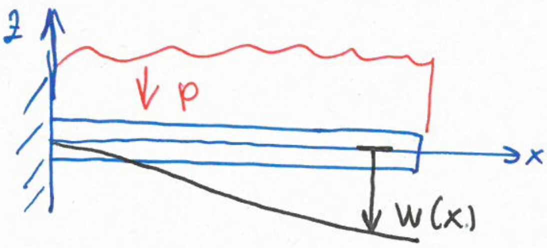
Szilárdságtan - 13. gyakorlat

Rugalmas szál differenciálegyenlete
Kihajlás

Elméleti összefoglaló



Bernoulli - hipotézis

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_h(x)}{I_y E} \quad \text{(görbület)}$$

differenciálgeometriából

$$\kappa = \frac{w''(x)}{\left(1+w'^2(x)\right)^{3/2}} \approx \underline{\underline{w''(x)}}$$

Azaz:

$$\boxed{w''(x) = \frac{-M_h(x)}{I_y E}}$$

+ peremfeltételek

$w(x)$ - lehajlás
$w'(x)$ - szögelfordulás

$w(0)=0$, $w'(0)=0$; $w(0)=0$; $w(0)=0$

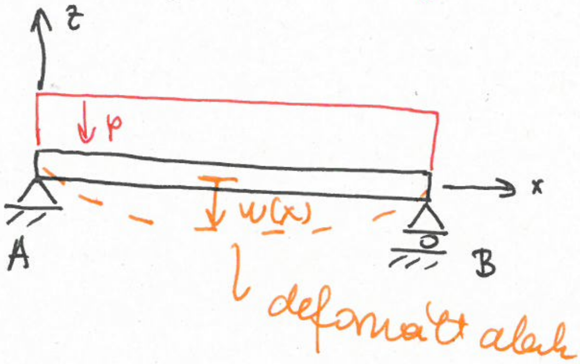
Hogyan tudjuk felírni $w(x)$-t?

↳ meghatározzuk a hajlítónyomatéki függv-t

$w''(x) \Rightarrow$ visszaintegráljuk

↳ a peremfeltételekből az integrálási konstansok meghatározhatóak!

1. feladat a) Határozzuk meg az alábbi tartó lehajlásfgvét és maximális lehajlását!



Adatok:

$E = 200\ GPa$

$p = 2\ kN/m$

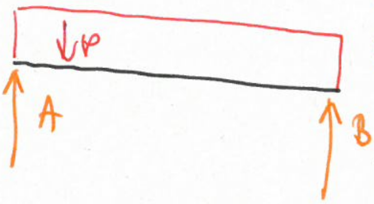
$L = 1m$

$\varnothing d = 40\ mm$

Geometriai adatokból: $I_y = \frac{d^4 \pi}{64} = 125\,664\ mm^4$

• Reakciók: statikailag határozatlan

↳ Castigliano



↳ vagy szimmetria miatt: $A = B = \frac{pl}{2} = 1\ kN$

Ebből a hajlítónyomatéki fgv:

$$M_h(x) = -Ax + \frac{px^2}{2}$$

A rugalmas szál diffegyenletéből: $M_h(x) = -IE\,w''(x)$

+ pf: $w(0) = 0$
$w(L) = 0$

Behelyettesítve:

$$-Ax + \frac{px^2}{2} = -IE\,w''(x) \quad / \int$$

$$-\frac{Ax^2}{2} + \frac{px^3}{6} + C_1 = -IE\,w'(x) \quad / \int$$

$$-\frac{Ax^3}{6} + \frac{px^4}{24} + C_1 x + C_2 = -IE\,w(x)$$

$$w(x) = \left(\frac{Ax^3}{6} - \frac{px^4}{24} \mp C_1 x \mp C_2\right) \cdot \frac{1}{IE}$$

Peremfeltételek:

• $w(0) = 0 \longrightarrow -\frac{C_2}{IE} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

• $w(L) = 0 \longrightarrow \frac{1}{IE}\left(\frac{AL^3}{6} - \frac{pL^4}{24} - C_1 L\right) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{AL^2}{6} - \frac{pL^3}{24}$

