Szilárdságtan - 14. gyakorlat

Vékonyfalú nyomástartó edény

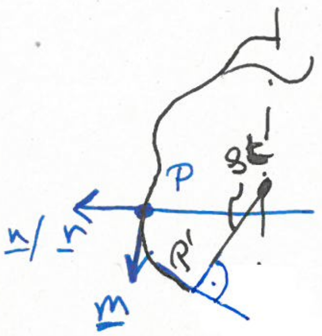
Elméleti összefoglaló

Mechanikai modell:

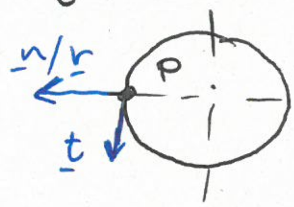
geometria: „v" vastag forgástest ↳ forgáshéj

terhelés: belső túlnyomás

Membránelmélet: a vastagság mentén állandó valamely mennyiség



→ felülnézet



$\underline{n}/\underline{r}$ - radiális/normálirány
$\underline{t}$ - tangenciális irány
$\underline{m}$ - meridiánirány

A feszültségeket az m, t, r koordinátarendszerben értelmezzük

Feszültségek $\sigma_n \approx 0$ vagy ha biztonság kell $\sigma_n \approx -p$

$$\boxed{\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{v}}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_m}{\rho_t} = \frac{p}{2v}}$$

ρ_m és ρ_t - görbületi sugarak

	ρ_m	ρ_t
gömb	$d/2$	$d/2$
henger	∞	$d/2$
kúp	∞	$\frac{d}{2\cos(\beta)}$
tórusz	r	$r + \frac{\frac{d}{2} - r}{\cos\varphi}$

Másképpen: $\sigma_m = \frac{p}{2v}\rho_t$

$$\sigma_t = \frac{p}{v}\rho_t\left(1 - \frac{\rho_t}{2\rho_m}\right)$$

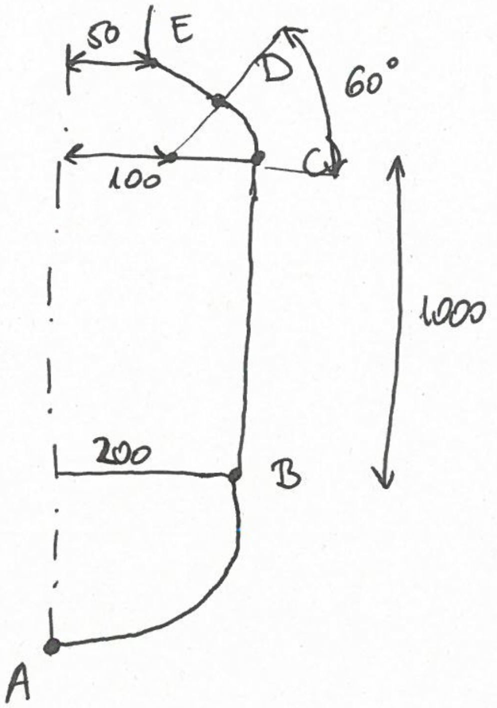
Speciális eset Henger $\rho_m = 0$; $\rho_t = \frac{d}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{pd}{2v} \\ \sigma_m &= \frac{pd}{4v} \end{aligned}\right\} \text{Kazánformulák}$$

Alkalmazás felt.

- v kicsi a többi mérethez képest
- nincs görbületváltás
- ha $\rho_m \neq 0$ és $\rho_t \neq \infty$

1. feladat Számítsuk ki, hogy mekkora feszültségek ébrednek a membrán elmélet szerint a vázolt „v" falvastagságú tartály jellegzetes pontjaiban. Határozzuk meg a hengeres rész hossz és átmérő változását!



