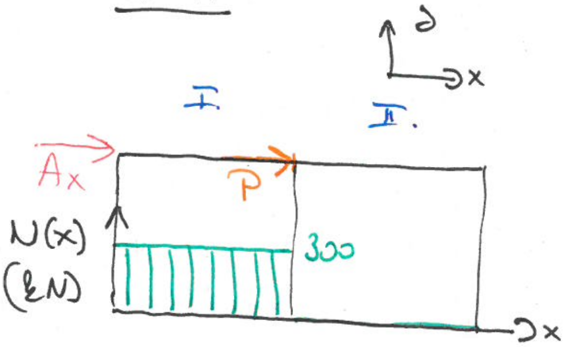
$E = 70$ GPa

$P = 300$ kN

El kell dönteni, hogy hozzáér-e a falhoz a nyúlás következtében!

I. TFH NEM ér hozzá

SZTA



$$A_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} = 1963{,}495\ \text{mm}^2$$

$$A_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4} = 490{,}874\ \text{mm}^2$$

$N_1 = 300$ kN

Egyensúlyi egyenletek

$\Sigma F_x = 0 \qquad A_x + P = 0$

$A_x = -P = -300$ kN

$$\Delta L = \Delta L_1 + \underbrace{\Delta L_2}_{=0} = \frac{N_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1}$$

$\Delta L = 1{,}31$ mm $> 0{,}15$ mm

$\Downarrow$

hozzáér!

II. Hozzáér a szemközti falhoz:

SZTA'

Egyensúlyi egyenletek

$\Sigma F_x = 0 \qquad A_x + P_x + C_x = 0$

2 ismeretlen de 1 egyenlet!

Normáligénybevételek

$N_1 = -A_x$

$N_2 = -A_x - P$

Kinematikai feltétel

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = \Delta = 0{,}15\,\text{mm}$$

$$\frac{N_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E} + \frac{N_2 \cdot L_2}{A_2\, E} = \Delta$$

$$\frac{-A_x L_1}{A_1 E} + \frac{(-A_x - P) L_2}{A_2 E} = \Delta$$

$$-A_x L_1 A_2 \cancel{E} + (-A_x - P) L_2 A_1 \cancel{E} = \Delta A_1 A_2 E^{\cancel{2}}$$

$$A_x(-L_1 A_2 - L_2 A_1) = \Delta A_1 A_2 E + P L_2 A_1$$

$$A_x = \frac{-\Delta A_1 A_2 E - P L_2 A_1}{L_1 A_2 + L_2 A_1} = \frac{-\Delta \frac{d_1^2 d_2^2 \pi^2}{16} E - \frac{P L_2 d_1^2 \pi}{4}}{L_1 \frac{d_2^2 \pi}{4} + L_2 \frac{d_1^2 \pi}{4}}$$

$$A_x = -\frac{d_1^2}{4} \, \frac{\Delta d_2^2 E \pi + 4 L_2 P}{L_1 d_2^2 + L_2 d_1^2} = \underline{\underline{-246{,}872\,\text{kN}}}$$

$\hookrightarrow C_x = -A_x - P_x = \underline{\underline{-53{,}128\,\text{kN}}}$

Visszaírva:

$$L_1 = \frac{-A_x L_1}{A_1 E} = 1{,}078\,\text{mm}$$

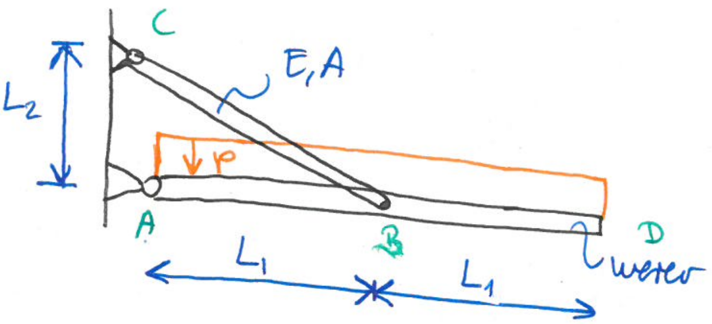
$$L_2 = \frac{(-A_x - P) L_2}{A_2 E} = -0{,}928\,\text{mm}$$

$$\sigma_1 = \frac{-A_x}{A_1} = \underline{\underline{125{,}731\,\text{MPa}}}$$

$$\sigma_2 = \frac{-A_x - P}{A_2} = \underline{\underline{-108{,}231\,\text{MPa}}}$$

4. feladat

A merev ABD rúd megtámasztása az ábra szerinti. A rugalmas CB rúd keresztmetszetének területe 150 mm^2, anyagának rugalmassági modulusza 100 GPa. A merev rúd terhelése megoszló erőrendszer. Határozzuk meg a D km. függőleges elmozdulását!



