

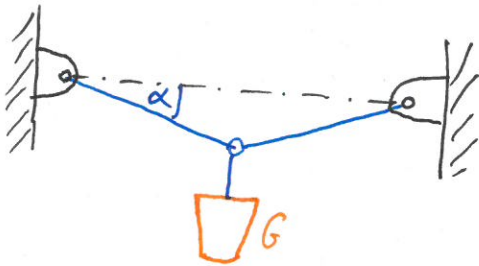
Szilárdságtan 1. gyakorlat

①

Rudak, gerenda'k feszültségi állapota Normál- és húzóerőkkel

1. feladat

Egy $G = 700 \text{ N}$ súlyú lámpát két szörművel felfüggeszteni a mennyezet két pont között, egy $\phi d = 3 \text{ mm}$ átmérőjű kúszalakkal. A kúszalakkal szembe a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 285 \text{ MPa}$. Határozzuk meg, hogy mekkora lehet a kúszal vízszintessel bezárt szöge annak érdekében, hogy a kúszalban előforduló normál- és húzóerők a megengedett érték alatt maradjanak.



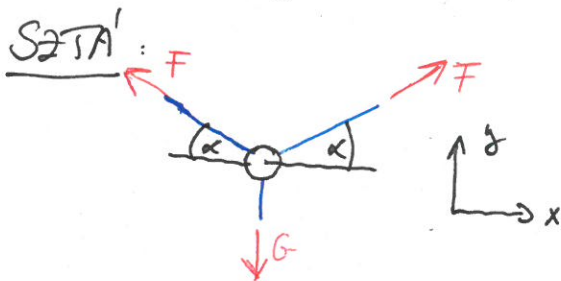
Adatok:

$$G = 700 \text{ N}$$

$$d = 3 \text{ mm}$$

$$\sigma_{meg} = 285 \text{ MPa}$$

Határozzuk meg a kúszalban előforduló F erőt:



Egyenlet:

$$\sum F_x = 0 \quad F \cos \alpha - F \cos \alpha = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum F_y = 0 \quad F \sin \alpha + F \sin \alpha - G = 0$$

$$2F \sin \alpha = G$$

$$F = \frac{G}{2 \sin \alpha}$$

A kúszalban előforduló feszültség (normál- és húzóerők)

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{G}{2 \sin \alpha \cdot \frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{2G}{\sin \alpha d^2 \pi}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 7,0686 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{meg} \geq \sigma = \frac{2G}{\sin \alpha d^2 \pi}$$

Legnagyobb érték:

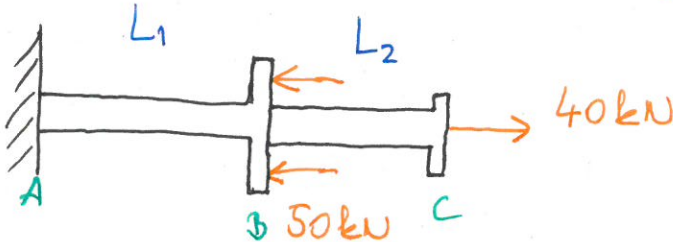
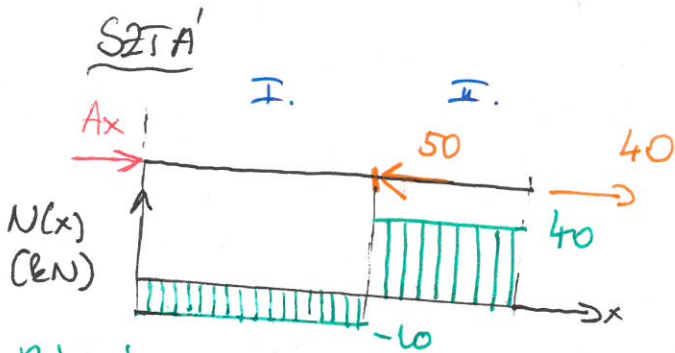
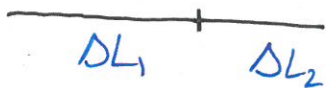
$$\sigma_{meg} = \frac{2G}{\sin \alpha d^2 \pi} \rightarrow \sin \alpha = \frac{2G}{d^2 \pi \sigma_{meg}}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2G}{d^2 \pi \sigma_{meg}}\right) = 10^\circ$$

2. feladat

Egy 20 mm átmérőjű acél rúd az ábra szerinti módon terhelik. Az acél rugalmassági modulusza $E_{\text{acél}} = 200 \text{ GPa}$.

