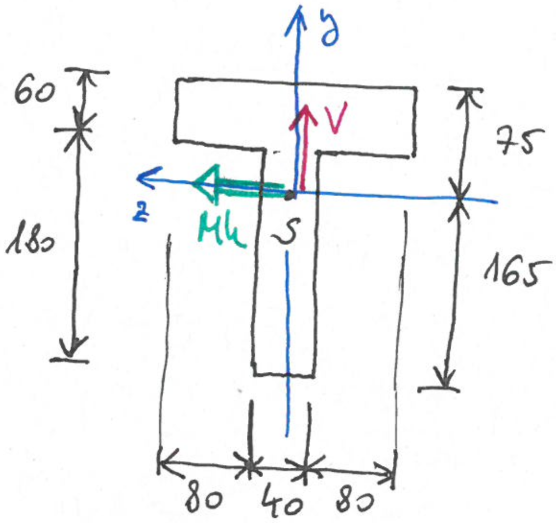
Szilárdságtan – 4. gyakorlat

Nyírásból származó csúsztatófeszültség
Kör keresztmetszetű rudak csavarása

1. feladat Az alábbi T-szelvényt $\underline{M_h} = 20\,\underline{k}$ kNm hajlítónyomaték és $\underline{V} = 50\,\underline{j}$ kN nyíróerő terheli. Írjuk fel a hajlításból származó normálfeszültség-eloszlást leíró $\sigma(y)$ függvényt, valamint a csúsztatófeszültséget leíró $\tau(y)$ függvényt! Adjuk meg a maximális értékeket!



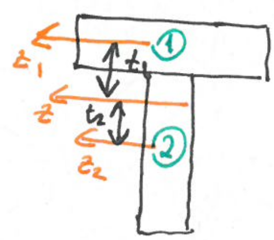
Adatok:

$I_z = 8784\ \text{cm}^4$

$M_h = 20$ kNm

$V = 50$ kN

Másodrendű nyomaték a z-tengelyre!



$A_1 = 60 \cdot 200 = 12000\ \text{mm}^2$

$A_2 = 40 \cdot 180 = 7200\ \text{mm}^2$

$$I_z = I_{z_1} + I_{z_2}$$

$$I_{z_1} = \frac{200 \cdot 60^3}{12} + t_1^2 A_1 = 27\,900\,000\ \text{mm}^4$$

$$I_{z_2} = \frac{40 \cdot 180^3}{12} + t_2^2 A_2 = 59\,940\,000\ \text{mm}^4$$

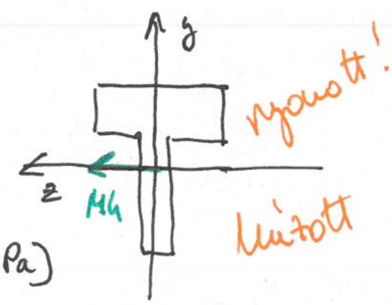
$$\underline{\underline{I_z = 87\,840\,000\ \text{mm}^4}}$$

Steiner-taghoz az eltolások

$t_1 = 75 - 30 = 45$ mm

$t_2 = 165 - 90 = 75$ mm

Hajlításból → Normálfeszültség



$$\sigma(y) = -\frac{M_h}{I_z}\,y = -0{,}2277\,y\ (\text{MPa})$$

(mm)

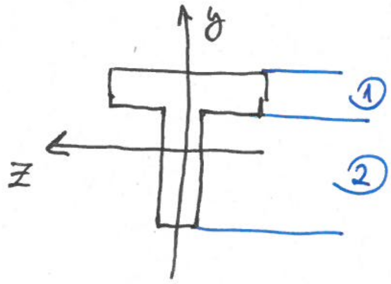
Nyírásból → Csúsztatófeszültség

$\Downarrow$ VISA-képlet

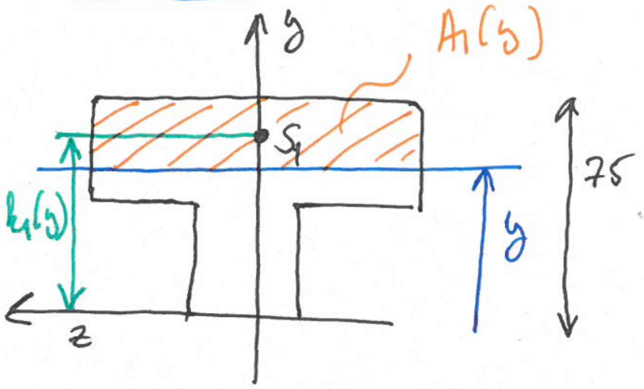
mivel a húrvastagságban ugrás van $\Rightarrow$ 2 szakaszt kell nézni

