Munkatétel I.

Betti tétel, statikailag határozott szerkezetek

Elméleti összefoglalás

Betti-tétel: $W_{21} = W_{12}$

„idegen munkák egyenlőek"

Fontos: w elmozdulást és φ szögelfordulást mindig a súlypontra értjük!

$$W_{21} = W_{12} = U_{21} = U_{12} = Q_A \cdot w_A$$

Q_A: Az elmozdulás irányába mutató 2es erőrendszer

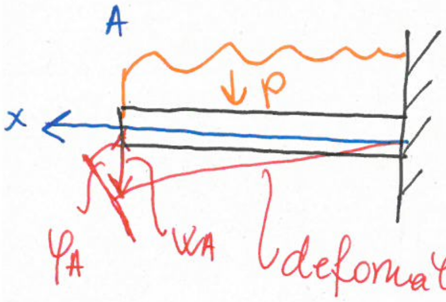
↳ Ki vesszük fel ott, ahol az elmozdulást vagy a szögelfordulást keressük!

w_A: A keresett elmozdulás!

Ha elmozdulás: Q_A: $F_A = 1\,N$ → w_A - elmozdulás

Ha elfordulás: Q_A: $M_A = 1\,Nm$ → φ_A - szögelfordulás

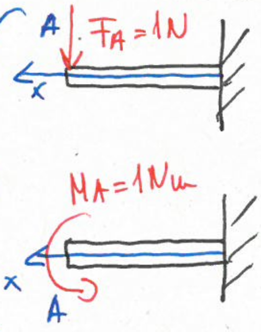
- 1es erőrendszer



$M_{h1}(x)$ fgv írja le a hajlítónyomatéki igénybevételt!

- 2es erőrendszer

$M_{h2}(x)$ fgv!



ha elmozdulás

ha elfordulás

<u>Jelölés</u>:

$Mh_1(x) = Mh(x)$: A tényleges terhelésből számított hajlítónyomatéki igénybevétel!

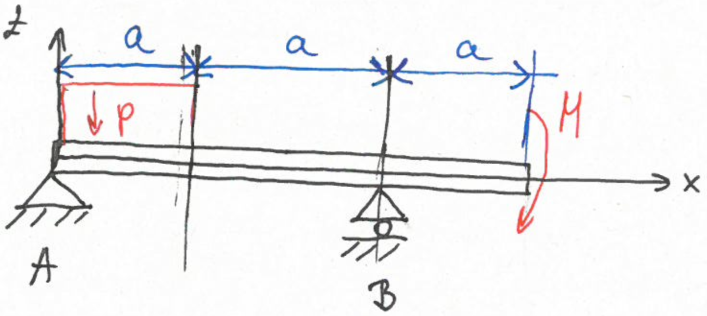
$Mh_2(x) = mh(x)$: A 2es törtrúdszerből számított hajlítónyomatéki igénybevétel

$$w_A = \int_l \frac{Mh(x)\,mh(x)}{I_y E}\,dx$$ ha $F_A = 1N$ erőt alkalmazunk!

$$\varphi_A = \int_l \frac{Mh(x)\,mh(x)}{I_y E}\,dx$$ ha $M_A = 1Nm$ nyomatékot alkalmazunk!

Az integrált a rúd <u>teljes</u> hossza mentén el kell végezni!

1. feladat Határozzuk meg Betti-tétellel a vázolt tartó B-keresztmetszetének y tengely körüli elfordulási szögét (φ_B) és a rúdvég lehajlását (w_C)!