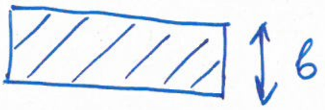
Azaz: $$w(x) = \frac{1}{IE}\left(\frac{AL^3}{6} - \frac{pL^4}{24} + \frac{pL^3}{24}x - \frac{AL^2}{6}x\right)$$

Numerikusan:
$$w(x) = -0{,}00315x^4 + 0{,}00663x^3 - 0{,}00315x$$

$$w_{max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \underline{\underline{-0{,}00103\ m}}$$

a szögelfordulás:
$$w'(x) = -0{,}0132x^4 + 0{,}01989x^2 - 0{,}00315$$
$$w'_{max} = w'(0) = -0{,}00315\ rad = \underline{\underline{-0{,}19°}} = \underline{\underline{w'(L)}}$$

b) Legyen a keresztmetszet téglalap. A maximális normálfeszültség 60 MPa. Mekkora legyen a b/L hányados ha a rúd közepének lehajlása ℓ/600?



$$\sigma_{meg} = 60\ MPa$$
$$w_{max} = -\frac{L}{600}$$

Az előző részből:
$$w_{max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{IE}\underbrace{\left(\frac{AL^3}{48} - \frac{pL^4}{16\cdot 24} + \frac{pL^4}{48} - \frac{AL^3}{12}\right)} = -\frac{L}{600}$$

$$A = \frac{pL}{2} \rightarrow$$

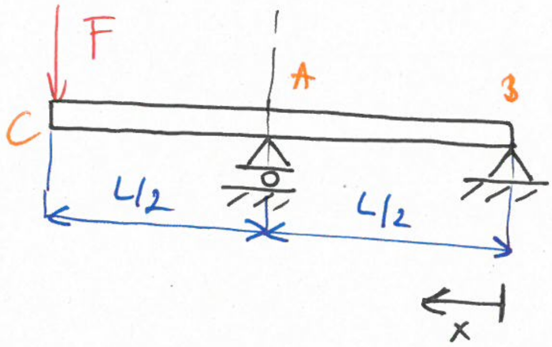
$$\frac{pL^4}{96} - \frac{pL^4}{384} + \frac{pL^4}{48} - \frac{pL^4}{24} = \underbrace{-\frac{5}{384}\frac{pL^4}{IE} = -\frac{L}{600}}$$

$$\hookrightarrow I = \frac{pL^3}{384}\cdot\frac{5\cdot 600}{E} = \underline{\underline{\frac{125}{16}\frac{pL^3}{E}}}$$

$$M_{h\,max} = M_h\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{pL^2}{4} + \frac{pL^2}{8} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}pL^2}}$$

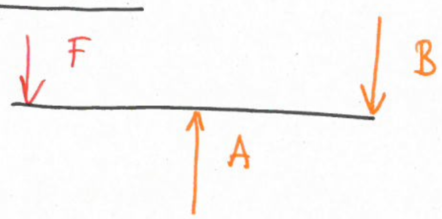
$$\sigma_{max} = \frac{M_{h\,max}}{I}\cdot\frac{b}{2} = \frac{+\frac{1}{8}pL^2}{\frac{125}{16}\frac{pL^3}{E}}\cdot\frac{b}{2} \longrightarrow \frac{b}{L} = \frac{\sigma_{max}\cdot 125}{E} = \underline{\underline{0{,}0375}}$$

2. feladat Hol és mekkora lesz a maximális elmozdulás a vázolt tartó AB szakaszán? Mekkora lesz a C pont lehajlása?



Adott: L, F, IE

- reakciók



$A = 2F$, $B = F$ } nyomatéki egyenletből

Az A-B szakaszon (x)

$$M_h(x) = B \cdot x = Fx$$

a rugalmas szál diffegyenletéből: $M_h(x) = -IE\, w''(x)$

Visszavezetésre:

$$Fx = -IE\, w''(x) \quad / \int$$

- $w(0)=0$
- $w(\frac{L}{2})=0$

$$\frac{Fx^2}{2} + C_1 = -IE\, w'(x) \quad / \int$$

$$\frac{Fx^3}{6} + C_1 x + C_2 = -IE\, w(x)$$

$$w(x) = -\frac{1}{IE}\left(\frac{Fx^3}{6} + C_1 x + C_2\right)$$

peremfeltételek:

