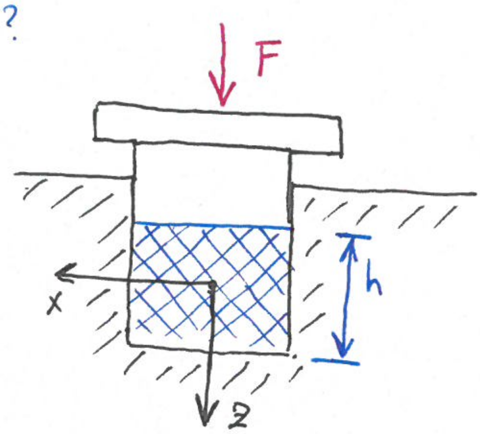
Alakváltozási állapot, Hooke-trv

1. feladat Egy $a \times a$ állandó négyzet keresztmetszetű, rugalmas betonhasábot merev fal vesz. körül. A hasábot egy merev fedélen keresztül F nyomóerővel terheljük. Mekkora feszültségek ébrednek a hasáb belső pontjaiban és mekkora lesz a h magasságú hasáb zsugorodása?



Adatok:

$a = 200\ mm$

$F = 160\ kN$

$E = 50\ GPa$

$\nu = 0{,}35$

$h = 1\ m$

Merev fal $\longrightarrow$ gátolja az x és y irányú elmozdulást

$\varepsilon_x = 0;$

$\varepsilon_y = 0$

↳ egytengelyű terhelés $\rightarrow$ nincs fajlagos szögváltozás!

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

↳ $\varepsilon_z = \dfrac{\Delta h}{h}$

Hooke-törvény

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right)$$

$$\varepsilon_I = tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) = spur(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \underline{\underline{\varepsilon_z}}$$

Behelyettesítve

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}}$$

②

Kifejtve az egyes sorokat:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_z$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z + \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z = \frac{E}{1+\nu}\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) \varepsilon_z$$

$$\frac{1-2\nu+\nu}{1-2\nu} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_z}$$

A terhelésből:

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} = -\frac{F}{a^2} = \underline{\underline{-4 \text{ MPa}}}$$

↳ ebből:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z (1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} = \underline{\underline{-4{,}985 \cdot 10^{-5}}}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_z = \underline{\underline{-2{,}154 \text{ MPa}}}$$

Tehát

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4{,}985 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \qquad \underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -2{,}154 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}154 & 0 \\ 0 & 0 & -4{,}985 \end{bmatrix} \underline{\underline{\text{MPa}}}$$

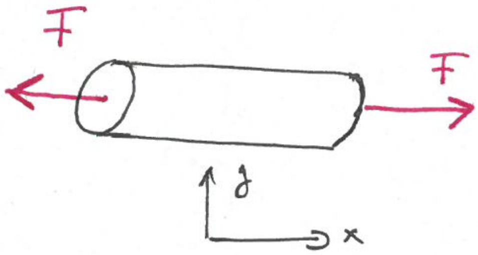
A zsugorodás

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \Delta h = \varepsilon_z \cdot h = \underline{\underline{-0{,}04985 \text{ mm}}}$$

2. feladat Egy L hosszúságú egyenes, d átmérőjű kör keresztmetszetű; nyugalmas rudat a végein ható 10kN nyomó erő terheli:

Mekkora a rúd fajlagos térfogatváltozása?

Hogyan változik ez, ha meggátoljuk a rúd keresztirányú alakváltozását?



Adatok:

$L = 160\,mm$

$d = 79{,}8\,mm$

$E = 200\,GPa$

$\nu = 0{,}3$

$F = 10\,kN$

a) Ha nincs gátlás

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A terhelésből

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} = -\frac{F}{\frac{d^2\pi}{4}} = \underline{\underline{-2\,MPa}}$$

$$\sigma_I = \sigma_x$$

Hooke-tv.:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}\right]$$

Behelyettesítve:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E}\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\sigma_x - \frac{1+\nu}{E}\frac{\nu}{1+\nu}\sigma_x = \underbrace{\left(1 - \frac{\nu}{1+\nu}\right)}_{\frac{1}{1+\nu}}\frac{1+\nu}{E}\sigma_x$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}} \quad \text{1D Hooke tv.}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1+\nu}{E} \cdot \left(-\frac{\nu}{1+\nu}\right)\sigma_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_x = \boxed{-\nu\,\varepsilon_x}$$