① $15 < y < 75$

② $-165 < y < 15$



①. szakasz



$$a_1(y) = 200\text{ mm} \quad (\text{húrvastagság})$$

$$S_1(y) = \underbrace{A_1(y)}_{\text{terület}} \cdot \underbrace{k_1(y)}_{\text{súlypont}} \leftarrow \text{statikai nyomaték}$$

$$A_1(y) = 200 \cdot (75 - y)$$

$$k_1(y) = \frac{1}{2}(75 + y)$$

Ebből:

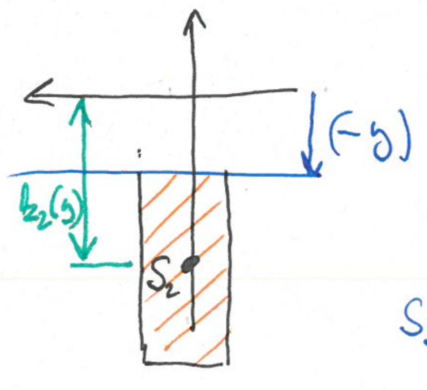
$$S_1(y) = 562500 - 100y^2$$

A feszültségeloszlás:

$$\tau_1(y) = \frac{V}{I_z} \cdot \frac{S_1(y)}{a(y)} = 1{,}6009 - 0{,}000285\, y^2 \; (\text{MPa})$$

(mm)

②. szakasz (most ezt lentről nézzük)



$$a_2(y) = 40\text{ mm}$$

$$A_2(y) = 40 \cdot (165 - (-y)) = 40(165 + y)$$

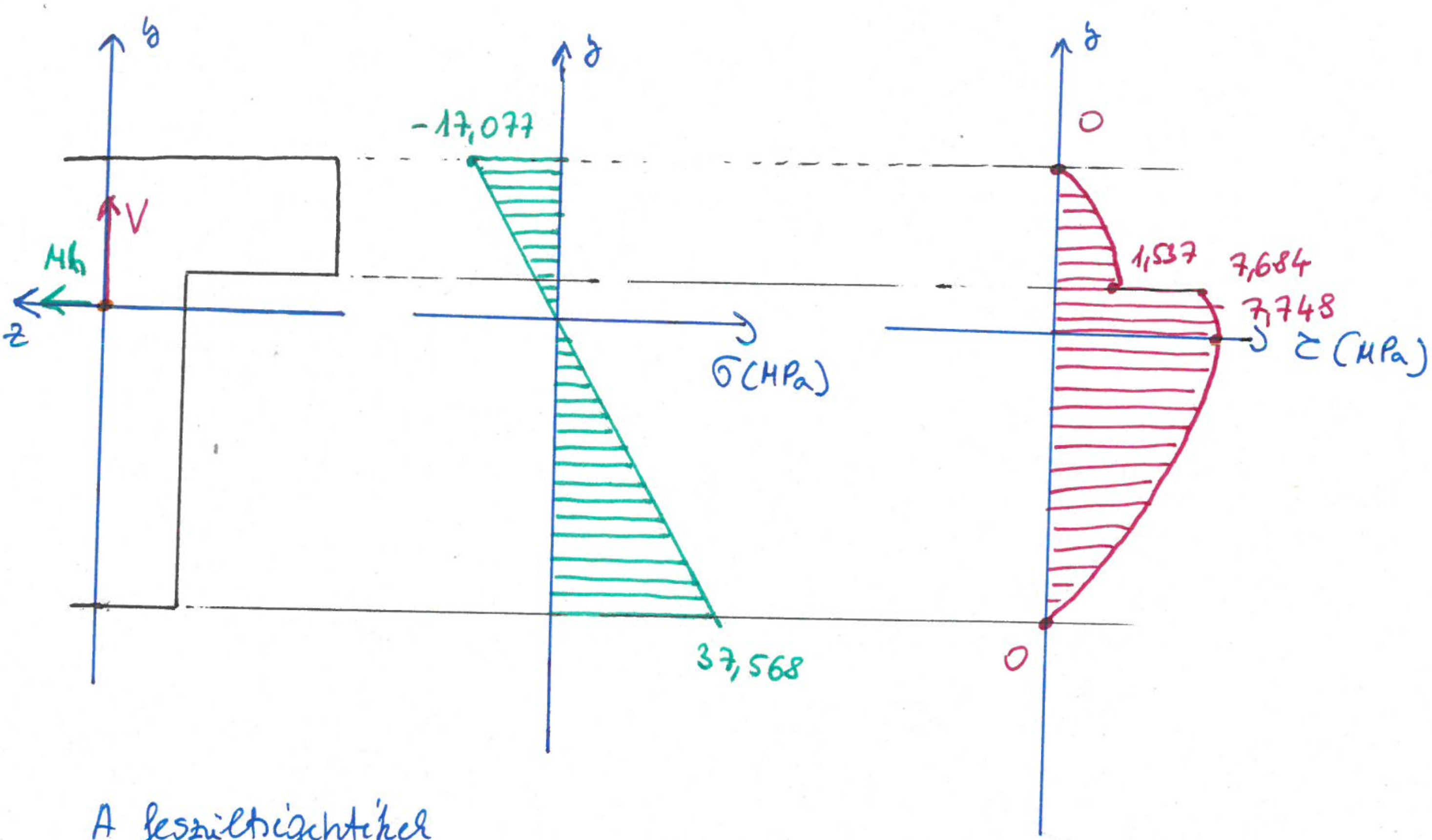
$$k_2(y) = \frac{1}{2}(165 + (-y)) = \frac{1}{2}(165 - y)$$

