

**1. feladat** Hataározzuk meg az alábbi feszültségi állapot esetében a vizsgált pontban előforduló alakváltozási energiászámok értékét és ennek alaktorzulásra és térfogatváltozásra jutó részét!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -70 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & -20 \\ 50 & -20 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$E = 250 \text{ GPa} \\ \nu = 0,25$$

Feszültségi tenzor felbontása

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_d + \underline{\underline{\sigma}}_h$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\text{tr } \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 60 \text{ MPa}$$

Ebből:

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_h = \begin{bmatrix} -70 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & -20 \\ 50 & -20 & 30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 & 0 & 50 \\ 0 & 80 & -20 \\ 50 & -20 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Anyagjellemzők:

- Csúsztatónyálvornáig modulus:  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \underline{\underline{100 \text{ GPa}}}$
- Bulk modulus (térfogatváltoz. modulus):  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \underline{\underline{166667 \text{ GPa}}}$

Alakváltozási E-számok:

$$u = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\epsilon}}_d}_{u_d} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\epsilon}}_h}_{u_h}$$

Deviátoros rész:

$$u_d = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\epsilon}}_d = \frac{1}{4G} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d = \frac{1}{4G} ((-90)^2 + 50^2 + 80^2 + (-20)^2 + 50^2 + (-20)^2 + 10^2)$$

$$u_d = \frac{20400}{4G} = \underline{\underline{0,051 \text{ kJ/mm}^3}} \text{ vagy } \text{J/cm}^3$$

Hidrosztatikus rész

$$u_h = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma_u}} : \underline{\underline{\epsilon_u}} = \frac{1}{6k} \underline{\underline{\sigma_u}} : \underline{\underline{\sigma_u}} = \frac{1}{6k} (2\sigma^2 + 2\sigma^2 + 2\sigma^2)$$

$$u_h = 0,0012 \text{ kJ/mm}^3 \text{ vagy } \text{J/cm}^3$$

A teljes alakváltoási energiásűrűség:

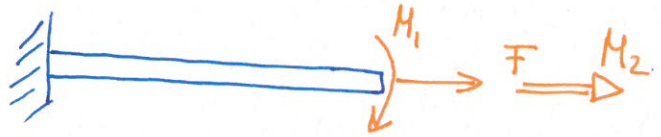
$$u = u_h + u_d = 0,0522 \text{ kJ/mm}^3 \text{ vagy } \text{J/cm}^3$$

A. részarányok:

$$\underline{\underline{\frac{u_d}{u} = 97,7\%}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{\frac{u_h}{u} = 2,3\%}}$$

**2. feladat** Egy  $L=1\text{ m}$  hosszú,  $d=10\text{ mm}$  átmérőjű egyenes rúd végén  $F=1\text{ kN}$  húzóerő,  $M_1$  hajlítómoment és  $M_2$  csavarmomentek működnek. Hogyan válasszuk meg  $M_1/F$  ill.  $M_2/F$  arányt, ha azt akarjuk, hogy egyenes terheléskor hatékonyan azonos mértékű alakváltozási energia határozódjon fel a rúdban? Mekkora lesz abban az esetben, amikor csavarmomenttel működik, a teljes alakváltozási energia?

Adatok:  $E=200\text{ GPa}$   
 $\nu=0,3\text{ MPa}$



Izgátlóti fogak:

$$N(x) = F$$

$$M_b(x) = M_1$$

$$M_t(x) = M_2$$

↓ Rúd esetén az alakváltozási Energia

$$U^N = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dl = \frac{F^2 \cdot L}{2AE} = \frac{2F^2 \cdot L}{d^2 \pi E}$$

ha  $N(x) = F = \text{const}$

$$U^{M_b} = \int_0^L \frac{M_b^2}{2IE} dl = \frac{M_1^2 L}{2IE} = \frac{32M_1^2 L}{d^4 \pi E}$$

ha  $M_b(x) = M_1 = \text{const}$

$$U^{M_t} = \int_0^L \frac{M_t^2}{2IpG} dl = \frac{M_2^2 L}{2IpG} = \frac{32M_2^2 L (1+\nu)}{d^4 \pi E}$$