- Rajzoljuk fel a normál igénybevételi ábrát!
- Számítsuk ki a végpontszintet elmozdulását!
- Határozzuk meg az egyes szakaszokon előforduló feszültségeket!

Reakció:Rúd vég elmozdulása:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{N_1 L_1}{A \cdot E} + \frac{N_2 L_2}{A \cdot E}$$

$$N_1 = -10 \text{ kN}$$

$$N_2 = 40 \text{ kN}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 314,159 \text{ mm}^2$$

Feszültségek

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = -31,83 \text{ MPa}$$

(negatív \rightarrow nyomott)

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = 127,324 \text{ MPa}$$

(pozitív \rightarrow húzott) !

Adatok:

$$L_1 = 600 \text{ mm}$$

$$L_2 = 400 \text{ mm}$$

$$E_{\text{acél}} = 200 \text{ GPa}$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 : Ax - 50 + 40 = 0$$

$$Ax = 10 \text{ kN}$$

Hooke tv.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E \cdot \epsilon_x \\ \epsilon_y &= \epsilon_z = -\nu \epsilon_x \\ \epsilon_x &= \frac{\Delta L}{L} \end{aligned} \right\} \Delta L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

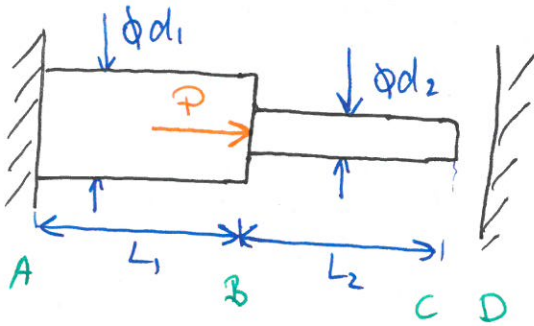
$$\Delta L_1 = \frac{-10000 \cdot 600}{314,159 \cdot 200000} = -0,0355 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{40000 \cdot 400}{314,159 \cdot 200000} = 0,2547 \text{ mm}$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0,159 \text{ mm}$$

(3)

3. feladat A C végkonzisztmet és a fal közötti hézag $0,15 \text{ mm}$ az alábbi kétféle tömör rudakból álló szerkezetnél terheltlen állapotban. A terhelés nagysága $P = 300 \text{ kN}$. Határozzuk meg a reakcióerőket a terhelés alkalmazásakor! Mekkora az egyes részek hosszváltozása és a bennük előforduló feszültség?



Adatok:

$$d_1 = 50 \text{ mm}$$

$$d_2 = 25 \text{ mm}$$

$$L_1 = 600 \text{ mm}$$

$$L_2 = 600 \text{ mm}$$

$$E = 70 \text{ GPa}$$

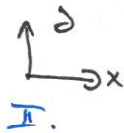
$$P = 300 \text{ kN}$$

El kell dönteni, hogy hosszár-c a falhoz a rugóerő következtében!

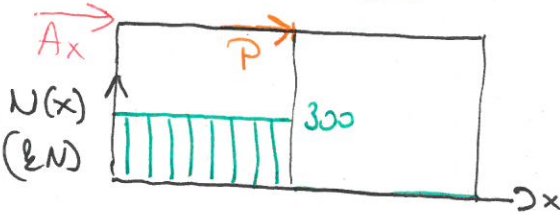
I. TFH NEM ér hozzá!

SZTA'

I.



II.



