Főfeszültségek, főirányok számítása

Példatár 4.9

1. feladat A feszültségi tenzor mátrixa egy anyagi pontban az xyz koordinátarendszerben ismert. Határozzuk meg a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat sajátérték - sajátvektor számítással! Ábrázoljuk a feszültségi állapotot Mohr - körökkel!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 90 & 40 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Sajátérték, sajátvektor számítás:

karakterisztikus egyenlet

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma\underline{\underline{E}})\underline{n} = \underline{0} \longrightarrow \det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma\underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 90-\sigma & 40 & 0 \\ 40 & 30-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -50-\sigma \end{vmatrix} = (-50-\sigma)\left[(90-\sigma)(30-\sigma) - 40^2\right] =$$

$$= (-50-\sigma)(\sigma^2 - 120\sigma + 1100) = 0$$

$\hookrightarrow \sigma_1 = -50$ $\quad$ $\hookrightarrow \sigma_2 = 110$

$\hookrightarrow \sigma_3 = 10$

Sorbarendezés után a főfeszültségek

$\sigma_1 = 110$ MPa

$\sigma_2 = 10$ MPa

$\sigma_3 = -50$ MPa

- $\sigma_1 = 110$ MPa - hoz tartozó sajátvektor: $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1\underline{\underline{E}})\underline{n}_1 = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 90-110 & 40 & 0 \\ 40 & 30-110 & 0 \\ 0 & 0 & -50-110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1x} \\ n_{3x} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Vegyük észre, hogy az eredeti mátrixban $\rightarrow \sigma_z = -50\,MPa = \sigma_3$.

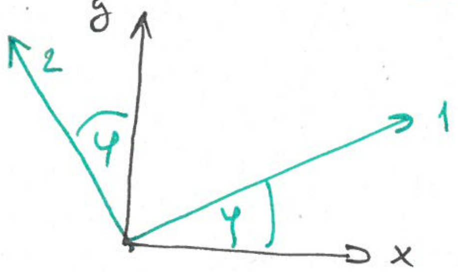
$\downarrow$ főfeszültség

$\Downarrow$ $\underline{k}$ vektor főirány

$\boxed{\underline{n}_3 = \underline{k}}$

$\hookrightarrow$ Emiatt a másik két főirány az xy síkon van

$\hookrightarrow$ $\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$



<u>Behelyettesítve</u>: (σ_1-hez tartozó sajátvektor egyenletébe)

$$\begin{bmatrix} -20 & 40 & 0 \\ 40 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & -160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $-20\cos\varphi + 40\sin\varphi = 0$

$$40\sin\varphi = 20\cos\varphi$$

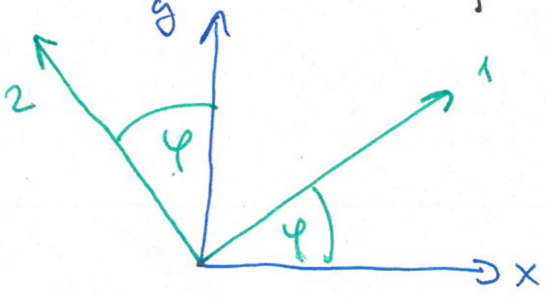
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 26{,}57°}}$$

<u>Tehát</u>:

$$\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}447 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{n}_2$-t pedig úgy kell meghatározni, hogy jobbsodrású rendszer legyen!

$$\underline{n}_2 = \underline{n}_3 \times \underline{n}_1 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}447 \\ 0{,}894 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Mohr-körökkel

Emlékeztető: $\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 90 & 40 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$ MPa

↳ $\sigma_x = 90$ MPa
↳ $\tau_{xy} = 40$ MPa
↳ $\sigma_y = 30$ MPa
↳ $\sigma_z = -50$ MPa

A Mohr körök felrajzolását csak akkor végezhetjük el, ha az egyik főfeszültség ismert!