$$S_2(y) = A_2(y) \cdot k_2(y) = 544500 - 20y^2$$

$$\tau_2(y) = \frac{V}{I_z} \cdot \frac{S_1(y)}{a(y)} = 7{,}7485 - 0{,}000285\, y^2 \; (\text{MPa})$$

(mm)

A feszültségeloszlások



A feszültségértékek

$\sigma(75) = -17{,}077$ MPa → felső szál

$\sigma(0) = 0$ MPa → súlypont

$\sigma(-165) = 37{,}568$ → alsó szál → σ_{max}

$\tau_1(75) = 0$ MPa → felső szál

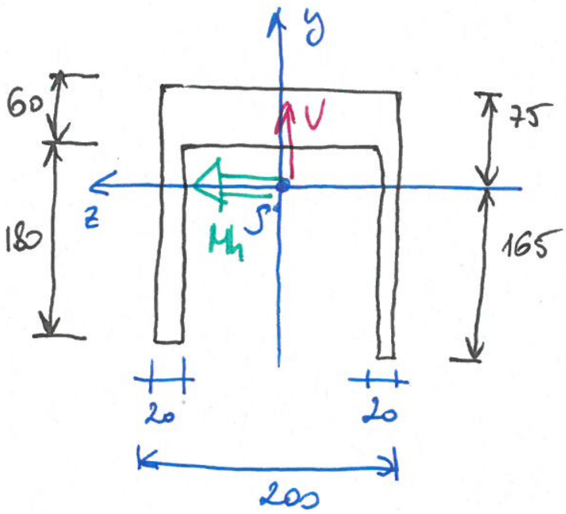
$\tau_1(15) = 1{,}537$ MPa → T csatlakozás felülről

$\tau_2(15) = 7{,}684$ MPa → T csatlakozás alulról

$\tau_2(0) = 7{,}748$ MPa → súlypont → τ_{max}

$\tau_2(-165) = 0$ MPa

2. feladat Az alábbi U-szelvényt $\underline{M}_h = 20\,\underline{k} \cdot \text{kNm}$ hajlítónyomaték és $\underline{V} = 50\,\underline{j}\ \text{kN}$ nyíróerő terheli. Írjuk fel a $\sigma(y)$ és $\tau(y)$ függvényeket, valamint a feszültségmaximumokat!



Adatok

$I_z = 8784\ \text{cm}^4$

$M_h = 20\ \text{kNm}$

$V = 50\ \text{kN}$

$\Downarrow$

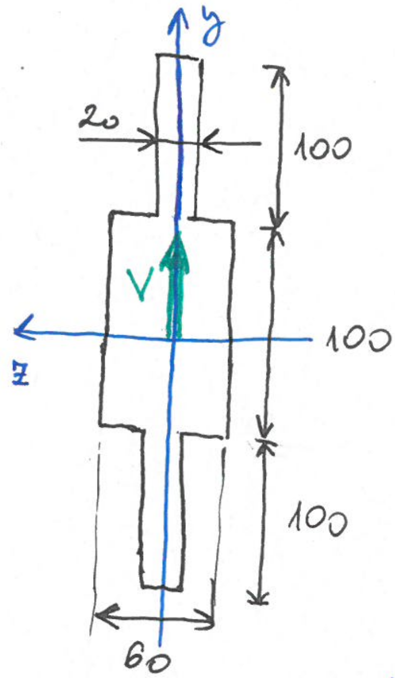
Ez az U-szelvény átrendezhető az 1-es feladatban szereplő T-szelvénnyé, ha az U-szárait középre toljuk!