Egyszerű egyenlet

$$\sum F_x = 0 \quad A_x + P = 0$$

$$A_x = -P = -300 \text{ kN}$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \underbrace{\Delta L_2}_{=0} = \frac{N_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1}$$

$$\Delta L = 1,31 \text{ mm} > 0,15 \text{ mm}$$



hosszár!

$$A_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} = 1963,495 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{d_2^2 \pi}{4} = 490,874 \text{ mm}^2$$

$$N_1 = 300 \text{ kN}$$

II. Hozzájár a nem közt. fallhoz:

STTA'



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \quad A_x + P_x + C_x = 0$$

2 ismeretlen de 1 egyenlet!

Normalizágykvetel

$$N_1 = -A_x$$

$$N_2 = -A_x - P$$

Kinematikai feltétel

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = \Delta = 0,15 \text{ mm}$$

$$\frac{N_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E} + \frac{N_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E} = \Delta$$

$$\frac{-A_x L_1}{A_1 E} + \frac{(-A_x - P) L_2}{A_2 E} = \Delta$$

$$-A_x L_1 A_2 E + (-A_x - P) L_2 A_1 E = \Delta A_1 A_2 E^2$$

$$A_x (-L_1 A_2 - L_2 A_1) = \Delta A_1 A_2 E + P L_2 A_1$$

$$A_x = \frac{-\Delta A_1 A_2 E - P L_2 A_1}{L_1 A_2 + L_2 A_1} = \frac{-\Delta \frac{d_1^2 d_2^2 \pi^2}{16} E - \frac{P L_2 d_1^2 \pi}{4}}{L_1 \frac{d_2^2 \pi}{4} + L_2 \frac{d_1^2 \pi}{4}}$$

$$A_x = -\frac{d_1^2}{4} \frac{\Delta d_2^2 E \pi + 4 L_2 P}{L_1 d_2^2 + L_2 d_1^2} = -246,872 \text{ kN}$$

$$\hookrightarrow C_x = -A_x - P_x = -53,128 \text{ kN}$$

Visszaírva:

$$L_1 = \frac{-A_x L_1}{A_1 E} = 1,078 \text{ mm}$$

$$L_2 = \frac{(-A_x - P) L_2}{A_2 E} = -0,928 \text{ mm}$$

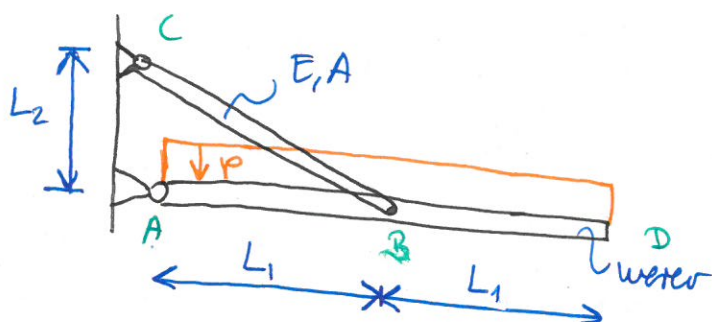
$$\sigma_1 = \frac{-A_x}{A_1} = \underline{\underline{125,731 \text{ MPa}}}$$

$$\sigma_2 = \frac{-A_x - P}{A_2} = \underline{\underline{-108,231 \text{ MPa}}}$$

4. feladat

A merev ABD níl megfeszítésre az ábra

szinti. A rugalmas CB níl keresztmetszeti terület 150 mm^2 anyagának rugalmassági modulusza 100 GPa . A merev níl terhelésre megálló enőrendszert. Határozzuk meg a D km. függőleges elmozdulását!