↳ Most, mivel $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$\boxed{\sigma_z = -50 \text{ MPa}}$$

$\underline{z}$ irány főirány

A Mohr kör szerkesztésének lépései:

① vegyük fel a nem ismert főfeszültségi síkon a két pontot, amit kijelöl számunkra a feszültségi tenzor mátrixa. Valamint vegyük fel az ismert főfeszültséget

$X(\sigma_x, |\tau_{xy}|) = (90, 40)$

$Y(\sigma_y; |\tau_{xy}|) = (30, 40)$

$Z(\sigma_z; 0) = (-50; 0)$

② Számítsuk ki a Mohr kör középpontját és sugarát

$$\sigma_K = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 60 \text{ MPa}$$

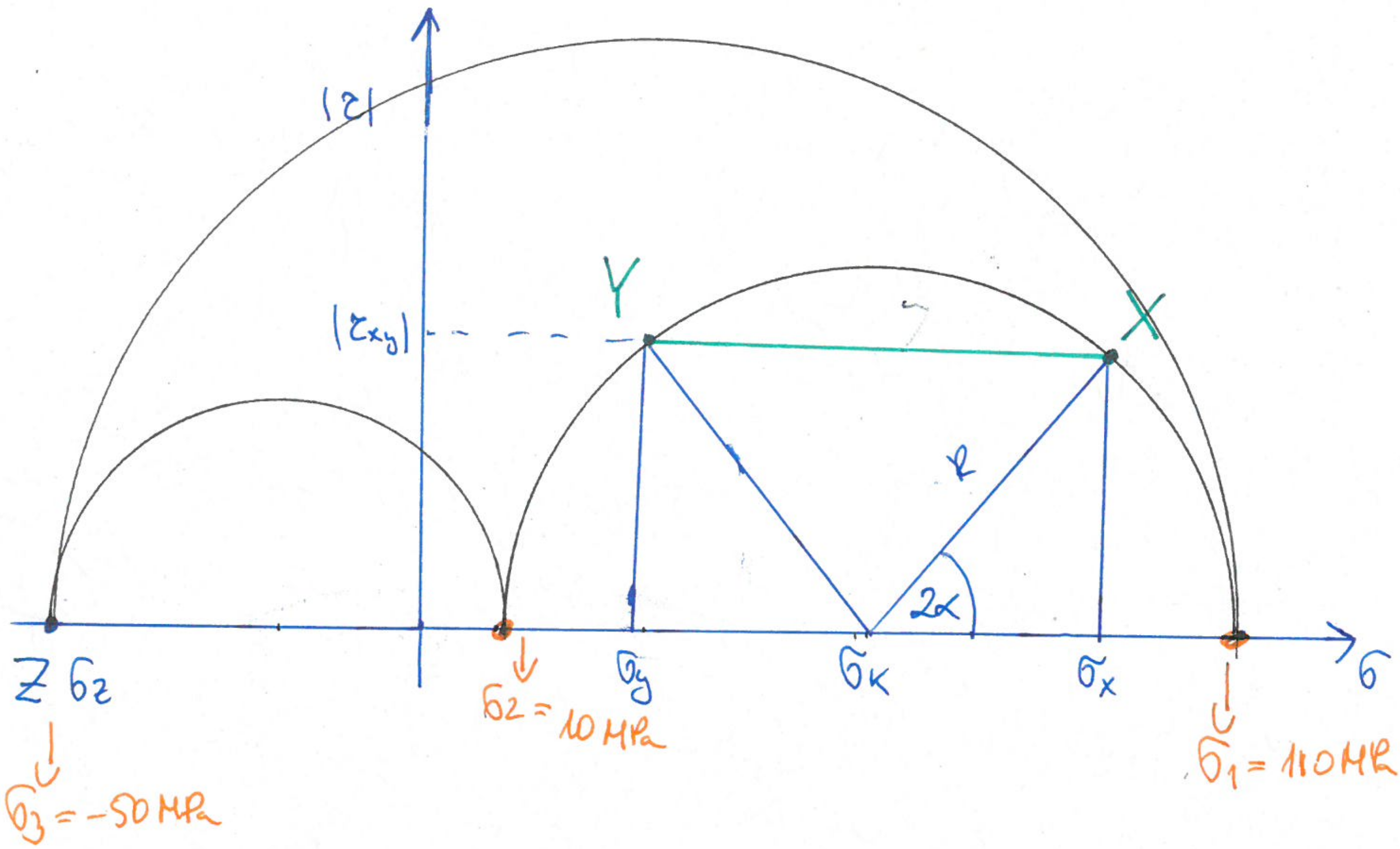
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 \text{ MPa}$$

③ Rajzoljuk meg az X, és Y pontokon átmenő Mohr kört. Határozzuk meg a főfeszültségeket!