Adatok:

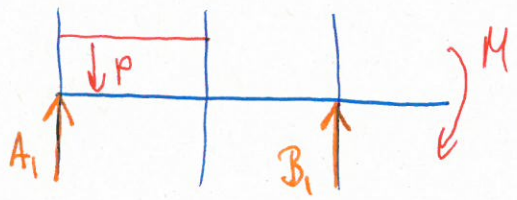
$a = 0{,}5\ m$

$p = 8\ kN/m$

$M = 2\ kNm$

$\underbrace{I_y E}_{\text{hajlítómerevség}} = 50\ kNm^2$

① Reakciók/a SZTA



Egyensúlyi egyenletek

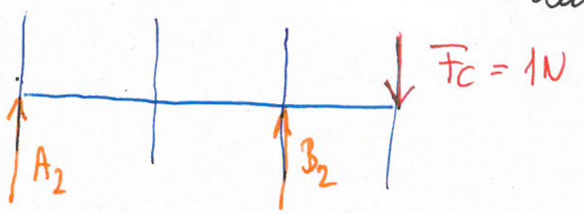
$\sum F_z = 0: \quad A_1 + B_1 - p \cdot a = 0$

$\sum M_A = 0: \quad -\frac{p \cdot a^2}{2} + B_1 2a - M = 0$

$\hookrightarrow B_1 = \frac{M + \frac{pa^2}{2}}{2a} = \underline{\underline{3\ kN}}$

$\hookrightarrow A_1 = pa - B_1 = \underline{\underline{1\ kN}}$

Reakciók/b 1 N aktív erő a rúdvégen ahol az elmozdulás kell



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_z = 0: \quad A_2 + B_2 - F_C = 0$

$\sum M_A = 0 \quad B_2 \cdot 2a - F_C \cdot 3a = 0$

$\hookrightarrow B_2 = \frac{F_C \cdot 3a}{2a} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\ N}}$

$\hookrightarrow A_2 = F_C - B_2 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\ N}}$

Reakciók/c: 1 Nm aktív nyomaték a B pontban (elf. kell)

Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_z = 0: \quad A_3 + B_3 = 0$

$\sum M_A = 0: \quad B_3 \cdot 2a + M_B = 0 \quad \hookrightarrow B_3 = -\frac{M_B}{2a} = \underline{\underline{-1\ N}}$

$\hookrightarrow A_3 = \underline{\underline{1\ N}}$

Olyan irányba vesszük fel amerre az elf.-t gondoljuk!

② Igénybevételi fgvek!

<u>Szükséges</u>: Mh – eredeti terhelés

mh_2 – 2es erőrendszer (lehajlás)

mh_3 – 3as erőrendszer (elfordulás)

	$0<x<a$	$a<x<2a$	$2a<x<3a$
$Mh(x)$	$-A_1x+p\frac{x^2}{2}$	$-A_1x+pa(x-\frac{a}{2})$	M
$mh_2(x)$	$-A_2x$	$-A_2x$	$F_C(3a-x)$
$mh_3(x)$	$-A_3x$	$-A_3x$	0

③ Betti-tétel alapján C pont lehajlása

Most az egyszerűség miatt A_2-t pozitív (↑) irányba vesszük fel, de értéke <u>negatív</u>!

$$w_C=\frac{1}{I_yE}\int_l Mh(x)\,mh_2(x)\,dl=\frac{1}{IE}\left[\int_0^a\left(-A_1x+p\frac{x^2}{2}\right)(-A_2x)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_a^{2a}\left(\left(-A_1x+pa\left(x-\frac{a}{2}\right)\right)(-A_2x)\right)dx+\int_{2a}^{3a}M\cdot\overset{1N}{F_C}(3a-x)\,dx\right]$$

$$w_C=\frac{1}{I_yE}\left[\int_0^a A_1A_2x^2-pA_2\frac{x^3}{2}\,dx+\int_a^{2a}A_1A_2x^2-pA_2ax^2+p\frac{a^2}{2}A_2x\,dx+\int_{2a}^{3a}M3a-Mx\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{I_yE}\left(\left[A_1A_2\frac{x^3}{3}-pA_2\frac{x^4}{8}\right]_0^a+\left[A_1A_2\frac{x^3}{3}-pA_2a\frac{x^3}{3}+\frac{pa^2}{2}A_2\frac{x^2}{2}\right]_a^{2a}+\left[3Max-\frac{Mx^2}{2}\right]_{2a}^{3a}\right)=$$

$$=\frac{1}{I_yE}\left(A_1A_2\frac{8a^3}{3}-pA_2\left(\frac{a^4}{8}+\frac{8a^4}{3}-a^4-\frac{a^4}{3}+\frac{a^4}{4}\right)+3Ma^2-\frac{5Ma^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{I_yE}\left(A_1A_2\frac{8a^3}{3}-pA_2\frac{41a^4}{24}+\frac{Ma^2}{2}\right)=\underline{\underline{10{,}2083\ mm}}$$

