Példatár 6.1

1. feladat Határozzuk meg az alábbi feszültségi állapot esetén a vizsgált pontban ébredő alakváltozási energiasűrűség értékét és ennek alaktorzulásra és térfogatváltozásra jutó részét!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -70 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & -20 \\ 50 & -20 & 30 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$E = 250\ \text{GPa}$
$\nu = 0{,}25$

Feszültségi tenzor felbontása

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_d + \underline{\underline{\sigma}}_h$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 60\ \text{MPa}$$

Ebből:

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_h = \begin{bmatrix} -70 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & -20 \\ 50 & -20 & 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 & 0 & 50 \\ 0 & 80 & -20 \\ 50 & -20 & 10 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Anyagjellemzők:

- Csúsztató rugalmassági modulus: $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 100\ \text{GPa}$
- Bulk modulus (térfogatváltozási modulusz): $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)} = 166{,}667\ \text{GPa}$

Alakváltozási E-sűrűség:

$$u = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d}_{u_d} + \underbrace{\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\varepsilon}}_v}_{u_h}$$

Deviátoros rész:

$$u_d = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d = \frac{1}{4G}\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d = \frac{1}{4G}\left((-90)^2 + 50^2 + 80^2 + (-20)^2 + 50^2 + (-20)^2 + 10^2\right)$$

$$u_d = \frac{20400}{4G} = \underline{\underline{0{,}051}}\ kJ/mm^3 \text{ vagy } J/cm^3$$

Hidrosztatikus rész

$$u_h = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\varepsilon}}_v = \frac{1}{6K}\,\underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\sigma}}_h = \frac{1}{6K}\left(20^2+20^2+20^2\right)$$

$$u_h = 0{,}0012\ kJ/mm^3 \text{ vagy } J/cm^3$$

A teljes alakváltozási energiasűrűség:

$$u = u_h + u_d = 0{,}0522\ kJ/mm^3 \text{ vagy } J/cm^3$$

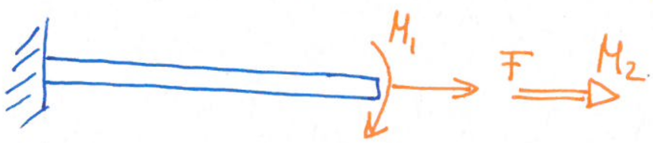
A részarányok:

$$\underline{\frac{u_d}{u} = 97{,}7\,\%} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{\frac{u_h}{u} = 2{,}3\,\%}}$$

2. feladat Egy $L=1\,m$ hosszú, $d=10\,mm$ átmérőjű egyenes rúd végein $F=1\,kN$ húzóerő, M_1 hajlítónyomaték és M_2 csavarónyomaték működik. Hogyan válasszuk meg M_1/F ill. M_2/F arányt, ha azt akarjuk, hogy egyenes terhelések hatására azonos mértékű alakváltozási energia halmozódik fel a rúdban? Mekkora lesz abban az esetben, amikor mindhárom igénybevétel működik, a teljes alakváltozási energia?

Adatok: $E = 200\,GPa$

$\nu = 0{,}3\,MPa$



Igénybevételi fgvek:

$$N(x) = F$$
$$M_h(x) = M_1$$
$$M_t(x) = M_2$$

$\downarrow$ Rúd esetén az alakváltozási Energia

$$\bullet\ U^N = \int_0^l \frac{N^2}{2AE}\,dl = \frac{F^2 \cdot L}{2AE} = \underline{\underline{\frac{2F^2 \cdot L}{d^2 \pi E}}}$$

ha $N(x) = F = \text{const}$

$$\bullet\ U^{M_h} = \int_0^l \frac{M_h^2}{2IE}\,dl = \frac{M_1^2 L}{2IE} = \frac{32 M_h^2 L}{d^4 \pi E}$$

$M_h(x) = M_1 = \text{const}$

$$\bullet\ U^{M_t} = \int_0^l \frac{M_t^2}{2I_pG}\,dl = \frac{M_2^2 L}{2I_pG} = \frac{32 M_2^2 L}{d^4 \pi E}(1+\nu)$$