Adatok:

$L_1 = 2\,m$

$L_2 = 1{,}5\,m$

$p = 300\,N/m$

$A = 150\,mm^2$

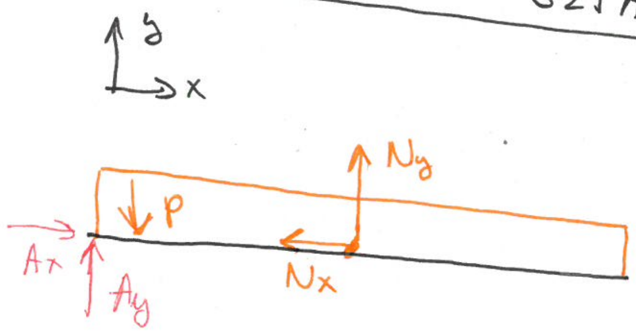
$E = 100\,GPa$

Számítsuk ki a rugalmas rúdban ébredő erőket

⇓

Mivel csuklósan kapcsolódik mindkét végén és nincs terhelés ⇒ rúdirányú erő ébred benne

Írjuk fel a merev rúd SZTÁ-ját:



Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0 \qquad A_x - N_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - p(2L_1) + N_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \qquad -p2L_1^2 + N_y \cdot L_1 = 0$

$\hookrightarrow N_y = 2pL_1 = \underline{\underline{1200\,N}}$

mivel rúdirányú

$$\frac{N_x}{N_y} = \frac{L_1}{L_2} \rightarrow N_x = \frac{N_y L_1}{L_2} = \underline{\underline{1600\,N}}$$

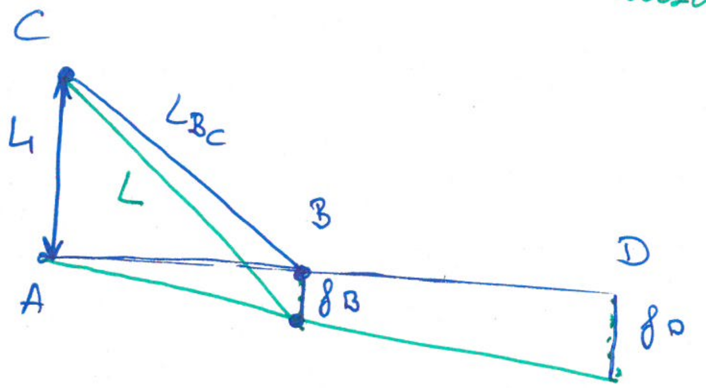
$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \underline{\underline{2000\,N}}$$

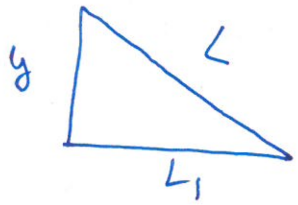
A rúd megnyúlása: $L_{BC} = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = 2{,}5\,m$

$$\Delta L = \frac{N \cdot L_{BC}}{A \cdot E} = \underline{\underline{0{,}333\,mm}}$$

↳ A rúd hossza: $L = L_{BC} + \Delta L = \underline{\underline{2500{,}333\,mm}}$

Kis elmozdulások → B és D pont csak függőlegesen mozdul el!