A B pont szögelfordulása

$$\varphi_B = \frac{1}{I_y E}\int_l M_h \cdot m_{h3}\, dl = \underbrace{\frac{1}{IE}\left[\int_0^a \left(-A_1 x + \frac{p x^2}{2}\right)(-A_3 x)\,dx + \int_a^{2a}\left(-A_1 x + pa\left(x-\frac{a}{2}\right)\right)(-A_3 x)\,dx\right]}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{I_y E}\int_{2a}^{3a} M \cdot 0\, dx}_{=0}$$

ugyanaz, mint az előző esetben az első két integrál, csak A_2 helyett A_3 szerepel!

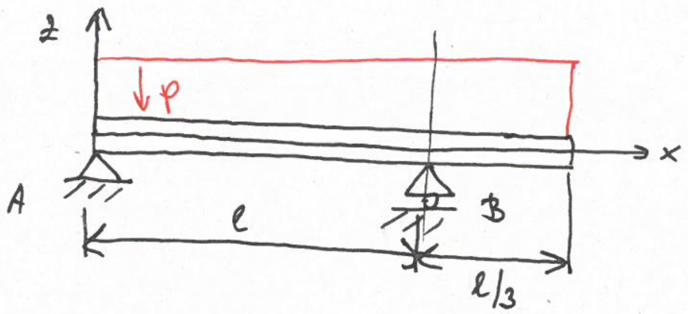
$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\left(A_1 A_3 \frac{8a^3}{3} - p A_3 \frac{41a^4}{24}\right) = -\underline{0{,}010417} = \underline{\underline{-0{,}5968^\circ}}$$

radián!

fokban!

Negatív előjel: ellentétes a felvett iránnyal!

2. feladat Betti-tétel segítségével határozzuk meg a B-ben elfordulási szögét!



Adatok:

$l = 3\,m$

$p = 6\,kN/m$

$IE = 200\,kNm^2$

① **Reakciók/a** – eredeti terhelés

SZTA'

Egyensúlyi egyenletek

$\sum F_z = 0: \quad A_1 + B_1 - p\frac{4l}{3} = 0$

$\sum M_A = 0: \quad B_1 l - p\frac{4l}{3}\cdot\frac{2l}{3} = 0$

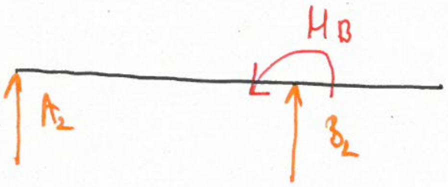
$\hookrightarrow B_1 = p\frac{8l}{9} = \underline{\underline{16\,kN}}$

$\hookrightarrow A_1 = p\frac{4l}{3} - B_1 = \underline{\underline{8\,kN}}$

Reakciók/b 2es erőrendszer

B-beli elfordulás miatt $M_B = 1\,Nm$

SZTA'



Egyensúlyi egyenletek

$\sum F_z = 0: \quad A_2 + B_2 = 0$

$\sum M_A = 0 \quad B_2\cdot l + M_B = 0$

$\hookrightarrow B_2 = \frac{M_B}{l} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}\,N}}$

$\hookrightarrow A_2 = \underline{\underline{\frac{1}{3}\,N}}$

② **Igénybevételi függv.**

	$0 < x < l$	$l < x < \frac{4l}{3}$
$M_h(x)$	$-A_1 x + p\frac{x^2}{2}$	$p\left(\frac{4}{3}l - x\right)^2\cdot\frac{1}{2}$
$m_h(x)$	$-A_2 x$	0