$\sigma_1 = \sigma_K + R = 110$ MPa

$\sigma_2 = \sigma_K - R = 10$ MPa

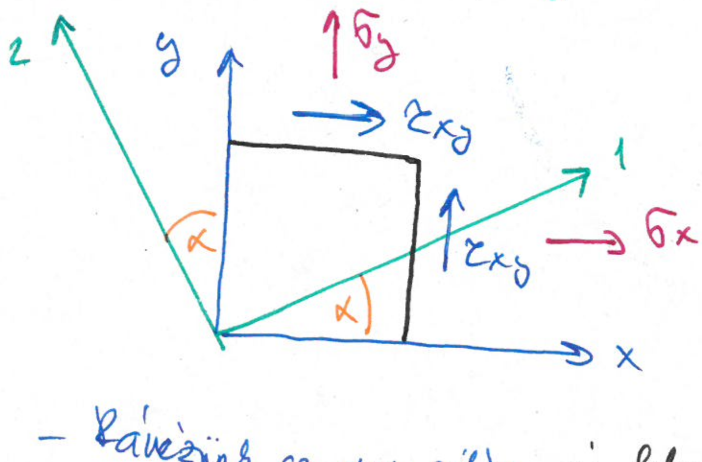
Az indexelésnél nézzük, hogy σ_z-hez képest hova esnek $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$



④ Az α szög meghatározása

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\,|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \underline{\underline{26{,}57^\circ}}$$

⑤ A sajátvektorok irányának meghatározása



→ x-tengelyt forgatjuk

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}447 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}447 \\ 0{,}894 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ránézünk az x-y síkra és felrajzoljuk a feszültségi kiskockát!
- Az a tengelyt forgatjuk, amelyik pontja közelebb van a nagyobb főfeszültséghez.
- A forgatás irányát τ_{xy} iránya adja meg

2. feladat A feszültségi tenzor mátrixa egy adott anyagi pontban az xyz koordinátarendszerben ismert. Határozza meg a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat sajátérték - sajátvektor számítással, majd ellenőrizze azt a Mohr-körök felrajzolásával!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -40 \\ 0 & -40 & -10 \end{bmatrix} MPa$$

Sajátérték, sajátvektor számítás

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}})\underline{n} = \underline{0} \longrightarrow \det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma\underline{\underline{E}}) = 0$$

Azaz:

$$\begin{vmatrix} -30-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -20-\sigma & -40 \\ 0 & -40 & -10-\sigma \end{vmatrix} = (-30-\sigma)\left((-20-\sigma)(-10-\sigma) - (-40)^2\right)$$

$$= (-30-\sigma)(\sigma^2 + 30\sigma - 1400) = 0$$

$\hookrightarrow \sigma_1 = -30\ MPa$ $\quad\hookrightarrow \sigma_2 = 25{,}31\ MPa$

$\hookrightarrow \sigma_3 = -55{,}31\ MPa$

A sorbarendezett főfeszültségek:

$\sigma_1 = 25{,}31\ MPa$

$\sigma_2 = -30\ MPa$

$\sigma_3 = -55{,}31\ MPa$

A σ_1-hez tartozó sajátvektor:

Látjuk $\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)}$ mátrixból, hogy $\sigma_x = \sigma_2 = -30\ MPa$ főfeszültség

$\hookrightarrow \underline{n}_2 = \underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ főirány!

A többi főirányt az y-z síkon kell keresni!