ha  $M_t(x) = M_2 = \text{const}$

Ha  $U^N = U^{M_b}$

$$\frac{2F^2 L}{d^2 \pi E} = \frac{32M_1^2 \cdot L}{d^4 \pi E}$$

$$\left[ \frac{M_1}{F} = \frac{d}{4} \right]$$

$$\text{Ha} \quad u^N = u^{HE}$$

$$\frac{2FL^2}{d^2 \pi E} = \frac{32H_2^2 L (1+\nu)}{d^4 \pi E}$$

$$\frac{H_2}{F} = \frac{d}{4\sqrt{1+\nu}}$$

A teljes alakváltozási energia

$$U = u^N + u^{H_2} + u^{HE} = 3u^N = \frac{6F^2 L}{d^2 \pi E} = \underline{\underline{2,095 \text{ J}}}$$



3. feladat Egy pontbeli feszültségi állapot és a főfeszültségek értéke ismert.  
Határozzuk meg a Mohr és HMM-jele egyenletű kézi feszültségeket

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 40 & -60 & 0 \\ -60 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Főfeszültségek kiszámítása: Mohr-körökkel vagy sajátérték számításokkal

$$\sigma_1 = 66,39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -36,39 \text{ MPa}$$

Mohr-jele

$$\sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \underline{\underline{102,78 \text{ MPa}}}$$

HMM-jele:

$\underline{\underline{\sigma}}$  tenzor felbontása:

$$\underline{\underline{\sigma}}_u = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}}}$$

$$\text{tr } \underline{\underline{\sigma}} = 40 - 70 + 30 = 0$$

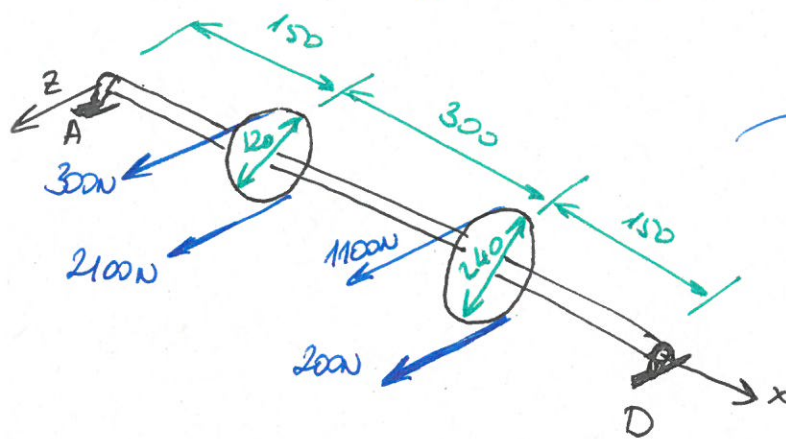
Ebből:

$$\sigma_e^{\text{HMM}} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d} = 147,39 \text{ MPa}$$

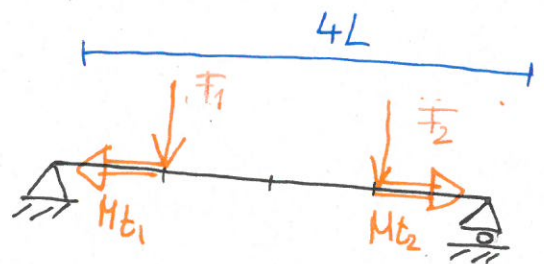
$$\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d = 40^2 + (-60)^2 + (-60)^2 + (-70)^2 + (30)^2 = 14600 \text{ MPa}^2$$

#### 4. feladat

Egy 20 mm átmérőjű acél tengelyt az A és D csapágyak támasztják meg, amelyik engedi a tengelyek kis mértékű rögzítését. Az A csapágy gátolja a tengely körüli elmozdulást, míg a D csapágy engedi. A tengely tetejére a B és C rögzítésként átadódó erő és nyomatékot. Határozzuk meg a tengelyben előforduló maximális Mohr és HMH-jelű egyenértékű feszültséget! Mekkora legyen a tengely átmérője, ha  $\sigma_{meg} = 30 \text{ MPa}$ ?



$$L = 150$$



$$F_1 = 300 + 2100 = 2400 \text{ N}$$

$$F_2 = 1100 + 200 = 1300 \text{ N}$$

$$M_{B1} = M_{C1} = (2100 - 300) \cdot 60 = (1100 - 200) \cdot 120 = \underline{\underline{108 \text{ Nm}}}$$