- $w(0)=0$ $\quad 0 = -\frac{1}{IE}(0+0+C_2)$ $\quad \hookrightarrow C_2 = 0$
- $w(\frac{L}{2})=0$ $\quad 0 = -\frac{1}{IE}\left(\frac{FL^3}{48} + C_1 \cdot \frac{L}{2}\right) = 0$ $\quad \hookrightarrow C_1 = \frac{-FL^2}{24}$

Azaz:

$$w(x) = \frac{-1}{IE}\left(\frac{Fx^3}{6} - \frac{FL^2}{24}x\right)$$

$$w'(x) = -\frac{1}{IE}\left(\frac{Fx^2}{2} - \frac{FL^2}{24}\right)$$

} az A-B szakaszon érvényes csak!

Hol lesz a maximum? (a lehajlás $w(x)$ minimuma!)

- $w'(x) = 0$

$$w'(x) = -\frac{1}{IE}\left(\frac{Fx^2}{2} - \frac{FL^2}{24}\right) \rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{24} = 0$$

$$12x^2 - L^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{L^2}{12} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{L}{\sqrt{12}} \\ x_2 = -\frac{L}{\sqrt{12}} \;↯ \end{cases}$$

$+\ \boxed{w''(x) = 0!}$

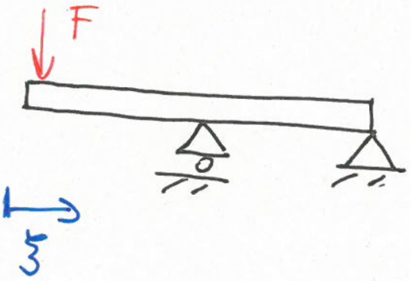
$$w''\left(\frac{L}{\sqrt{12}}\right) = \frac{-M_h\left(\frac{L}{\sqrt{12}}\right)}{IE} = -\frac{1}{IE}\left(B\frac{L}{\sqrt{12}}\right) < 0$$

tehát lokális maximum van!

$$w_{xmax} = \frac{FL^3}{36\sqrt{12}\,IE}$$

$$w'\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{IE}\left(\frac{FL^2}{8} - \frac{FL^2}{24}\right) = \frac{-FL^2}{12IE}$$

- C keresztmetszetre:



$$M_h(\xi) = F\xi$$

a rugalmas szál differenciálegyenlete

$$M_h(\xi) = -IE\,w_2''(\xi)$$

+ peremfeltételek: $w_2\left(\frac{L}{2}\right) = 0$

$$w_2'\left(\frac{L}{2}\right) = -w'\left(\frac{L}{2}\right)$$

illesztési feltétel

az előző részben felírt $w(x)$ fgv (a fordított irány miatt kell a negatív)

$$F\xi = -IE\,w_2''(\xi) \quad /\int$$

$$\frac{F\xi^2}{2} + C_1 = -IE\,w_2' \quad /\int$$

$$\frac{F\xi^3}{6} + C_1\xi + C_2 = -IE\,w_2(\xi)$$

$$w_2(\xi) = -\frac{1}{IE}\left(\frac{F\xi^3}{6} + C_1\xi + C_2\right)$$

$$w_2'(\xi) = -\frac{1}{IE}\left(\frac{F\xi^2}{2} + C_1\right)$$

- $w_2\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{IE}\left(\frac{FL^3}{48} + \frac{C_1 L}{2} + C_2\right) = 0$

- $w_2'\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{IE}\left(\frac{FL^2}{8} + C_1\right) = +\frac{FL^2}{12IE}$

$$\hookrightarrow C_1 = \frac{FL^2}{12} - \frac{FL^2}{8} = \frac{-5FL^2}{24}$$

a másik feltételből:

$$-\frac{1}{IE}\left(\frac{FL^3}{48}+C_1\frac{L}{2}+C_2\right)=0$$

$$-\frac{1}{IE}\left(\frac{FL^3}{48}-\frac{5FL^3}{48}+C_2\right)=0$$

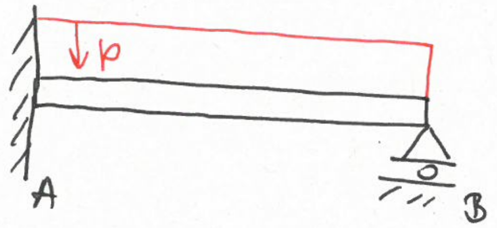
$$\hookrightarrow C_2=\frac{4FL^3}{48}=\underline{\underline{\frac{FL^3}{12}}}$$

azaz: $w_2(\xi) = -\frac{1}{IE}\left(\frac{F\xi^3}{6}-\frac{5FL^2}{24}\xi+\frac{FL^3}{12}\right)$

