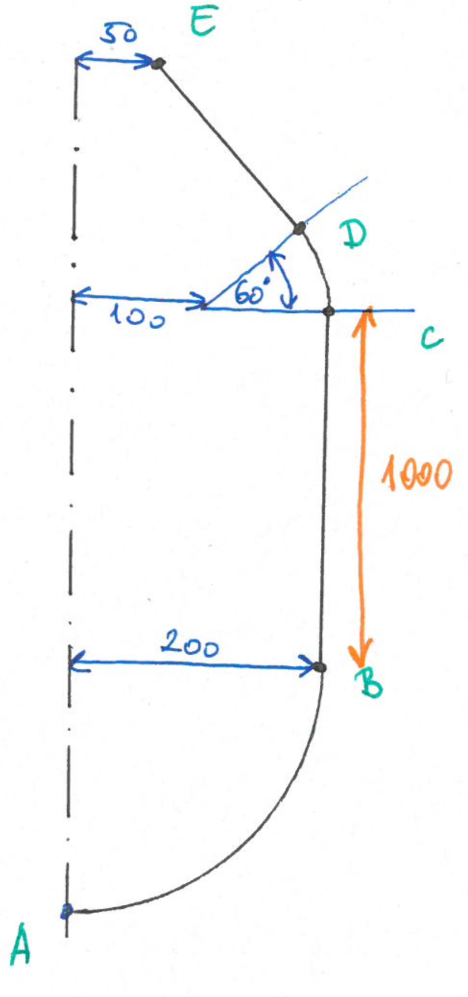
Vékonyfalú tartályok

1. feladat Számítsuk ki, hogy mekkora feszültségek ébrednek a membrán elmélet alkalmazásakor az alábbi $v = 5$ mm falvastagságú tartály falában a jellegzetes helyeken! Adjunk becslést a henger rész hossz és átmérőváltozására is



Adatok:

$p = 20\,\text{bar} = 20 \cdot 10^5\,\text{Pa}$

$v = 5\,\text{mm}$

$E = 200\,\text{GPa}$

$\nu = 0{,}3$

$$\sigma_m = \frac{p\,\varrho_t}{2v}$$

$$\sigma_t = \underbrace{\frac{p\,\varrho_t}{2v}}_{\sigma_m}\left(2 - \frac{\varrho_t}{\varrho_m}\right)$$

A geometria alapján 4 szakaszra osztható a tartály:

I. gömb (A-B)
II. henger (B-C)
III. Tórusz (C-D)
IV. kúp (D-E)

I. Gömb:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_t &= \frac{d}{2} = 200\,\text{mm} \\ \varrho_m &= \frac{d}{2} = 200\,\text{mm} \end{aligned}\right\} \text{ A és B pontban is}$$

(A) $\sigma_m^A = \sigma_t^A \quad \rightarrow \quad \sigma_m^A = \dfrac{p\,\varrho_t}{2v} = 40\,\text{MPa}$

$\sigma_t^A = 40\,\text{MPa}$

B₁ $\qquad \sigma_m^{B_1} = \sigma_t^{B_1} \longrightarrow \sigma_m^{B_1} = \dfrac{p\,\rho_t}{2v} = 40\,\mathrm{MPa}$

$$\sigma_t^{B_1} = 40\,\mathrm{MPa}$$

mintha a gömbön lenne!

II. Henger:

$$\left.\begin{aligned} \rho_t &= \frac{d}{2} = 200\,\mathrm{mm} \\ \rho_m &= \infty \end{aligned}\right\} \text{B és C pontban is!}$$

B₂

$$\sigma_m^{B_2} = \frac{pd}{4v} = 40\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_t^{B_2} = \frac{pd}{2v} = 80\,\mathrm{MPa}$$

(Kazánformula!)

C₂

$$\sigma_m^{C_2} = \frac{pd}{4v} = 40\,\mathrm{MPa}$$

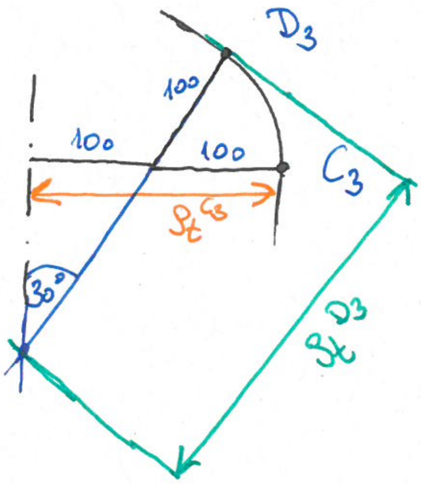
$$\sigma_t^{B_2} = \frac{pd}{2v} = 80\,\mathrm{MPa}$$