#### Reakciók

SZTN'



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 : D = 0$$

$$\sum F_y = 0 : A + D - F_1 - F_2 = 0$$

$$\sum M_A = 0 : -F_1 L - F_2 \cdot 3L + D \cdot 4L = 0$$

$$\hookrightarrow D = \frac{F_1 + 3F_2}{4} = \underline{\underline{1575 \text{ N}}}$$

$$\hookrightarrow A = F_1 + F_2 - D = \underline{\underline{2125 \text{ N}}}$$

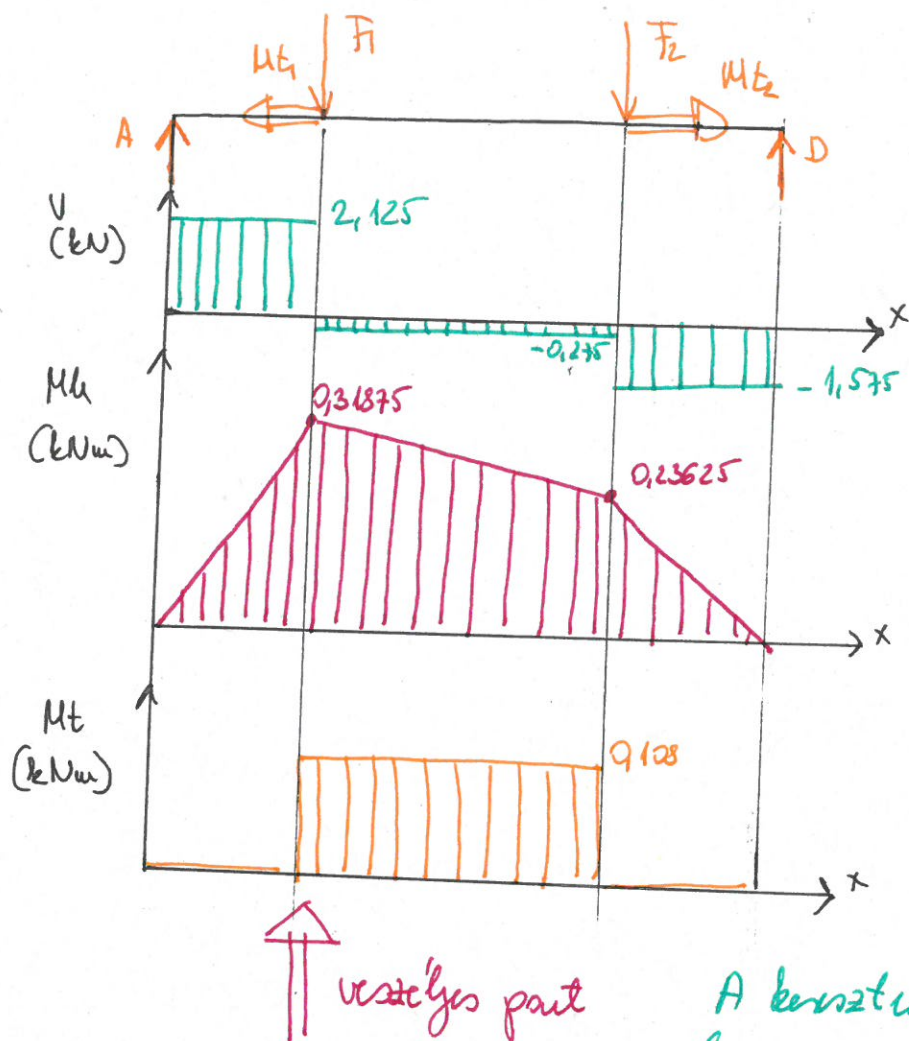
Geometria:

$$K_y = \frac{d^3 \pi}{32} = 785,4 \text{ mm}^3$$

$$K_p = \frac{d^3 \pi}{16} = 1570,8 \text{ mm}^3$$

# Igelybűteli függvények

7



$$H_A = 0,31875 \text{ kNm}$$

$$M_B = 0,103 \text{ kNm}$$

A konstansnál az első pontján  
csak vizsgál.

