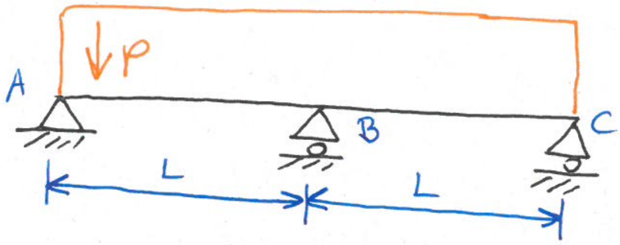
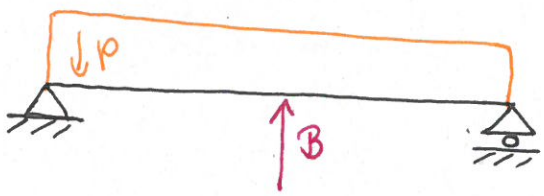
1. feladat Hányszor nagyobb erő ébred az alábbi tartó B alátámasztásánál, mint A vagy C helyen? Rajzoljuk fel a tartó igénybevételi ábráit paraméteresen! A tartó anyaga és keresztmetszete végig állandó!

Adott: p, L, IE



Látjuk, hogy a tartó statikailag határozatlan → $2+1+1 = 4$ db reakcióerő

① Tegyük aktívvá az egyik reakciót



② Alakváltozási feltétel

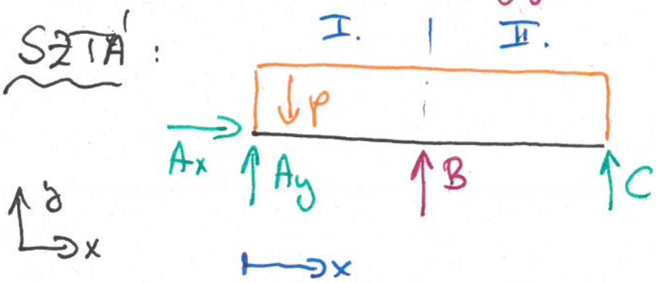
$$\boxed{f_B = 0}$$

Értékeljük ki az alakváltozási feltételt: → Castigliano-tétel

$$f_B = \frac{\partial U}{\partial B} = 0 \qquad \text{ahol} \qquad U = \underbrace{U^N}_{=0} + \underbrace{U^V}_{\approx 0} + U^{Mh} + \underbrace{U^{Mt}}_{=0} \approx U^{Mh}$$

Fontos! A Castigliano-tételnél minden reakciót az aktív terheléssel kell kifejezni!

SZTA:



Egyensúlyi egyenletek

$\Sigma F_x = 0 : \boxed{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0 : A_y + B + C - p2L = 0$

$\Sigma M_A = 0 : B \cdot L + C \cdot 2L - p2L^2 = 0$

A nyomatéki egyenletből: $C = \frac{p2L^2 - BL}{2L} = \underline{\underline{pL - \frac{B}{2}}}$

Visszaírva az erőegyensúlyba: $A_y = p \cdot 2L - B - C =$

$= p2L - B - pL + \frac{B}{2} = \underline{\underline{pL - \frac{B}{2}}}$

Hajlítónyomatéki igénybevételi fgv.

$$M_{h1}(x) = -A_y x + p\frac{x^2}{2} = -pLx + \frac{B}{2}x + p\frac{x^2}{2} = \left(\frac{B}{2} - pL\right)x + \frac{px^2}{2}$$

$$M_{h2}(x) = -A_y x + p\frac{x^2}{2} - B(x-L) = B \cdot L + \left(-\frac{B}{2} - pL\right)x + \frac{px^2}{2}$$

A deriváltak: $\underline{\underline{\frac{\partial M_{h1}}{\partial B} = \frac{x}{2}}}$ $\qquad \underline{\underline{\frac{\partial M_{h2}}{\partial B} = L - \frac{x}{2}}}$