$M_t(x) = M_2 = \text{const}$

Ha $U^N = U^{M_h}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{2F^2 L}{d^2 \pi E} = \dfrac{32 M_1^2 \cdot L}{d^4 \pi E}$

$$\boxed{\frac{M_1}{F} = \frac{d}{4}}$$

Ha $U^N = U^{Mt}$

$$\frac{2F^2L}{d^2\pi E} = \frac{32M_t^2L(1+\nu)}{d^4\pi E}$$

$$\frac{M_t}{F} = \frac{d}{4\sqrt{1+\nu}}$$

A teljes alakváltozási energia

$$U = U^N + U^{Mh} + U^{Mt} = 3U^N = \frac{6F^2L}{d^2\pi E} = 0{,}095\ \mathrm{J}$$

3. feladat Egy pontbeli feszültségi állapot és a főfeszültségek értéke ismert. Határozzuk meg a Mohr és HMH-féle egyenértékű feszültségeket

$$\underset{=}{\sigma}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 40 & -60 & 0 \\ -60 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Főfeszültségek kiszámítása: Mohr-körökkel vagy sajátérték számításával

:

$$\sigma_1 = 66{,}39 \text{ MPa}$$
$$\sigma_2 = 30 \text{ MPa}$$
$$\sigma_3 = -96{,}39 \text{ MPa}$$

Mohr-féle $\quad \sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \underline{\underline{162{,}79 \text{ MPa}}}$

HMH-féle: $\quad \underset{=}{\sigma}$ tenzor felbontása:

$$\underset{=}{\sigma}_a = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\underset{=}{\sigma})\,\underset{=}{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{\underset{=}{\sigma}_d = \underset{=}{\sigma}}$$

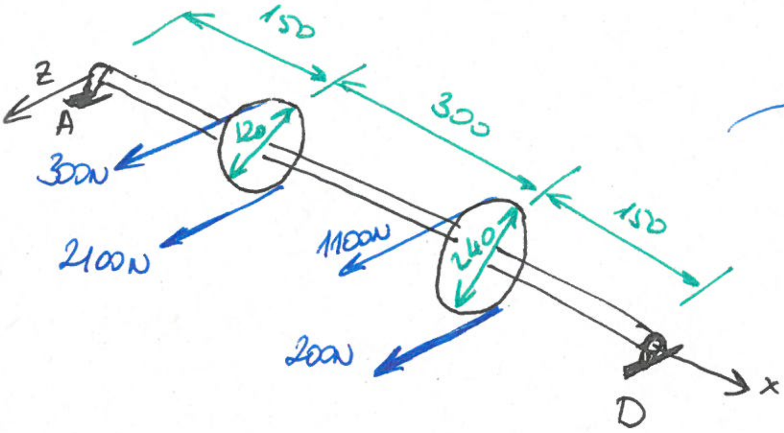
$$\mathrm{tr}\,\underset{=}{\sigma} = 40 - 70 + 30 = 0$$

Ebből: $\quad \sigma_e^{HMH} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\underset{=}{\sigma}_d : \underset{=}{\sigma}_d} = 147{,}99 \text{ MPa}$

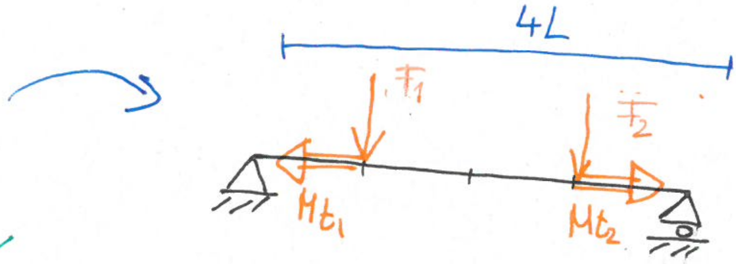
$$\underset{=}{\sigma}_d : \underset{=}{\sigma}_d = 40^2 + (-60)^2 + (-60)^2 + (-70)^2 + (30)^2 = 14600 \text{ MPa}^2$$

4. feladat

Egy 20 mm átmérőjű acél tengelyt az A és D csapágyak támasztják meg, amelyek engedik a tengelyek kismértékű szögelfordulását. Az A csapágy gátolja a tengelyirányú elmozdulást, míg a D csapágy engedi. A tengely terhelése a B és C szíjtárcsákról átadódó erők és nyomatékok. Határozzuk meg a tengelyben ébredő maximális Mohr és HMH-féle egyenértékű feszültséget! Mekkora legyen a tengely átmérője, ha $\sigma_{meg} = 300\,MPa$?



