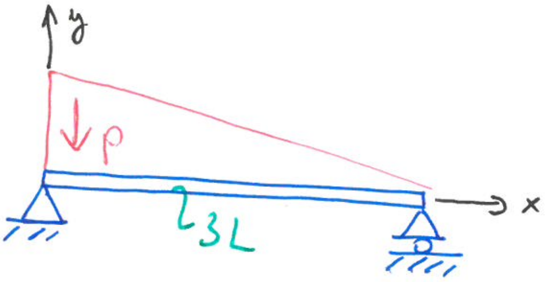
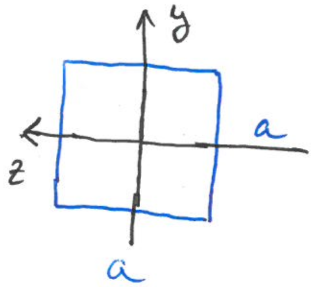
1. feladat Határozzuk meg a rúdban felhalmozódó alakváltozási energiát! A tartó keresztmetszete a élhosszúságú négyzet!





Adatok:

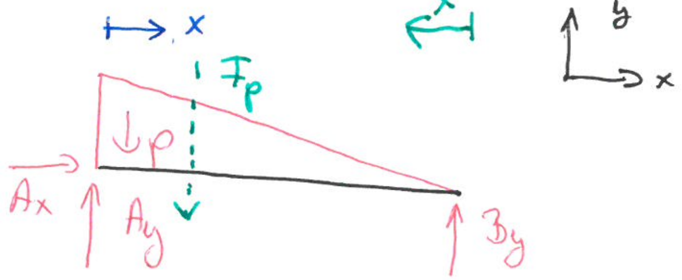
$p = 2\ kN/m$

$L = 0{,}5\ m$

$E = 200\ GPa$

$a = 20\ mm$

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek:

$F_p = \frac{p \cdot 3L}{2}$

$\sum F_x = 0: \quad \boxed{A_x = 0}$

$\sum F_y = 0: \quad A_y + B_y - \frac{p \cdot 3L}{2} = 0$

$\sum M_A = 0: \quad B_y \cdot 3L - \frac{p \cdot 3L}{2} \cdot L = 0$

$\hookrightarrow B_y = \frac{pL}{2} = \underline{\underline{0{,}5\ kN}}$

$\hookrightarrow A_y = \frac{3}{2} pL - \frac{pL}{2} = pL = \underline{\underline{1\ kN}}$

Igénybevételi függvény: Az egyszerűség kedvéért $\tilde{x}$ szerint írjuk fel!

$$M_h(\tilde{x}) = -B_y \cdot \tilde{x} + \left(\frac{p}{3L} \cdot \tilde{x}\right) \cdot \frac{\tilde{x}}{2} \cdot \frac{\tilde{x}}{3} = -\frac{pL}{2} \cdot \tilde{x} + \frac{p\tilde{x}^3}{18L}$$

Az alakváltozási energia (mid esetén)

$$\mathcal{U} = \underbrace{\mathcal{U}^{N}}_{=0} + \mathcal{U}^{Mh} + \underbrace{\mathcal{U}^{Mt}}_{=0} + \cancel{\mathcal{U}^{V}} \Rightarrow \text{nyírást elhagyjuk!}$$

Tehát $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{Mh} = \int_0^{3L} \frac{1}{2} \frac{Mh^2(\tilde{x})}{IE}\, d\tilde{x}$

$$Mh^2(\tilde{x}) = \frac{p^2L^2}{4}\tilde{x}^2 - \underbrace{2\frac{pL\tilde{x}}{2} \cdot \frac{p\tilde{x}^3}{18L}}_{\frac{p^2\tilde{x}^4}{18}} + \frac{p^2\tilde{x}^6}{324L^2}$$