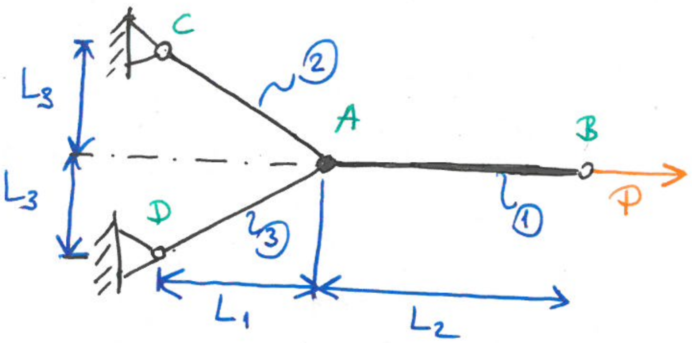
$$y = \sqrt{L^2 - L_1^2} = 1500{,}55\,mm$$

Hasonló háromszögek miatt $\dfrac{\delta_B}{\delta_D} = \dfrac{L_1}{2L_1}$ → $\delta_D = 2\delta_B = \underline{\underline{1{,}1\,mm}}$

Példatár 1.5

5. feladat

Az ábrán látható rudak átmérője 30mm, anyaguk rugalmassági modulusza 200 GPa. Mekkora legyen a végpont P terhelése, hogy a B pont elmozdulása 5mm legyen?



Adatok:

$L_1 = 3\,m$

$L_2 = 6\,m$

$L_3 = 4\,m$

$d = 30\,mm$

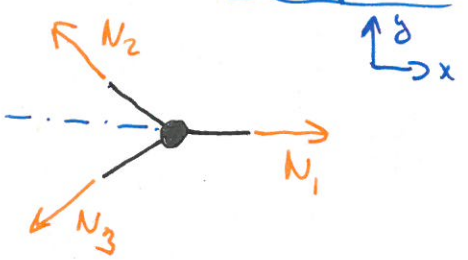
$E = 200\,GPa$

$\Delta u = 5\,mm$

Írjuk fel a rúderőket! Minden rúdban csak rúdirányú erő ébred.

Tehát: $\boxed{N_1 = P}$

SZTÁ az A pontra



Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0 \qquad N_1 - N_{2x} - N_{3x} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad N_{2y} - N_{3y} = 0$

A szimmetria miatt: $N_{2x} = N_{3x}$, $N_{2y} = N_{3y}$

$$\Downarrow$$

$$N_1 - 2N_{2x} = 0$$

$$N_{2x} = \frac{N_1}{2} = \frac{P}{2}$$

Mivel N_2 rúdirányú

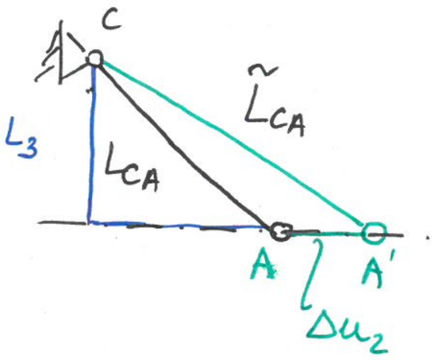
$$\frac{N_{2x}}{N_{2y}} = \frac{L_1}{L_3} \Rightarrow N_{2y} = \frac{N_{2x} \cdot L_3}{L_1} = \frac{P}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} P$$

Tehát $N_2 = \sqrt{N_{2x}^2 + N_{2y}^2} = \sqrt{\frac{P^2}{4} + \frac{4P^2}{9}} = \underline{\underline{\frac{5}{6} P}}$

Legyen Δu_2 az A pont vízszintes elmozdulása

$$\Delta L_{AC} = \frac{N_2 \cdot L_{AC}}{A \cdot E} \rightarrow \tilde{L}_{AC} = L_{AC} + \Delta L_{AC} = L_{AC} + \frac{5 P L_{AC}}{6 A E} =$$

$$= L_{AC}\left(1 + \frac{5}{6}\frac{P}{AE}\right)$$



$$\Delta u_2 = \sqrt{\tilde{L}_{CA}^2 - L_3^2} - L_1$$

$$L_{AC} = \sqrt{L_3^2 + L_4^2} = 5\,m$$

A vízszintes rúd megnyúlása Δu_1

$$\Delta u_1 = \frac{N_1 \cdot L_2}{A \cdot E} = \frac{P \cdot L_2}{AE}$$

$$\Delta u_1 + \Delta u_2 = \Delta u = 5\,mm$$

$$\frac{P \cdot L_2}{AE} + \sqrt{\tilde{L}_{AC}^2 - L_3^2} - L_1 = \Delta u$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 706{,}858\,mm^2$$

$$\frac{P \cdot L_2}{AE} + \sqrt{L_{AC}^2\left(1 + \frac{5}{6}\frac{P}{AE}\right)^2 - L_3^2} - L_1 = \Delta u$$

