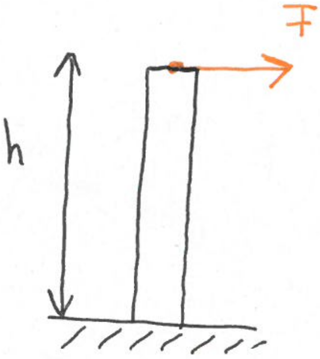
Szilárdságtan – 2. gyakorlat

Rudak, gerendák feszültségi állapota
Hajlítónyomatéki igénybevétel

1. feladat Egy függőleges terhelésű oszlop terhelése a felső végén található koncentrált erő az ábrán látható módon. Célunk meghatározni az oszlop anyagát és keresztmetszetét, ha

a) Tömör kör keresztmetszetű fából

b) alumínium csőből gyártjuk le, ha a csővastagság az átmérő nyolcada.



Adatok:

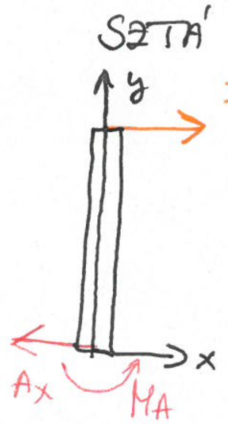
$h = 2,5\ m$

$F = 12\ kN$

$\sigma_{meg}^{fa} = 15\ MPa$

$\sigma_{meg}^{Al} = 50\ MPa$

① Reakciók és igénybevételi ábra

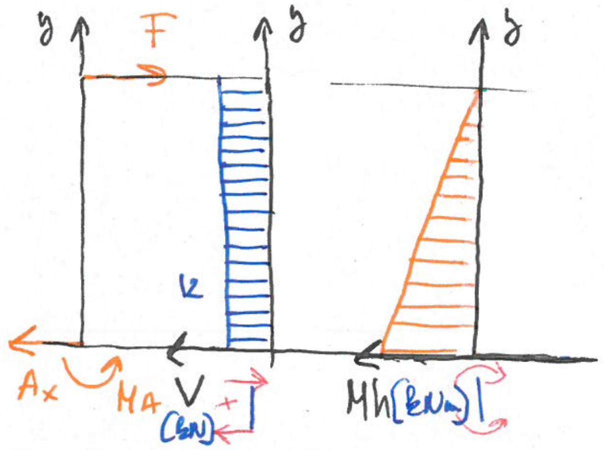


$\sum F_x = 0 \quad F - A_x = 0$

$A_x = F = \underline{\underline{12\ kN}}$

$\curvearrowleft \sum M_A = 0: \quad -F \cdot L + M_A = 0$

$M_A = F \cdot L = \underline{\underline{30\ kNm}}$



veszélyes km! $\leftarrow$

$Mh_z = 30\ kNm$

A szilárdsági km-i tényező: $|\sigma| \le \sigma_{meg}$

$$\sigma_y = \frac{M_{hz}}{I_z}\cdot x \Rightarrow |\sigma_{y\,max}| = \left|\frac{M_{hz}}{I_z}\cdot e\right| = \left|\frac{M_{hz}}{K_{min}}\right| = \sigma_{meg}$$

K_{min}

legkisebb K értéke kell

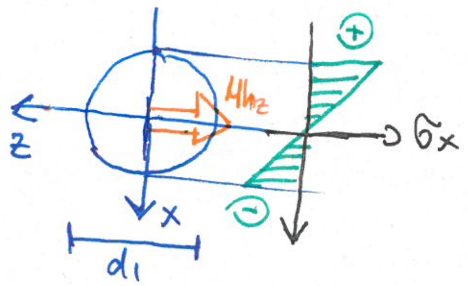
$$K_{min} = \left|\frac{M_{hz}}{\sigma_{meg}}\right|$$

a) fa tömör rúd

(N, mm, MPa) dimenziók

$$K_{min}^{fa} = \frac{M_{hz}}{\sigma_{meg}^{fa}} = \frac{30\,000\,000 \text{ Nmm}}{15 \text{ MPa}} = 2\,000\,000 \text{ mm}^3$$

Ha tömör kör:



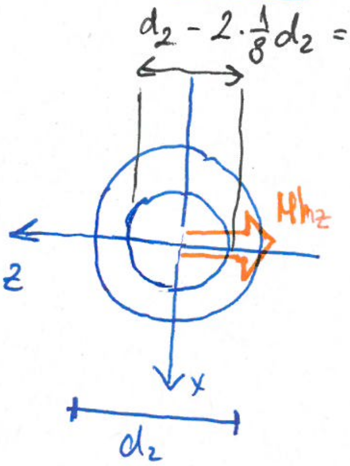
$$K_1 = \frac{I_{z_1}}{e_x} = \frac{\frac{d_1^4\pi}{64}}{\frac{d_1}{2}} = \frac{d_1^3\pi}{32}$$

