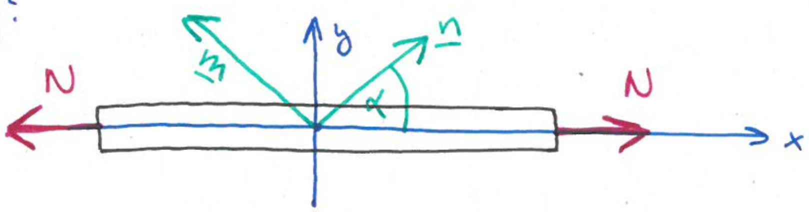
Szilárdságtan - 7. gyakorlat

Feszültségi állapot, főfeszültségek

1. feladat Egy 50×75 mm-es, állandó keresztmetszetű rúd két végét 500 kN erő terheli. Mekkora a rúdban ébredő maximális csúsztató-feszültség?



$N = 500\,kN$

$A = 50 \cdot 75 = 3750\,mm^2$

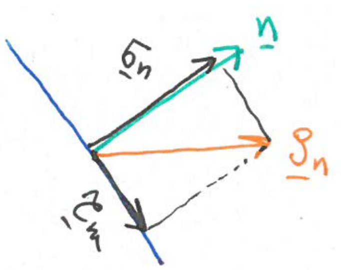
↳ Nincs megadva milyen koordinátarendszerben kell nézni
⇓ adjuk meg egyet egy $\underline{n}$ normálvektorral

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$ (egységvektor)
(kihasználjuk, hogy síkfeladat)

A feszültségi tenzor mátrixa

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

Az $\underline{n}$ normálisú sík fesz. vektora: $\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$



$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \underline{n} = \sigma_x \cos^2\alpha$$

Tehát σ_n vektor: $\underline{\sigma}_n = \sigma_n \cdot \underline{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos^3\alpha \\ \sigma_x \cos^2\alpha \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$

Mivel: $\underline{\rho}_n = \underline{\tau}_m + \underline{\sigma}_n$

↳ $$\underline{\tau}_m = \underline{\rho}_n - \underline{\sigma}_n = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_x \cos^3\alpha \\ \sigma_x \cos^2\alpha \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_x \cos\alpha \begin{bmatrix} 1-\cos^2\alpha \\ -\cos\alpha \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

τ_n vektor hossza (nagysága)

$$|\underline{\tau}| = \sqrt{\underline{\tau} \cdot \underline{\tau}} = \sqrt{\sigma_x^2 \cos^2\alpha \sin^2\alpha \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)} = \underline{\underline{\sigma_x \sin\alpha \cos\alpha}}$$

↓ az a kérdés, milyen φ esetén lesz ennek maximuma?

$$\frac{\partial |\underline{\tau}|}{\partial \varphi} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_x \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha = 1$$

$$\hookrightarrow \alpha = \underline{\underline{\pm 45^\circ}}$$

↓ Ezt felhasználva:

$$\tau_{max} = \sigma_x \cdot \sin(45^\circ)\cos(45^\circ) = \frac{\sigma_x}{2} = \underline{\underline{66{,}67 \text{ MPa}}}$$

Másképp

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Látjuk, hogy mindhárom főfeszt ismert:

$$\sigma_1 = 133{,}33 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \underline{\underline{66{,}67 \text{ MPa}}}$$

Harmadik úton   Mivel síkfeladat

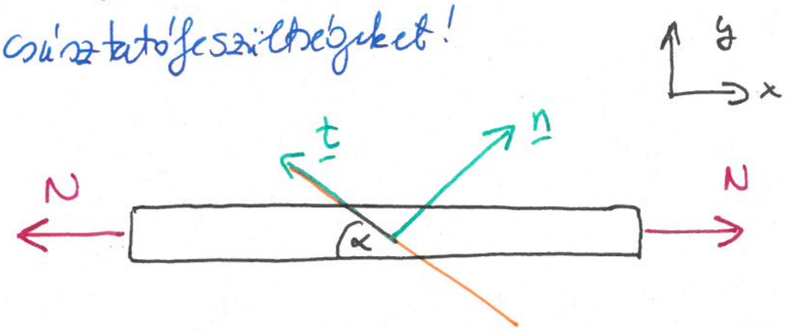
$$\underline{n} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \tau_n = \underline{g}_u \cdot \underline{n} = -\sigma_0 \cos\alpha \sin\alpha$$

$\Downarrow$

Ezt kell maximalizálni!

