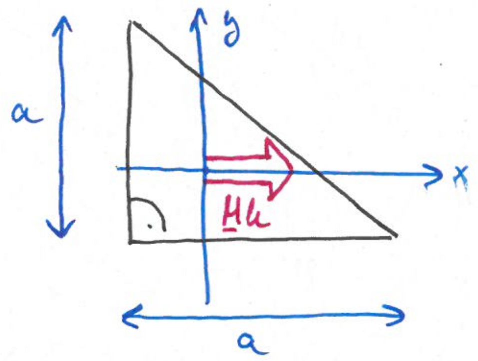
Szilárdságtan - 3. gyakorlat

Ferde hajlítás és síkgörbe rudak hajlítása

1. feladat Egy tartó keresztmetszetének terhelése tiszta hajlítás. Az $M_h = 3\,kNm$ nagyságú hajlítónyomaték vektor irányát és értelmét az alábbi ábra szemlélteti. A derékszögű háromszög alakú keresztmetszet mérete ismert: $a = 9\,cm$



Adatok: $a = 9\,cm$
$M_h = 3\,kNm$

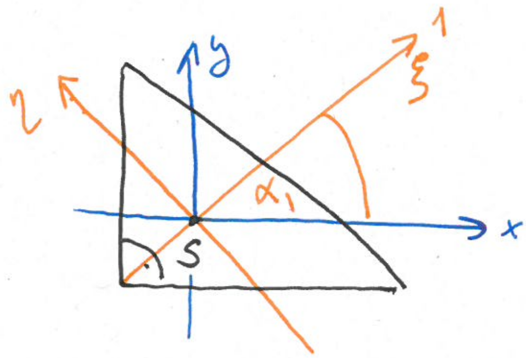
Feladatok:

a) Határozzuk meg a keresztmetszet mentén a hajlításból adódó normálfeszültség eloszlást! $\sigma_z(x,y) = ?$

b) Mekkora biztonsági tényezővel felel meg a tartó, ha $\sigma_{meg} = 150\,MPa$

c) Határozzuk meg a zérustengely x-tengellyel bezárt szögét!

Rajzoljuk be a keresztmetszet másodrendű főtengelyeit!



Emlékeztető:

Derékszögű háromszögre

$$I_x = \frac{a \cdot a^3}{36} = \frac{a^4}{36}$$

$$I_y = \frac{a \cdot a^3}{36} = \frac{a^4}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{-a^2 a^2}{72} = \frac{-a^4}{72}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2} \\ I_2 &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2} \end{aligned}\right\} \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{I_x - I_1}{I_{xy}}\right)$$

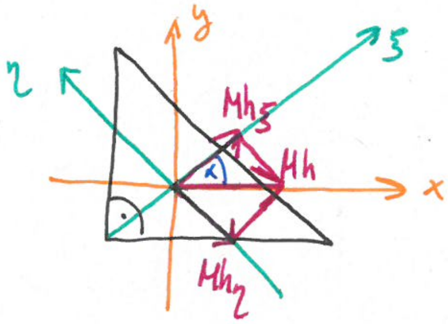
Egyenlőszárú derékszögű háromszögre

$$I_1 = \frac{\frac{a^4}{36} + \frac{a^4}{36}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{36}\right) + 4\left(\frac{a^4}{72}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{a^4}{24}}} = 2733750 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{\frac{a^4}{36} + \frac{a^4}{36}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{36}\right) + 4\left(\frac{a^4}{72}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{a^4}{72}}} = 911250 \text{ mm}^4$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{a^4}{36} - \frac{a^4}{24}}{-\frac{a^4}{72}}\right) = \underline{\underline{45^\circ}} \Leftarrow \text{szimmetria miatt!}$$

Bontsuk fel a hajlítónyomatéki vektort!

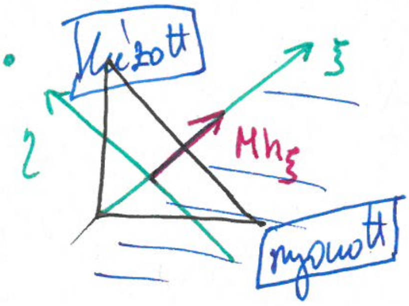


$$Mh_\xi = Mh \cos\alpha = \frac{Mh}{\sqrt{2}}$$

$$Mh_\eta = Mh \cdot \sin\alpha = \frac{Mh}{\sqrt{2}}$$

ezek csak a nagyságok!