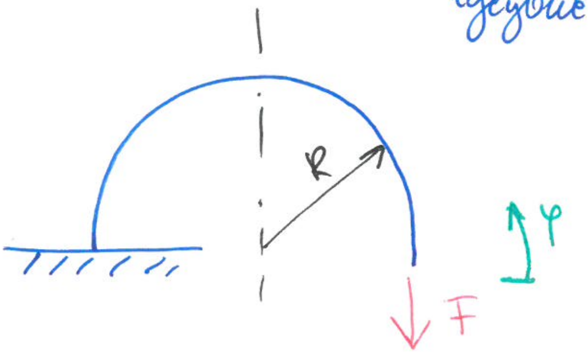
$$\int_0^{3L} \frac{1}{2IE}\left(\frac{p^2L^2\tilde{x}^2}{4} - \frac{p^2\tilde{x}^4}{18} + \frac{p^2\tilde{x}^6}{324L^2}\right) d\tilde{x} = \frac{1}{2IE}\left[\frac{p^2L^2\tilde{x}^3}{12} - \frac{p^2\tilde{x}^5}{90} + \frac{p^2\tilde{x}^7}{2268L^2}\right]_0^{3L} =$$

$$= \frac{1}{2IE}\left(\frac{p^2L^2 \cdot 27L^3}{12} - \frac{p^2 243L^5}{90} + \frac{p^2 2187L^7}{2268L^2}\right) = \frac{1}{2IE} \cdot \frac{18}{35} p^2L^5$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{IE}\frac{9}{35} \cdot p^2L^5 = \frac{1}{\frac{a^4}{12} \cdot E}\frac{9}{35} \cdot p^2L^5 = \frac{108}{35} \cdot \frac{p^2L^5}{a^4E} = \underline{\underline{12{,}057}}$$

2. feladat

Határozzuk meg a síkgörbe rúd esetén a felhalmozódó alakváltozási energiát! Mekkora a normál és a hajlító-igénybevételből származó komponens aránya?



$R = 1\,m$

$d = 30\,mm$

$F = 100\,kN$

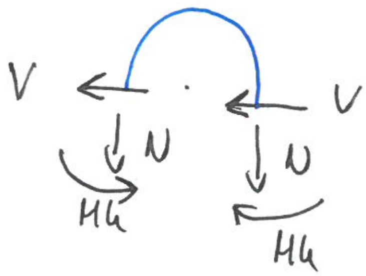
$E = 200\,GPa$

Igénybevételi függvények

$N(\varphi) = F\cos\varphi$

$V(\varphi) = F\sin\varphi$

$M_h(\varphi) = FR(1-\cos\varphi)$



$$U = U^N + U^{M_h} + \underbrace{U^{M_t}}_{=0} + \cancel{U^V}$$ → mindig elhagyjuk!

$$U^N = \int_0^\pi \frac{1}{2}\frac{N^2}{AE}\underbrace{R\,d\varphi}_{\text{ívhossz}} = \int_0^\pi \frac{1}{2}\frac{F^2\cos^2\varphi}{AE}R\,d\varphi =$$

$$= \frac{F^2R}{2AE}\int_0^\pi \frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{F^2R}{2AE}\left[\frac{1}{2}\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{F^2R}{2AE}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}\frac{F^2R}{AE}\pi = \underline{\underline{\frac{F^2R}{d^2E}}} = \underline{\underline{0{,}0555\ mJ}}$$

$A = \frac{d^2\pi}{4}$

Hasonlóképpen:

$$U^{Mh} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \frac{Mh^2}{IE} \underbrace{R\,d\varphi}_{\text{ívhossz}} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \frac{F^2 R^2 (1-\cos\varphi)^2}{IE} R\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{F^2 R^3}{IE} \int_0^{\pi} \underbrace{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi}_{1 - 2\cos\varphi + \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)} d\varphi = \frac{1}{2} \frac{F^2 R^3}{IE} \int_0^{\pi} \frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \frac{F^2 R^3}{IE} \left[\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \frac{F^2 R^3}{IE} \cdot \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4} \frac{F^2 R^3}{IE} \pi$$

$I = \frac{d^4 \pi}{64}$ -et visszahelyettesítve!