Tehát: $w_C = w_2(0) = \underline{\underline{-\frac{FL^3}{12IE}}}$

Megjegyzés: ugyanezt Betti vagy Castigliano tétellel sokkal gyorsabb

3. feladat Határozzuk meg a vázolt tartó reakcióit a rugalmas szál differenciálegyenlete segítségével!



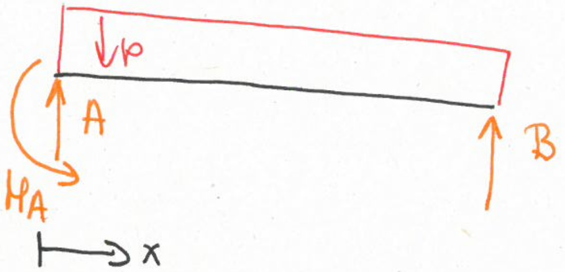
Adott: p, ℓ, IE

$\sum F_x = 0: \quad A_x = 0$

$\sum F_y = 0: \quad A + B - p\ell = 0$

$\sum M_A = 0: \quad M_A - \frac{p\ell^2}{2} + B\ell = 0$

SZTA:



látszik, hogy $\boxed{A_x = 0}$

$\boxed{\text{4 ismeretlen, 3 egyenlet}}$

$$M_h(x) = M_A - Ax + \frac{px^2}{2}$$

A rugalmas szál differenciálegyenlete:

$$M_h(x) = -IE\, w''(x)$$

+ peremfeltételek: $w(0)=0$

$w'(0) = 0$

$w(L) = 0$

Behelyettesítve:

$$M_A - Ax + \frac{px^2}{2} = -IE\, w''(x) \quad /\int$$

$$M_A x - \frac{Ax^2}{2} + \frac{px^3}{6} + C_1 = -IE\, w'(x) \quad /\int \quad \longrightarrow \quad w'(x) = \frac{-1}{IE}\left(M_A x + \frac{px^3}{6} - \frac{Ax^2}{2} + C_1\right)$$

$$\frac{M_A x^2}{2} - \frac{Ax^3}{6} + \frac{px^4}{24} + C_1 x + C_2 = -IE\, w(x)$$

$$w(x) = \frac{-1}{IE}\left(\frac{M_A x^2}{2} - \frac{Ax^3}{6} + \frac{px^4}{24} + C_1 x + C_2\right)$$

peremfeltételekből:

$w(0) = \frac{-1}{IE}(C_2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C_2 = 0}}$

$w'(0) = \frac{-1}{IE}(C_1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C_1 = 0}}$

C_1 és $C_2 = 0$

$$w(\ell) = \frac{-1}{IE}\left(\frac{M_A \ell^2}{2} - \frac{A\ell^3}{6} + \frac{p\ell^4}{24}\right) = 0$$

↳ megvan a (+1) egyenlet

Tehát az egyenletek:

(1) $A + B - p\ell = 0$

(2) $M_A - \frac{p\ell^2}{2} + B\ell = 0$

(3) $\frac{M_A \ell^2}{2} - \frac{A\ell^3}{6} + \frac{p\ell^4}{24} = 0$

(2)$\cdot\frac{\ell^2}{2}$: $\frac{M_A \cdot \ell^2}{2} - \frac{p\ell^4}{4} + \frac{B\ell^3}{2} = 0$

(3) − (2)$\cdot\frac{\ell^2}{2}$: $-\frac{A\ell^3}{6} + \frac{p\ell^4}{24} + \frac{p\ell^4}{4} - \frac{B\ell^3}{2} = 0$