A komponensekből számított feszültségek:

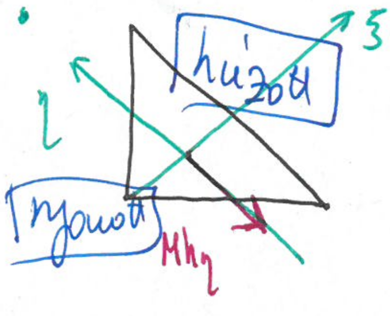
- 

$$\sigma_z^{(\xi)}(\eta) = \frac{Mh_\xi}{I_{\xi = I_1}} \cdot \eta = 0{,}776 \cdot \eta \ [\text{MPa}]$$

(mm)

$$\sigma_z^{(\eta)}(\xi) = \frac{Mh_\eta}{I_{\eta = I_2}} \cdot \xi = 2{,}32 \cdot \xi \ [\text{MPa}]$$

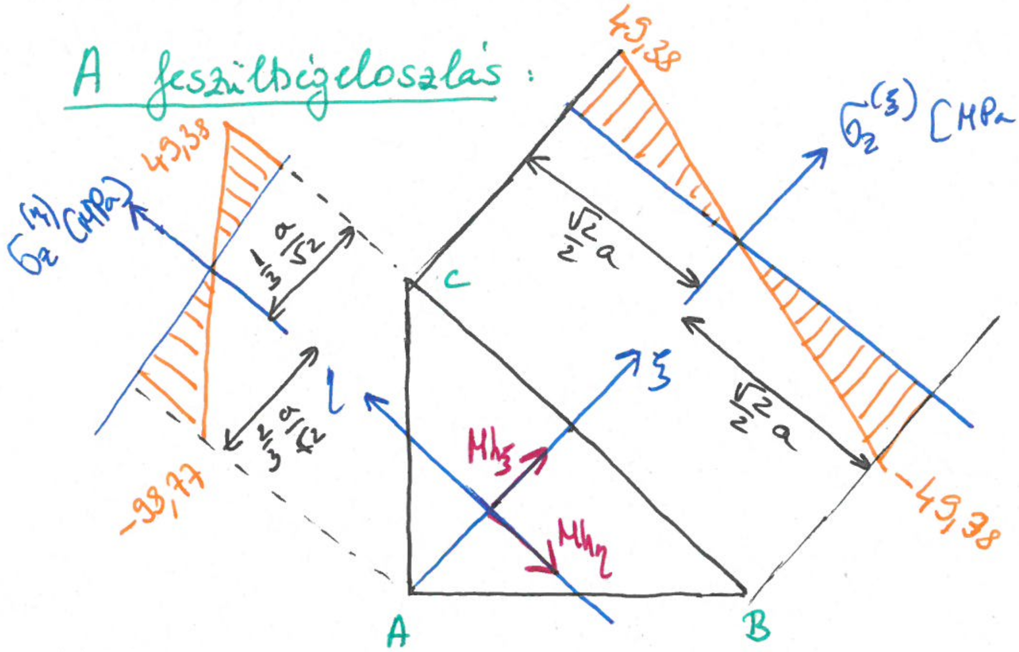
(mm)

- 

$$\Downarrow$$

$$\sigma_z(\xi,\eta) = \frac{Mh_\xi}{I_\xi} \cdot \eta + \frac{Mh_\eta}{I_\eta} \cdot \xi = \underline{\underline{0{,}776\eta + 2{,}32\xi}}$$

A feszültségeloszlás:



A háromszög csúcsaiban a feszültségek:

$$\sigma_A = -98{,}77 + 0 = \underline{\underline{-98{,}77\ \text{MPa}}}$$

$$\sigma_B = 49{,}38 - 49{,}38 = \underline{\underline{0\ \text{MPa}}}$$

$$\sigma_C = 49{,}38 + 49{,}38 = \underline{\underline{98{,}77\ \text{MPa}}}$$

$$\Downarrow \quad \sigma_{max} = \sigma_C = \underline{\underline{98{,}77\ \text{MPa}}}$$

Biztonsági tényező: $n = \dfrac{\sigma_{meg}}{\sigma_{max}} = \dfrac{150}{98{,}77} = \underline{\underline{1{,}52}}$