Ez sem a Navier-képletben, sem a VISA-képletben nem okoz változást

$\Downarrow$

a megoldás menete és minden értéke megegyezik az 1-es feladatban szereplő értékekkel!

3. feladat Az ábrán látható keresztmetszet terhelése 20 kN nagyságú nyíró igénybevétel. Határozza meg a csúsztatófeszültség eloszlást leíró $\tau(y)$ függvényt és annak maximumát!



Adatok:

$V = 20\ kN$

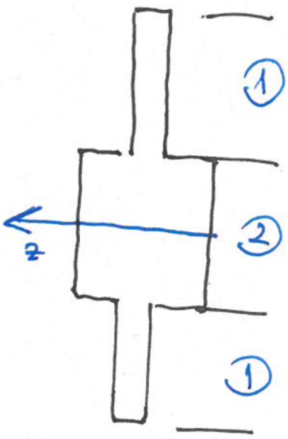
Kérdés: $\tau(y) = ?$

$\tau_{max} = ?$

- Keresztmetszet másodrendű nyomatéka a z-tengelyre:

$$I_z = \frac{20 \cdot 300^3}{12} + 2 \cdot \frac{20 \cdot 100^3}{12} = 48\,333\,333\ mm^4$$

A csúsztató feszültség eloszláshoz 2 szakaszra kell bontani a szelvényt!

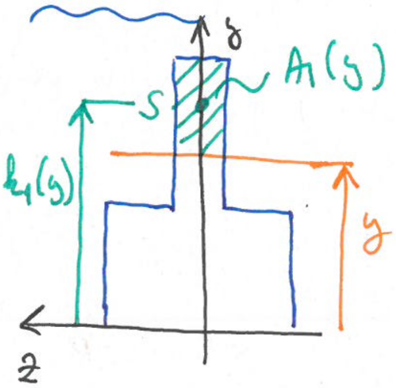


① $-150 < y < -50$ és $50 < y < 150$

② $-50 < y < 50$

Szimmetria miatt elég $y > 0$ esettel foglalkozni!

① es rész:



$a_1(y) = 20\ mm$ (húrvastagság)

$A_1(y) = 20 \cdot (150 - y)$

$k_1(y) = \frac{1}{2}(150 + y)$

$S_1(y) = A_1(y) \cdot k_1(y) = 225\,000 - 10y^2$

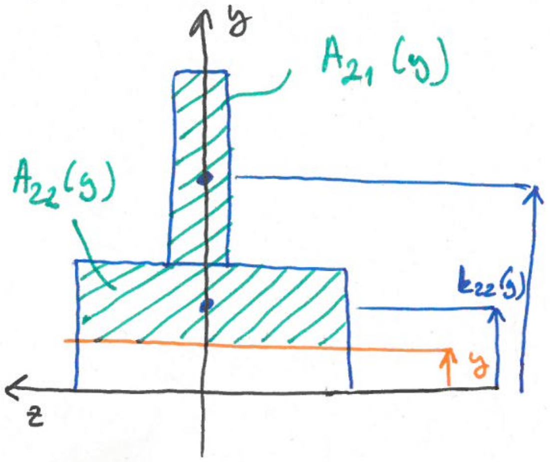
↳ Az elhagyott keresztmetszet statikai nyomatéka

A feszültségeloszlás

$$\tau_1 = \frac{V}{I_z}\cdot\frac{S_1(y)}{a_1(y)} = 4{,}655 - 0{,}0002069\, y^2 \;[\mathrm{MPa}]$$

y: (mm)