III. Tórusz

$\rho_m = 100\,\mathrm{mm}$ (C és D pontban is)

$$\rho_t^{C_3} = 200\,\mathrm{mm}$$

$$\rho_t^{D_3} = 100 + \frac{100}{\sin 30^\circ} = 100 + 200 = 300\,\mathrm{mm}$$



C₃

$$\sigma_m^{C_3} = \frac{p}{2v}\rho_t^{C_3} = 40\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_t^{C_3} = \sigma_m^{C_3}\left(2 - \frac{\rho_t}{\rho_m}\right) = 0\,\mathrm{MPa}$$

D₃

$$\sigma_m^{D_3} = \frac{p}{2v}\rho_t^{D_3} = 60\,\mathrm{MPa}$$

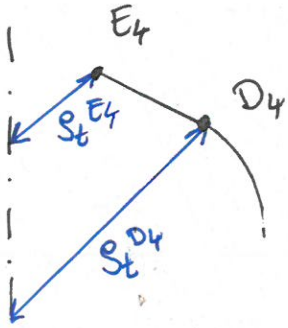
$$\sigma_t^{D_3} = \sigma_m^{D_3}\left(2 - \frac{\rho_t}{\rho_m}\right) = -60\,\mathrm{MPa}$$

IV. Kúp

$\rho_m = \infty$ (D és E pontban is)

$$\rho_t^{D_4} = \rho_t^{D_3} = 300\,\mathrm{mm}$$

$$\rho_t^{E_4} = \frac{50}{\sin 30^\circ} = 100\,\mathrm{mm}$$



$$\sigma_t = \sigma_m \underbrace{\left(2 - \frac{\rho_t}{\rho_m}\right)}_{=2} \quad (\text{mivel } \rho_m = \infty)$$

D₄

$$\sigma_m^{D_4} = \frac{p}{2v}\rho_t^{D_4} = 60\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_t^{D_4} = 2\sigma_m^{D_4} = 120\,\mathrm{MPa}$$

E₄

$$\sigma_m^{E_4} = \frac{p}{2v}\rho_t^{E_4} = 20\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_t^{E_4} = 2\sigma_m^{E_4} = 40\,\mathrm{MPa}$$

Összefoglalva

	Pont	ϱ_m (mm)	ϱ_t (mm)	σ_m (MPa)	σ_t (MPa)
Gömb	A	200	200	40	40
	B_1	200	200	40	40
Henger	B_2	∞	200	40	80
	C_2	∞	200	40	80
Tórusz	C_3	100	200	40	0
	D_3	100	300	60	-60
Kúp	D_4	∞	300	60	120
	E_4	∞	100	20	40

Görbületváltozás esetén a membránelmélet közelítésnek se jó!

Hengeres szakasz

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,n)} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}}_{(m,t,n)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Hooke-tv.:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_m - \nu\sigma_t) = 8\cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_m) = 3{,}4\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_t - \nu\sigma_m) = -1{,}8\cdot 10^{-4}$$

a hosszváltozás:

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_m \Rightarrow \Delta L = \varepsilon_m\cdot L = \underline{\underline{0{,}08\ \text{mm}}}$$

az átmérőváltozás $\rightarrow$ A kerületváltozásból!

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta K}{K} = \frac{(D+\Delta D)\pi - D\pi}{D\pi} = \frac{\Delta D}{D}$$

$$\hookrightarrow \Delta D = \varepsilon_t \cdot D = \underline{\underline{0{,}136\ \text{mm}}}$$

2. feladat Laboratóriumi használatra készített hengeres tartályban a gáz nyomása 15 bar. A tartály közepes átmérője 250 mm. Mohr-féle elmélet alapján határozzuk meg a szükséges falvastagságot, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 92$ MPa!

Adatok:

$p = 15\,\text{bar} = 15 \cdot 10^5\,\text{Pa}$

$D = 250\,\text{mm}$

$\sigma_{meg} = 92\,\text{MPa}$

Henger esetén

$\rho_m = \infty$

$\rho_t = D/2 = 125\,\text{mm}$

$$\hookrightarrow \left.\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{pD}{4v} \\ \sigma_t &= \frac{pD}{2v} \end{aligned}\right\} \text{Kazánformulák!} \qquad \boxed{\sigma_m < \sigma_t}$$

- A feszültségi állapot (ha külső pont)

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,n)} \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - 0 = \sigma_t$$

$\sigma_1 = \sigma_t$

$\sigma_2 = \sigma_m$

$\sigma_3 = 0\,\text{MPa}$

$$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_{meg}$$

$$\frac{pD}{2v} = \sigma_{meg} \longrightarrow v = \frac{pD}{2\sigma_{meg}} = \underline{\underline{2{,}038\,\text{m}}}$$