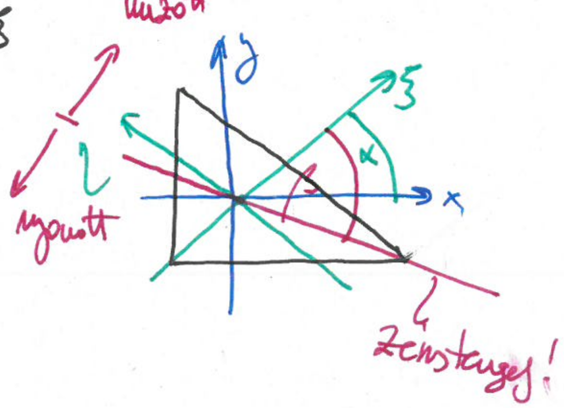
Zérustengely:

$$\sigma(\xi,\eta) = \frac{Mh_\xi}{I_\xi}\eta + \frac{Mh_\eta}{I_\eta}\xi = 0$$

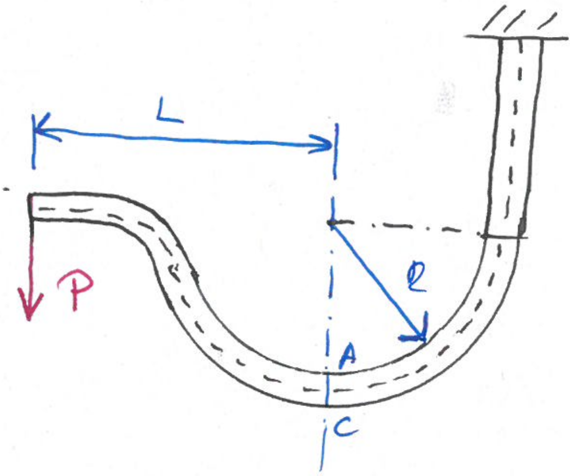
$$\eta = \underbrace{-\frac{Mh_\eta}{I_\eta}\cdot\frac{I_\xi}{Mh_\xi}}_{tg\beta}\cdot\xi$$

$tg\beta = -3$

$\hookrightarrow \beta = \underline{\underline{-71{,}57^\circ}}$



2. feladat Mekkora lehet a P terhelés nagysága, ha az AC keresztmetszetben a hajlításból származó normálfeszültség megengedett értéke $\sigma_{meg} = 20$ MPa ?

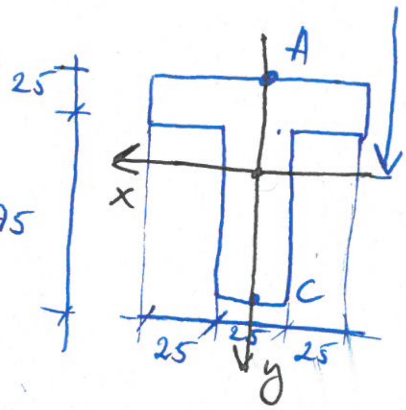


Adatok

$L = 600$ mm

$R = 300$ mm

$\sigma_{meg} = 200$ MPa



R ↕ 37,5

↑ súlypontszámításból

$\boxed{\text{A hajlítás tengelye } x}$

$I_x = 332{,}03125\ cm^4$

$A = 3750\ mm^2$

Síkgörbe rúd hajlítása

Vizsgáljuk meg, milyen összefüggést kell alkalmazni:

$$\frac{R}{h} = 3{,}375 \longrightarrow \text{Grashof képlet, de}$$

$I_0 \approx I_x$ használható

$R = r + 37{,}5 = 337{,}5$ mm

$h = 100$ mm

A hajlító nyomaték: $M_h = -L \cdot P = -600\ P$

mert ki akarja egyenesíteni a rudat

$$\sigma(y) = \frac{M_h}{R \cdot A} + \frac{M_h}{I_x} \cdot y \cdot \frac{R}{R+y}$$

Behelyettesítést követően:

$$\sigma(y) = \frac{-600\,P}{337{,}5\cdot 3750} - \frac{600\,P}{3320312{,}5}\cdot y\,\frac{337{,}5}{337{,}5+y}$$

Mindent (mm) - (MPa) dimenzió szerint chunk be

⇓ a szélső pontokban

$$\boxed{\begin{aligned} y_A &= -37{,}5 \text{ mm} \\ y_C &= 62{,}5 \text{ mm} \end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_A &= \sigma(y_A) = 0{,}0071495\,P \\ \sigma_C &= \sigma(y_C) = -0{,}0100035\,P \end{aligned}\right\}$$