$L = 150$



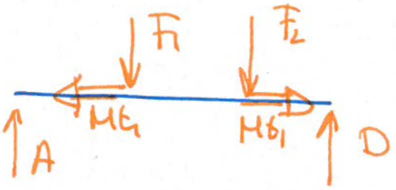
$$F_1 = 300 + 2100 = 2400\,N$$

$$F_2 = 1100 + 200 = 1300\,N$$

$$Mt_1 = Mt_2 = (2100-300)\cdot 60 = (1100-200)\cdot 120 = \underline{\underline{108\,Nm}}$$

Reakciók

SZTÁ



Egyensúlyi egyenletek:

$$\Sigma F_x = 0 \;:\; 0 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \;:\; A + D - F_1 - F_2 = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \;:\; -F_1 L - F_2 \cdot 3L + D\, 4L = 0$$

$$\hookrightarrow D = \frac{F_1 + 3F_2}{4} = \underline{\underline{1575\,N}}$$

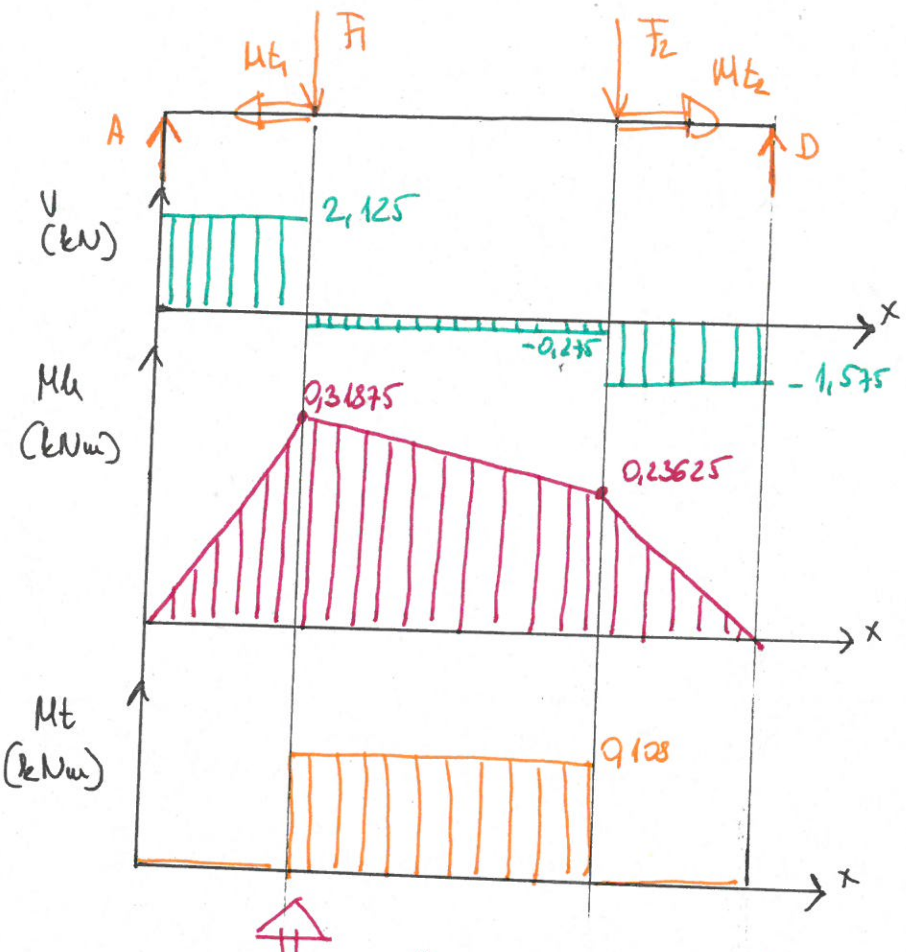
$$\hookrightarrow A = F_1 + F_2 - D = \underline{\underline{2125\,N}}$$

Geometria:

$$K_y = \frac{d^3\pi}{32} = 785{,}4\,mm^3$$

$$K_p = \frac{d^3\pi}{16} = 1570{,}8\,mm^3$$

Igénybevételi függvények



veszélyes pont

A keresztmetszet szélső pontjai lesznek veszélyesek.