2-es rész



$$a_2(y) = 60 \text{ mm}$$

$$S_2(y) = A_{21}(y)\cdot k_{21}(y) + A_{22}(y)\cdot k_{22}(y)$$

$$A_{21}(y) = 20\cdot 100 = 2000 \text{ mm}^2$$

$$k_{21}(y) = 100 \text{ mm}$$

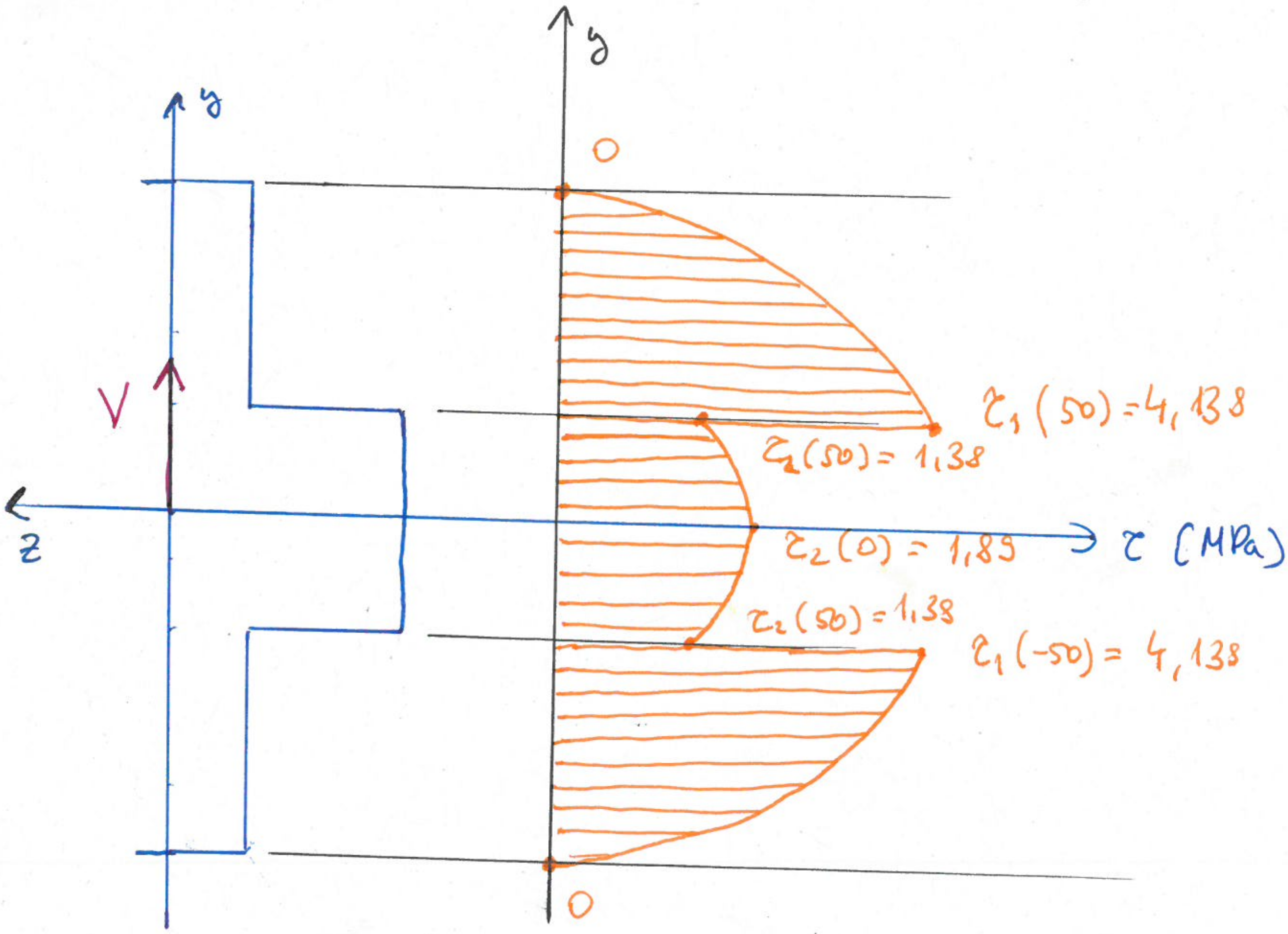
$$A_{22}(y) = 60\cdot(50-y)$$

$$k_{22}(y) = \frac{1}{2}(50+y)$$

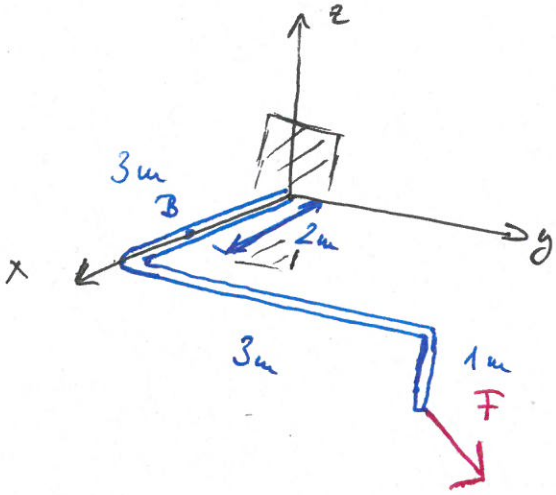
$$S_2(y) = 275000 - 30y^2$$

$$\tau_2(y) = \frac{V}{I_z}\cdot\frac{S_2(y)}{a_2(y)} = 1{,}8966 - 0{,}0002069\, y^2 \;[\mathrm{MPa}]$$

y: (mm)



4. feladat Egy 50 mm átmérőjű kör keresztmetszetű törtvonalú tartót mutat az ábra, amelynek vége az origóban be van fogva. A tartó terhelése a szabad végén működő koncentrált erő. Határozzuk meg a B keresztmetszetben a csavarásból adódó csúsztatófeszültség eloszlást!