- A feszültségi állapot (belső pont)

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,n)} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \longrightarrow \tilde{\sigma}_e^{Mohr} = \underline{\underline{\sigma_t + p}}$$

$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_t$

$\tilde{\sigma}_2 = \sigma_m$

$\tilde{\sigma}_3 = -p$

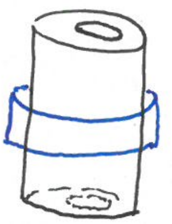
Méretezés

$$\tilde{\sigma}_e^{Mohr} = \sigma_{meg}$$

$$\frac{pD}{2\tilde{v}} + p = \sigma_{meg}$$

$$\tilde{v} = \frac{pD}{2(\sigma_{meg} - p)} = \underline{\underline{2{,}07\,\text{mm}}}$$

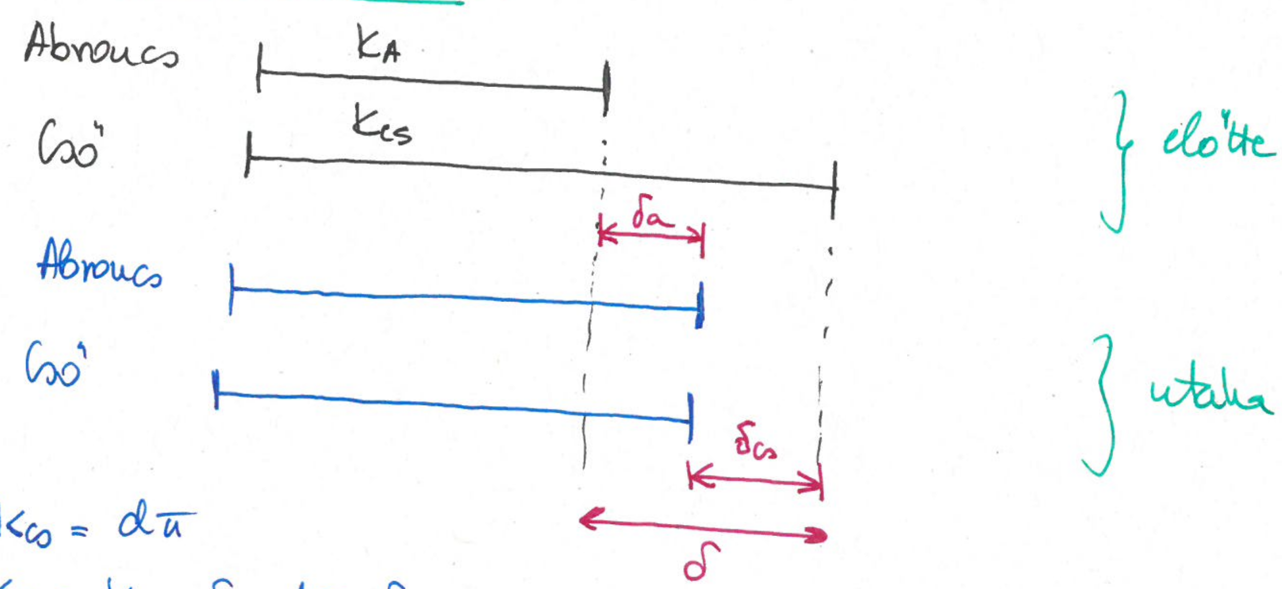
3. feladat Egy $d = 400$ mm külső átmérőjű és $v = 5$ mm falvastagságú acél csőre egy $t = 2$ mm vastagságú abroncsot akarunk szerelni. Az abroncs kerülete $\delta = 0,5$ mm-rel kisebb, mint a cső kerülete. Mekkora feszültségek ébrednek a csőben, ha ráhúzzuk az abroncsot a csőre?



Adatok:

$E = 200\ GPa$
$d = 400\ mm$
$v = 5\ mm$
$t = 2\ mm$
$\delta = 0,5\ mm$

Ábrázoljuk a kerületeket:



$K_{cs} = d\pi$

$K_A = K_{cs} - \delta = d\pi - \delta$

valamint: $\boxed{\delta = \delta_a + \delta_{cs}}$

A kerületváltozások:

$\delta_a = \varepsilon_{ta} \cdot K_A$

$\delta_{cs} = -\varepsilon_{tcs} \cdot K_{cs}$

$\boxed{\varepsilon_{tcs} < 0}$

Feszültségi állapot

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,a)} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alakváltozási állapot

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(m,t,a)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel axiális irányban szabadon deformálódhat $\to$ $\boxed{\sigma_m = 0}$