$Mh = 0{,}31875$ kNm
$Mt = 0{,}108$ kNm
} mivel hajlított és csavart rúd

⇓ redukált nyomaték:

$$M_{red} = \sqrt{Mh^2 + c\,Mt^2}$$

↳ HMH: $c = 0{,}75 \rightarrow M_{red}^{HMH} = 0{,}332189$ kNm

↳ Mohr: $c = 1 \rightarrow M_{red}^{Mohr} = 0{,}336549$ kNm

Egyenértékű feszültségek:

$$\sigma_e^{HMH} = \frac{M_{red}^{HMH}}{K_y} = 422{,}96 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e^{Mohr} = \frac{M_{red}^{Mohr}}{K_y} = 428{,}51 \text{ MPa}$$

Látjuk, hogy Mohr a biztonság irányában téved!

Méretezés → megengedett: $\sigma_{meg} = 300\ MPa$!

- HMH szerint

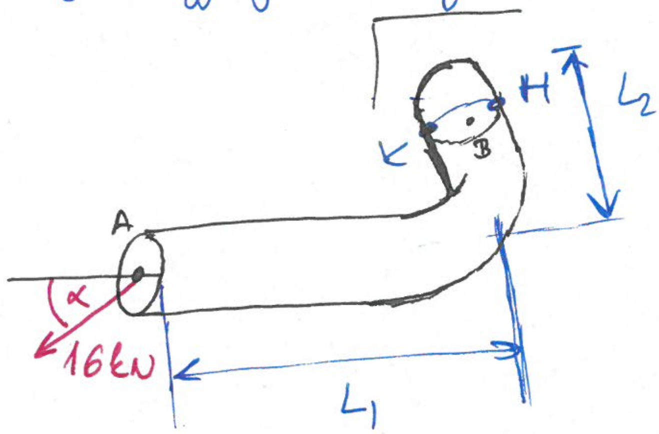
$$\sigma_e^{HMH} = \sigma_{meg}$$

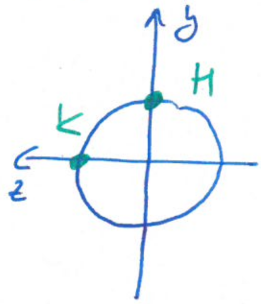
$$\frac{M_{red}^{HMH}}{K_{y\,min}} = \sigma_{meg}$$

$$\frac{d^3\pi}{32} = \frac{M_{red}^{HMH}}{\sigma_{meg}} \rightarrow d_{min}^{HMH} = \sqrt[3]{\frac{32\, M_{red}^{HMH}}{\pi \cdot \sigma_{meg}}} = \underline{\underline{22{,}43\ mm}}$$

- Mohr → hasonlóan → $d_{min}^{Mohr} = \sqrt[3]{\dfrac{32\, M_{red}^{Mohr}}{\pi\, \sigma_{meg}}} = \underline{\underline{22{,}52\ mm}}$

5. feladat Egy 140 mm külső átmérőjű és 7 mm falvastagságú csőidom terhelése és megfogása az ábrán látható. Határozzuk meg a H és K felületi pontokban a Mohr- és HMH-féle egyenértékű feszültségek nagyságát! A nyírásból adódó feszültséget hanyagoljuk el!