$$U^{Mh} = \frac{48 F^2 R^3}{d^4 E} = \underline{\underline{2962,96 \text{ mJ}}}$$

$$U = U^N + U^{Mh} = \underline{\underline{2963,01 \text{ mJ}}}$$

Az alakváltozási E aránya

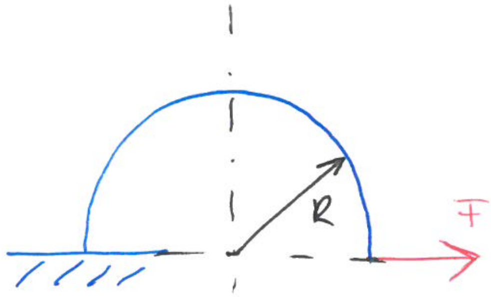
$$\frac{U^N}{U^{Mh}} = \frac{\frac{F^2 R}{d^2 E}}{\frac{48 F^2 R^3}{d^4 E}} = \frac{F^2 R}{d^2 E} \cdot \frac{d^4 E}{48 F^2 R^3} = \underline{\underline{\frac{d^2}{48 R^2}}} = \frac{1}{48} \left(\frac{d}{R}\right)^2$$

Csak $\left(\frac{d}{R}\right)$ aránytól függ!

Most: $\frac{d}{R} = \underline{\underline{0,03}}$

$$\hookrightarrow \frac{U^N}{U^{Mh}} = \underline{\underline{0,001875 \%}}$$

$\boxed{\text{3. feladat}}$ Határozzuk meg az alábbi síkgörbe rúd esetén a felhalmozódó alakváltozási energiát!



$R = 1\,m$

$d = 30\,mm$

$F = 100\,kN$

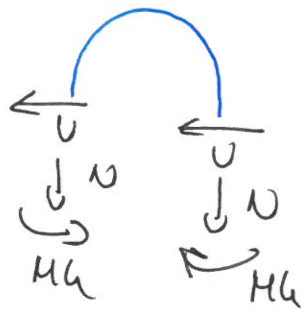
$E = 200\,GPa$

Igénybevételi függvények:

$N(\varphi) = F \sin\varphi$

$V(\varphi) = -F \cos\varphi$

$M_h(\varphi) = -F R \sin\varphi$



$$U = U^N + U^{Mh} + \underbrace{U^{Mt}}_{=0} + \cancel{U^V} \rightarrow$$ mindig elhagyjuk!

$$U^N = \int_0^{\pi} \frac{1}{2AE} N^2(\varphi) R\, d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{1}{2AE} F^2 \sin^2\varphi \, R\, d\varphi$$

$$= \frac{F^2 R}{2AE} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{F^2 R}{2AE}\left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{F^2 R}{\underset{\frac{d^2\pi}{4}}{4A}E}\pi = \frac{F^2 R}{d^2 E} = \underline{\underline{0{,}0555\ mJ}}$$

$$U^{Mk} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2IE} Mk^2(\varphi) R d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{1}{2IE} \cdot F^2 R^2 \sin^2\varphi R d\varphi =$$

$$= \frac{F^2 R^3}{2IE} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{F^2 R^3}{2IE} \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{F^2 R^3}{2IE}\left[\frac{1}{2}\pi\right] = \frac{F^2 R^3 \pi}{4 \underset{\frac{d^4\pi}{64}}{I} E} = \frac{16 F^2 R^3}{d^4 E} = \underline{\underline{987{,}654 \text{ mJ}}}$$

$$U = U^N + U^{Mk} = \underline{\underline{987{,}71 \text{ mJ}}}$$

$$\frac{U^N}{U^{Mk}} = \frac{\frac{F^2 R}{d^2 E}}{\frac{16 F^2 R^3}{d^4 E}} = \frac{F^2 R}{d^2 E} \cdot \frac{d^4 E}{16 F^2 R^3} = \frac{1}{16}\frac{d^2}{R^2} = \underline{\underline{\frac{1}{16}\left(\frac{d}{R}\right)^2}}$$

Kost: $\frac{d}{R} = \underline{\underline{0{,}03}}$

$$\frac{U^N}{U^{Mk}} = \underline{\underline{0{,}005625\ \%}}$$