$$\boxed{K_{min}^{fa} = K_1}$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{K_{min}^{fa}\cdot 32}{\pi}} = \underline{\underline{273{,}1 \text{ mm}}}$$

b) Alumínium gyűrű

$$d_2 - 2\cdot\frac{1}{8}d_2 = \frac{3}{4}d_2$$



$$K_{min}^{Al} = \frac{M_{hz}}{\sigma_{meg}^{Al}} = 600\,000 \text{ mm}^3$$

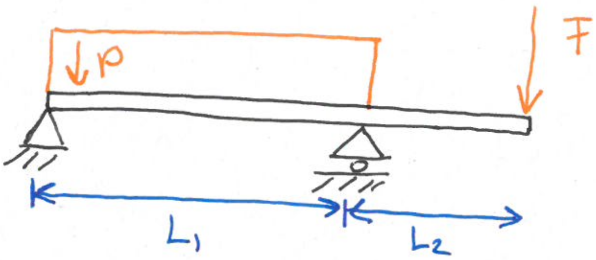
$$I_{z_2} = \frac{\left[d_2^4 - \left(\frac{3}{4}d_2\right)^4\right]\pi}{64} = \frac{\frac{175}{256}d_2^4}{64} \approx 0{,}33556\, d_2^4$$

$$K_2 = \frac{I_{z_2}}{e_x} = \frac{0{,}033556\, d_2^4}{\frac{d_2}{2}} = 0{,}067112\, d_2^3$$

$$K_2 = K_{min}^{Al}$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{K_{min}^{Al}}{0{,}067112}} = \underline{\underline{207{,}55 \text{ mm}}}$$

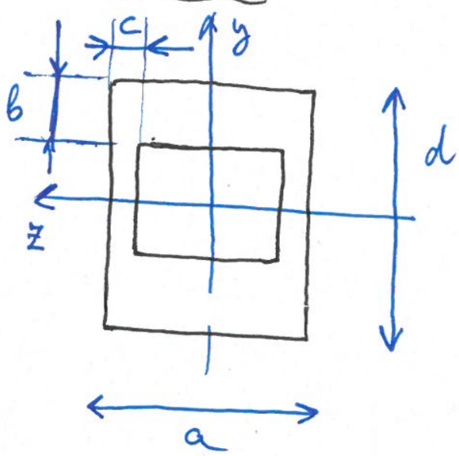
2. feladat Az alábbi tartónál a megengedett maximális normálfeszültség 6 MPa. Határozzuk meg a tartó d átmérőjét, hogy az hajlításra megfeleljen!



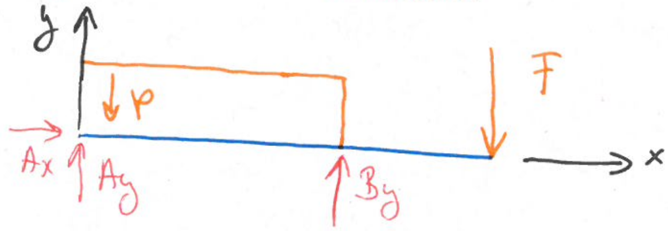
Adatok:

$L_1 = 4\,m$
$L_2 = 2\,m$
$F = 12\,kN$
$p = 8\,kN/m$
$\sigma_{meg} = 6\,MPa$
$b = 75\,mm$
$a = 175\,mm$
$c = 25\,mm$

Keresztmetszet (szimmetrikus)