Adatok

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ -200 \end{bmatrix} \text{N}$$

$$d = 50 \text{ mm}$$

Számítsuk ki a redukált nyomatékot a B pontban:

$$\underline{M}_B = \underline{r}_{BF} \times \underline{F}$$

$$\underline{r}_{BF} = \underline{r}_F - \underline{r}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{m}$$

Ebből:

$$\underline{M}_B = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 300 & 400 & -200 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -100 \\ -500 \end{bmatrix} \text{Nm} \Rightarrow$$ Ez csavaró és hajlító nyomaték is.

↳ $M_t = \underline{M}_B \cdot \underline{i} = \underline{\underline{-200 \text{ Nm}}}$ ← ez a csavaró komponens!

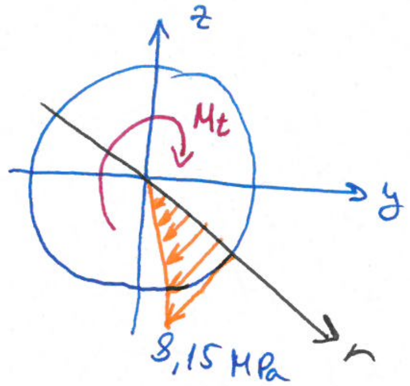
A poláris másodrendű nyomaték: $I_p = \dfrac{d^4 \pi}{32} = 613\,592 \text{ mm}^4$

A fesz. eloszlás:

$$\tau(r) = \frac{|M_t|}{I_p} \cdot r = 0{,}326\, r \text{ (MPa)}$$

(mm)

A feszültségeloszlás:



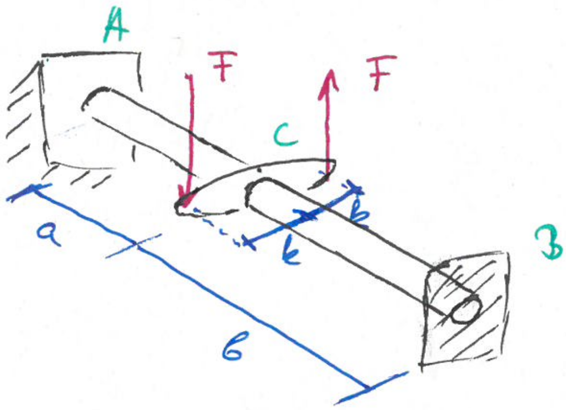
$$\tau_{max} = \frac{|M_t|}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \underline{\underline{8,15\ MPa}}$$

A keresztmetszeti tényező bevezetésével:

$$K_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{d^3 \pi}{16} = \underline{\underline{24543,7\ mm^3}}$$

$$|\tau_{max}| = \frac{|M_t|}{K_p} = \underline{\underline{8,15\ MPa}}$$

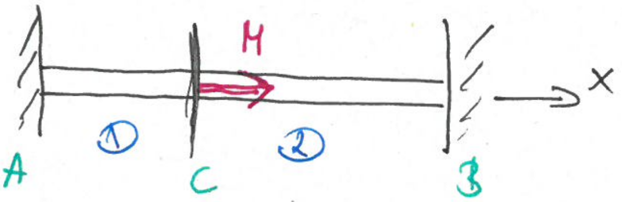
5. feladat Egy kör keresztmetszetű tömör tengely két vége be van fogva, terhelése az ábrán látható. Határozzuk meg a reakciónyomatékokat! Méretezzük a tengelyt, ha $\tau_{meg} = 100$ MPa! Mekkora a C keresztmetszet A-hoz képesti elcsavarodási szöge?



<u>Adatok</u>: $F = 3$ kN
$k = 50$ mm
$a = 400$ mm
$b = 600$ mm
$E = 70$ GPa
$\nu = 0{,}34$

A C pontban csavarónyomaték: $M = 2 \cdot F \cdot k = 300$ Nm

↓ egyszerűsített ábra



<u>Reakciók</u>:

SZTA

$\Sigma M_t = 0 \qquad M_A + M + M_B = 0$

↳ 2 ismeretlen!