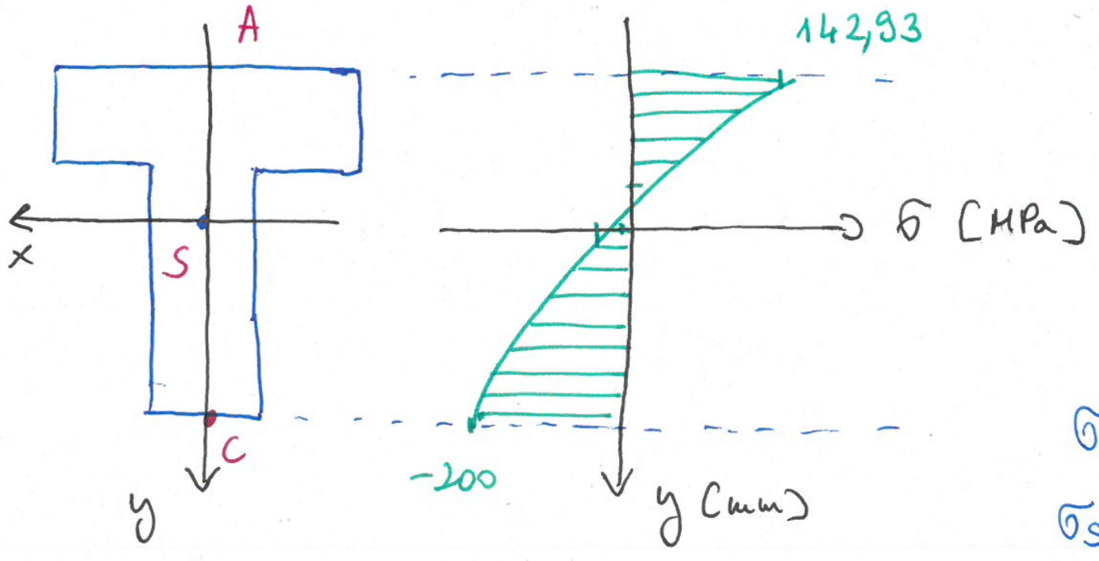
A veszélyes pont C lesz

$$|\sigma_C| \le \sigma_{meg}$$

$$|\sigma_{C\,max}| = 0{,}0100035\,P = 200 \text{ MPa}$$

$$\hookrightarrow P = \underline{\underline{19{,}993 \text{ kN}}}$$

Rajzoljuk fel a feszültségeloszlást.



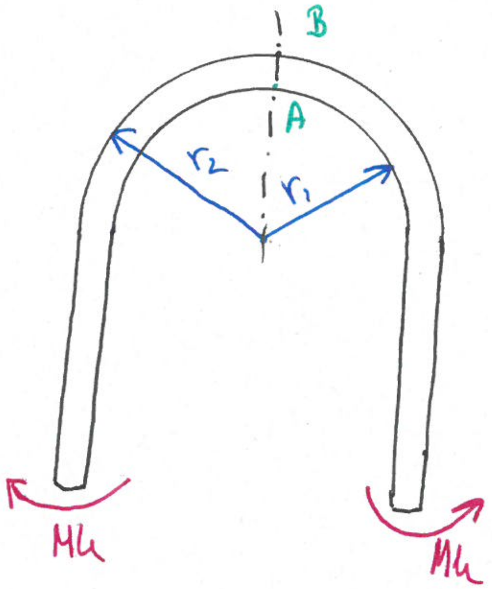
$\sigma_C = -200$ MPa

$\sigma_S = -9{,}478$ MPa

$\sigma_A = 142{,}93$ MPa

3. feladat

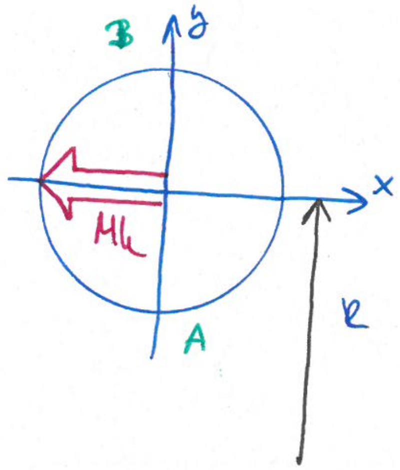
Az alábbi kör keresztmetszetű görbe rúd terhelése az 1,5 Nm a megfogások helyén! Határozzuk meg a hajlításból származó normál feszültség eloszlást az AB keresztmetszetben!