Behelyettesítve:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \underline{\underline{-10^{-5}}}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x = \underline{\underline{3 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_I = tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \underline{\underline{-4 \cdot 10^{-6}}}$$

b) gátolt esetben

$$\underset{(x,y,t)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \underset{(x,y,t)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ Hooke tv.:

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\underbrace{\varepsilon_I}_{\varepsilon_x}\,\underline{\underline{E}}\right)$$

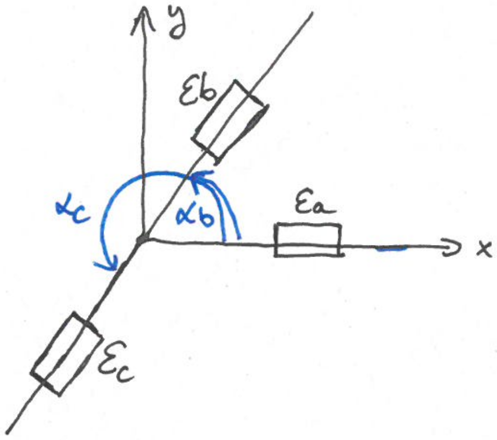
$$\downarrow \quad \sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x + \frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_x = \frac{E}{1+\nu}\underbrace{\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right)}_{\frac{1-\nu}{1-2\nu}}\varepsilon_x$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\,\frac{1-\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_x = \underline{\underline{-7{,}43 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\varepsilon_V = tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \varepsilon_x + \underbrace{\varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=0} = \underline{\underline{-7{,}43 \cdot 10^{-6}}}$$

3. feladat Egy acélszerkezetet alkotó I-szelvény P pontjába nyúlásmérő bélyeget ragasztunk és mérjük az alakváltozásokat az a, b, c irányokban. Határozzuk meg a P-ben ébredő feszültségi állapotot!



Adatok:

$\varepsilon_a = 100 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_b = 50 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_c = -70 \cdot 10^{-6}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_a = 0^\circ \\ \alpha_b = 70^\circ \\ \alpha_c = 200^\circ \end{array}\right\} \text{az x-tengellyel bezárt szög}$$

$E = 210\,GPa$

$\nu = 0,3$

A nyúlásmérő bélyegek irányvektorai

$$\underline{n}_a = \begin{bmatrix} \cos\alpha_a \\ \sin\alpha_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \underline{u}_b = \begin{bmatrix} \cos\alpha_b \\ \sin\alpha_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,342 \\ 0,94 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\underline{u}_c = \begin{bmatrix} \cos\alpha_c \\ \sin\alpha_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,94 \\ -0,342 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az egyes irányokban ébredő nyúlások számíthatóak, mint:

- $\varepsilon_a = (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{u}_a)\underline{u}_a$

$$10^{-4} = \varepsilon_x \cos(\alpha_a) + \varepsilon_y \sin^2(\alpha_a) + \underbrace{\gamma_{xy} \sin(\alpha_a)\cos(\alpha_a)}_{\frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin(2\alpha_a)} = \varepsilon_x$$

- $\varepsilon_b = (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{u}_b)\underline{u}_b = \varepsilon_x \cos^2(\alpha_b) + \varepsilon_y \sin^2(\alpha_b) + \gamma_{xy}\sin(\alpha_b)\cos(\alpha_b)$

$$5 \cdot 10^{-5} = 0,117\,\varepsilon_x + 0,883\,\varepsilon_y + 0,321\,\gamma_{xy}$$

⑥

$$\varepsilon_c = (\underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{u}_c)\cdot \underline{u}_c = \varepsilon_x \cos^2(\alpha_c) + \varepsilon_y \sin^2(\alpha_c) + \gamma_{xy} \sin(\alpha_c)\cos(\alpha_c)$$

$$-7\cdot 10^{-5} = 0{,}883\,\varepsilon_x + 0{,}117\,\varepsilon_y + 0{,}321\,\gamma_{xy}$$

3 ismeretlenes egyenletrendszer.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= 100\cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_y &= 256{,}65\cdot 10^{-6} \\ \gamma_{xy} &= -585{,}96\cdot 10^{-6} \end{aligned}\right\}$$

A Hooke-törvény

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\sigma_z = 0}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \underline{\underline{-152{,}85\cdot 10^{-6}}}$$

Tehát

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 100 & -292{,}98 & 0 \\ -292{,}98 & 256{,}65 & 0 \\ 0 & 0 & -152{,}85 \end{bmatrix}\cdot 10^{-6}$$