3 Betti-tétel alapján:

$$\varphi_B = \int_l \frac{M_1 \cdot m_1}{IE} dl = \frac{1}{IE}\int_0^l \left(-A_1 x + \frac{px^2}{2}\right)\left(-A_2 x\right) dx + \underbrace{\frac{1}{IE}\int_l^{4/3\, l} \frac{p\left(\frac{4}{3}l - x\right)}{2} \cdot 0\, dx}_{=0}$$

$$= \frac{1}{IE}\int_0^l A_1 A_2 x^2 - \frac{p A_2}{2} x^3 \, dx = \frac{1}{IE}\left[A_1 A_2 \frac{x^3}{3} - \frac{p A_2 x^4}{8}\right]_0^l =$$

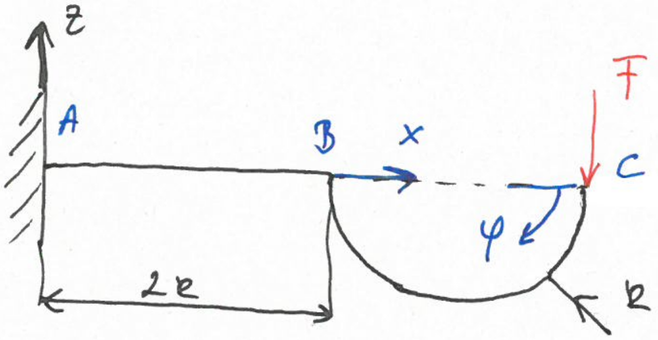
$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\left(A_1 A_2 \frac{l^3}{3} - \frac{p A_2 l^4}{8}\right) = 0{,}01875 \text{ rad} = 1{,}0743^\circ$$

pozitív, tehát M irányába fordul!

3. feladat

A Betti-tétel segítségével állapítsuk meg, hogy mekkora az F erő támadáspontjának elmozdulása és a B keresztmetszet szögelfordulása!

Csak a hajlítást vegyük figyelembe!



Adatok:

$IE = 420\ kNm^2$

$R = 0{,}75\ m$

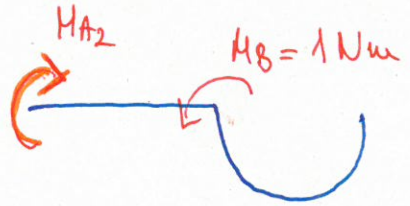
$F = 0{,}9\ kN$

1 Reakciók/a – eredeti

$A_1 = F = \underline{\underline{0{,}9\ kN}}$

$M_{A1} = F \cdot 4R = \underline{\underline{2{,}7\ kNm}}$

Reakciók/b – 2es erőrendszer (B pont elfordulása)



$M_{A2} = -M_B = -1\ Nm$

Reakciók/c – 3as erőrendszer (C pont elmozdulása)

$A_3 = F_C = 1N$

$M_{A3} = F_C \cdot 4R = 3Nm$

2 Igénybevételek

A változókat pozitív előjellel kell behelyettesíteni!

	$0<x<2R$	$0<\varphi<\pi$
M_{h1}	$F(4R-x)$	$F(R-R\cos\varphi)$
m_{h2}	$-M_{A2}$	0
m_{h3}	$F_C(4R-x)$	$F_C(R-R\cos\varphi)$