① SZTÁ és reakciók



Két mezőszakasz

I. $x \in (0, L_1)$

II. $x \in (L_1, L_1+L_2)$

Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0: \quad A_x = 0$

$\sum F_y = 0: \quad A_y + B_y - p \cdot L_1 - F = 0$

$\sum M_A = 0: \quad B_y \cdot L_1 - F \cdot (L_1 + L_2) - \frac{pL_1^2}{2} = 0$

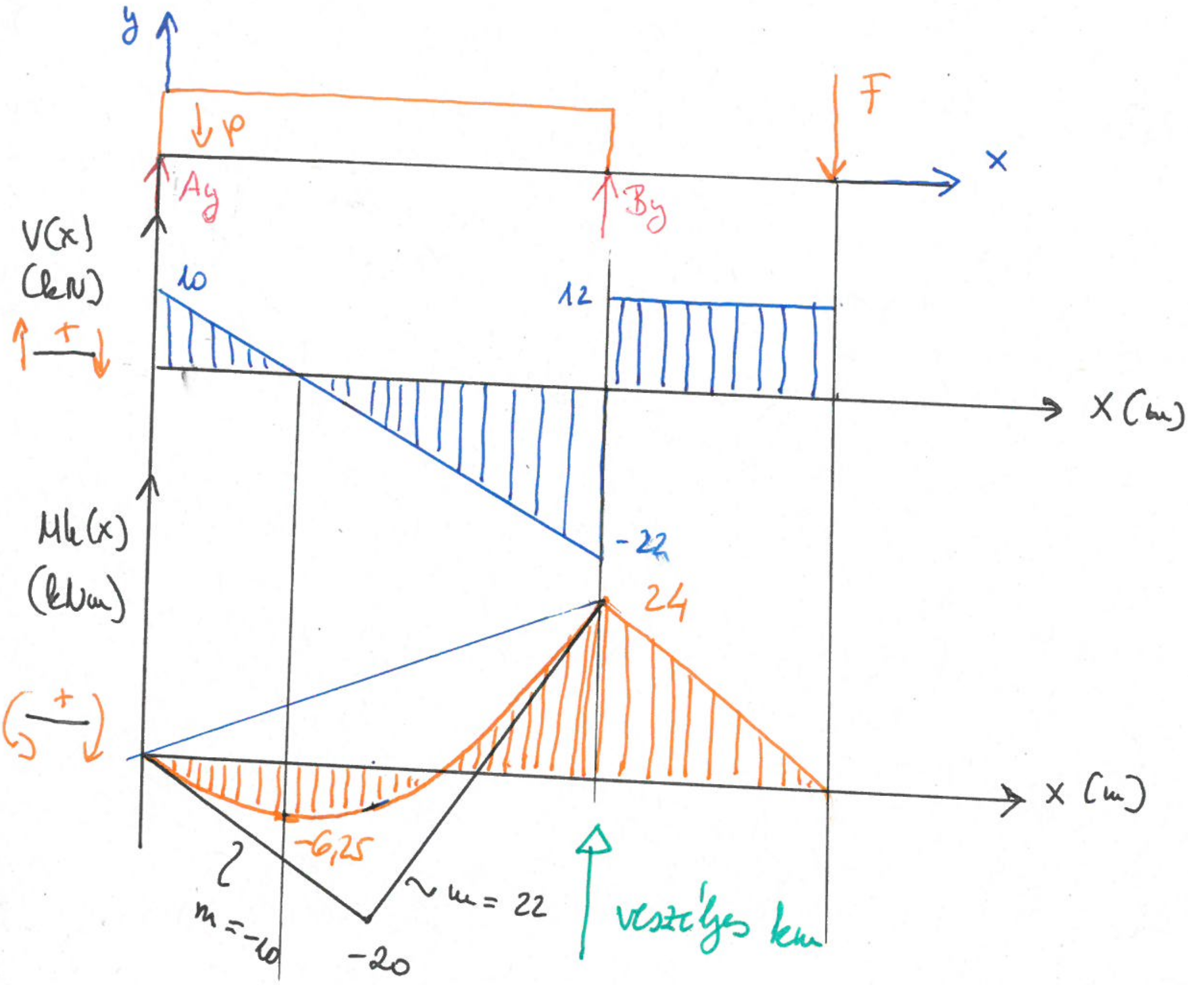
$\hookrightarrow B_y = \dfrac{F(L_1+L_2) + \frac{pL_1^2}{2}}{L_1} = \underline{\underline{4\,kN}}$

$\hookrightarrow A_y = F + pL_1 - B_y = \underline{\underline{10\,kN}}$

Igénybevételi függvények

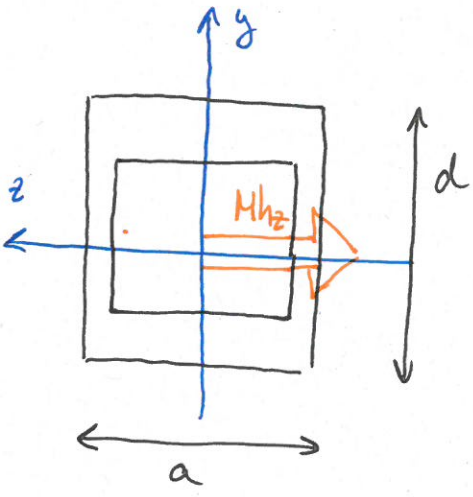
I.	II.
$V_1(x) = A_y - px$	$V_2(x) = F$
$M_{h1}(x) = -A_y x + \frac{px^2}{2}$	$M_{h2}(x) = F(L_1 + L_2 - x)$

② Igénybevételi ábrák



Veszélyes keresztmetszet: $V = -22$ kN

$M_{hz} = 24$ kNm (jobbra mutat!)



$$I_z = \frac{a \cdot d^3}{12} - \frac{(a-2c)\cdot(d-2b)^3}{12}$$

$$= \frac{25}{6} d^3 + \frac{9375}{2} d - 703125\,d + 35156250$$

$$K_z = \frac{I_z}{\frac{d}{2}} = \frac{25}{3} d^2 + 9375\,d + \frac{70312500}{d} - 1406250$$

Méretezés: $|\sigma| \leq \sigma_{meg}$

$$|\sigma_{max}| = \sigma_{meg}$$

$$\left|\frac{M_{hz}}{K_{min}}\right| = \sigma_{meg} \Longrightarrow K_{min} = \frac{M_{hz}}{\sigma_{meg}} = 400000\ \text{mm}^3$$