$\underline{n}_1 = ?\quad \underline{n}_3 = ?$

6

$\underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$ alakban keresendő:

$\hookrightarrow \ (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}})\underline{n}_2 = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} -30-\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -20-\sigma_1 & -40 \\ 0 & -40 & -10-\sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -55{,}31 & 0 & 0 \\ 0 & -45{,}31 & -40 \\ 0 & -40 & -35{,}31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \underline{0}$$

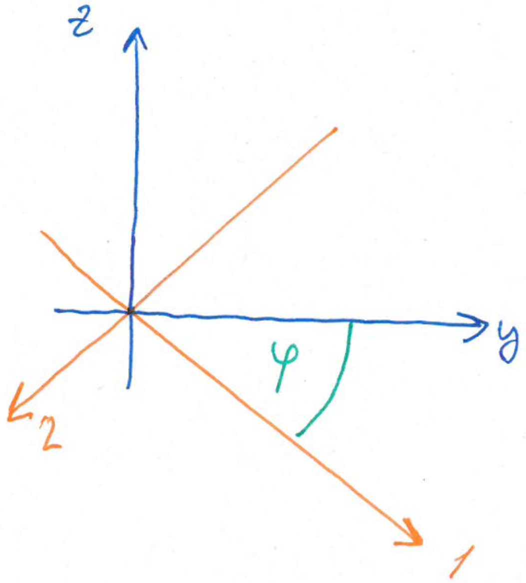
$\hookrightarrow \ -45{,}31\cos\varphi - 40\sin\varphi = 0$

$\mathrm{tg}\,\varphi = -1{,}133$

$\varphi = \underline{\underline{-48{,}56^\circ}} \rightarrow \underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}662 \\ -0{,}75 \end{bmatrix}$

$\downarrow$ jobbsodrásúság miatt

$\underline{n}_3 = \underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}75 \\ -0{,}662 \end{bmatrix}$



Főfeszültségek számítása Mohr-körökkel

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -40 \\ 0 & -40 & -10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

mivel $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \longrightarrow \sigma_x = -30 \text{ MPa}$ főfeszültség

$\underline{n}_x = \underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ főirány

↳ ① Feszültségi pontok:

$$Y(\sigma_y; |\tau_{yz}|) = (-20; 40)$$

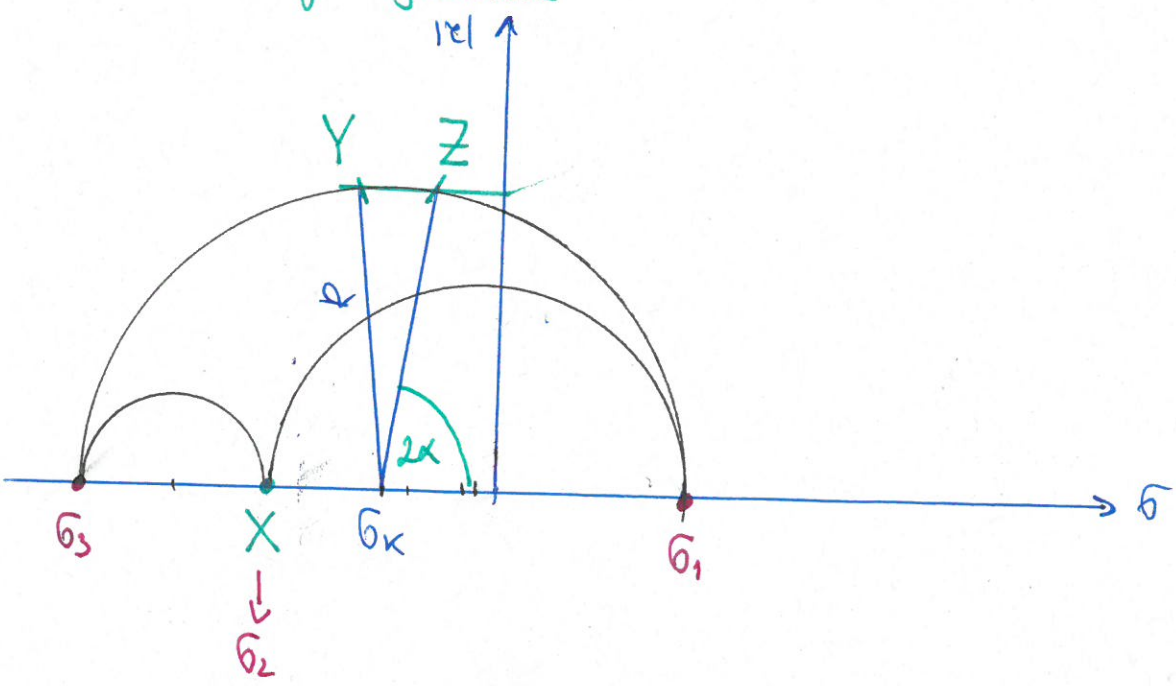
$$Z(\sigma_z; |\tau_{yz}|) = (-10, 40)$$