Castigliano-tétel:

$$f_B = \frac{\partial U^{Mh}}{\partial B} = \frac{1}{IE}\left(\int_0^L M_{h1}\frac{\partial M_{h1}}{\partial B}dx + \int_L^{2L} M_{h2}\frac{\partial M_{h2}}{\partial B}dx\right)$$

$$= \frac{1}{IE}\left(\int_0^L \left(\frac{B}{2} - pL\right)\frac{x^2}{2} + \frac{px^3}{4}dx + \int_L^{2L} BL^2 + \left(-\frac{BL}{2} - pL^2 - \frac{BL}{2}\right)x + \left(\frac{pL}{2} + \frac{B}{4} + \frac{pL}{2}\right)x^2 - \frac{px^3}{4}dx\right)$$

$\rightarrow$ elvégezzük az integrálást!

$$= \frac{1}{IE}\left[\underbrace{\left(\frac{BL^3}{12} - \frac{5pL^4}{48}\right) + \left(\frac{BL^3}{12} - \frac{5pL^4}{48}\right)}_{\frac{BL^3}{6} - \frac{5pL^4}{24} = 0}\right] = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{B = \frac{5}{4}pL}$$

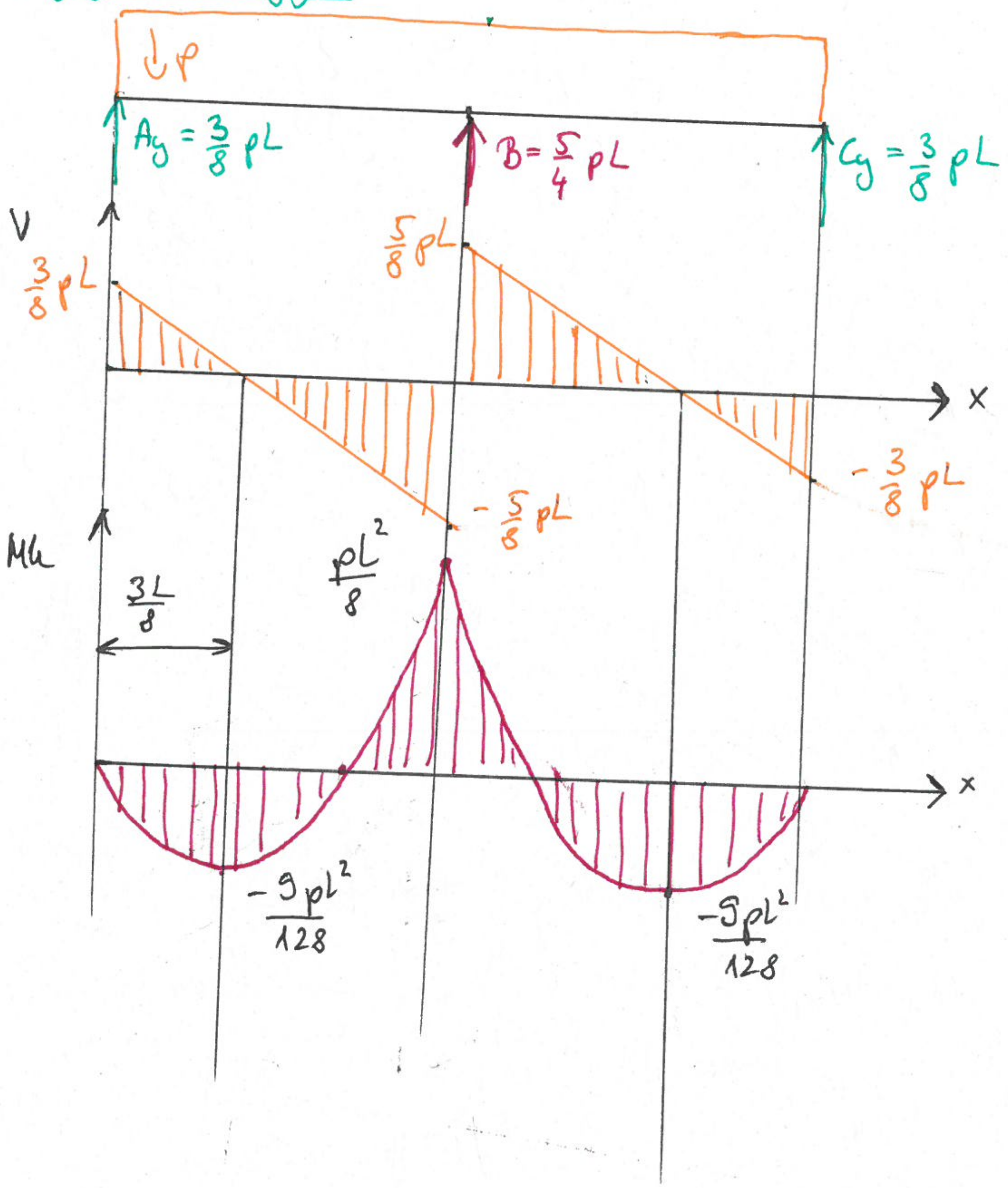
Visszaírva az egyensúlyi egyenletekbe:

$$A_y = C = pL - \frac{B}{2} = pL - \frac{5}{8}pL = \underline{\underline{\frac{3}{8}pL}}$$

Amennyiben az arányra vagyunk kíváncsiak:

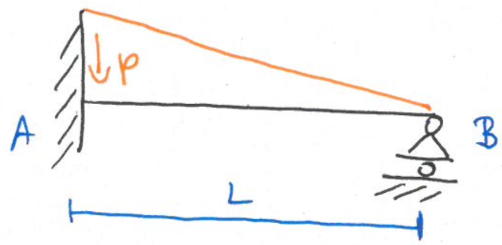
$$\frac{B}{C} = \frac{\frac{5}{4}pL}{\frac{3}{8}pL} = \frac{10}{3} = \underline{\underline{3,3\dot{3}}}$$

Igénybevételi fgvek



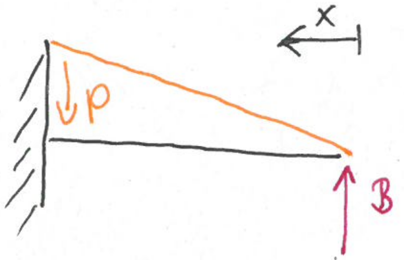
2. feladat Mekkora lehet p értéke, ha azt szeretnénk, hogy a befogásnál 200 Nm nagyságú reakciónyomaték ébredjen?
A tartó keresztmetszete és anyaga állandó

<u>Adatok</u>: $L = 2\,m$
$IE = \text{áll}$



Látjuk, hogy $3+1 = 4$ db ismeretlen reakció ébred $\Rightarrow$ statikailag határozatlan

Tegyük aktívá!



$+ \boxed{f_B = 0}$ alakváltozási feltétel!

<u>Castigliano-tétel</u>: $\dfrac{\partial U}{\partial B} = 0$

$$U = \underbrace{U^N}_{=0} + \underbrace{U^V}_{\approx 0} + U^{Mh} + \underbrace{U^{Mt}}_{=0} \approx U^{Mh}$$

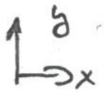
A hajlítónyomatéki igénybevétel: $M_h = -Bx + \dfrac{p}{L} x \cdot \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{x}{3} = -Bx + \dfrac{px^3}{6L}$

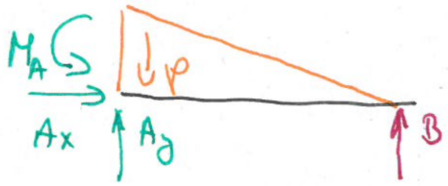
$$\frac{\partial M_h}{\partial B} = -x$$

$$f_B = \frac{\partial U^{Mh}}{\partial B} = \frac{1}{IE}\int_0^L M_h \cdot \frac{\partial M_h}{\partial B}\,dx = \frac{1}{IE}\int_0^L Bx^2 - \frac{px^4}{6L}\,dx = \frac{1}{IE}\left[\frac{Bx^3}{3} - \frac{px^5}{30L}\right]_0^L$$

$$= \frac{1}{IE}\left(\frac{BL^3}{3} - \frac{pL^4}{30}\right) = 0 \longrightarrow B = \frac{pL^4}{30}\cdot\frac{3}{L^3} = \frac{pL}{10}$$

Most fel lehet rajzolni a szabadtestábrát!





Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \qquad \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad A_y + B - \frac{p \cdot L}{2} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad M_A + B \cdot L - \frac{pL}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0$$

Ebből:
$$A_y = \frac{pL}{2} - B = \frac{pL}{2} - \frac{pL}{10} = \underline{\underline{\frac{2pL}{5}}}$$

$$M_A = \frac{pL^2}{6} - B \cdot L = \frac{pL^2}{6} - \frac{pL^2}{10} = \frac{2pL^2}{30} = \underline{\underline{\frac{pL^2}{15}}}$$

Tehát, ha:

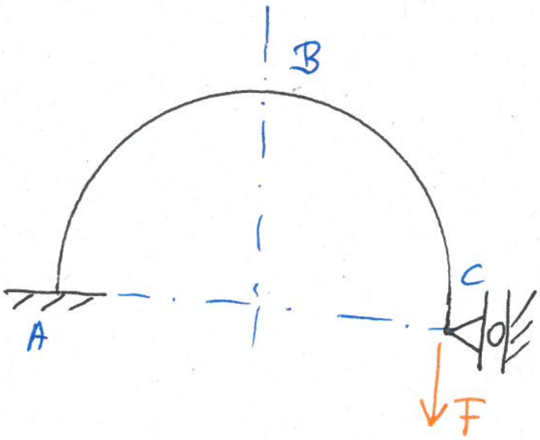
$$M_A = 200\ \mathrm{Nm}$$

$$\hookrightarrow \quad M_A = \frac{pL^2}{15} = 200\ \mathrm{Nm}$$

$$p = \frac{15 M_A}{L^2} = \underline{\underline{750\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}$$

3. feladat Számítsuk ki az alábbi tartónál a reakciók értékét!

A tartó anyaga és keresztmetszete állandó!



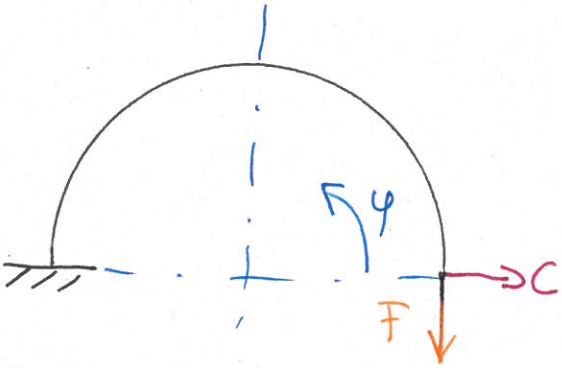
Adott: F, R, IE, AE

→ 4 db ismeretlen reakció

⇓

statikailag határozatlan

① Tegyük határozottá + alakvált. feltétel

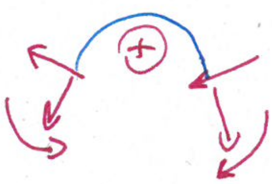


$+ \boxed{f_C = 0}$

Castigliano-tétellel: $f_C = \dfrac{\partial U}{\partial C}$

$$U = U^N + \underbrace{U^V}_{\approx 0} + U^{Mh} + \underbrace{U^{Mt}}_{=0} = U^N + U^{Mh}$$

Írjuk fel az igénybevételi fgveket!



$$N(\varphi) = F\cos\varphi + C\sin\varphi$$

$$V(\varphi) = F\sin\varphi - C\cos\varphi$$

$$M_h(\varphi) = FR(1-\cos\varphi) - CR\sin\varphi$$

→ A deriváltak:

$$\frac{\partial N}{\partial C} = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial C} = -R\sin\varphi$$

Tehát a vízszintes elmozdulás:

$$f_C = \frac{\partial u^N}{\partial C} + \frac{\partial u^{M_h}}{\partial C} = \frac{1}{AE}\int_0^{\pi} N \cdot \frac{\partial N}{\partial C} R\,d\varphi + \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} M_h \frac{\partial M_h}{\partial C} R\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{AE}\int_0^{\pi}\left(F\cos\varphi\sin\varphi + C\underbrace{\sin^2\varphi}_{\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\varphi}{2}}\right)R\,d\varphi + \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} FR^3(\cos\varphi - 1)\sin\varphi + CR^3\underbrace{\sin^2\varphi}_{\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\varphi}{2}}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{AE}\left[RF\frac{\sin^2\varphi}{2} + \frac{CR}{2}\varphi - CR\frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{IE}\left[\frac{FR^3\sin^2\varphi}{2} + FR^3\cos\varphi + \frac{CR^3}{2}\varphi - \frac{CR^3\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{\pi}$$