A fenti összefüggésből a megoldandó egyenlet

$$\frac{25}{3}d^2 + 9375d - 1406250 + 70312500 \cdot \frac{1}{d} = 4000000$$

$\Downarrow$ 3adfokú egyenlet

<u>megoldások</u>

$d_1 = -1547,7$ mm $\Rightarrow$ ↯

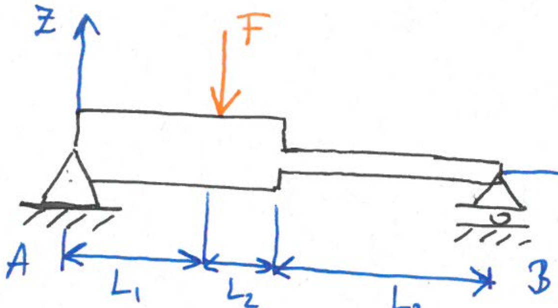
$d_2 = 13,317$ mm $\Rightarrow$ $d - 26 > 0$ kell legyen!

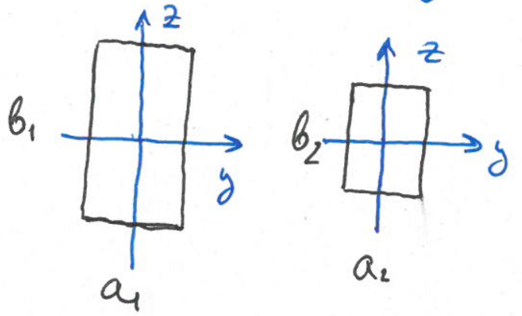
$\boxed{d_3 = 409,38 \text{ mm}}$

↯ $d > 26$

$d > 150$ mm

3. feladat Határozzuk meg az alábbi tartó AC és CB részein a keresztmetszet méreteit úgy, hogy $\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1} = 2$ feltétel mellett hajlításra megfeleljen a tartó





Adatok:

$L_1 = 2\,m$

$L_2 = 1\,m$

$L_3 = 4\,m$

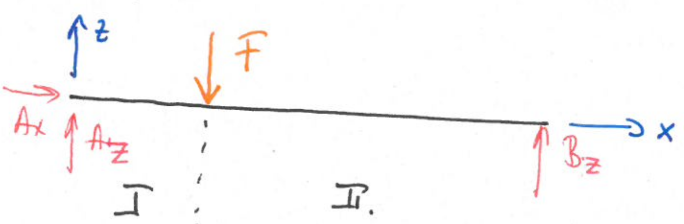
$F = 14\,kN$

$\sigma_{meg} = 100\,MPa$

Figyeljünk a koordinátarendszerre!

① Reakciók, igénybevételek

SZTA



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0: \quad A_x = 0$

$\sum F_z = 0: \quad A_z + B_z - F = 0$

$\sum M_A = 0 \quad -F \cdot L_1 + B_z \cdot (L_1 + L_2 + L_3) = 0$

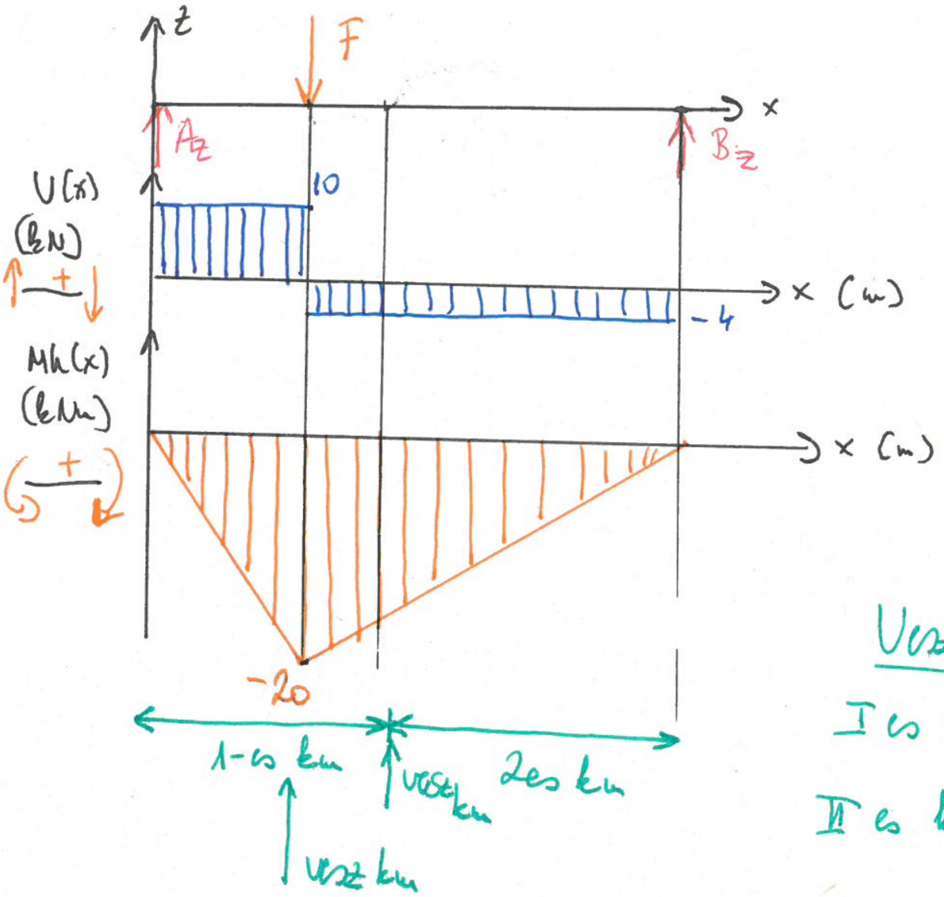
$B_z = \frac{F L_1}{L_1 + L_2 + L_3} = 4\,kN$