(ugyanaz, mint az 1. megoldásban)

2. feladat Egy fa gerenda rétegződése 20°-os szöget zár be a hossztengellyel. Határozzuk meg ezen a síkon ébredő normál és csúsztatófeszültségeket!



Adatok

$L = 300\,mm$

$N = 250\,N$

Keresztmetszet:

$A = 60 \cdot 25 = \underline{\underline{1500\,mm^2}}$

$\alpha = 20°$

A feszültségi tenzor mátrixa

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

A síkhoz tartozó normálvektor:

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}342 \\ 0{,}94 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{valamint} \quad \underline{t} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0{,}94 \\ 0{,}342 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Ebből a feszültségvektor:

$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \begin{bmatrix} \sigma_0 \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}057 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Melynek komponensei:

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \underline{n} = \sigma_0 \cos^2\alpha = \underline{\underline{0{,}0195\ \text{MPa}}}$$

$$\tau_t = \underline{\rho}_n \cdot \underline{t} = -\sigma_0 \sin\alpha \cos\alpha = \underline{\underline{-0{,}0536\ \text{MPa}}}$$

3. feladat Határozzuk meg az alábbi feszültségi állapot esetén a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 30 \\ 0 & 15 & 0 \\ 30 & 0 & 40 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Az eddig tanult módszer alkalmazásához egy főirányt is ismerni kell $\Rightarrow$ ott nem ébred τ feszültség.

↳ Mivel τ_{xy} és τ_{yz} is zérus $\Rightarrow$ σ_y főfeszültség!

$\underline{\sigma_y = 15\ \text{MPa}}$

↳ Most elég az x-z síkot vizsgálni.

↳ Itt a főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

<u>Behelyettesítés után</u>:

$$\sigma_{1,2} = \begin{cases} 52{,}43\ \text{MPa} \\ -32{,}43\ \text{MPa} \end{cases}$$

Azaz a főfeszültségeket sorba rendezve, hogy $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ teljesüljön:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= 52{,}43\ \text{MPa} \\ \sigma_2 &= \sigma_y = 15\ \text{MPa} \\ \sigma_3 &= -32{,}43\ \text{MPa} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underline{\underline{\sigma}}_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} 52{,}43 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -32{,}43 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

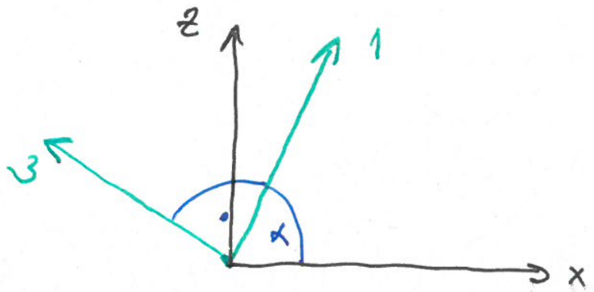
a 2es főirány y-irány! $\Rightarrow$ $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (a 2es főirány egységvektora!)

A másik két főirány az x–z síkban helyezkedik el:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = 67{,}5^\circ \rightarrow$$ az 1-es főirány és x-tengely közti szög!

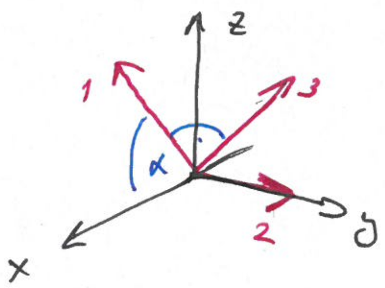
$$\hookrightarrow \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0{,}383 \\ 0 \\ 0{,}924 \end{bmatrix}}}$$

Fontos, hogy $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ jobbsodrású legyen!