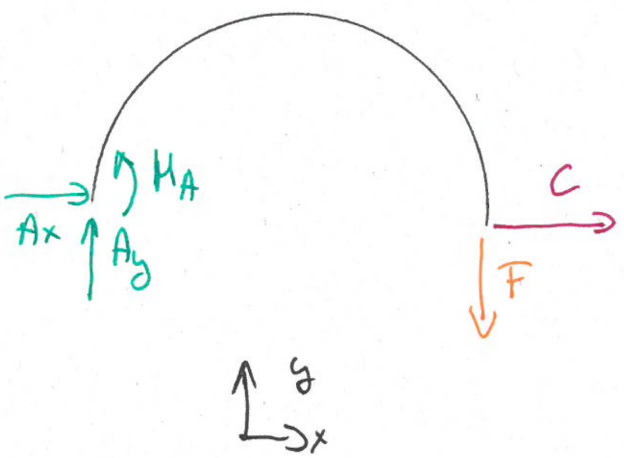
$$= \frac{1}{AE}\frac{CR\pi}{2} + \frac{1}{IE}\left(-2FR^3 + \frac{CR^3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$C\left(\frac{R\pi}{2AE} + \frac{R^3\pi}{2IE}\right) - \frac{2FR^3}{IE} = 0$$

$$C = \frac{\frac{2FR^3}{IE}}{\frac{IR\pi + AR^3\pi}{2AIE}} = \frac{4AR^2F}{I\pi + AR^2\pi}$$

SZTA



$\sum F_x = 0 \quad A_x + C = 0$

$\sum F_y = 0 \quad A_y - F = 0$

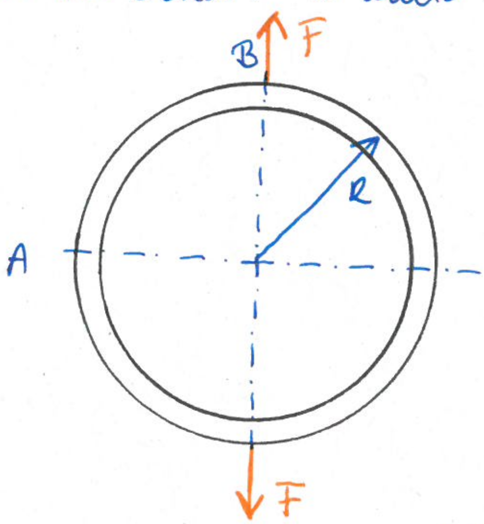
$\sum M_A = 0 \quad M_A - F \cdot 2R = 0$

$\Rightarrow A_x = -\dfrac{4AR^2F}{I\pi + AR^2\pi}$

$\Rightarrow A_y = F$

$\Rightarrow M_A = 2RF$

5. feladat Határozzuk meg az alábbi keretnél a hajlítónyomatéki igénybevétel eloszlását! Mekkora a maximális hajlítónyomaték és hol ébred? A tartó anyaga és keresztmetszete végig állandó

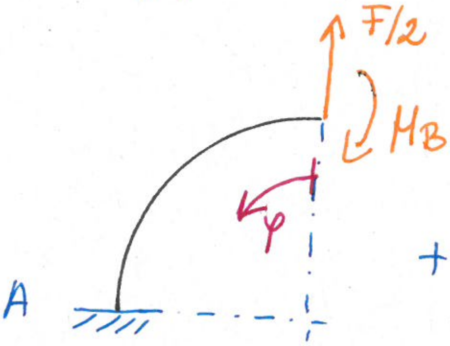


Adott: F, R

↳ Zárt keret → mesterségesen vágjuk szét

\+ használjuk ki a kétoldali szimmetriát is! → terhelés és geometria

⇓ „negyedmodell"



Ha szimmetria mentén vágjuk el ⇒ nem ébred nyíróerő!