Adatok

$M_h = 1{,}5\ Nm$
$r_1 = 4\ cm$
$r_2 = 6\ cm$

Rajzoljuk le a keresztmetszetet:



$d = r_2 - r_1 = 2\ cm = 20\ mm$

A görbületi sugár

$$R = \frac{r_2 + r_1}{2} = 50\ mm$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 314{,}159\ mm^2$$

Ellenőrizzük, milyen képlettel kell számolni:

$$\frac{R}{h} = \frac{R}{d} = 2{,}5 \implies \text{Grashof, de } I_0 \approx I_x$$

$$I_x = \frac{d^4 \pi}{64} = \underline{\underline{7853{,}98\ mm^4}}$$

Alkalmazva a fenti egyszerűsítést:

$$\sigma(y) = \frac{M_h}{R \cdot A} + \frac{M_h}{I_x} \cdot y \, \frac{R}{R+y}$$

M_h-t negatív előjellel kell behelyettesíteni:

$$\sigma(y) = \underbrace{-0{,}09549}_{\sigma(0)} - \frac{9{,}5493y}{50+y}$$

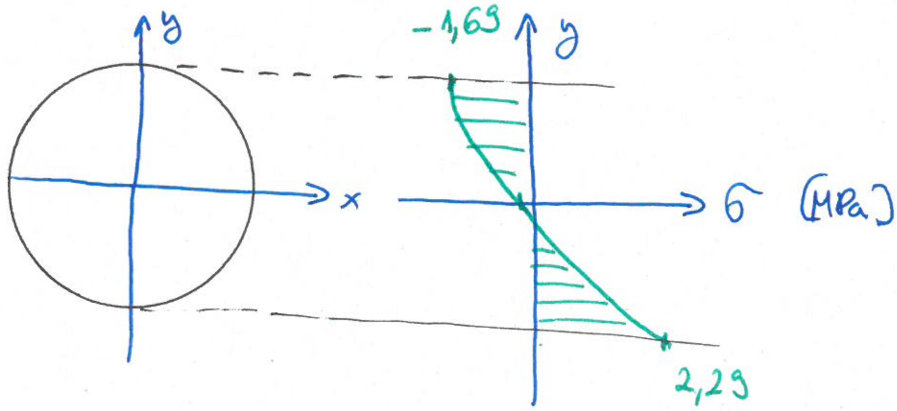
A keresztmetszet szélső pontjaiban:

$$\sigma_B = \sigma\left(+\frac{d}{2}\right) = -1{,}69 \text{ MPa}$$

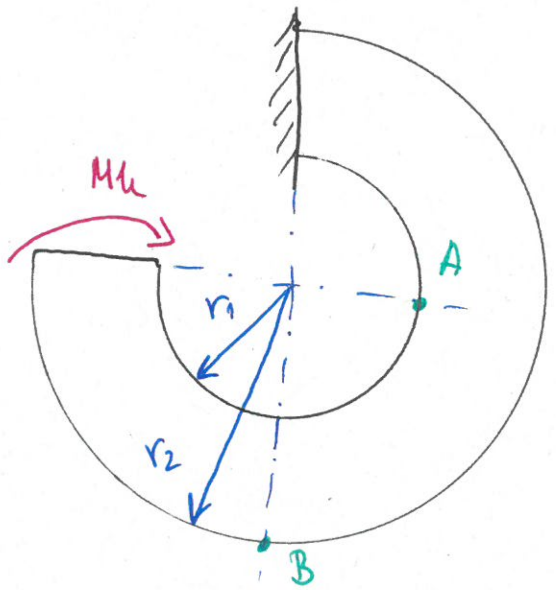
$$\sigma_C = \sigma(0) = -0{,}095 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = \sigma\left(-\frac{d}{2}\right) = 2{,}29$$

A feszültségeloszlás:



4. feladat Az ábrán látható kör keresztmetszetű görbe rúd terhelése 5 kNm nyomaték a végkeresztmetszetben. Határozza meg a normálfeszültség értékét az A és B helyeken! Milyen távolságban helyezkedik el a B ponttól sugárirányban a semleges tengely helye?