Adatok:

$p = 20\ bar = 20 \cdot 10^5\ Pa$

$v = 5\ mm$

$E = 200\ GPa$

$\nu = 0{,}3$

A tartály 4 részre osztható a meridiángörbe mentén:

I. gömb (A - B)

II. henger (B - C)

III. tórusz (C - D)

IV. kúp (D - E).

I. Gömb:

$\rho_t = \frac{d}{2} = 200\ mm$

$\rho_m = \frac{d}{2} = 200\ mm$

$d = 400\ mm$

(A) $\sigma_m^A = \sigma_t^A$

$\sigma_m^A = \frac{p}{2v} \rho_t = \frac{p}{2v} \cdot \frac{d}{2} = \underline{\underline{40\ MPa}}$

$\sigma_t^A = \underline{\underline{40\ MPa}}$

(B_1) mintha a gömbön lenne!

$\sigma_m^{B_1} = \sigma_t^{B_1}$

$\sigma_m^{B_1} = \frac{p}{2v} \rho_t = \underline{\underline{40\ MPa}}$

$\sigma_t^{B_1} = \underline{\underline{40\ MPa}}$

II. Henger

$$\rho_m = \infty$$

$$\rho_t = \frac{d}{2} = 200\,mm$$

B_2

$$\sigma_m^{B_2} = \frac{pd}{4v} = 40\,MPa$$

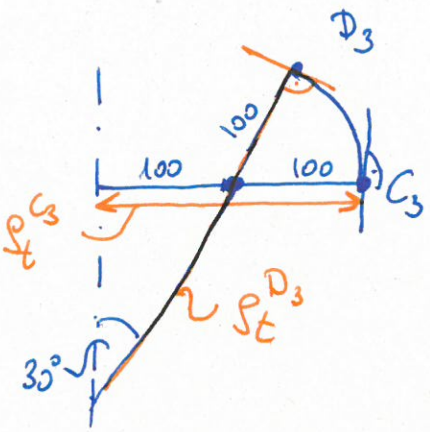
$$\sigma_t^{B_2} = \frac{pd}{2v} = 80\,MPa$$

C_2

$$\sigma_m^{C_2} = \frac{pd}{4v} = 40\,MPa$$

$$\sigma_t^{C_2} = \frac{pd}{2v} = 80\,MPa$$

III. Tórusz



$$\rho_m = 100\,mm$$

$$\rho_t^{C_3} = \frac{d}{2} = 200\,mm$$

$$\rho_t^{D_3} = 100 + \frac{100}{\sin 30^\circ} = 100 + 200 = 300$$

C_3

$$\sigma_m^{C_3} = \frac{p}{2v}\rho_t^{C_3} = 40\,MPa$$

$$\sigma_t^{C_3} = \frac{p}{v}\rho_t^{C_3}\left(1 - \frac{\rho_t^{C_3}}{2\rho_m}\right) = 0\,MPa$$

D_3

$$\sigma_m^{D_3} = \frac{p}{2v}\rho_t^{D_3} = 60\,MPa$$

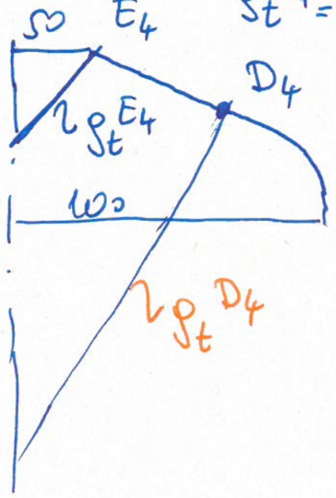
$$\sigma_t^{D_3} = \frac{p}{v}\rho_t^{D_3}\left(1 - \frac{\rho_t^{D_3}}{2\rho_m}\right) = -60\,MPa$$