\+ alakváltozási feltétel

$$\boxed{\varphi_B = 0}$$

Castigliano-tétel: $\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = 0$

$$U = U^N + \underbrace{U^V}_{\approx 0} + U^{Mh} + \underbrace{U^{Mt}}_{=0} = U^N + U^{Mh}$$

$$\varphi_B = \frac{\partial U^N}{\partial M_B} + \frac{\partial U^{Mh}}{\partial M_B} = \frac{1}{AE}\int_0^{\pi/2} N \frac{\partial N}{\partial M_B} R\,d\varphi + \frac{1}{IE}\int_0^{\pi/2} M_h \frac{\partial M_h}{\partial M_B} R\,d\varphi$$

Igénybevételi fgvek

$$\left.\begin{aligned} N(\varphi) &= \frac{F}{2}\sin\varphi \\ V(\varphi) &= -\frac{F}{2}\cos\varphi \\ M_h(\varphi) &= M_B - \frac{F}{2}R\sin\varphi \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

A deriváltak

$$\frac{\partial N}{\partial M_B} = 0$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial M_B} = 1$$

Visszaírva:

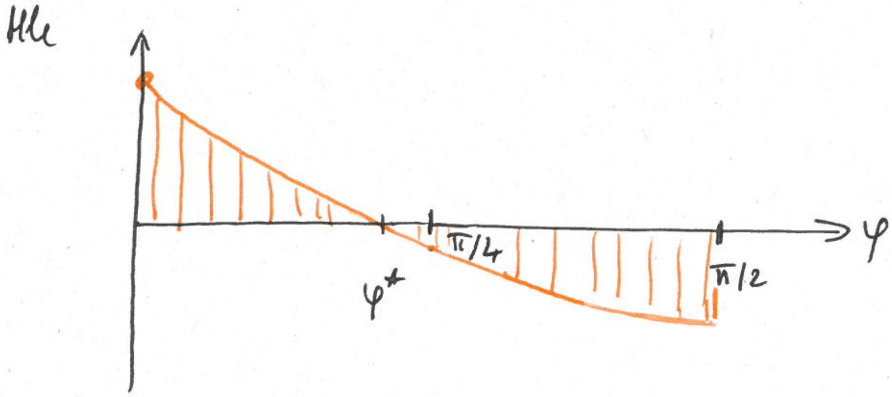
$$\varphi_B = \underbrace{\frac{1}{AE}\int_0^{\pi/2} \frac{F}{2}\sin\varphi \cdot 0\, R\, d\varphi}_{=0} + \frac{1}{IE}\int_0^{\pi/2}\left(M_B - \frac{F}{2}R\sin\varphi\right) R\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{IE}\left[M_B R\varphi + \frac{F}{2}R^2\cos\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{IE}\left(M_B R\frac{\pi}{2} - \frac{FR^2}{2}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{M_B R\pi}{2} = \frac{FR^2}{2}$$

Ez alapján a hajlítónyomatéki igénybevétel: $\boxed{M_B = \frac{FR}{\pi}}$

$$M_h(\varphi) = \frac{FR}{\pi} - \frac{FR}{2}\sin\varphi = FR\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\varphi\right)$$



Nevezetes értékek:

$$M_h(0) = \frac{FR}{\pi} = 0,3183 \cdot FR$$

$$M_h(\pi/2) = FR\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) = -0,1817\, FR$$

$$M_h(\pi/4) = FR\left(\frac{1}{\pi} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -0,0352\, FR$$

Zérushely: $M_h(\varphi^*) = 0$

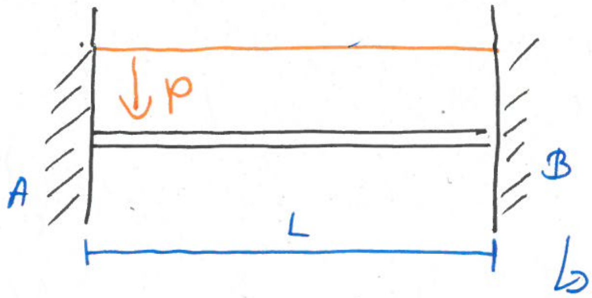
$$FR\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\varphi^*\right) = 0$$

$$\hookrightarrow \sin\varphi^* = \frac{2}{\pi} \rightarrow \varphi^* = 0,69 = \underline{39,54^\circ}$$

$\boxed{6.\ \text{feladat}}$

Határozzuk meg az alábbi tartószerkezeten a hajlítónyomatéki igénybevételi fgv. eloszlását! Mekkora a falakban ébredő nyomaték nagysága? Hol lesz zérus a hajlítónyomaték? A tartó anyaga és keresztmetszete állandó!