Adatok:

$$L_1 = 2 \text{ m}$$

$$L_2 = 1,5 \text{ m}$$

$$p = 300 \text{ N/m}$$

$$A = 150 \text{ mm}^2$$

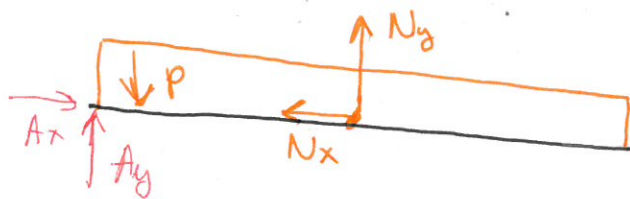
$$E = 100 \text{ GPa}$$

Számítsuk ki a rugalmas nílban előforduló enőket



Mivel csuklóval kapcsolódik mindkét végén és nincs terhelés \Rightarrow nílirányú enő előfordul benne

Írjuk fel a merev níl SZTA-jait:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \quad A_x - N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y - p(2L_1) + N_y = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -p(2L_1)^2 + N_y \cdot L_1 = 0$$

$$\Rightarrow N_y = 2pL_1 = \underline{\underline{1200 \text{ N}}}$$

Mivel nílirányú

$$\frac{N_x}{N_y} = \frac{L_1}{L_2} \quad \Rightarrow \quad N_x = \frac{N_y L_1}{L_2} = \underline{\underline{1600 \text{ N}}}$$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \underline{\underline{2000 \text{ N}}}$$

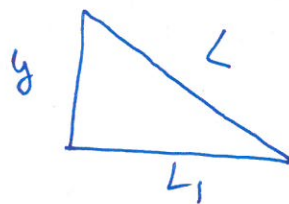
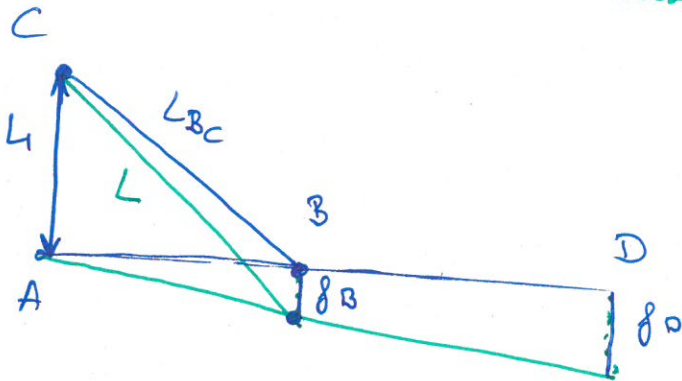
A néd megváltozása:

$$L_{BC} = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = 2,5 \text{ m}$$

$$\Delta L = \frac{N \cdot L_{BC}}{A \cdot E} = \underline{\underline{0,333 \text{ mm}}}$$

↳ A néd hossza: $L = L_{BC} + \Delta L = \underline{\underline{2500,333 \text{ mm}}}$

Kis elmozdulások → B és D pont csak függőlegesen mozdul el!



$$y = \sqrt{L^2 - L_1^2} = 1500,55 \text{ mm}$$

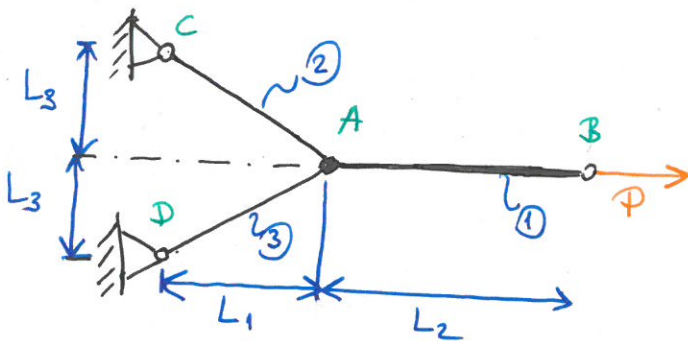
Hasonló háromszögek miatt

$$\frac{\delta_B}{\delta_D} = \frac{L_1}{2L_1}$$

$$\rightarrow \delta_D = 2\delta_B = \underline{\underline{1,1 \text{ mm}}}$$

5. feladat

Az ábrán látható rudak átmérője 30mm, anyaguk rugalmassági modulusza 200 GPa. Mekkora legyen a végpont P terhelése, hogy a B pont elmozdulása 5mm legyen?