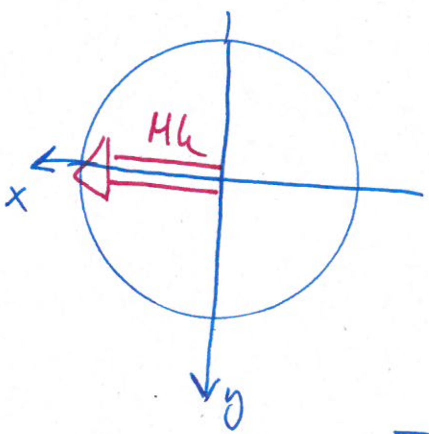
Adatok

$r_1 = 200\ mm$

$r_2 = 400\ mm$

$M_h = 5\ kNm$

Bármely keresztmetszet esetén az alábbi koordinátarendszert kell felvenni:



$$\frac{R}{h} = 1{,}5 \Rightarrow \text{Grashof-képlet}$$

<u>nincs</u> egyszerűsítés

$$R = \frac{r_1 + r_2}{2} = 300\ mm$$

$$h = r_2 - r_1 = 200\ mm$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4} = 31415{,}9\ mm^2$$

$$I_0 = R \cdot A \cdot \varkappa$$

ahol $\varkappa_{kör} = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{2R}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{d}{2R}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{d}{2R}\right)^6 + \frac{7}{128}\left(\frac{d}{2R}\right)^8 + \dots$

$$\varkappa = 0{,}029437$$

Visszahelyettesítve:

$$I_0 = 83\,229\,715\ \mathrm{mm}^4$$

Érdekesség: $I_x = \dfrac{d^4\pi}{64} = 78539816\ \mathrm{mm}^4$

Ez már túl nagy hibát okozna!

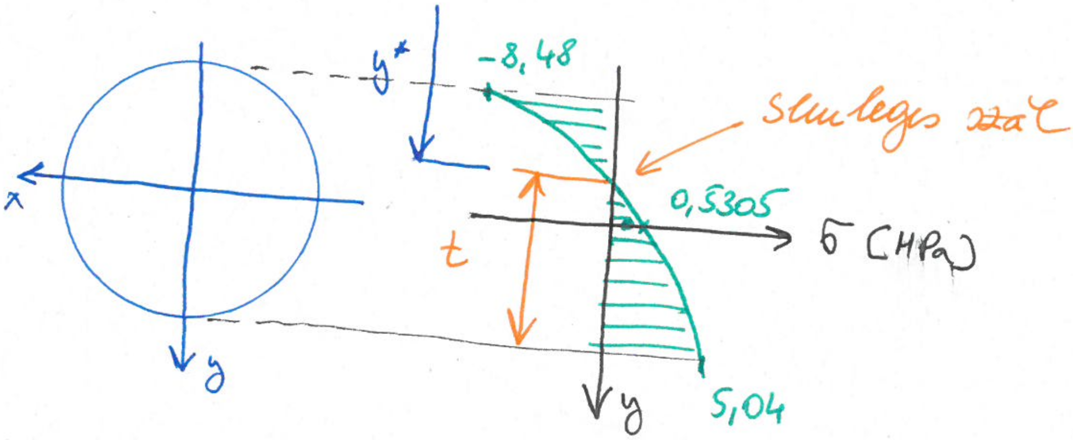
A feszültségeloszlás:

$$\sigma(y) = \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_0}\, y\, \frac{R}{R+y} = \underbrace{0{,}5305}_{\sigma(0)} + \frac{18{,}0224\,y}{300+y}$$

↳ A szélső pontokban:

$$\sigma_A = \sigma\left(-\frac{d}{2}\right) = -8{,}48\ \mathrm{MPa} \qquad \sigma_C = \sigma(0) = \underline{\underline{0{,}5305\ \mathrm{MPa}}}$$

$$\sigma_B = \sigma\left(\frac{d}{2}\right) = 5{,}04\ \mathrm{MPa}$$



$\sigma(y^*) = 0$ egyenletet kell megoldani!

$$\frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_0}\, y^* \frac{R}{R+y^*} = 0$$

$$\frac{M_h}{RA}(R+y^*) + \frac{M_h}{I_0} R y^* = 0$$

$$y^* = \frac{-\dfrac{M_h}{RA}\cdot R}{\dfrac{M_h}{RA} + \dfrac{M_h}{I_0}\cdot R} = \underline{-8{,}578\ \mathrm{mm}} \longrightarrow t = \frac{d}{2} - y^* =$$

$$\underline{\underline{t = 108{,}578\ \mathrm{mm}}}$$