$-\frac{A\ell^3}{6} + \frac{7}{24}p\ell^4 - \frac{B\ell^3}{2} = 0 \quad / : \frac{\ell^3}{6}$

$$-A + \frac{7}{4}p\ell - 3B = 0$$
$$+ \quad A + B - p\ell = 0$$

$$\frac{3}{4}p\ell - 2B = 0$$

$\Rightarrow B = \frac{3}{8}p\ell$

$\Rightarrow A = p\ell - B = \frac{5}{8}p\ell$

$\Rightarrow M_A = \frac{p\ell^2}{2} - B\ell = \frac{p\ell^2}{2} - \frac{3}{8}p\ell^2$

$M_A = \frac{1}{8}p\ell^2$

Kihajlás – elméleti összefoglaló

modell: egyenes nyomott rúd

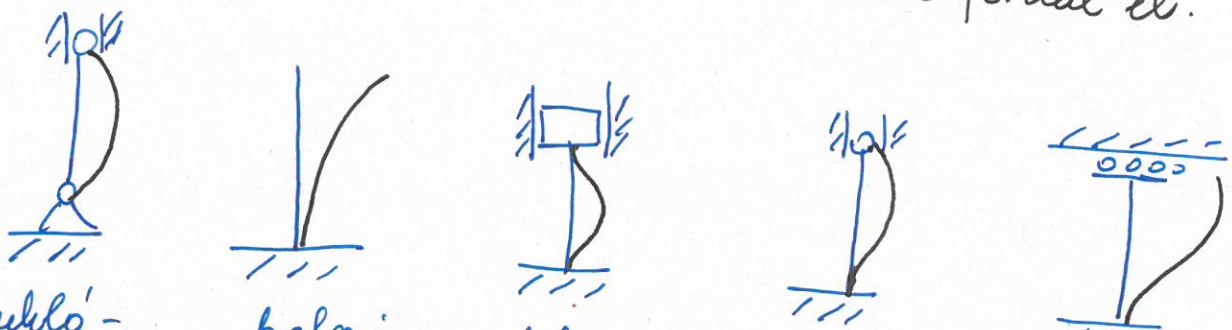
$\lambda = \frac{l_0}{i_2}$ – karcsúság

l_0 – a mértékadó rúdhossz → a félszinuszhullám hossza
~ a rúdvégi peremfeltételek határozzák meg

$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$ (m)

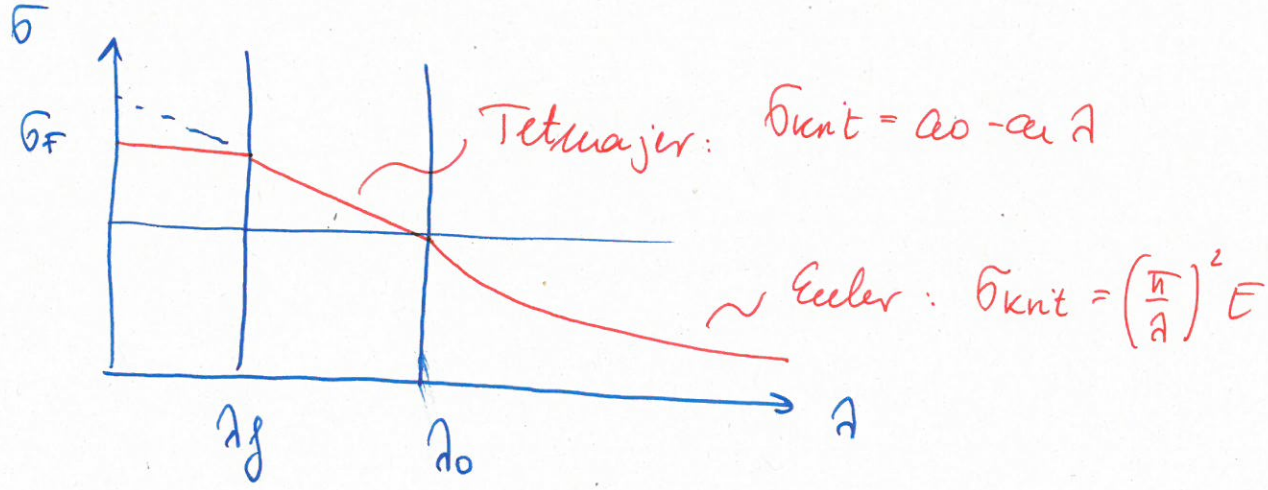
i_2 – inerciasugár

I_2 körül fordul el!



csukló–csukló	befogás – ~~befogás~~	befogás–befogás	befogás–csukló	befogás csúszka
$l_0 = l$	$l_0 = 2l$	$l_0 = \frac{l}{2}$	$l_0 = 0{,}7l$	$l_0 = l$

A kritikus nyomófeszültség (törőfeszültség)



4. feladat Két végén csuklós megtámasztású, állandó 40×50 mm keresztmetszetű acélrudat nyomóerő terhel. Mekkora legyen a rúd hossza, hogy Euler elmélettel számolhassunk?