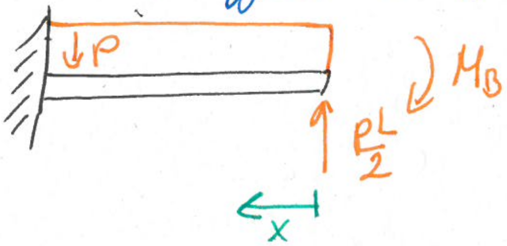
Adott: p, L



Vegyük észre, hogy szimmetrikus a feladat!

↳ a két befogásban az y-irányú reakció $\frac{pL}{2}$

⇓ egyszerűsített feladat:



$+ \boxed{f_B = 0}$ alakváltozási feltétel!

Castigliano-tétel:

$$f_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = 0$$

$$U = \underbrace{U^N}_{=0} + \underbrace{U^V}_{\approx 0} + U^{Mh} + \underbrace{U^{Mt}}_{=0} = U^{Mh}$$

$$f_B = \frac{\partial U^{Mh}}{\partial M_B} = \frac{1}{IE}\int_0^L M_h \frac{\partial M_h}{\partial M_B}\, dx = 0$$

Az igénybevételi függvény:

$$M_h(x) = M_B - \frac{pL}{2}x + \frac{px^2}{2} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\partial M_h}{\partial M_B} = 1}}$$

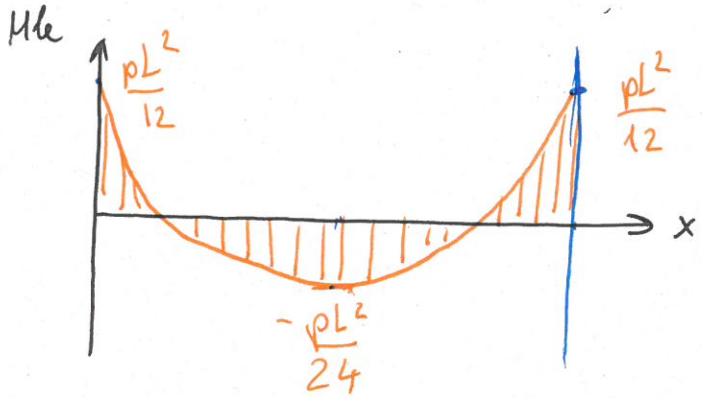
Visszaírva:

$$f_B = \frac{1}{IE}\int_0^L M_B - \frac{pL}{2}x + \frac{px^2}{2}\, dx = \frac{1}{IE}\left[M_B x - \frac{pL}{4}x^2 + \frac{px^3}{6}\right]_0^L = \frac{1}{IE}\left[M_B L - \frac{pL^3}{4} + \frac{pL^3}{6}\right]$$

Azaz: $f_B = \frac{1}{IE}\left(M_B L - \frac{pL^3}{12}\right) = 0$

$$\hookrightarrow M_B = \frac{pL^2}{12}$$

Tehát a hajlítónyomatéki fgv.: $M_h(x) = \frac{pL^2}{12} - \frac{pL}{2}x + \frac{px^2}{2}$



Nevezetes értékek:

$M_h(0) = \frac{pL^2}{12}$

$M_h(L/2) = \frac{pL^2}{12} - \frac{pL^2}{4} + \frac{pL^2}{8} = -\frac{pL^2}{24}$

$M_h(x^*) = 0$ $\qquad \frac{pL^2}{12} - \frac{pL}{2}x^* + \frac{p}{2}x^{*2} = 0$

$$\hookrightarrow x_1^* = 0{,}211\,L$$

$$x_2^* = 0{,}788\,L$$