Adatok:

$$L_1 = 3\text{m}$$

$$L_2 = 6\text{m}$$

$$L_3 = 4\text{m}$$

$$d = 30\text{mm}$$

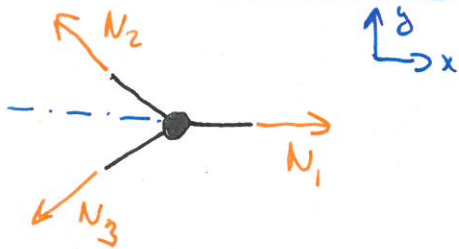
$$E = 200\text{ GPa}$$

$$\Delta u = 5\text{mm}$$

Írjuk fel a mérésiért! Minden rúdban csak mérésiért és c-ből

Teljes: $N_1 = P$

SzIA az A pontra



Egyensúly egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \quad N_1 - N_{2x} - N_{3x} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_{2y} - N_{3y} = 0$$

A szimmetria miatt: $N_{2x} = N_{3x}$
 $N_{2y} = N_{3y}$

$$N_1 - 2N_{2x} = 0$$

$$N_{2x} = \frac{N_1}{2} = \frac{P}{2}$$

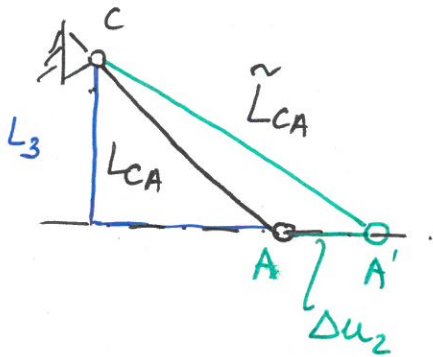
Mivel N_2 mérésiért

$$\frac{N_{2x}}{N_{2y}} = \frac{L_1}{L_3} \Rightarrow N_{2y} = \frac{N_{2x} \cdot L_3}{L_1} = \frac{P}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} P$$

$$\text{Teljes } N_2 = \sqrt{N_{2x}^2 + N_{2y}^2} = \sqrt{\frac{P^2}{4} + \frac{4P^2}{9}} = \frac{5}{6} P$$

degyen Δu_2 az A pont vízszintes elmozdulása

$$\Delta L_{AC} = \frac{N_2 \cdot L_{AC}}{A \cdot E} \rightarrow \tilde{L}_{AC} = L_{AC} + \Delta L_{AC} = L_{AC} + \frac{5PL_{AC}}{6AE} = L_{AC} \left(1 + \frac{5P}{6AE}\right)$$



$$\Delta u_2 = \sqrt{\tilde{L}_{CA}^2 - L_3^2} - L_1$$

$$L_{AC} = \sqrt{L_3^2 + L_1^2} = 5 \text{ m}$$

A vízszintes rúd megnyúlása Δu_1

$$\Delta u_1 = \frac{N_1 \cdot L_2}{A \cdot E} = \frac{P \cdot L_2}{A \cdot E}$$

$$\Delta u_1 + \Delta u_2 = \Delta u = 5 \text{ mm}$$

$$\frac{P \cdot L_2}{A \cdot E} + \sqrt{\tilde{L}_{AC}^2 - L_3^2} - L_1 = \Delta u$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 706,858 \text{ mm}^2$$

$$\frac{P \cdot L_2}{A \cdot E} + \sqrt{L_{AC}^2 \left(1 + \frac{5P}{6AE}\right)^2 - L_3^2} - L_1 = \Delta u$$



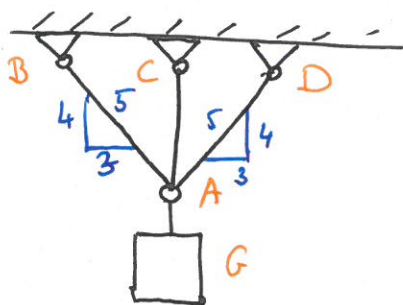
viisszaírva a numerikus értékeket \rightarrow másodfokú egyenlet P -re!