$\sigma_0 = 230$ MPa (λ_0-hoz)

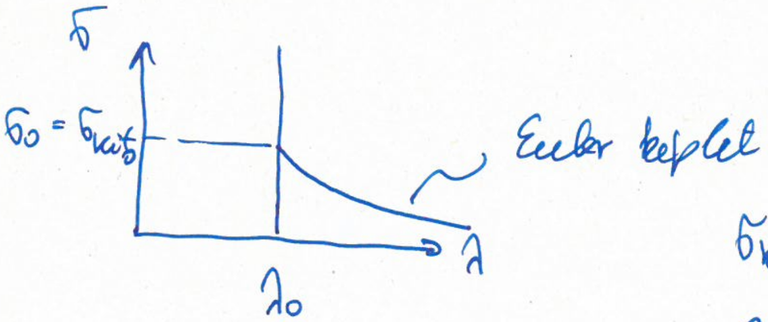
$E = 200$ GPa

Geometriából: $I_2 = \dfrac{50 \cdot 40^3}{12} = 266667 \text{ mm}^4$

$A = 50 \cdot 40 = 2000 \text{ mm}^2$

Az inerciasugár: $i_2 = \sqrt{\dfrac{I_2}{A}} = \underline{\underline{11{,}547 \text{ mm}}}$

A mértékadó rúdhossz: $l_0 = l$ (a csuklós-csuklós megfogás miatt)

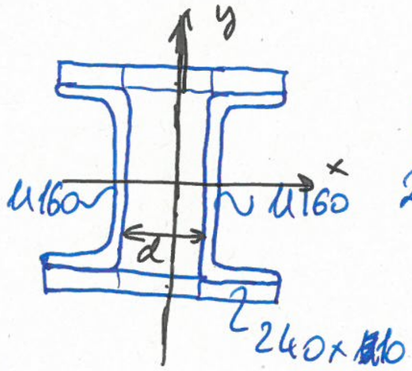


$$\sigma_{krit} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E$$

$$\lambda_0 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} = 92{,}64 \, [-]$$

$$\hookrightarrow \lambda_0 = \frac{l_0}{i_2} \rightarrow l_0 = \lambda_0 i_2 = \underline{\underline{1069{,}72 \text{ mm}}}$$

5. feladat Határozzuk meg a kritikus nyomóerőt a két végén csuklósan megtámasztott, állandó keresztmetszetű acélrúdban merevítéssel és nélküle!



$d = 100\,mm$

$l = 6\,m$

$E = 210\,GPa$

2 db U160-as szelvény

• ha $60 < \lambda < 105$

$\sigma_{krit} = 308 - 1{,}14\,\lambda$ (MPa)

$\uparrow$

Tetmajer

A szelvény geometriai adatai

$I_{xu} = 9{,}25 \cdot 10^6\,mm^4$

$I_{yu} = 8{,}53 \cdot 10^5\,mm^4$

$A_u = 2400\,mm^2$

$e = 18{,}4\,mm$

a) merevítés nélkül

$$I_x = 2 I_{xu} = 1{,}85 \cdot 10^7\,mm^4 \rightarrow I_2$$

$$I_y = 2\left(I_{yu} + \left(\frac{d}{2} + e\right)^2 A_u\right) = 2{,}46 \cdot 10^7\,mm^4$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \underline{\underline{62{,}08\,mm}}$$

$l_0 = l = 6000\,mm$ (mert csuklós-csuklós)

$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = 96{,}65 \rightarrow$ Tetmajer!