leírel kijelölt és csavart  
mél

||  
V redukált nyomaték:

$$M_{red} = \sqrt{H_A^2 + c M_B^2}$$

$$\rightarrow H_{MH} : c = 0,75 \rightarrow M_{red}^{HMH} = 0,332189 \text{ kNm}$$

$$\rightarrow M_{kor} : c = 1 \rightarrow M_{red}^{kor} = 0,336549 \text{ kNm}$$

Egyenletünk feszültség:

$$\sigma_e^{HMH} = \frac{M_{red}^{HMH}}{K_y} = 422,96 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e^{kor} = \frac{M_{red}^{kor}}{K_y} = 428,51 \text{ MPa}$$

Latjuk, hogy kor  
a biztonság talán  
felad!



Méretzés  $\rightarrow$  megengedett:  $\sigma_{meg} = 300 \text{ MPa}$  !

• HMH esetén

$$\sigma_e^{HMH} = \sigma_{meg}$$

$$\frac{M_{red}^{HMH}}{K_{gyum}} = \sigma_{meg}$$

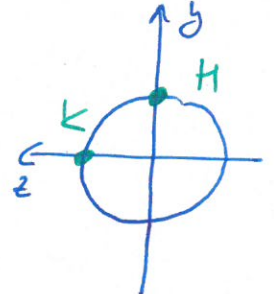
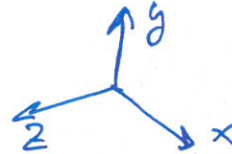
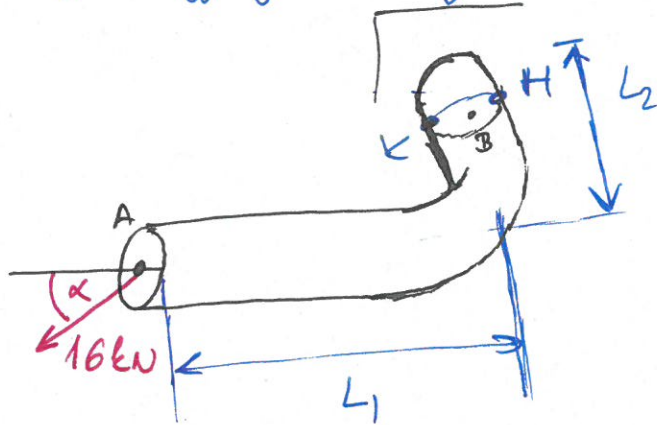
$$\frac{d^3}{32} = \frac{M_{red}^{HMH}}{\sigma_{meg}} \rightarrow d_{min}^{HMH} = \sqrt[3]{\frac{32 M_{red}^{HMH}}{\pi \cdot \sigma_{meg}}} = \underline{\underline{22,43 \text{ mm}}}$$

• Kolr  $\rightarrow$  hasarlóan  $\rightarrow d_{min}^{Kolr} = \sqrt[3]{\frac{32 M_{red}^{Kolr}}{\pi \cdot \sigma_{meg}}} = \underline{\underline{22,52 \text{ mm}}}$



# 5. feladat

Egy 140 mm külső átmérőjű és 7 mm falvastagságú csőidom fordulása és magassága az ábrán látható. Határozzuk meg a H és K felületi pontokban a Mohr- és HMM-jele egyenletékű feszültség nagyságait! A nyírából adódó feszültséget hagyjuk el!



$$\begin{aligned}\alpha &= 55^\circ \\ L_1 &= 1300 \text{ mm} \\ L_2 &= 700 \text{ mm} \\ d_1 &= 140 \text{ mm} \\ t &= 7 \text{ mm}\end{aligned}$$

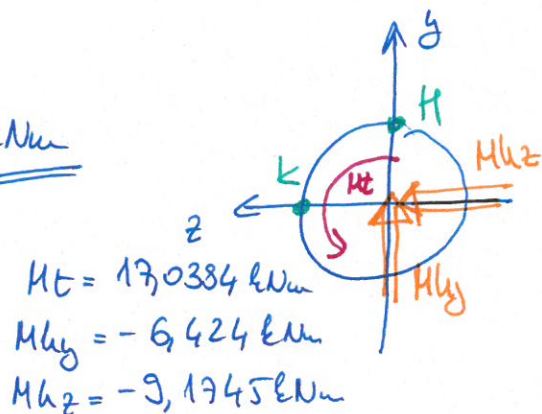
$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \sin \alpha \\ 16 \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -13,1064 \\ 9,17722 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