$$671 P^2 - 3,956 \cdot 10^{11} P + 2,16 \cdot 10^{16} = 0$$

$$P = \underline{\underline{54,615 \text{ kN}}}$$

6. feladat Az ábrán látható $G = 130 \text{ N}$ súlyú testet 3

azonos anyagi horgászszinórral függesztettük fel, amelyek rugalmassági modulusza $E = 2 \text{ GPa}$. A szinórhosszal $L_{AB} = L_{AD} = 2 \text{ m}$, $L_{AC} = 1,6 \text{ m}$. Az AB és AD szinórok átmérője azonos $d_{AB} = d_{AD} = 2 \text{ mm}$. Mekkora legyen AC átmérője, ha azt szeretnénk, hogy minden szinórban ugyanakkora normál feszítéssel elegendjen!



Adatok:

$$L_{AB} = 2 \text{ m}$$

$$L_{AD} = 2 \text{ m}$$

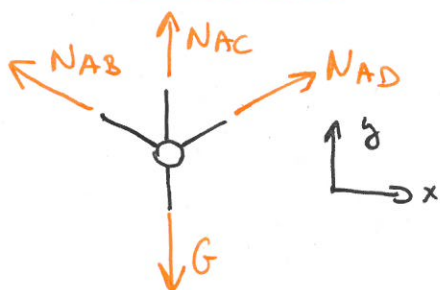
$$L_{AC} = 1,6 \text{ m}$$

$$d_{AB} = 2 \text{ mm}$$

$$d_{AD} = 2 \text{ mm}$$

$$E = 2 \text{ GPa}$$

Kanika SZTA'



Azonos normál feszítéssel

$$N_{AD} = N_{AB} = N_{AC} = N$$

$$\sum F_x = 0: -N_{ABx} + N_{ADx} = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_{AB_y} + N_{AC} + N_{AD_y} - G = 0$$

Tudjuk, hogy

$$N_{AB_y} = \frac{4}{5} N_{AB} = \frac{4}{5} N$$

$$N_{AD_y} = \frac{4}{5} N_{AD} = \frac{4}{5} N$$

Visszatérve: $\frac{4}{5} N + N + \frac{4}{5} N - G = 0$

$$N = \frac{G}{\frac{13}{5}} = \frac{5G}{13} = \underline{\underline{50 \text{ N}}}$$

AB és AD nyakak megnyúlása:

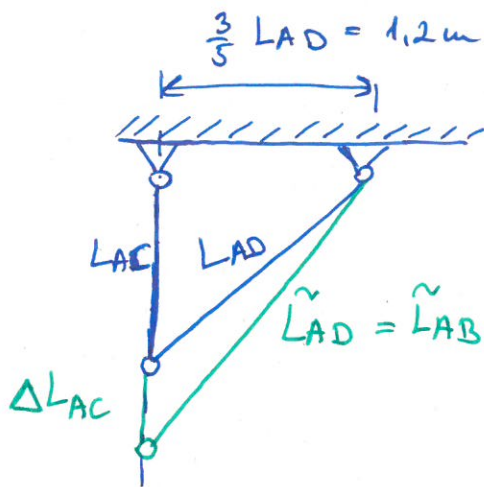
$$\Delta L_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot L_{AB}}{A_{AB} \cdot E} = 15,92 \text{ mm}$$

$$A_{AB} = \frac{d_{AB}^2 \pi}{4} = 3,1415 \text{ mm}^2$$

} ebből számítható
AC megnyúlása!