$$\sigma_{krit} = 308 - 1{,}14 \cdot \lambda = \underline{197{,}82\,MPa}$$

$$F_{krit} = \sigma_{krit} \cdot A = \underline{\underline{0{,}949 \cdot 10^6\,N}}$$

b) merevítéssel

$$A_b = 2 \cdot A_u + 2 \cdot 10 \cdot 240 = 9600\,mm^2$$

$$I_{xb} = I_{xa} + 2\left(\frac{240 \cdot 10^3}{12} + 85^2 \cdot 10 \cdot 240\right) = 5{,}322 \cdot 10^7\,mm^4$$

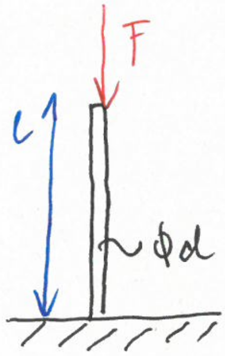
$$I_{yb} = I_{ya} + 2\left(\frac{240^3 \cdot 10}{12}\right) = 4{,}72 \cdot 10^7\,mm^4 \rightarrow \underline{\underline{I_{2b}}}$$

$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = 70{,}4\,mm \rightarrow \lambda_b = \frac{l_0}{i_2} = 85{,}18$ (Tetmajer)!

$$\sigma_{kritb} = 308 - 1{,}14\,\lambda_b = 210{,}903\,\underline{\underline{MPa}}$$

$$\hookrightarrow F_{kritb} = \sigma_{krit} \cdot A_b = \underline{2{,}02 \cdot 10^6\,N}$$

6. feladat Kihajlik-e a baloldali ábrán vázolt rúd az F terhelés hatására? Ha igen, milyen módon lehetne módosítani a szerkezeten, hogy elkerüljük a kihajlást?



Adatok:

$l = 1\,m$

$d = 20\,mm$

$E = 200\,GPa$

$F = 10\,kN$

$\lambda_0 = 100$

befogott - szabad

- $l_0 = 2l$
- $A = \frac{d^2\pi}{4}$
- $I_z = \frac{d^4\pi}{64}$

az inerciasugár:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{d^{4,2}\cancel{\pi}}{\cancel{64}\,16}}{\frac{\cancel{d^2}\cancel{\pi}}{\cancel{4}}}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4} = \underline{\underline{5\,mm}}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_z} = \frac{2l}{i_z} = \underline{\underline{400}}$$ karcsú → Euler

Euler:
$$\sigma_{krit} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E$$

$$F_{krit} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 EA = \underline{\underline{3,88\,kN}}$$ $F > F_{krit}$ → kihajlik

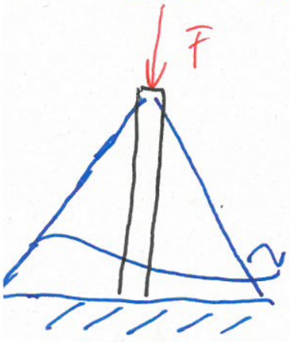
Módosítás:

Ha a rúdvég csak függőlegesen mozdulhat el

csukló-csukló $\Longrightarrow$ $l_0 = 0,7l$

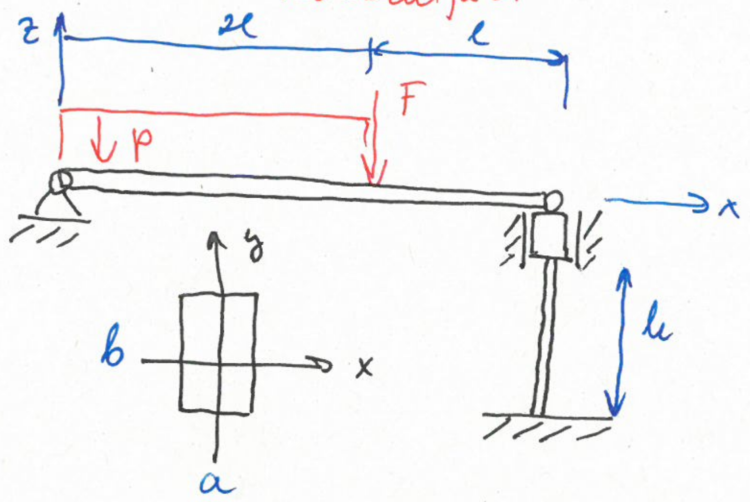
$$\tilde{\lambda} = \frac{0,7l}{i_z} = 140$$

$$\tilde{F}_{krit} = \left(\frac{\pi}{\tilde{\lambda}}\right)^2 EA = 31,644\,kN$$



$F < F_{krit}$ ✓ OK!