(y-tengely a lapra merőlegesen befelé mutat!)

$$\Downarrow \; \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0{,}924 \\ 0 \\ 0{,}383 \end{bmatrix}}}$$



Ellenőrzés: Számítsuk ki a 3-as főirány által kijelölt síkon a csúsztatófeszültséget!

$$\underline{\rho}_3 = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 29{,}958 \\ 0 \\ -12{,}409 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\sigma = \underline{\rho}_3 \cdot \underline{e}_3 = -32{,}43 \text{ MPa}$$ (← visszakaptuk σ_3-t)

$$\underline{\sigma}_3 = \sigma_3 \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 29{,}958 \\ 0 \\ -12{,}409 \end{bmatrix} \text{ MPa} \rightarrow \text{ Mivel } \underline{\rho}_3 = \underline{\sigma}_3 \Rightarrow \boxed{\underline{\tau}_3 = \underline{0}}$$

4. feladat Határozzuk meg az alábbi feszültségi állapot esetén a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat kijelölő egységvektorokat!

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ -10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

↳ Látjuk, hogy $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \rightarrow$ z-irány feszültségi főirány valamint $\underline{\underline{\sigma_z = -30\ \text{MPa}}}$ főfeszültség!

Emiatt elegendő az x-y síkot vizsgálni, ahol

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 0\ \text{MPa} \\ -25\ \text{MPa} \end{cases}$$

Ezek alapján a főfeszültségek:

$\sigma_1 = 0$ MPa

$\sigma_2 = -25$ MPa

$\sigma_3 = -30$ MPa (← ez volt σ_z) $\Rightarrow \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

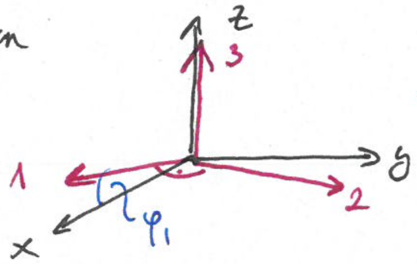
A főirányok az x-y síkon:

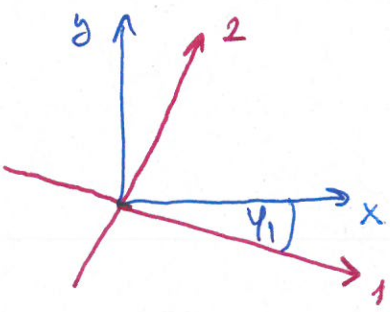
$$\varphi_1 = \text{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = -26{,}57^\circ$$

$$\hookrightarrow \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0{,}894 \\ -0{,}447 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

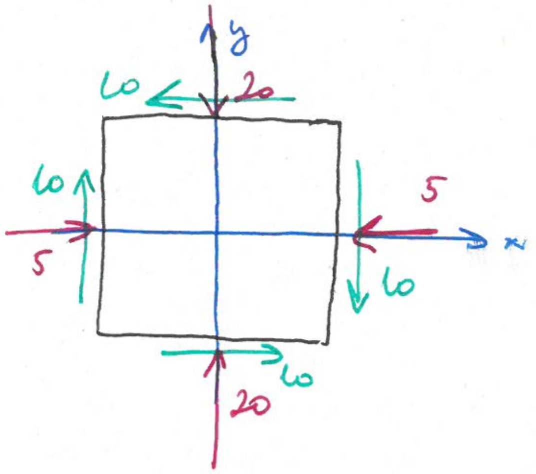
Mivel jobbsodrású kell, hogy legyen

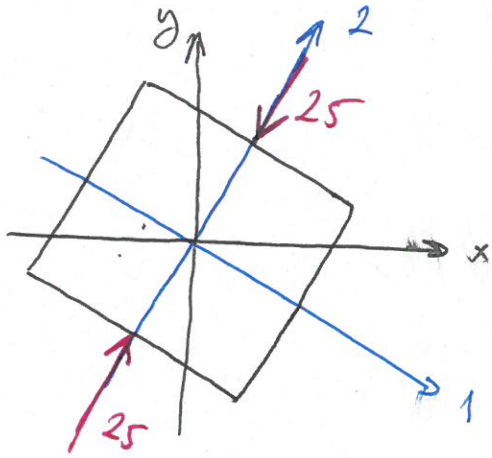
$$\underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}447 \\ 0{,}894 \\ 0 \end{bmatrix}$$