③ Betti-tétellel

• $$\varphi_B = \frac{1}{IE}\int_l M_k \cdot m_k \, dl = \frac{1}{IE}\int_0^{2R} F(4R-x)(-M_{A_2}^{1})\,dx + \underbrace{\frac{1}{IE}\int_0^{\pi} FR(1-\cos\varphi)\cdot 0\,\underbrace{R\cdot d\varphi}_{ds}}_{=0!}$$

$$= \frac{1}{IE}\int_0^{2R} -4FR + Fx\,dx = \frac{1}{IE}\left[-4FRx + \frac{Fx^2}{2}\right]_0^{2R} = \frac{-6FR^2}{IE}$$

$$\varphi_B = -0{,}007232 \text{ rad} = -0{,}4143°$$

• $$w_C = \frac{1}{IE}\left[\int_0^{2R} F(4R-x)\,F_C(4R-x)\,dx + \int_0^{\pi} FR(1-\cos\varphi)\,F_C\,R(1-\cos\varphi)\,\underbrace{R\cdot d\varphi}_{ds}\right]$$

$$= \frac{1}{IE}\left[\int_0^{2R} F(4R-x)^2 dx + \int_0^{\pi} FR^3 \underbrace{(1-\cos\varphi)^2}\, d\varphi\right]$$

$$\hookrightarrow 1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi = 1-2\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2} =$$

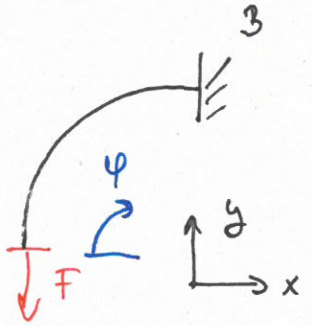
$$= \frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

$$w_C = \frac{1}{IE}\left[\frac{F(4R-x)^3}{-3}\right]_0^{2R} + \frac{1}{IE}\left[FR^3\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{IE}F\left(-\frac{8}{3}+\frac{64}{3}\right)R^3 + \frac{1}{IE}FR^3\left(\frac{3}{2}\pi - 0 + 0 - 0 + 0 - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{IE}FR^3\left(\frac{56}{3} + \frac{3}{2}\pi\right) = 21{,}13 \text{ mm}$$

4. feladat Egy negyedkörív alakú, d átmérőjű körkeresztmetszetű rúd végét koncentrált erő terheli. Számítsuk ki a szabad vég elmozdulását!
Mekkora hibát vétünk a függőleges irányú elmozdulás számításakor, ha a normálerőt elhagyjuk!



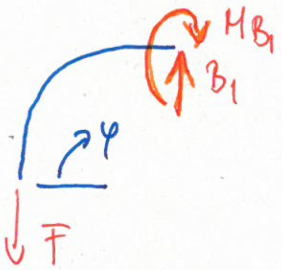
Adatok:

$$R = 10d,\quad A = \frac{d^2\pi}{4},\quad I = \frac{d^4\pi}{64} \Bigg\} \quad \frac{R}{2c} = 10$$

Navier!

A rúdvég x és y irányban is elmozdulhat!

① Reakció/a – Eredeti terhelés

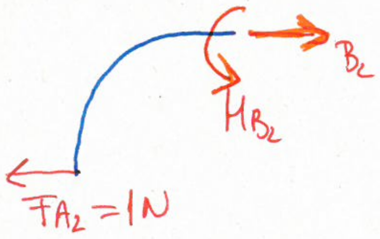


- $B_1 = F$
- $M_{B_1} = F \cdot \underline{10d}$

$M_h(\varphi) = FR(1-\cos\varphi)$

$N_1(\varphi) = F\cos\varphi$

Reakció/b – 2es erőrendszer (vízszintes elmozdulás)

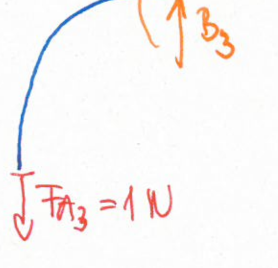


- $B_2 = F_{A_2} = \underline{1N}$
- $M_{B_2} = F_{A_2} \cdot R = \underline{\underline{10d \cdot 1}}$

$m_{h_2}(\varphi) = -F_{A_2} R \sin\varphi$

$n_2(\varphi) = F_{A_2} \sin\varphi$

Reakció/c – 3as erőrendszer (függőleges elmozdulás)



- $B_3 = F_{A_3} = \underline{1N}$
- $M_{B_3} = F_{A_3} \cdot R = \underline{\underline{1 \cdot 10d}}$