7. feladat A vázolt szerkezet rúdjait egy csuszkához kapcsolt C csukló köti össze. A terhelés miatt az a×b keresztmetszetű függőleges rúd felső végének elfordulása és vízszintes elmozdulása zérus. Ellenőrizze, hogy megfelel-e a rúd kihajlásra!
Hány %-kal lesz kisebb a biztonság, ha az a és b méreteket 25%-kal csökkentjük?



Adatok:

$l = 0{,}3\ m$

$a = 10\ mm$

$b = 30\ mm$

$h = 0{,}5\ m$

$p = 30\ kN/m$

$F = 12\ kN$

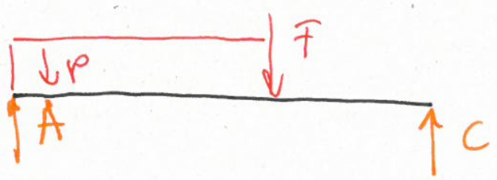
$\sigma_{krit} = 314 - 1{,}14\lambda\ (MPa)$

$\lambda_0 = 105$

$E = 210\ GPa$

Szétbontjuk a szerkezetet

- SZTÁ



$\sum F_x = 0$

$\sum F_z = 0: \quad A + C - F - p2l = 0$

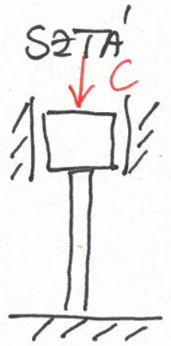
$\sum M_A = 0: \quad -p2l^2 - F \cdot 2l + C \cdot 3l = 0$

$\hookrightarrow C = \dfrac{2pl^2 + 2Fl}{3l}$

$\underline{\underline{C = 14\ kN}}$

$A = 2pl + F - C = \underline{\underline{16\ kN}}$

- SZTÁ



Geometria:

$I_2 = \dfrac{ba^3}{12}$

$A = a \cdot b$

$i_2 = \sqrt{\dfrac{I_2}{A}} = \sqrt{\dfrac{a^3 \cancel{b}}{12 a \cancel{b}}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{12}} = \dfrac{a}{\sqrt{12}} = 2{,}88\ mm$

$l_0 = \dfrac{h}{2}$ mert befogás-befogás $\rightarrow \lambda = \dfrac{l_0}{i_2} = \dfrac{h/2}{i_2} = 16{,}6 \rightarrow$ Tetmajer

$\sigma_{krit} = 314 - 1{,}14\lambda = \underline{\underline{215{,}27\ MPa}}$

$\sigma_z = \dfrac{C}{A} = -46{,}6\ MPa \qquad n_1 = \dfrac{\sigma_{krit}}{\sigma_z} = \underline{\underline{4{,}61}}$

Ha változik a keresztmetszet.

$$\tilde{a} = 0{,}75\,a$$

$$\tilde{b} = 0{,}75\,b \quad \rightarrow \quad \tilde{i}_2 = \frac{\tilde{a}}{\sqrt{12}} = 2{,}165 \text{ mm}$$

$$\tilde{A} = \tilde{a}\,\tilde{b} = \underline{\underline{0{,}75^2 A}} \qquad \tilde{\lambda} = \frac{l/2}{\tilde{i}_2} = 115{,}4 \rightarrow \underline{\underline{\text{Euler!}}}$$

$$\tilde{\sigma}_{krit} = \left(\frac{\pi}{\tilde{\lambda}}\right)^2 E = \underline{\underline{155 \text{ MPa}}} \qquad \tilde{\sigma}_2 = \frac{C}{\tilde{A}} = \underline{\underline{82{,}96 \text{ MPa}}}$$

$$n_2 = \frac{\tilde{\sigma}_{krit}}{\tilde{\sigma}_z} = \underline{\underline{1{,}87}}$$

Mekkora a csökkenés?

$$\frac{n_2}{n_1} = 0{,}406 \rightarrow \underline{59{,}4\ \%\text{-kal csökkent!}}$$