Ábrázoljuk a feszültségi állapotot!





5. feladat Határozzuk meg az alábbi feszültségi állapot esetén a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat kijelölő egységvektorokat!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

↳ Látjuk, hogy $\tau_{xz} = 0$ és $\tau_{yz} = 0$ ⇒ $\sigma_z = 10$ MPa főfeszültség valamint z-tengely fesz. főtengely!

Az x-y síkban:

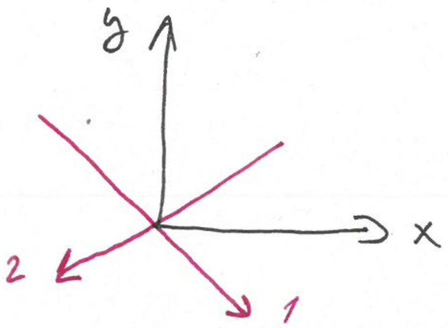
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 10 \text{ MPa} \\ -10 \text{ MPa} \end{cases}$$

Tehát sorbarendezés után a főfeszültségek:

$\sigma_1 = 10$ MPa
$\sigma_2 = 10$ MPa ⟶ $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; (mert $\sigma_2 = \sigma_z$)
$\sigma_3 = -10$ MPa

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = -45^\circ \qquad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0{,}707 \\ -0{,}707 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \sin\varphi_1 \\ -\cos\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -0{,}707 \\ -0{,}707 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$



Megjegyzés: Lehetett volna

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{e}_3 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

6. feladat Írjuk fel az alábbi feszültségállapot esetén a maximális csúsztatófeszültség nagyságát!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ Látjuk, hogy $\sigma_z = 0$ főfeszültség és $\underline{k}$ vektor feszültségi főirány, mivel $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ MPa

↳ Az x-y síkra:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Behelyettesítjük $\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= \tau \end{aligned}\right\}$ -t!

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{1}{2}\sigma \pm \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}_{\geq |\sigma|}$$

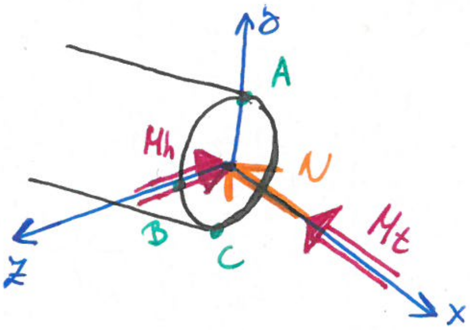
$\Rightarrow$ miatt $\sigma_1 > 0$
$\sigma_3 < 0$ lesz!

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{aligned}\right\}$$

A maximális csúsztatófeszültség

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}}$$

7. feladat Egy kör keresztmetszetű tartó keresztmetszeténél terhelését (normál, hajlító, csavaró) mutatja az ábra. Határozzuk meg az A, B és C pontokban a főfeszültségeket és a hozzájuk tartozó főirányokat! Ábrázoljuk a főirányokat kiskockán!