A: vizsgáljuk ki a cső csatlakozásába mutatni befektet.

$$\underline{r}_{BA} = \begin{bmatrix} 700 \\ 0 \\ 1300 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

↳ A csőben fellépő nyomatékok:

$$\underline{M} = \underline{r}_{BA} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 17,0384 \\ -6,424 \\ -9,1745 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$



$$\begin{aligned}M_x &= 17,0384 \text{ kNm} \\ M_{Hy} &= -6,424 \text{ kNm} \\ M_{Hz} &= -9,1745 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Geometriai jellemzők:

$$I_y = I_z = \frac{(d^4 - (d-2t)^4)}{64} = 6,485 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$K_y = K_z = \frac{I_y}{d/2} = 92643,8 \text{ mm}^3$$

$$I_p = 2I_y = 12,97 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$K_p = \frac{I_p}{d/2} = 185288 \text{ mm}^3$$

H-pont:

Hajlatabbol:  $\sigma_{\max}^H = \left| \frac{M_{Hx}}{K_x} \right| = 99,03 \text{ MPa}$

Savarrabbol:  $\tau_{\max}^H = \left| \frac{M_b}{K_p} \right| = 91,96 \text{ MPa}$

$\Downarrow$  1 és 2. jelű

$$\sigma_{\text{ek}}^{\text{Hodr}} = \sqrt{(\sigma_{\max}^H)^2 + 4(\tau_{\max}^H)^2} = 208,88 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{ek}}^{\text{HMH}} = \sqrt{(\sigma_{\max}^H)^2 + 3(\tau_{\max}^H)^2} = 187,55 \text{ MPa}$$

K-pont:

Hajlatabbol:  $\sigma_{\max}^K = \left| \frac{M_{Ky}}{K_y} \right| = 69,34 \text{ MPa}$

Savarrabbol:  $\tau_{\max}^K = \left| \frac{M_b}{K_p} \right| = 91,96 \text{ MPa}$

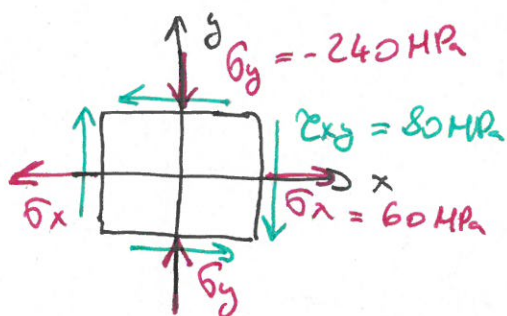
$\Downarrow$

$$\sigma_{\text{ek}}^{\text{Kodr}} = \sqrt{(\sigma_{\max}^K)^2 + 4(\tau_{\max}^K)^2} = 196,55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{ek}}^{\text{KMH}} = \sqrt{(\sigma_{\max}^K)^2 + 3(\tau_{\max}^K)^2} = 173,71 \text{ MPa}$$

**6. feladat** Egy felületi pont feszültségi állapotát szemlélteti az alábbi ábra. Mekkora a  $\sigma_T = 500 \text{ MPa}$  folyáshatárral szemben biztonsági tényező, ha a Mohr-féle egyenértékű feszültséggel számolunk?

Mekkora  $p$  felületi nyomás hatására lesz a HMM-féle egyenértékű feszültség  $340 \text{ MPa}$ ?



$$\begin{aligned}\sigma_x &= 60 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= -240 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= 80 \text{ MPa} \\ \sigma_z &= 0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Feszültségi tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 60 & 80 & 0 \\ 80 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



Főfeszültségek

(Mohr körökkel  
ajánlották/ajánl.)