$\alpha = 55°$

$L_1 = 1300$ mm

$L_2 = 700$ mm

$d = 140$ mm

$t = 7$ mm

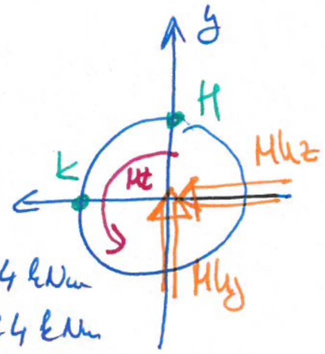
$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \sin\alpha \\ 16 \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -13{,}1064 \\ 9{,}17722 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

A: vizsgált km-be (annak súlypontjába mutató) helyvektor:

$$\underline{r}_{BA} = \begin{pmatrix} 700 \\ 0 \\ 1300 \end{pmatrix} \text{ m}$$

↳ A km-ben fellépő nyomatékok:

$$\underline{M} = \underline{r}_{BA} \times \underline{F} = \begin{pmatrix} 17{,}0384 \\ -6{,}424 \\ -9{,}1745 \end{pmatrix} \underline{\underline{\text{kNm}}}$$



$M_t = 17{,}0384$ kNm

$M_{hy} = -6{,}424$ kNm

$M_{hz} = -9{,}1745$ kNm

Geometriai jellemzők:

$$I_y = I_z = \frac{\left(d^4 - (d-2t)^4\right)\pi}{64} = 6{,}485 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$K_y = K_z = \frac{I_y}{d/2} = 92643{,}8 \text{ mm}^3$$

$$I_p = 2 I_y = 12{,}97 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$K_p = \frac{I_p}{d/2} = 185288 \text{ mm}^3$$

H - pont:

Hajlításból: $\sigma_{max}^{H} = \left|\frac{M_{hz}}{K_z}\right| = 99,03\ MPa$

Csavarásból: $\tau_{max}^{H} = \left|\frac{M_t}{K_p}\right| = 91,96\ MPa$

$\Downarrow$ 1 σ és 1 τ feszültség

$$\sigma_{e_H}^{Mohr} = \sqrt{\left(\sigma_{max}^{H}\right)^2 + 4\left(\tau_{max}^{H}\right)^2} = 208,88\ MPa$$

$$\sigma_{e_H}^{HMH} = \sqrt{\left(\sigma_{max}^{H}\right)^2 + 3\left(\tau_{max}^{H}\right)^2} = 187,55\ MPa$$

K-pont:

Hajlításból: $\sigma_{max}^{K} = \left|\frac{M_{hy}}{K_y}\right| = 69,34\ MPa$

Csavarásból: $\tau_{max}^{K} = \left|\frac{M_t}{K_p}\right| = 91,96\ MPa$

$\Downarrow$

$$\sigma_{e_K}^{Mohr} = \sqrt{\left(\sigma_{max}^{K}\right)^2 + 4\left(\tau_{max}^{K}\right)^2} = 196,55\ MPa$$

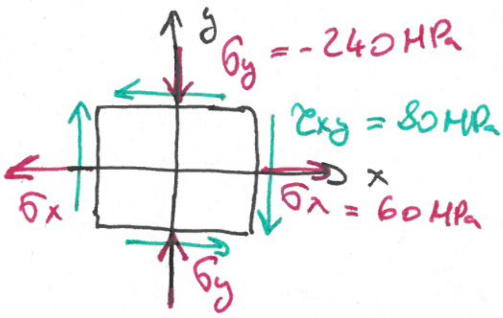
$$\sigma_{e_K}^{HMH} = \sqrt{\left(\sigma_{max}^{K}\right)^2 + 3\left(\tau_{max}^{K}\right)^2} = 173,71\ MPa$$

Példatár 6.6

6. feladat

Egy felületi pont feszültségi állapotát szemlélteti az alábbi ábra. Mekkora a $\sigma_F = 500$ MPa folyáshatárral számolni biztonsági tényező, ha a Mohr-féle egyenértékű feszültséggel számolunk?

Mekkora p felületi nyomás esetén lesz a HMH-féle egyenértékű feszültség 340 MPa = ?



$\sigma_x = 60$ MPa
$\sigma_y = 240$ MPa
$\tau_{xy} = 80$ MPa
$\sigma_z = 0$ MPa

Feszültségi tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 60 & -80 & 0 \\ -80 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \longrightarrow$$

(Mohr körökkel v. sajátérték/saját v.)