↓ Az A pont

feszülésgesen lefelé mozdul
a szimmetria miatt!



$$\tilde{L}_{AD} = \tilde{L}_{AB} = L_{AB} + \Delta L_{AB} = 2015,92$$

bekegyettesítve mindkét

$$\Delta L_{AC} = \sqrt{\tilde{L}_{AD}^2 - \left(\frac{3}{5}L_{AD}\right)^2} - L_{AC} = \underline{\underline{19,85 \text{ mm}}}$$

ugyanakkor

$$\Delta L_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot L_{AC}}{A_{AC} \cdot E}$$

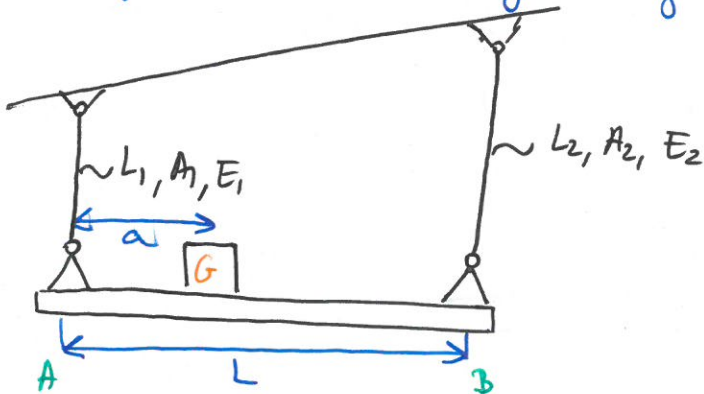
$$\rightarrow A_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot L_{AC}}{\Delta L_{AC} \cdot E} = 2,015 \text{ mm}^2$$

$$A_{AC} = \frac{d_{AC}^2 \pi}{4}$$

$$d_{AC} = \sqrt{\frac{4 A_{AC}}{\pi}} = \underline{\underline{1,602 \text{ mm}}}$$

7. feladat

A vízszintes merevnek tekintett rudat két lúszal távt
egyensúlyban. A rud terhelése $G = 5000 \text{ N}$ súlyú teher. A baloldali
lúszal acél ($E_{\text{acél}} = 200 \text{ GPa}$), a jobboldali Alumínium ($E_{\text{Al}} = 70 \text{ GPa}$).
Hol helyezkedjen el a G teher, hogy a merev rud vízszintes
maradjon? Mekkora a feszültség a ~~rud~~ lúszalokban?

Adatok

$$L_1 = 15 \text{ m}$$

$$A_1 = 120 \text{ mm}^2$$

$$E_1 = 200 \text{ GPa}$$

$$L_2 = 25 \text{ m}$$

$$A_2 = 240 \text{ mm}^2$$

$$E_2 = 70 \text{ GPa}$$

$$G = 5000 \text{ N}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

Akkor lesz vízszintes, ha

$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$

$$\frac{N_1 \cdot L_1}{A_1 E_1} = \frac{N_2 \cdot L_2}{A_2 E_2}$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{L_2}{L_1} \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2} N_2$$

$$\underline{\underline{N_1 = 2,381 N_2}}$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x : 0 = 0$$

$$\sum F_y : N_1 + N_2 - G = 0$$

$$\sum M_A : -a G + L \cdot N_2 = 0$$

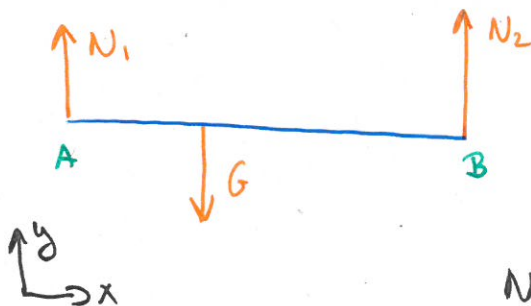
$$N_1 + N_2 = G$$

$$3,381 N_2 = G \Rightarrow N_2 = \frac{G}{3,381} = \underline{\underline{1478,87 \text{ N}}}$$

$$N_1 = 2,381 N_2 = \underline{\underline{3521,13 \text{ N}}}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 29,34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 6,16 \text{ MPa}$$

SZTA'

A nyomatéki egyenletből:

$$a = \frac{L N_2}{G} = \underline{\underline{295,77 \text{ mm}}}$$