② Mohr-kör sugara, középpontja

$$\sigma_K = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = -15 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = 40{,}31 \text{ MPa}$$

③ Mohr-kör felrajzolása



$$\sigma_1 = \sigma_K + R = 25{,}31 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = -30 \text{ MPa}$$

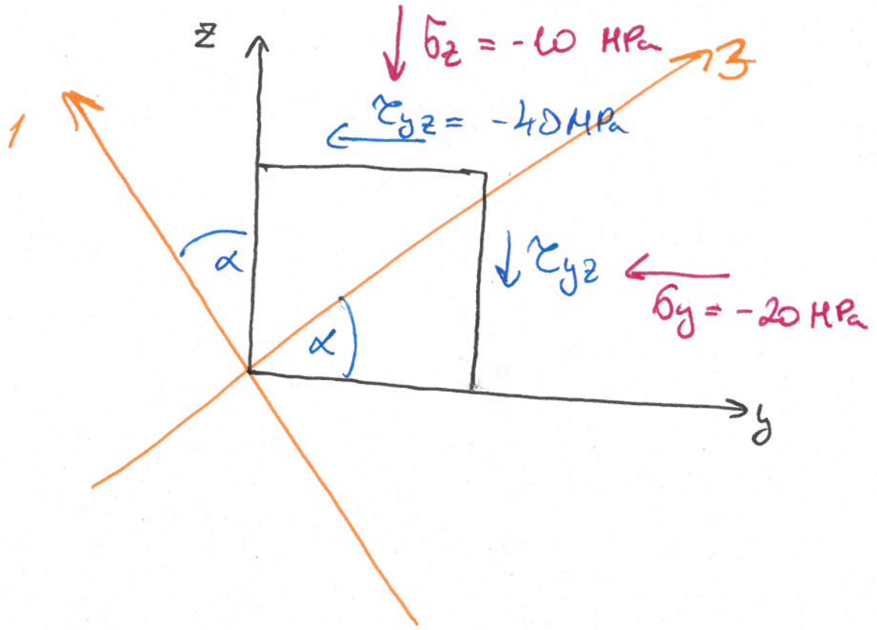
$$\sigma_3 = \sigma_K - R = -55{,}31 \text{ MPa}$$

Az α-szög meghatározása,

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\,|\tau_{yz}|}{\sigma_y - \sigma_z}\right) = 41{,}44^\circ$$

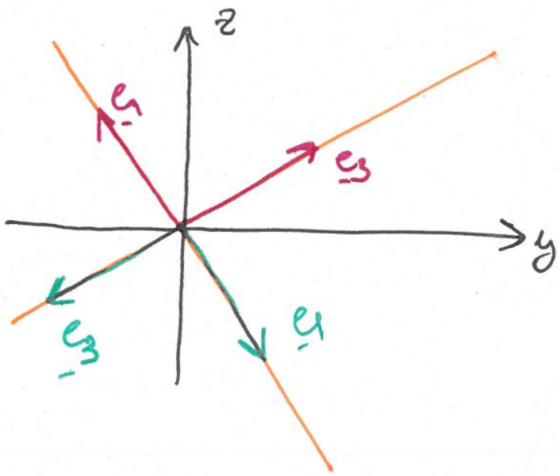
↳ Mivel a 2-pont van a legközelebb σ_1-hez

↳ 2-tengelyt kell forgatni τ_{yz} irányába



Ebből:
$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}662 \\ 0{,}75 \end{bmatrix}$$
→ jobbsodrású miatt
$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}75 \\ 0{,}662 \end{bmatrix}$$

Hasonlítsuk össze a két megoldásunk a főirányokat



Mohr-kör

Sajátérték - sajátvektor

⇓

Mindkét megoldás helyes
- a sajátvektor (-1) szerese is sajátvektor!