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 80 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= -260 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Mohr-féle egyenértékű fesz.

$$\sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 340 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_e^{\text{Mohr}}} = \underline{\underline{1,47}}$$

b) felületi nyomás →  $\sigma_z = -p$

$$\text{Ekkor } \underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 60 & 80 & 0 \\ 80 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

→ Bartsuk fel 2 résszé:

$$\text{tr } \underline{\underline{\sigma}} = 60 - 240 - p = \underline{\underline{-180 - p}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_H = \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -60 - \frac{p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -60 - \frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -60 - \frac{p}{3} \end{bmatrix}$$



$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_H = \begin{bmatrix} 120 + \frac{p}{3} & -80 & 0 \\ -80 & -180 + \frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 60 - \frac{2}{3}p \end{bmatrix}$$

Egyenletünk feszültség

$$\sigma_{c}^{HMH} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d} = \underline{\underline{340 \text{ MPa}}}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d &= \left(120 + \frac{p}{3}\right)^2 + (-80)^2 + (-80)^2 + \left(-180 + \frac{p}{3}\right)^2 + \left(60 - \frac{2}{3}p\right)^2 = \\ &= \frac{2}{3}p^2 - 120p + 63200 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{2}{3}p^2 - 120p + 63200 \right)} = 340$$

$$\hookrightarrow p_1 = \underline{\underline{-80 \text{ MPa}}} \quad \text{⚡}$$

$$\hookrightarrow p_2 = \underline{\underline{260 \text{ MPa}}} \quad \checkmark$$

Mivel felületi nyomás  $\rightarrow p \geq 0 \rightarrow \boxed{p = 260 \text{ MPa}}$



7. feladat Határozzon meg a Mohr-jéle egyenletéku' feszültség a HHH-jéle egyenletéku' feszültséghez az alábbi feszültségi állapot után? Hogyan változik ez, ha a diagonál helyeken is  $\tau$ -val megegyező normál feszültség működik?

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

Mohr-jéle egyenletéku' feszültség:

↳ főfeszültség számítása

↳ mivel nincs vízszintes főirány  $\rightarrow$  saját érték, sajátvektor

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\sigma & \tau & 0 \\ \tau & -\sigma & \tau \\ 0 & \tau & -\sigma \end{vmatrix} = -\sigma(\sigma^2 - \tau^2) - \tau(\tau(-\sigma)) = -\sigma^3 + 2\sigma\tau^2 = 0$$

$$-\sigma(\sigma^2 - 2\tau^2) = 0$$

$$\rightarrow \sigma_1 = \sqrt{2}\tau$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\sqrt{2}\tau$$

$$\rightarrow \sigma_e^{\text{Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{2}\tau + \sqrt{2}\tau = \underline{\underline{2\sqrt{2}\tau}}$$

HHH-jéle egyenletéku' feszültség:

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_H$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_H = \frac{1}{3} \underbrace{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}_0 \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$$



$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_d$$

$$\rightarrow \sigma_e^{\text{HHH}} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d} = \sqrt{\frac{3}{2} 4\tau^2} = \underline{\underline{\sqrt{6}\tau}}$$

A kétfaktorozás:  $\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d = 4\tau^2$

Tehát az arány:

$$\frac{\sigma_e^{\text{Mohr}}}{\sigma_e^{\text{HHH}}} = \frac{2\sqrt{2}\tau}{\sqrt{6}\tau} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$$

b) Adjunkt, hozzáadunk és felszámoljuk a diagonálclembet!

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

↳ Kohr-jelle:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - \sigma & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon - \sigma & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon - \sigma \end{vmatrix} = \varepsilon - \sigma ((\varepsilon - \sigma)^2 - \varepsilon^2) - \varepsilon (\varepsilon(\varepsilon - \sigma)) = \\ = (\varepsilon - \sigma)(\sigma^2 - 2\varepsilon\sigma - \varepsilon^2) = 0$$

$$\hookrightarrow \sigma_1 = (1 + \sqrt{2})\varepsilon$$

$$\hookrightarrow \sigma_2 = \varepsilon$$

$$\hookrightarrow \sigma_3 = \underline{\underline{(1 - \sqrt{2})\varepsilon}}$$

Kohr  
 $\sigma_c = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{2}\varepsilon \rightarrow$  Nem változik!

↳ HHH-jelle

$$\underline{\underline{\sigma}}_H = \frac{1}{3} \underbrace{(\text{tr } \underline{\underline{\sigma}})}_{\varepsilon} \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_H = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Nem változik!}$$