$A_z = F - B_z = 10\,kN$

Igénybevételi függvények

	I.	II.
	$x \in [0, L_1)$	$x \in [L_1; L_1 + L_2 + L_3]$
V	$V_1(x) = A_z$	$V_2(x) = A_z - F$
Mh	$Mh_1(x) = -A_z x$	$Mh_2(x) = -B_z(L_1 + L_2 + L_3 - x)$

Igénybevételi ábrák



Veszélyes km-ek

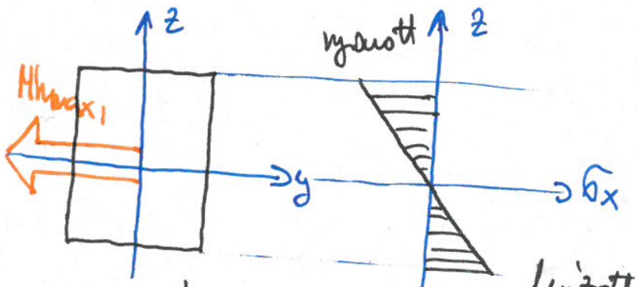
I es km.: $Mh_{max_1} = -20$ kNm

II es km: $Mh_{max_2} = Mh_2(L_1+L_2)$

$Mh_{max_2} = -16$ kNm

② Méretezés

• 1es km.:



$$|\sigma| \leq \sigma_{meg} \Rightarrow |\sigma_{x\,max}| = \sigma_{meg}$$

$$\frac{Mh_{max_1}}{K_{z\,min}} = \sigma_{meg}$$

$$K_{z\,min_1} = \frac{Mh_{max_1}}{\sigma_{meg}}$$

$$K_{z_1} = \frac{I_{y_1}}{\frac{b_1}{2}} = \frac{\frac{a_1 b_1^3}{12}}{\frac{b_1}{2}} = \frac{a_1 b_1^2}{6}$$

$$K_{z_1} = K_{z\,min_1}$$

$$\frac{a_1 b_1^2}{6} = \frac{2}{3} a_1^3 = \frac{Mh_{max_1}}{\sigma_{meg}}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{3\,Mh_{max_1}}{2\,\sigma_{meg}}} = 67 \text{ mm}$$

$$b_1 = 134 \text{ mm}$$

• 2es km (hasonlóan)

$$|\sigma_{x\,max}| = \sigma_{meg} \qquad K_{z\,min_2} = \frac{Mh_{max_2}}{\sigma_{meg}}$$

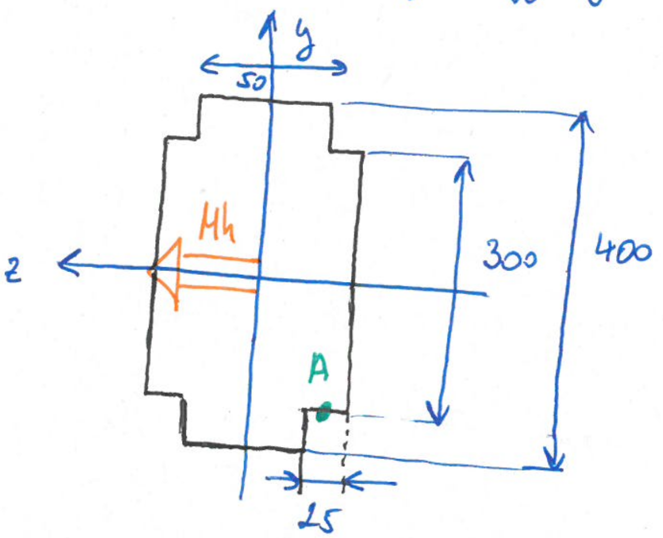
$$K_{z\,min_2} = K_{z_2}$$

⋮

$$a_2 = \sqrt{\frac{3\,Mh_{max_2}}{2\,\sigma_{meg}}} = 62 \text{ mm}$$

$$b_2 = 124 \text{ mm}$$

4. feladat Az alábbi konzolszerkezet terhelése $M = 5\ kNm$, ahogy az ábrán látható. Határozzuk meg az A pontban a normálfeszültség nagyságát.