Példatár 4.11

3. feladat A feszültségi tenzor mátrixa egy anyagi pontban az xyz koordinátarendszerben ismert. Határozzuk meg a főfeszültségeket és a feszültség főirányokat sajátérték - sajátvektor számítással! Ellenőrizzük a számítást a Mohr - körök felrajzolásával!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Sajátérték, sajátvektor számítás

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}})\underline{n} = \underline{0} \longrightarrow \det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

Behelyettesítve:

$$\begin{vmatrix} 0-\sigma & 0 & 100 \\ 0 & 100-\sigma & 0 \\ 100 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = (100-\sigma)\left[(-\sigma)(-\sigma) - 100^2\right] =$$

$$(100-\sigma)(\sigma^2 - 100^2) = 0$$

$\hookrightarrow \sigma_1 = 100$ MPa $\quad \hookrightarrow \sigma_2 = 100$ MPa

$\hookrightarrow \sigma_3 = -100$ MPa

A főfeszültségek (sorba rendezve!)

$\sigma_1 = 100$ MPa

$\sigma_2 = 100$ MPa

$\sigma_3 = -100$ MPa

Itt lehetne σ_2-nek is választani!

Tudjuk, hogy $\sigma_y = \sigma_1 = 100$ MPa főfeszültség

$$\underline{n}_1 = \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ A sajátvektorokat az x-z síkon keressük

$\underline{n}_2 = ?$; $\underline{n}_3 = ?$

$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \to$ visszaírjuk

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_2 \underline{\underline{E}})\underline{u}_2 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -\sigma_2 & 0 & 100 \\ 0 & 100-\sigma_2 & 0 \\ 100 & 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \underline{0}$$

<u>Numerikusan:</u>

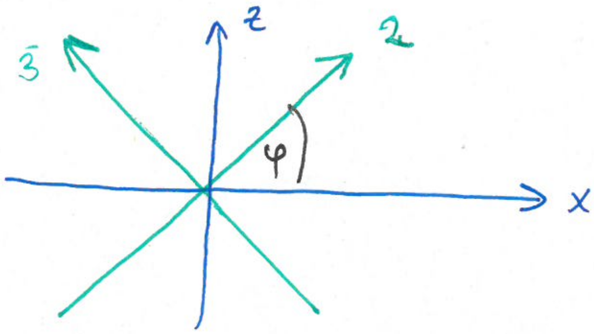
$$\begin{bmatrix} -100 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \underline{0}$$

(Látható amúgy, hogy mivel $\sigma_1 = \sigma_2 = 100$ MPa $\to$ kétszeres sajátérték miatt 2 sor is kiesik!)

$$-100\cos\varphi + 100\sin\varphi = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = 1 \to \underline{\underline{\varphi = 45^\circ}}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}707 \\ 0 \\ 0{,}707 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0{,}707 \\ 0 \\ 0{,}707 \end{bmatrix}}}$$



Főfeszültségek számítása Mohr-körökkel

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{yz} = 0 \rightarrow \sigma_y = 100 \text{ MPa} \quad \text{főfeszültség}$$

$$\underline{n}_y = \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{főirány.}$$