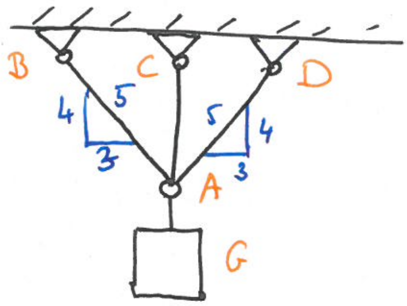
$\Downarrow$ visszaírva a numerikus értékeket $\Rightarrow$ másodfokú egyenlet P-re!

$$671\,P^2 - 3{,}956 \cdot 10^{11} P + 2{,}16 \cdot 10^{16} = 0$$

$$P = \underline{\underline{54{,}615\ kN}}$$

Példatár 1.6

6. feladat Az ábrán látható $G = 130\ N$ súlyú terhet 3 azonos anyagú horgászzsinórral függesztettük fel, amelyek rugalmassági modulusza $E = 2\ GPa$. A zsinórhosszak $L_{AB} = L_{AD} = 2m$, $L_{AC} = 1{,}6\ m$. Az AB és AD zsinórok átmérője azonos $\varnothing d_{AB} = \varnothing d_{AD} = 2mm$. Mekkora legyen AC átmérője, ha azt szeretnénk, hogy minden zsinórban ugyanakkora normáligénybevétel ébredjen!



Adatok:

$L_{AB} = 2m$

$L_{AD} = 2m$

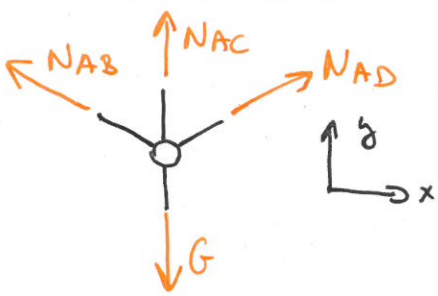
$L_{AC} = 1{,}6m$

$\varnothing d_{AB} = 2mm$

$\varnothing d_{AD} = 2mm$

$E = 2GPa$

Karika SZTÁ



$$\Sigma F_x = 0: \quad -N_{ABx} + N_{ADx} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad N_{ABy} + N_{AC} + N_{ADy} - G = 0$$

Tudjuk, hogy

$$N_{ABy} = \frac{4}{5} N_{AB} = \frac{4}{5} N$$

$$N_{ADy} = \frac{4}{5} N_{AD} = \frac{4}{5} N$$

Azonos normáligénybevétel

$$N_{AD} = N_{AB} = N_{AC} = N$$

Visszaírva: $\frac{4}{5}N + N + \frac{4}{5}N - G = 0$

$$N = \frac{G}{\frac{13}{5}} = \frac{5G}{13} = \underline{\underline{50N}}$$

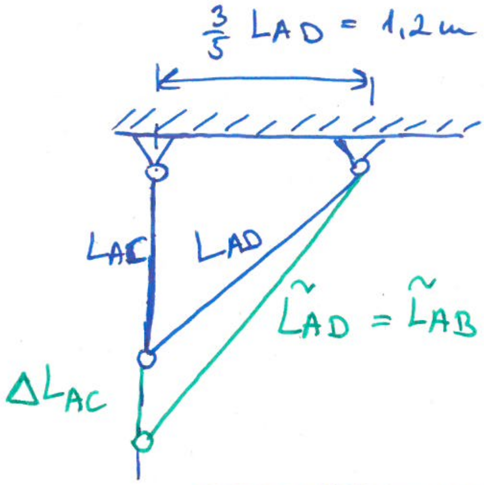
AB és AD nyúlás megnyúlása:

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot L_{AB}}{A_{AB} \cdot E} = 15{,}92mm$$

$$A_{AB} = \frac{d_{AB}^2 \pi}{4} = 3{,}1415\ mm^2$$

ebből számítható AC megnyúlása!