IV. Kúp

$$\rho_m = \infty$$

$$\rho_t^{D_4} = 300\,mm$$

$$\rho_t^{E_4} = 100\,mm$$



D_4

$$\sigma_m^{D_4} = \frac{p}{2v}\rho_t^{D_4} = 60\,MPa$$

$$\sigma_t^{D_4} = \frac{p}{v}\rho_t^{D_4} = 120\,MPa$$

E_4

$$\sigma_m^{E_4} = \frac{p}{2v}\rho_t^{E_4} = 20\,MPa$$

$$\sigma_t^{E_4} = \frac{p}{v}\rho_t^{E_4} = 40\,MPa$$

Összefoglalva

Part	σ_m	σ_t
I. gömb A	40	40
I. gömb B_1	40	40
II. henger B_2	40	80
II. henger C_2	40	80
III. tórusz C_3	40	0
III. tórusz D_3	60	-60
IV. kúp D_4	60	120
IV. kúp E_4	20	40

görbületváltozás helyén a membránelmélet közelítésnek sem jó

Hengeres szakasz

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,n)} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}}_{(m,t,n)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_m - \nu \sigma_t) = 8 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu \sigma_m) = 3{,}4 \cdot 10^{-4}$$

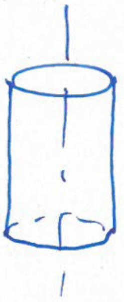
$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}(-\nu \sigma_t - \nu \sigma_m) = \frac{-\nu}{E}(\sigma_t + \sigma_m) = -1{,}8 \cdot 10^{-4}$$

a hosszváltozás: $\Delta L = L \cdot \varepsilon_m = \underline{\underline{0{,}08 \text{ mm}}}$

az átmérőváltozás a kerületváltozás alapján

$$\varepsilon_t = \frac{(D+\Delta D)\pi - D\pi}{D\pi} = \frac{\Delta D}{D} \rightarrow \Delta D = \varepsilon_t \cdot D = \underline{\underline{0{,}136 \text{ mm}}}$$

2. feladat Laboratóriumi használatra készült hengeres tartályban a gáz nyomása $p = 15$ bar. A tartály közepes átmérője $D = 250$ mm. Mohr-elmélettel határozzuk meg a szükséges falvastagságot ha $\sigma_{meg} = 92$ MPa



Adatok

$p = 15 \text{ bar} = 15 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$D = 250 \text{ mm}$

$\sigma_{meg} = 92 \text{ MPa}$

Henger

$$\left.\begin{aligned} \rho_m &= \infty \\ \rho_t &= \frac{D}{2} \end{aligned}\right\} \text{Kazán-formulák}$$

$$\sigma_m = \frac{pD}{4v}$$

$$\sigma_t = \frac{pD}{2v}$$

$$\boxed{\sigma_m < \sigma_t} \; !$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(m,t,n)} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - 0 = \underline{\underline{\sigma_t}}$$

$\sigma_1 = \sigma_t$

$\sigma_2 = \sigma_m$

$\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$

$$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_{meg}$$

$$\frac{pD}{2v} = \sigma_{meg} \longrightarrow \frac{1}{v} = \frac{2\sigma_{meg}}{pD} \qquad v = \frac{pD}{2\sigma_{meg}} = \underline{\underline{2{,}038 \text{ mm}}}$$

Ha a biztonság felé tekintünk el:

$\underline{\sigma_n = -p}$

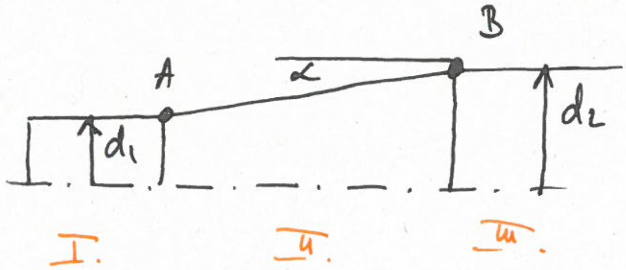
belső pont!

$$\tilde{\sigma}_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - \sigma_n = \sigma_t + p$$

$$\tilde{\sigma}_e^{Mohr} = \sigma_{meg}$$

$$\frac{p\tilde{D}}{2\tilde{v}} + p = \sigma_{meg} \longrightarrow \tilde{v} = \frac{pD}{2(\sigma_{meg} - p)} = \underline{\underline{2{,}07 \text{ mm}}}$$

3. feladat Határozzuk meg az ábra szerinti három csőszakasz falvastagságát úgy, hogy a csőszakaszok falában az átmeneteknél azonos legyen a Mohr-szerinti egyenértékű feszültség, σ_{meg}!