① Feszültségi pontok

$$X(\sigma_x; |\tau_{xz}|) = (0, 100)$$

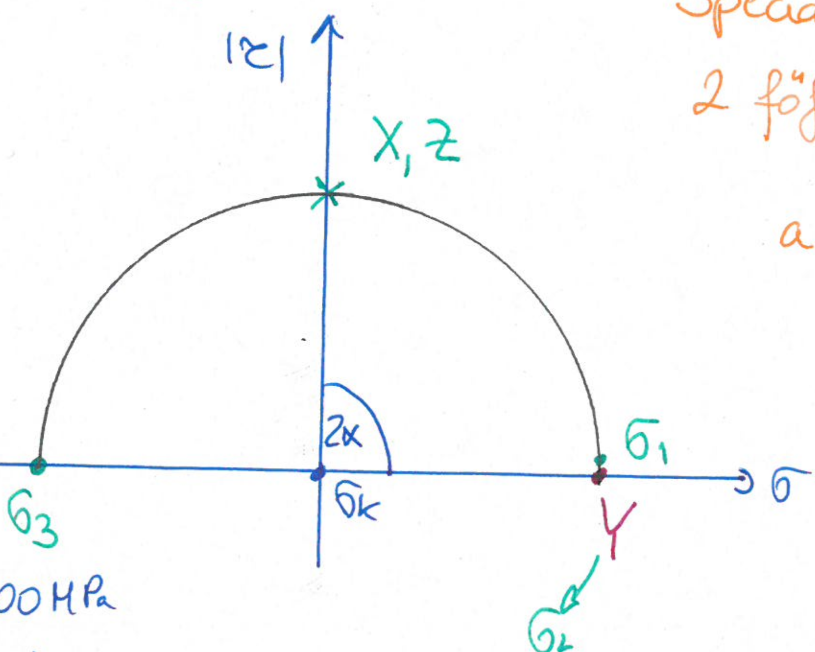
$$Z(\sigma_z; |\tau_{xz}|) = (0, 100)$$

② Mohr-kör sugara, középpontja:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = 0 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 100 \text{ MPa}$$

③ Mohr-kör felrajzolása



Speciális eset:
2 főfeszültség egyforma!
⇓
a 3 körből
1 lesz!

$\sigma_1 = \sigma_y = 100$ MPa

$\sigma_2 = \sigma_k + R = 100$ MPa

$\sigma_3 = \sigma_k - R = -100$ MPa

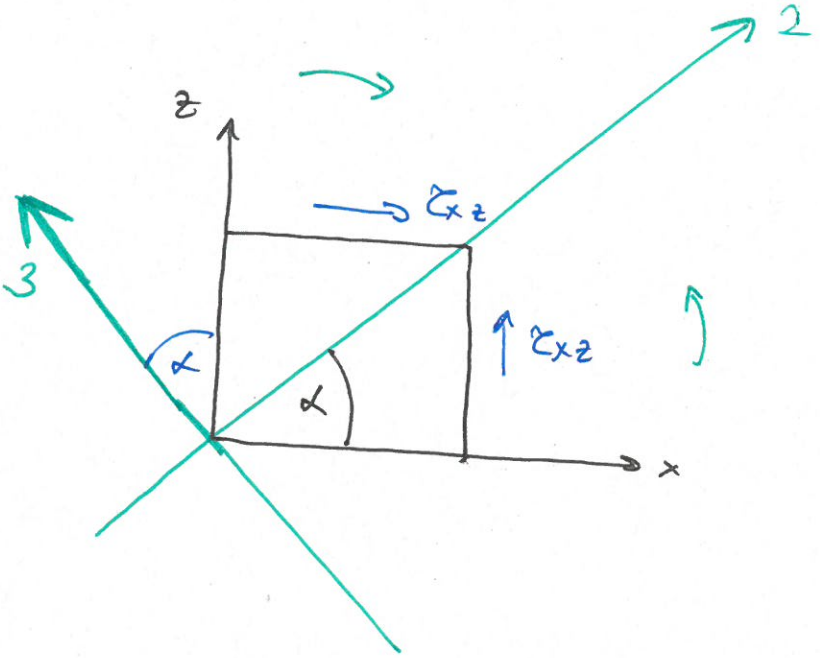
α - szög meghatározása:

$$\alpha = 45° \rightarrow \text{leolvasva}$$

vagy

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\,|\tau_{xz}|}{\underbrace{\sigma_x - \sigma_z}_{\rightarrow \infty}}\right) = \underline{\underline{45°}}$$

Most tetszőlegesen választhatjuk meg, hogy x vagy z-tengelyt forgatjuk!



$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0{,}707 \\ 0 \\ 0{,}707 \end{bmatrix}}}$$

↓ jobbsodrásból.

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0{,}707 \\ 0 \\ 0{,}707 \end{bmatrix}}}$$