Adatok:

$M_t = 6\ kNm$

$M_h = 4\ kNm$

$N = 50\ kN$

$d = 120\ mm$

Mielőtt kiszámoljuk a feszültségeloszlásokat, adjuk meg a keresztmetszet geometriai adatait:

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 11\,309,7\ mm^2$$

$$I_z = I_y = \frac{d^4\pi}{64} = 10\,178\,760\ mm^4$$

$$K_z = \frac{d^3\pi}{32} = 169\,646\ mm^3$$

$$I_p = \frac{d^4\pi}{32} = 20\,357\,520\ mm^4$$

$$K_p = \frac{d^3\pi}{16} = 339\,292\ mm^3$$

Feszültségeloszlások

Normáligénybevétel:
$$\sigma_x = -\frac{N}{A} = \underline{\underline{-4,42\ MPa}}$$

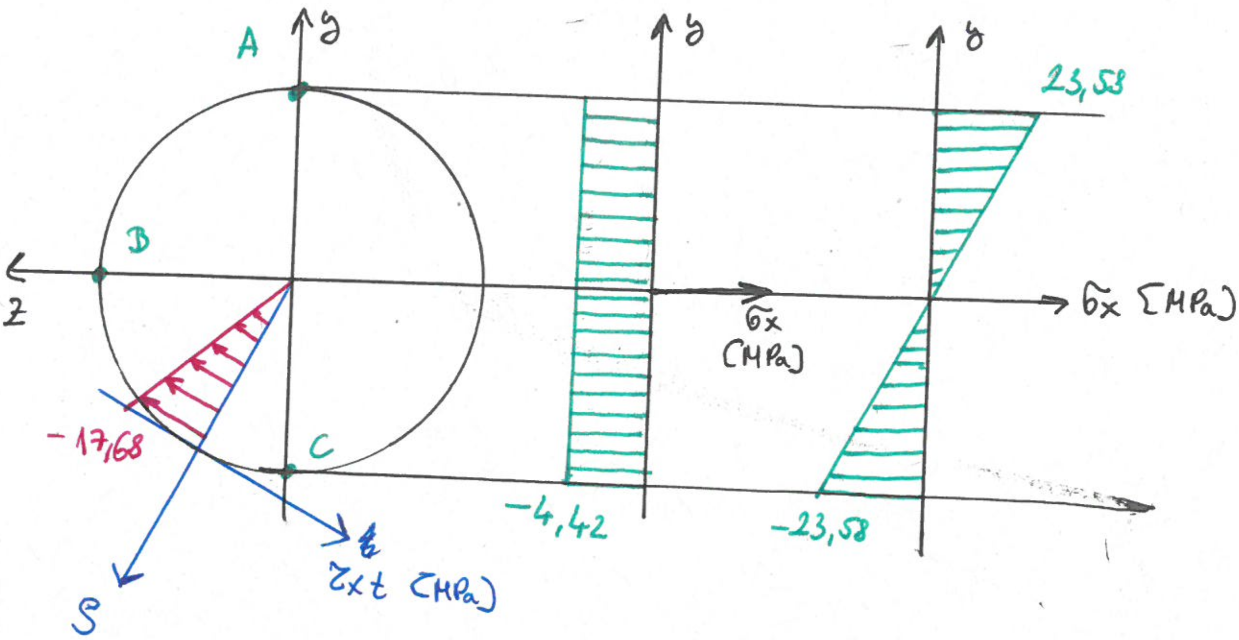
Hajlítónyomatéki igénybevétel:
$$\sigma_x(y) = \frac{M_h}{I_z} \cdot y = 0,39298 \cdot y$$

$$\sigma_{x\,max} = \frac{M_h}{K_z} = \underline{\underline{23,58\ MPa}}$$

Csavarónyomatéki igénybevétel: $\tau_{xt} = \dfrac{-M_t}{I_p} \cdot \rho = -0{,}2947\,\rho$

$$|\tau_{xt\,max}| = \frac{M_t}{K_p} = \underline{\underline{17{,}68 \text{ MPa}}}$$

Feszültségeloszlások felrajzolása



A feszültségi állapot a veszélyes pontokban:

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}_A} = \begin{bmatrix} 19{,}16 & 0 & -17{,}68 \\ 0 & 0 & 0 \\ -17{,}68 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \rightarrow \sigma_y = 0 \text{ MPa főfeszültség és } j \text{ főirány}$$