A fajlagos térfogatváltozás: $\varepsilon_I = \varepsilon_V = \underline{\underline{203{,}8}}\cdot 10^{-6}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\begin{bmatrix} 100 & -292{,}98 & 0 \\ -292{,}98 & 256{,}65 & 0 \\ 0 & 0 & -152{,}85 \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot 203{,}8\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 40{,}844 & -47{,}33 & 0 \\ -47{,}33 & 66{,}15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}\ \mathrm{MPa}$$

Gyakorlás: Főfeszültségek és főnyúlások

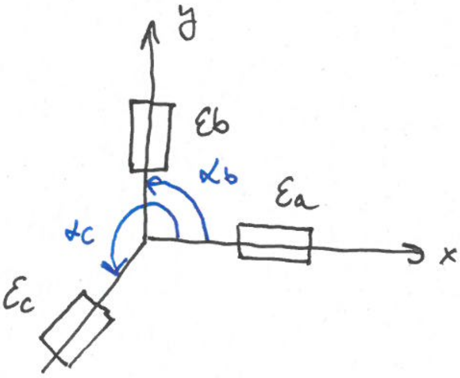
- $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma\underline{\underline{E}}) = 0$

  $\sigma_1 = 102{,}49$ MPa
  $\sigma_2 = 4{,}51$ MPa
  $\sigma_3 = 0$ MPa

- $\det(\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon\underline{\underline{E}}) = 0$

  $\varepsilon_1 = 481{,}59\cdot 10^{-6}$
  $\varepsilon_2 = -124{,}95\cdot 10^{-6}$
  $\varepsilon_3 = -152{,}85\cdot 10^{-6}$

4. feladat Egy acélszerkezetet alkotó I-szelvény P pontjába nyúlásmérő bélyeget ragasztunk és mérjük az alakváltozásokat az a, b, c irányokban. Határozzuk meg a P pontbeli feszültségi állapotot!



Adatok:

$\varepsilon_a = 10 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_b = 10 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_c = -40 \cdot 10^{-6}$

$\left.\begin{array}{l} \alpha_a = 0° \\ \alpha_b = 90° \\ \alpha_c = 225° \end{array}\right\}$ x-tengellyel bezárt szög

$E = 150\ \text{GPa}$

$\nu = 0{,}25$

Teljesen analóg az előző példával

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -50 & 0 \\ -50 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6{,}66 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

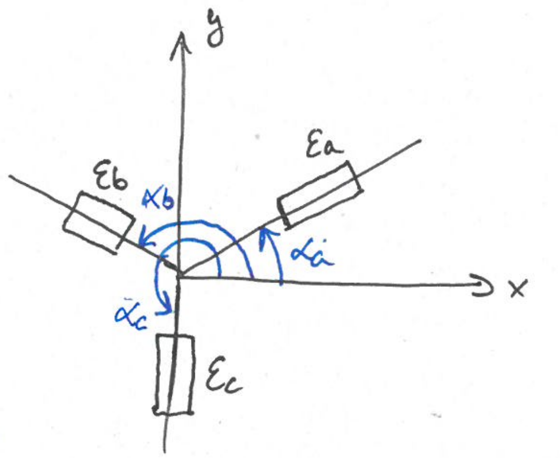
$\sigma_1 = 8\ \text{MPa}$ $\qquad \varepsilon_1 = 60 \cdot 10^{-6}$

$\sigma_2 = 0\ \text{MPa}$ $\qquad \varepsilon_2 = -6{,}66 \cdot 10^{-6}$

$\sigma_3 = -4\ \text{MPa}$ $\qquad \varepsilon_3 = -40 \cdot 10^{-6}$

5. feladat

Egy acélszerkezetet alkotó I-szelvény P pontjába nyúlásmérő bélyeget ragasztunk és mérjük az alakváltozásokat az a, b, c irányokba. Határozzuk meg a P pontbeli feszültségi állapotot!



Adatok:

$\varepsilon_a = 40 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_b = 40 \cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_c = 40 \cdot 10^{-6}$

$\left.\begin{aligned} \alpha_a &= 30^\circ \\ \alpha_b &= 150^\circ \\ \alpha_c &= 270^\circ \end{aligned}\right\}$ x-tengellyel bezárt szög

$E = 210\,GPa$

$\nu = 0{,}3$

Teljesen analóg az előző példával:

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -34{,}285 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$\sigma_1 = 12\,MPa$ $\qquad \varepsilon_1 = 40 \cdot 10^{-6}$

$\sigma_2 = 12\,MPa$ $\qquad \varepsilon_2 = 40 \cdot 10^{-6}$

$\sigma_3 = 0\,MPa$ $\qquad \varepsilon_3 = -34{,}285 \cdot 10^{-6}$