<u>Kell még egy egyenlet:</u>

↳ Alakváltozási feltétel:

$\varphi_1 + \varphi_2 = 0$

teljes szögelfordulás az 1es szakaszon

a 2es szakaszon

- $M_{t_1}(x) = -M_A$
- $M_{t_2}(x) = -M_A - M_1$

$$\varphi_1 = \frac{M_{t_1} \cdot a}{I_p \cdot G}$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{t_2} \cdot b}{I_p \cdot G}$$

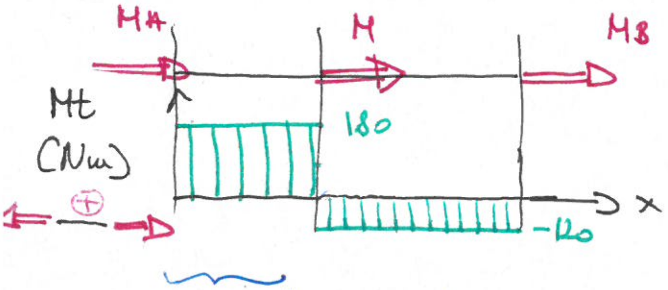
Visszaírva:

$$\frac{M_{t1} \cdot a}{I_p \cdot G} + \frac{M_{t2} \cdot b}{I_p \cdot G} = 0$$

$$\frac{-M_A \cdot a}{I_p \cdot G} + \frac{-(M_A + M) \cdot b}{I_p \cdot G} = 0$$

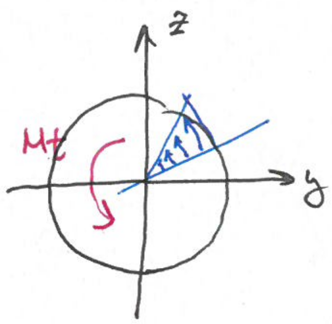
$$M_A (a+b) = -M \cdot b \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{M_A = -\frac{b}{a+b} M_1}} = \underline{\underline{-180\ \mathrm{Nm}}}$$

Az egyensúlyi egyenletből: $M_B = -M_A - M = \underline{\underline{-120\ \mathrm{Nm}}}$



vesz. km $\quad M_{t\,max} = 180\ \mathrm{Nm}$

A-km:



Méretezés: $|\tau_{max}| \leq \tau_{meg}$

$$\frac{M_{t\,max}}{K_{p\,min}} = \tau_{meg}$$

$$K_p = \frac{d^3 \pi}{16}$$

$$K_{p\,min} = \frac{M_{t\,max}}{\tau_{meg}}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_{t\,max}}{\pi \cdot \tau_{meg}}} = \underline{\underline{20{,}93\ \mathrm{mm}}}$$

$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = 18836{,}1\ \mathrm{mm}^4$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 26{,}92\ \mathrm{GPa}$$

A C pont elfordulása

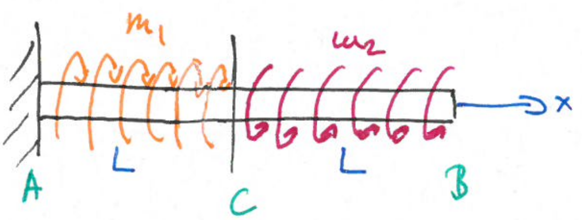
$$\varphi_1 = \frac{M_{t1} \cdot a}{I_p \cdot G} = 0{,}1464\ \mathrm{rad} = \underline{\underline{8{,}38^\circ}}$$

6. feladat Egy befogott tartó terhelése az alábbi ábrán látható megoszló csavaró nyomatékrendszer. A megengedett csúsztatófesz. $\tau_{meg} = 150\ MPa$, a csúsztató rugalmassági modulusz $G = 70\ GPa$.
Méretezzük a tartót:

a) tömör kör keresztmetszetre

b) körgyűrű km-re, ha a belső átmérő 60%-a a külsőnek!

Ábrázoljuk a keresztmetszetek elcsavarodását a befogáshoz képest a rúd hossza mentén a tömör keresztmetszet esetén!