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}_B} = \begin{bmatrix} -4{,}42 & 17{,}68 & 0 \\ 17{,}68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \rightarrow \sigma_z = 0 \text{ MPa főfeszültség és } \underline{k} \text{ főirány}$$

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}_C} = \begin{bmatrix} -28 & 0 & 17{,}68 \\ 0 & 0 & 0 \\ 17{,}68 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \rightarrow \sigma_y = 0 \text{ MPa főfeszültség és } j \text{ főirány}$$

Főfeszültségek számítása (sík feladatra visszavezetve)

$\boxed{\text{A pont}}$ (j főirány; $\sigma_y = 0$ MPa főfeszültség)

x-z síkon:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 29,69 \text{ MPa} \\ -10,53 \text{ MPa} \end{cases}$$

Tehát a főfeszültségek:

$$\sigma_1 = 29,69 \text{ MPa} \longrightarrow \underline{e}_1$$
$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa} \longrightarrow \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\sigma_3 = -10,53 \text{ MPa} \longrightarrow \underline{e}_3$$

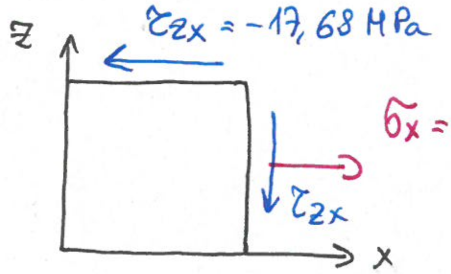
Főirányok:

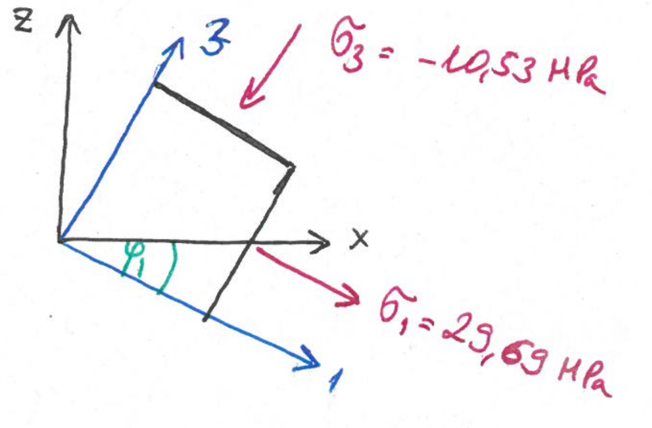
$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = -30,78^\circ$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,859 \\ 0 \\ -0,512 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,512 \\ 0 \\ 0,859 \end{bmatrix}$$

Ábrázolás:





Maximális csúsztatófeszültség:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \underline{\underline{20,11 \text{ MPa}}}$$

B pont ($\sigma_z = 0$ MPa főfeszültség, $\underline{e}$ főirány)

x-y sík:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 15{,}61 \text{ MPa} \\ -20{,}03 \text{ MPa} \end{cases}$$

Tehát a főfeszültségek:

$\sigma_1 = 15{,}61$ MPa $\rightarrow \underline{e}_1$

$\sigma_2 = 0$ MPa $\rightarrow \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\sigma_3 = -20{,}03$ MPa $\rightarrow \underline{e}_3$