Hooke-tv:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_m) = \underline{\underline{\frac{\sigma_t}{E}}}$$

$$\sigma_{t_A} = \frac{pd}{2t} \qquad \sigma_{t_{Cu}} = -\frac{pd}{2v}$$

Kifejezve δ-t

$$\delta = \delta_A + \delta_{Cu} = \frac{\sigma_{tA}}{E} \cdot K_A - \frac{\sigma_{tCu}}{E} K_{Cu}$$

$$\delta = \frac{1}{E}\frac{pd}{2t}(d\pi - \delta) + \frac{1}{E}\frac{pd}{2v} d\pi$$

$$\hookrightarrow \quad p = \frac{2tvE\delta}{dv(d\pi-\delta) + d\pi t} = 0{,}568\,\text{MPa} = \underline{\underline{5{,}68\,\text{bar}}}$$

Ebből:

$$\sigma_{tCu} = -22{,}74\,\text{MPa} \qquad \sigma_{tA} = 56{,}86\,\text{MPa}$$

$$\varepsilon_{tCu} = -113{,}7 \cdot 10^{-6} \qquad \varepsilon_{tA} = 284{,}3 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{Cu} = 0{,}143\,\text{mm} \qquad \delta_A = 0{,}357\,\text{mm}$$

4. feladat Egy 15 m átmérőjű gömb alakú gáztartály falán 0,175% fajlagos alakváltozást mértünk a P pontban nyúlásmérő bélyegekkel, miközben a tartályt a terheletlen állapotból 40 bar belső nyomásra felterheljük. A tartály anyagának rugalmassági modulusza 200 GPa, Poisson-tényezője 0,3. Mekkora a falvastagság?

$$\underset{(m,t,n)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ a külső pontban

Mivel gömbről van szó: $\rho_m = \rho_t = R = \frac{D}{2}$

$$\Downarrow \quad \sigma_m = \frac{pD}{4v}$$

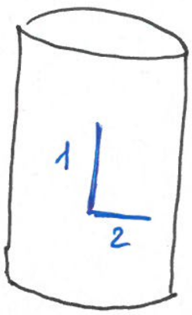
$$\sigma_t = \sigma_m \left(2 - \frac{\rho_t}{\rho_m}\right) = \sigma_m = \frac{pD}{4v}$$

$\Downarrow$ A gömbszimmetriát kihasználva a felület bármely pontjában a nyúlás

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma - \nu\sigma) = \underline{\underline{\frac{1-\nu}{E}\frac{pD}{4v}}} = 0{,}00175$$

$$\hookrightarrow v = \frac{1-\nu}{E}\frac{pD}{4\varepsilon} = \underline{\underline{30\text{ mm}}}$$

5. feladat Egy $d=400$ mm átmérőjű, $v=5$ mm falvastagságú hengeres tartály falán nyúlásmérő bélyegekkel alakváltozásokat mérünk. A tartály hossztengelyével párhuzamos 1-es irányban $375\cdot10^{-6}$, míg erre merőlegesen $1312{,}5\cdot10^{-6}$ értékű fajlagos alakváltozást mérünk. A tartály rugalmassági modulusza 80 GPa, a megengedhető belső nyomás 20 bar. Mekkora a tartály Poisson tényezője? Üzemeltethető-e a tartály a mérésnél használt nyomás esetén?



Feszültségi állapot: $$\underset{(m,t,n)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alakváltozási állapot $$\underset{(m,n,t)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Adatok:

$d = 400$ mm

$v = 5$ mm

$\varepsilon_1 = 375\cdot10^{-6}$

$\varepsilon_2 = 1312{,}5\cdot10^{-6}$

$E = 80$ GPa

a Hooke-tv alapján:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_m - \nu\sigma_t)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_m)$$

Geometria: Henger $\rho_m = \infty$; $\rho_t = \frac{d}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{pd}{4v} \\ \sigma_t &= \frac{pd}{2v} \end{aligned}\right\}$$ írjuk vissza a nyúlásmérés eredményeibe:

$$\varepsilon_{ax} = \frac{1}{E}\left(\frac{pd}{4v} - \nu\frac{pd}{2v}\right) = \frac{pd}{4v}\,\frac{(1-2\nu)}{E} = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\frac{pd}{2v} - \nu\frac{pd}{4v}\right) = \frac{pd}{4v}\,\frac{(2-\nu)}{E} = \varepsilon_2$$

2 ismeretlen, 2 egyenlet

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{1-2\nu}{2-\nu} \rightarrow \nu = \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2} = \underline{\underline{0,25}}$$

$$p = \frac{4vE\varepsilon_1}{d(1-2\nu)} = 3\,MPa \rightarrow p = \underline{\underline{30\ bar}}$$

Mivel $p > p_{krit} = 20$ bar

$\Downarrow$ nem üzemeltethető ezen a nyomáson!