$M_h = 5\ kNm$

Az A pont koordinátái:
$A(62{,}5\ ;\ -150)\ mm$

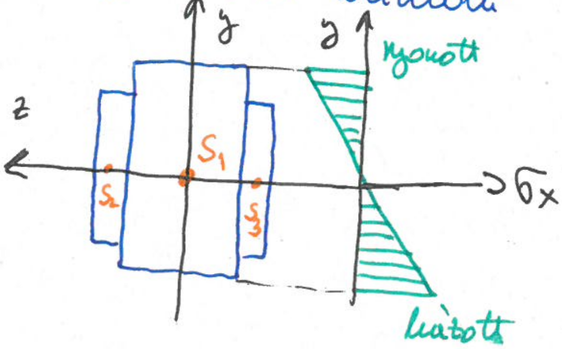
A feszültségeloszlást az alábbi összefüggés írja le

__Navier-képlet:__

$$\sigma_x(y) = -\frac{M_h}{I_z} \cdot y$$

a felső szál nyomott

I_z-t kell számolni:



$$I_z = I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3} = I_{z_1} + 2 I_{z_2} =$$

$$I_z = \frac{50 \cdot 400^3}{12} + 2 \cdot \frac{25 \cdot 300^3}{12}$$

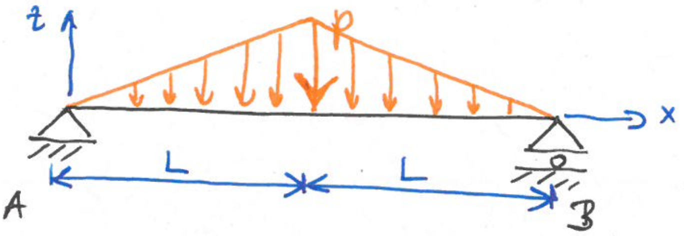
$$I_z = 3{,}79167 \cdot 10^8\ mm^4$$

$$\sigma_A = \sigma_x(y_A) = -\frac{M_h}{I_z} y_A = 1{,}98\ MPa$$

$$|\sigma_{max}| = \left| -\frac{M_h}{I_z} \cdot y_{max} \right| = \underline{\underline{2{,}63\ MPa}}$$

± 200

5. feladat Mekkora lehet a megoszló terhelés p intenzitása (a rúd közepén), ha a gerendára megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 50\,MPa$

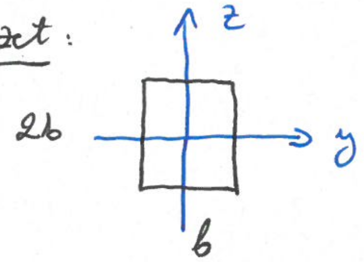


Adatok:

$L = 6\,m$

$b = 100\,mm$

Keresztmetszet:



① Reakciók

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x = 0$

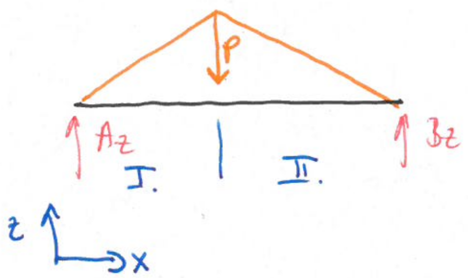
$\Sigma F_z = 0: \quad A_z + B_z - pL = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad B_z \cdot 2L - pL^2 = 0$

$\hookrightarrow B_z = \frac{pL^2}{2L} = \frac{pL}{2}$

$\hookrightarrow A_z = pL - B_z = \frac{pL}{2}$

② Igénybevételi függvények



Mivel szimmetrikus elég csak az I-es szakaszon keresni Mh_{max} értéket!

$$V_1(x) = A_z - \frac{p}{L} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{pL}{2} - \frac{px^2}{2L}$$

$$Mh_1(x) = -A_z \cdot x + \left(\frac{p}{L} \cdot x\right) \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

$$Mh_1(x) = -\frac{pL}{2}x + \frac{px^3}{6L}$$

Mh_1 szélsőértéke

$$Mh_1'(x) = -V(x) = 0$$

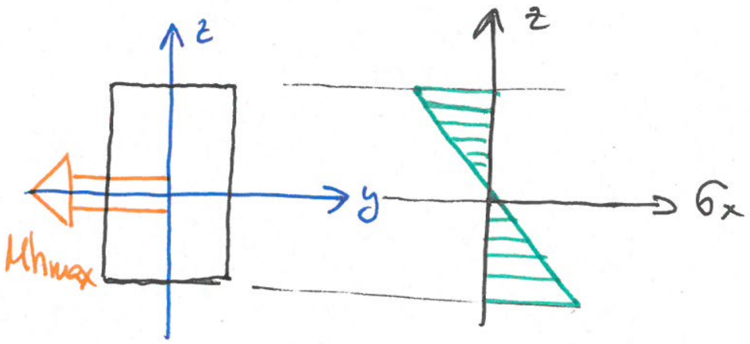
$$-\frac{pL}{2} + \frac{px^2}{2L} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{px^2}{2L} = \frac{pL}{2}$$

$$x^2 = L^2$$

$$\boxed{x = L}$$

Tehát a tartó felénél van Mh_{max}!