Adatok:

$m_1 = 500\ \frac{Nm}{m}$

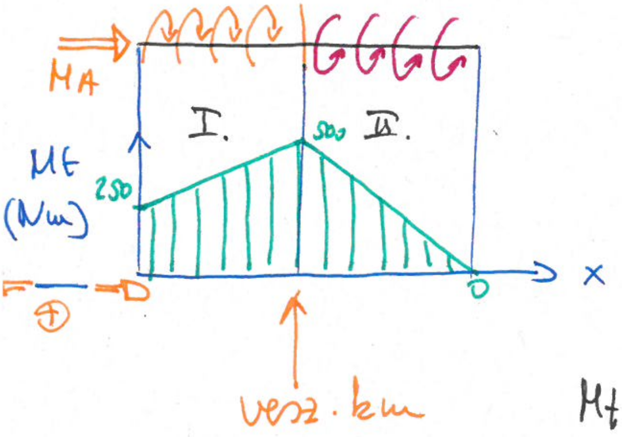
$m_2 = 1000\ \frac{Nm}{m}$

$L = 0{,}5\ m$

$\tau_{meg} = 150\ MPa$

$G = 70\ GPa$

Reakciók:



$\sum M_t = 0: \quad M_A - m_1 \cdot L + m_2 \cdot L = 0$

$$M_A = -m_2 L + m_1 \cdot L = \underline{\underline{-250\ Nm}}$$

$$M_{t_1} = -M_A + m_1 \cdot x = 250 + 500x$$

$$M_{t_2} = -M_A + m_1 L - m_2 (x - L) = 1000 - 1000x$$

$$M_{t\,max} = \underline{\underline{500\ Nm}}$$

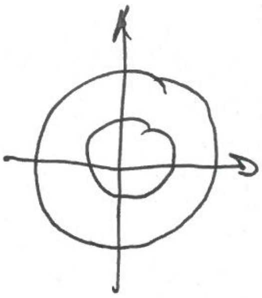
a) Tömör kör:

$$K_p = \frac{d_1^3 \pi}{16}$$

$$|\tau_{max}| \le \tau_{meg}$$

$$\frac{M_{t\,max}}{K_{p\,min}} = \tau_{meg} \longrightarrow d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t\,max}}{\pi \cdot \tau_{meg}}} = \underline{25{,}7\ mm}$$

b) Körgyűrű



$$I_p = \frac{d_2^4 \pi}{32} - \frac{(0,6 d_2)^2 \pi}{32} = \frac{17}{625} d_2^4 \pi$$

$$K_{p_2} = \frac{I_p}{\frac{d_2}{2}} = \frac{34}{625} d_2^3 \pi$$

Méretezés: $|\tau_{max}| \leq \tau_{meg} \Rightarrow \frac{M_{t max}}{K_{p2 min}} = \tau_{meg}$

$$d_{2 min} = \sqrt[3]{\frac{625 \, M_{t max}}{34 \pi \cdot \tau_{meg}}} = \underline{\underline{26,92 \text{ mm}}}$$

Hasonlítsuk össze az anyagfelhasználást:

$$A_1 = \frac{d_1^2 \pi}{4} = 518,79 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\left[d_2^2 - (0,6 d_2)^2\right] \pi}{4} = 364,21 \text{ mm}^2$$

} 30%-kal kisebb anyagfelhasználás

c) Elcsavarodás az a) esetben:

$$I_p = \frac{d_1^4 \pi}{32} = 42835 \text{ mm}^4$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{I_p \cdot G} \int_0^x M_{t1}(x) \, dx = \frac{1}{I_p \cdot G} \int_0^x (-M_A + m x) \, dx$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{I_p \cdot G} \left(-M_A x + \frac{m x^2}{2}\right) = \frac{1}{I_p \cdot G} \left(250000 x + 250 x^2\right)$$

$$= 8,33765 \cdot 10^{-5} x + 8,33765 \cdot 10^{-8} x^2 \quad \text{(rad)}$$

(mm)

A C pontban:

$$\varphi_C = \varphi_1(500) = \underline{\underline{0,0625 \text{ rad}}} = \underline{\underline{3,582°}}$$

A második szakasz:

$$\varphi_2(x) = \varphi_C + \frac{1}{I_p \cdot G} \int_{0,5}^{x} M t_2(x)\, dx = \varphi_C + \frac{1}{I_p \cdot G} \int_{0,5}^{x} -M_A + m_1 L - m_2 (x-L)\, dx$$

$$= \varphi_C + \frac{1}{I_p \cdot G} \left(-375 + 1000x - 500x^2\right)$$

$$= \underbrace{+0{,}0625 - 0{,}125}_{-0{,}0625} + 3{,}33506 \cdot 10^{-4} - 1{,}66753 \cdot 10^{-7} x^2 \quad (rad)$$

$$\varphi_2(x) = -3{,}582 + 0{,}019109\,x - 9{,}55424 \cdot 10^{-6} x^2 \quad [^\circ]$$

$$\varphi_2(2L) = \underline{\underline{5{,}97^\circ}}$$