↓ Az A pont függőlegesen lefele mozdul el a szimmetria miatt!



$$\tilde{L}_{AD} = \tilde{L}_{AB} = L_{AB} + \Delta L_{AB} = 2015{,}92$$

behelyettesítünk mindent

$$\Delta L_{AC} = \sqrt{\tilde{L}_{AD}^2 - \left(\frac{3}{5} L_{AD}\right)^2} - L_{AC} = \underline{\underline{19{,}85\ mm}}$$

ugyanakkor

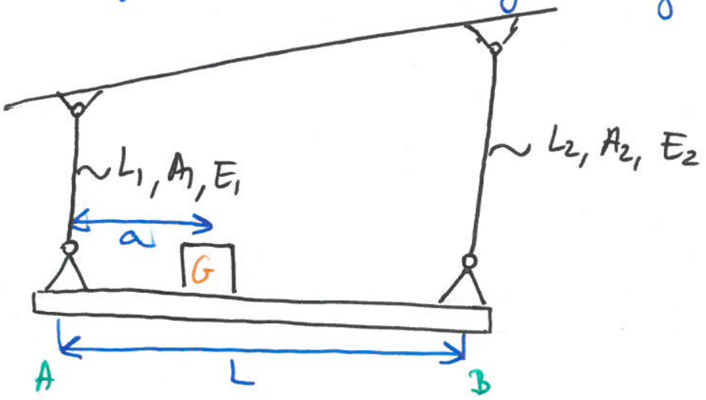
$$\Delta L_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot L_{AC}}{A_{AC} \cdot E} \longrightarrow A_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot L_{AC}}{\Delta L_{AC} \cdot E} = 2{,}015\ mm^2$$

$$A_{AC} = \frac{d_{AC}^2 \pi}{4}$$

$$d_{AC} = \sqrt{\frac{4 A_{AC}}{\pi}} = \underline{\underline{1{,}602\ mm}}$$

Példatár 1.7

7. feladat A vízszintes merevnek tekintett rudat két huzal tartja egyensúlyban. A rúd terhelése $G = 5000\,N$ súlyú teher. A baloldali huzal acél ($E_{Acél} = 200\,GPa$), a jobboldali Alumínium ($E_{Al} = 70\,GPa$). Hol helyezkedjen el a G teher, hogy a merev rúd vízszintes maradjon? Mekkora a feszültség a ~~rúd~~ huzalokban?



Adatok

$L_1 = 15\,m$
$A_1 = 120\,mm^2$
$E_1 = 200\,GPa$
$L_2 = 25\,m$
$A_2 = 240\,mm^2$
$E_2 = 70\,GPa$
$G = 5000\,N$
$L = 1\,m$

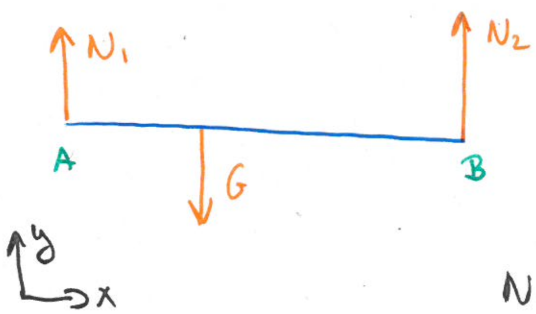
Akkor lesz vízszintes, ha

$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$

$$\frac{N_1 \cdot L_1}{A_1 E_1} = \frac{N_2 \cdot L_2}{A_2 E_2} \Longrightarrow N_1 = \frac{L_2}{L_1} \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2} N_2$$

$$\underline{\underline{N_1 = 2{,}381\,N_2}}$$

SZTÁ



Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x:\quad 0 = 0$

$\Sigma F_y:\quad N_1 + N_2 - G = 0$

$\Sigma M_A:\quad -aG + L \cdot N_2 = 0$

$N_1 + N_2 = G$

$3{,}381\,N_2 = G \Rightarrow N_2 = \dfrac{G}{3{,}381} = \underline{\underline{1478{,}87\,N}}$

$N_1 = 2{,}381\,N_2 = \underline{\underline{3521{,}13\,N}}$

A nyomatéki egyenletből:

$$a = \frac{L N_2}{G} = \underline{\underline{295{,}77\,mm}}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 29{,}34\,MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 6{,}16\,MPa$$