Adatok:

$d_1 = 160$ mm

$d_2 = 260$ mm

$l = 800$ mm

$p = 10$ bar $= 10 \cdot 10^5$ Pa

$\sigma_{meg} = 40$ MPa

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{d_2 - d_1}{2l}\right) = \underline{\underline{3{,}576^\circ}}$

3 csőszakasz

I. szakasz:

A_1 pont

$\varrho_m = \infty$

$\varrho_t = \frac{d_1}{2}$

$\sigma_m^{A_1} = \frac{p d_1}{4 v_1}$

$\sigma_t^{A_1} = \frac{p d_1}{2 v_1}$

$\sigma_n = 0$ MPa

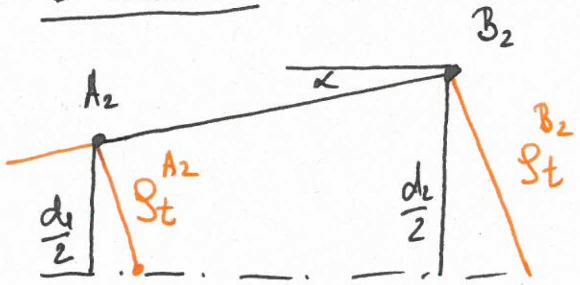
$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t$

$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_{meg}$

$\frac{p d_1}{2 v} = \sigma_{meg}$

$v_1 = \frac{p d_1}{2 \sigma_{meg}} = \underline{\underline{2 \text{ mm}}}$

II szakasz



$\varrho_m = \infty$

$\varrho_t^{A_2} = \frac{d_1}{2\cos\alpha} = 80{,}156$

$\varrho_t^{B_2} = \frac{d_2}{2\cos\alpha} = 130{,}25$

(A2) $\sigma_m^{A_2} = \frac{p}{2 v_2} \varrho_t^{A_2}$

$\sigma_t^{A_2} = \frac{p}{v_2} \varrho_t^{A_2}$

$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_t^{A_2} = \sigma_{meg}$

$v_2 = \frac{p \cdot \varrho_t^{A_2}}{\sigma_{meg}} = \underline{\underline{2{,}0039 \text{ mm}}}$

(B2) $\sigma_m^{B_2} = \frac{p}{2 v_2} \varrho_t^{B_2}$

$\sigma_t^{B_2} = \frac{p}{v_2} \varrho_t^{B_2}$

$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_t^{B_2} = \sigma_{meg}$

$v_2 = \frac{p \cdot \varrho_t^{B_2}}{\sigma_{meg}} = \boxed{\underline{\underline{3{,}26 \text{ mm}}}}$ // v_2

III. Szelvény

$\rho_m = \infty$ $\rightarrow$ kazán formulák

$\rho_t = \frac{d_2}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m^{B_3} &= \frac{p\, d_2}{4 v_3} \\ \sigma_t^{B_3} &= \frac{p \cdot d_3}{2 v_3} \end{aligned}\right\} \quad \sigma_e^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t^{B_3}$$

$$\sigma_e^{Mohr} = \sigma_{meg}$$

$$v_3 = \frac{p\, d_2}{2\, \sigma_{meg}} = \underline{\underline{3,25\ mm}}$$

4. feladat Egy d_{cs} közepes átmérőjű és v_{cs} falvastagságú csőre v_a vastagságú abroncsot szeretnénk tenni. Az abroncs kerülete egy gyártási hiba miatt δ-val kisebb a kelleténél. Mekkora feszültség ébred, ha mégis ráhúzzuk a csőre?