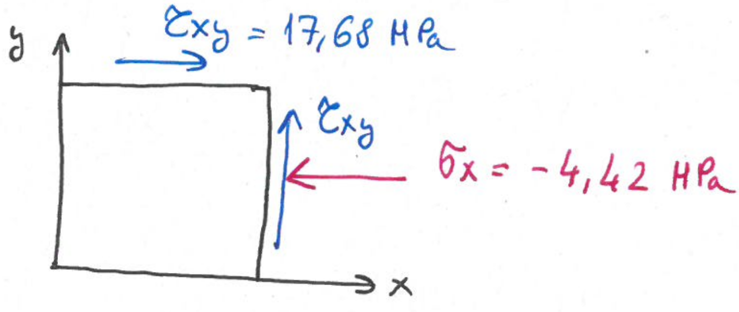
Főirányok

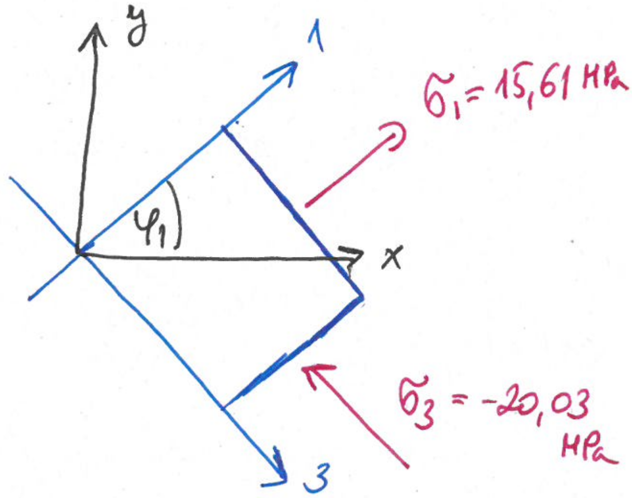
$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = 48{,}56°$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}662 \\ 0{,}75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \sin\varphi_1 \\ -\cos\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}662 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ábrázolás





Maximális csúsztatófeszültség:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \underline{\underline{17{,}82 \text{ MPa}}}$$

C part ($\sigma_y = 0$ MPa főfeszültség; y főirány)

x-z sík

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 8{,}55 \text{ MPa} \\ -36{,}55 \text{ MPa} \end{cases}$$

A főfeszültségek:

$$\sigma_1 = 8{,}55 \text{ MPa} \longrightarrow \underline{e}_1$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa} \longrightarrow \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3 = -36{,}55 \text{ MPa} \longrightarrow \underline{e}_3$$

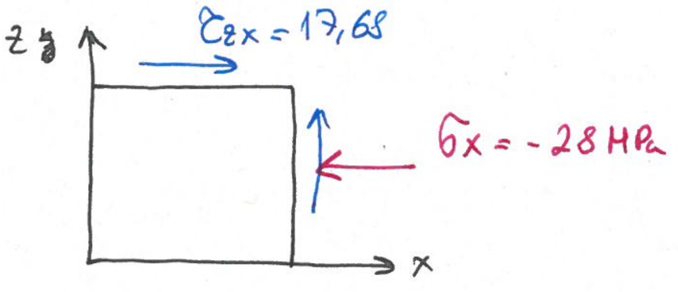
Főirányok

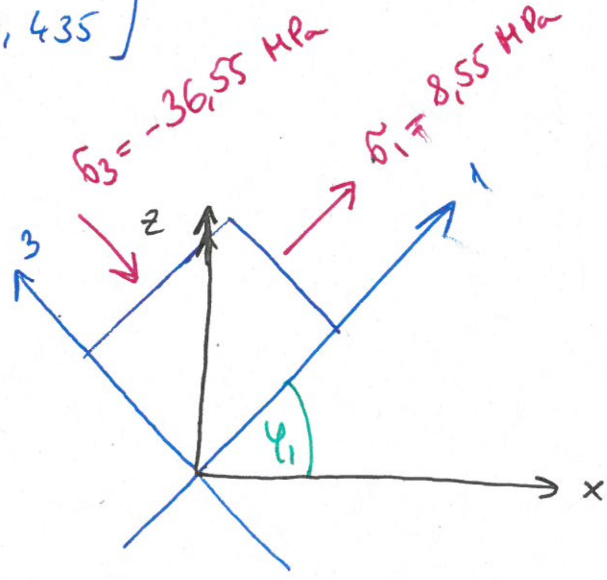
$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = 64{,}18°$$

$$\hookrightarrow \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}435 \\ 0 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}9 \\ 0 \\ 0{,}435 \end{bmatrix}$$

Ábrázolás





$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \underline{\underline{22{,}55 \text{ MPa}}}$$