Főfeszültségek

$\sigma_1 = 80$ MPa
$\sigma_2 = 0$ MPa
$\sigma_3 = -260$ MPa

Mohr-féle egyenértékű fesz.:

$$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = 340 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{\sigma_F}{\sigma_e^{Mohr}} = \underline{\underline{1,47}}$$

b) felületi nyomás $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\sigma_z = -p}}$

Ekkor
$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 60 & -80 & 0 \\ -80 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Bontsuk fel 2 részre:

$$\text{tr}\,\underline{\underline{\sigma}} = 60 - 240 - p = \underline{\underline{-180 - p}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_H = \frac{1}{3}(\text{tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -60-\frac{p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -60-\frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -60-\frac{p}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_H = \begin{bmatrix} 120+\frac{p}{3} & -80 & 0 \\ -80 & -180+\frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 60-\frac{2}{3}p \end{bmatrix}$$

Egyenértékű feszültség

$$\sigma_e^{HMH} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d} = \underline{\underline{340\ MPa}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d = \left(120+\frac{p}{3}\right)^2 + (-80)^2 + (-80)^2 + \left(-180+\frac{p}{3}\right)^2 + \left(60-\frac{2}{3}p\right)^2 =$$

$$= \frac{2p^2}{3} - 120p + 63200$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}p^2 - 120p + 63200\right)} = 340:$$

$\hookrightarrow$ $p_1 = \underline{\underline{-80\ MPa}}$ ↯

$\hookrightarrow$ $p_2 = \underline{\underline{260\ MPa}}$ ✓

Mivel felületi nyomás $\rightarrow$ $p>0$ $\rightarrow$ $\boxed{p = 260\ MPa}$

7. feladat Hányszorosa a Mohr-féle egyenértékű feszültség a HMH-féle egyenértékű feszültségnek az alábbi feszültségi állapot esetén? Hogyan változik ez, ha a diagonál helyén is τ-val megegyező normálfeszültségek működnek?

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

Mohr-féle egyenértékű feszültség:

↳ főfeszültségek számítása

↳ mivel nincs ismert főirány → sajátérték, sajátvektor

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\sigma & \tau & 0 \\ \tau & -\sigma & \tau \\ 0 & \tau & -\sigma \end{vmatrix} = -\sigma(\sigma^2 - \tau^2) - \tau(\tau(-\sigma)) = -\sigma^3 + 2\sigma\tau^2 = 0$$

$$-\sigma(\underbrace{+\sigma^2 - 2\tau^2}) = 0$$

↳ $\sigma_1 = \sqrt{2}\,\tau$

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -\sqrt{2}\,\tau$

↳ $\sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{2}\,\tau + \sqrt{2}\,\tau = 2\sqrt{2}\,\tau$

HMH-féle egyenértékű feszültség:

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_H \qquad \underline{\underline{\sigma}}_H = \frac{1}{3}\underbrace{tr(\underline{\underline{\sigma}})}_{0}\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_d \quad \longrightarrow \quad \sigma_e^{HMH} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d} = \sqrt{\frac{3}{2}4\tau^2} = \sqrt{6}\,\tau$$

A kétpontszorzás: $\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d = 4\tau^2$

Tehát az arány: $\dfrac{\sigma_{egy}^{Mohr}}{\sigma_{egy}^{HMH}} = \dfrac{2\sqrt{2}\,\tau}{\sqrt{6}\,\tau} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cong 1{,}155$

b) Adjunk hozzá τ feszültségeket a diagonálelemekbe!

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \tau & \tau & 0 \\ \tau & \tau & \tau \\ 0 & \tau & \tau \end{bmatrix}$$

↳ Mohr-féle:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \tau-\sigma & \tau & 0 \\ \tau & \tau-\sigma & \tau \\ 0 & \tau & \tau-\sigma \end{vmatrix} = \tau-\sigma\left((\tau-\sigma)^2-\tau^2\right)-\tau\left(\tau(\tau-\sigma)\right) =$$

$$=(\tau-\sigma)(\sigma^2-2\sigma\tau-\tau^2) = 0$$

↳ $\sigma_1 = (1+\sqrt{2})\tau$

↳ $\sigma_2 = \tau$

↳ $\sigma_3 = (1-\sqrt{2})\tau$

$$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{2}\,\tau$$ → Nem változik!

↳ HMH-féle

$$\underline{\underline{\sigma_h}} = \frac{1}{3}\underbrace{(tr\,\underline{\underline{\sigma}})}_{\tau}\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma_d}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma_h}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$ → Nem változik!