$$Mh_{max} = Mh_1(L) = -\frac{pL^2}{2} + \frac{pL^3}{6L} = \underline{\underline{-\frac{pL^2}{3}}}$$



$$\sigma(z) = \frac{Mh}{I_y} \cdot z = \frac{Mh_{max}}{I_y} \cdot z$$

$$|\sigma_{max}| \le \sigma_{meg}$$ Méretezés!

$$\left| \frac{Mh_{max}}{K_y} \right| = \sigma_{meg} \rightarrow$$

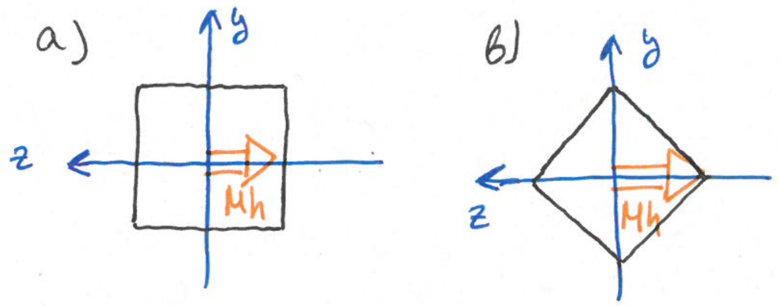
Az adott téglalap km re:

$$K_y = \frac{I_y}{b} = \frac{\frac{b \cdot (2b)^3}{12}}{b} = \frac{\frac{8b^4}{12}}{b} = \underline{\underline{\frac{2}{3} b^3}}$$

$$\left| \frac{Mh_{max}}{K_y} \right| = \frac{pL^2}{3 \cdot \frac{2}{3} b^3} = \boxed{\frac{pL^2}{2b^3} = \sigma_{meg}}$$

$$p = \frac{\sigma_{meg} \cdot 2b^3}{L^2} = 2{,}778 \text{ N/mm} = \underline{\underline{2{,}778 \text{ kN/m}}}$$

6. feladat Tiszta hajlításnal terhelt tartó keresztmetszete „a" oldalhosszúságú négyzet, a hajlítás tengelye z-tengely. Hány százalékkal nő a max. feszültség a keresztmetszetben, ha azt 45°-kal elforgatjuk?



a) eset

$$\sigma_{x\,max_1} = \frac{M_h}{I_{z_1}} \cdot y_{max_1} = \frac{6\,M_h}{a^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_{z_1} = \dfrac{a^4}{12} \\ y_{max_1} = \dfrac{a}{2} \end{array}\right\} \rightarrow K_{z_1} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6}$$

b) eset

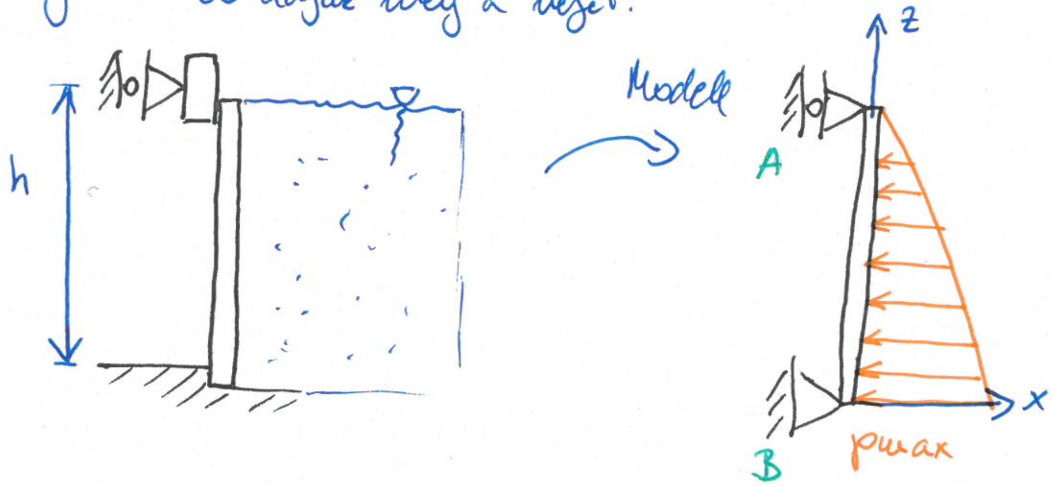
$$\sigma_{x\,max_2} = \frac{M_h}{I_{z_2}}\, y_{max_2} = \frac{6\sqrt{2}\,M_h}{a^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_{z_2} = \dfrac{a^4}{12} \\ y_{max_2} = \dfrac{a}{2} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} K_{z_2} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sigma_{x\,max_2}}{\sigma_{x\,max_1}} = \sqrt{2} = 1{,}414 \Rightarrow$$ 41,4%-kal nőtt!