Adatok:

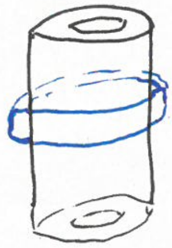
$E = 200\ GPa$

$d_{cs} = 400\ mm$

$v_{cs} = 5\ mm$

$v_a = 2\ mm$

$\delta = 0{,}5\ mm$

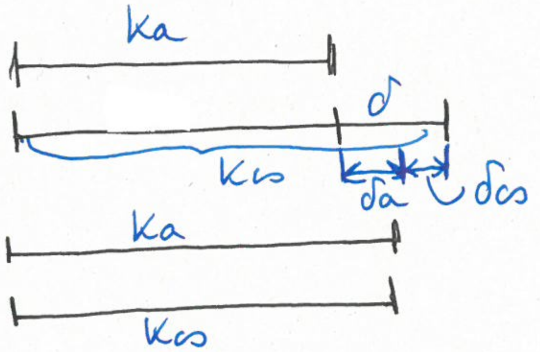


ideálisan: $K_{cs} = K_a$

Kerületek között: $K_a = K_{cs} - \delta$

összeszerelés előtt:

összeszerelés után



a kettő között p ugyanaz

Tehát: $\delta = \delta_a + \delta_{cs}$

A kerületben történő változás: $\delta_a = \varepsilon_{ta} K_a$

$\delta_{cs} = -\varepsilon_{tcs} K_{cs}$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_m)$$

↳ most zérus (nincs belső nyomás)

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E}$$

$$\varepsilon_{ta} = \frac{\sigma_{ta}}{E} = \frac{1}{E}\ \frac{+p\, d_a}{2 v_a}$$

$$\varepsilon_{tcs} = \frac{\sigma_{tcs}}{E} = \frac{1}{E}\ \frac{-p\, d_{cs}}{2 v_{cs}}$$

$$\delta = \pi d_{cs} - \pi d_a$$

$$\Downarrow$$

$$d_a = \frac{\pi d_{cs} - \delta}{\pi}$$

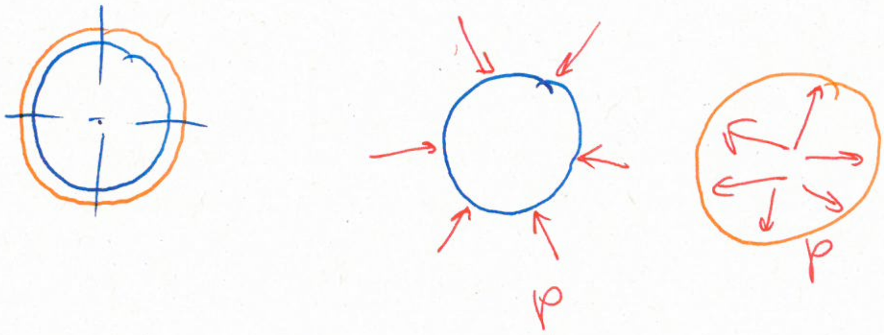
$$d_a = d_{cs} - \frac{\delta}{\pi} = 399{,}84\ mm$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_a &= \frac{p\, d_a}{2 E v_a} \cdot d_a \pi \\ \delta_{co} &= \frac{p\, d_{co}}{2 v_{co} E} \cdot d_{co} \pi \end{aligned}\right\} \quad \delta = \frac{p \pi}{2E}\left(\frac{d_a^2}{v_a} + \frac{d_{co}^2}{v_{co}}\right)$$

$$p = \frac{2 \delta E}{\pi\left(\frac{d_a^2}{v_a} + \frac{d_{co}^2}{v_{co}}\right)} = 0{,}569 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ta} = 56{,}85 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{tco} = -22{,}749 \text{ MPa}$$



$$\delta_a = \frac{\sigma_{ta}}{E} = 0{,}3572 \text{ mm}$$

$$\delta_{co} = \frac{-\sigma_{tco}}{E} = 0{,}1428 \text{ mm}$$