7. feladat

Az ábrán egy fa vízzáró gát modellje látható! A gát vastagsága $t = 12$ cm, magassága 2 m. Határozzuk meg mekkora a hajlításból adódó maximális normálfeszültség a gátban és adjuk meg a helyét!



Adatok

$h = 2$ m

$t = 12$ cm

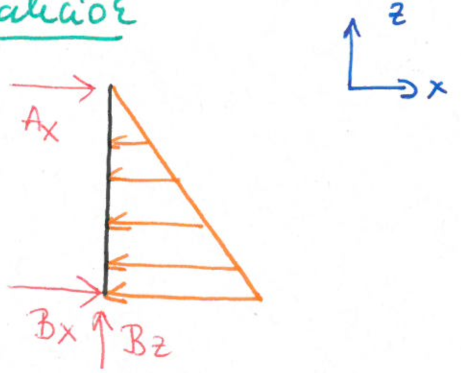
$\rho_{víz} = 1000 \frac{kg}{m^3}$

$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

A hidrosztatikai nyomásból:

$$p_{max} = \rho_{víz} \cdot h \cdot L = 19620\,L \quad \frac{N}{m}$$

Reakciók



$$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + B_x - p_{max} \cdot \frac{h}{2} = 0$$

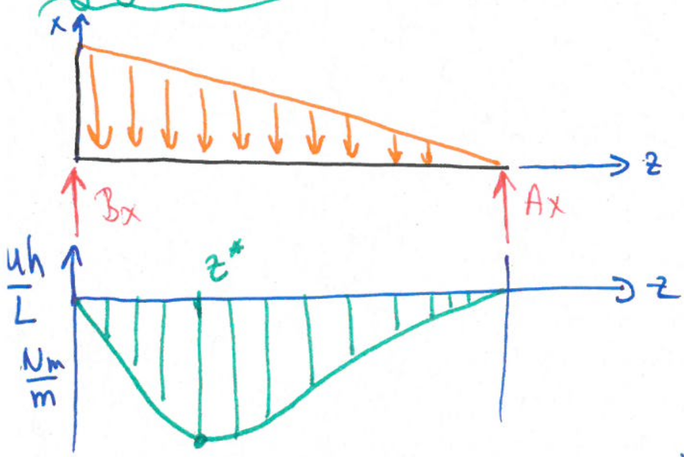
$$\Sigma F_z = 0: \quad B_z = 0$$

$$\Sigma M_B = 0: \quad -A_x \cdot h + p_{max} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} = 0$$

$$\hookrightarrow A_x = p_{max} \cdot \frac{h}{6} = \underline{\underline{6540\,L}}$$

$$\hookrightarrow B_x = p_{max} \cdot \frac{h}{2} - A_x = \underline{\underline{13080\,L}}$$

Igénybevételek



Függvények:

$$V(x) = -A_x - \frac{p_{max}}{h} \cdot (h-z)\frac{(h-z)}{2}$$

$$Mh(x) = -A_x(h-z) - \frac{p_{max}}{h}(h-z)\frac{(h-z)}{2}\frac{(h-z)}{3}$$

$$Mh(x) = \left[-1635z^3 + 9810z^2 - 13080z\right]L$$

$$Mh(z^*) = Mh_{max}$$

$$Mh'(z) = -V(z) = 0 =$$

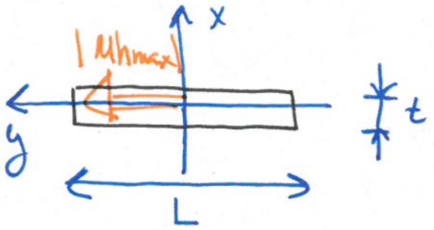
$$-V(z) = (-4905\,z^2 + 19620\,z - 13080)L = 0$$

↳ $\boxed{z_1 = 0{,}8453\ m}$

↳ $z_2 = 3{,}154\ m$ $\qquad z \in [0, 2)\ m$

$$Mh_{max} = Mh(z^*) = \underline{\underline{-5034{,}5\,L}}$$

A keresztmetszet



$$I_y = \frac{L \cdot t^3}{12}$$

$$x_{max} = \frac{t}{2}$$

Navier-képlet:

$$\sigma_{z\,max} = \frac{Mh_{max}}{I_y} \cdot x_{max} = \frac{-5034{,}5 \cdot \cancel{L}}{\frac{\cancel{L} \cdot t^3}{12}} \cdot \frac{t}{2} = \underline{\underline{-2{,}1\ MPa}}$$