$m_{h_3}(\varphi) = F_{A_3} R(1-\cos\varphi)$

$n_3(\varphi) = F_{A_3} \cdot \cos\varphi$

② Igénybevételek

	$0<\varphi<\pi/2$
$M_h(\varphi)$	$FR(1-\cos\varphi)$
$m_{h2}(\varphi)$	$-F_{A_2}R\sin\varphi$
$m_{h3}(\varphi)$	$F_{A_3}R(1-\cos\varphi)$

	$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$
$N(\varphi)$	$F\cos\varphi$
$n_2(\varphi)$	$F_{A_2}\sin\varphi$
$n_3(\varphi)$	$F_{A_3}\cos\varphi$

③ Betti-tétel alapján (csak hajlítás!)

$$\bullet\; w_x = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi/2} M_h(\varphi)\, m_{h2}(\varphi)\underbrace{R\,d\varphi}_{ds} = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi/2} -FR^3(1-\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{FR^3}{IE}\left[\frac{(1-\cos\varphi)}{-2}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{-FR^3}{2IE}}}$$

$$\bullet\; w_y = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi/2} M_h(\varphi)\cdot m_{h3}(\varphi)\, R\,d\varphi = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi/2} FR^3\underbrace{(1-\cos\varphi)^2}_{\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{\cos 2\varphi}{2}}d\varphi$$

$$= \frac{1}{IE}FR^3\left[\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{1}{IE}FR^3\left(\frac{3\pi}{4}-2\right)}}$$

Nézzük meg a függőleges elmozdulást!

Betti: $F_{A_3}\cdot w_y = W_{21} = W_{12} = U_{21}$ ← alakvált. E

van normálkomponens!

$$\tilde{w}_y = \underbrace{\frac{1}{IE}\int_0^{\pi/2} M_h(\varphi)\cdot m_{h3}(\varphi)\, R\,d\varphi}_{w_y \text{ (amit az előbb számoltunk!)}} + \frac{1}{AE}\int_0^{\pi/2} N_1(\varphi)\cdot n_3(\varphi)\, R\,d\varphi$$

$$= w_y + \frac{1}{AE}\int_0^{\pi/2} F\cos^2\varphi\, R\,d\varphi = w_y + \frac{FR}{AE}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= w_y + \frac{1}{AE}FR\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} = w_y + \frac{FR\pi}{4AE}$$

w_N ~ plusz tag a normál igénybevételből!

Mekkora lesz ennek az elhanyagolása?

$$\frac{w_N}{w_y} = \frac{\frac{\cancel{F}\cancel{R}\pi}{4A\cancel{E}}}{\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)\frac{\cancel{F}R^{3\,2}}{I\cancel{E}}} = \frac{\frac{\pi}{\cancel{4}\cdot \frac{d^2\cancel{\pi}}{\cancel{4}}}}{\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)\frac{R^2\cdot 64}{d^{4\,2}\pi}} = \frac{d^2}{R^2}\frac{\pi}{64\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)}$$

$\frac{d^2}{R^2}$: 0,01

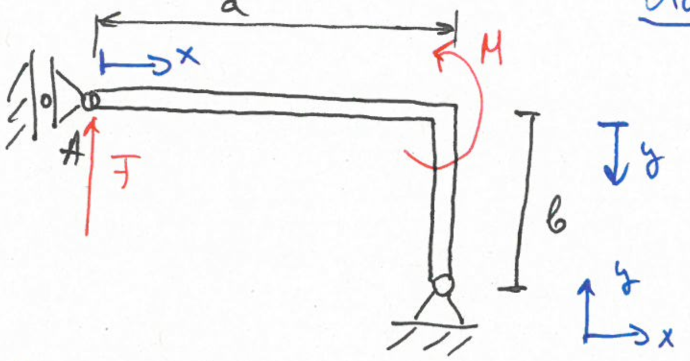
$$\frac{w_N}{w_y} = 0,00137 = \underline{\underline{0,137\%}}$$

elhanyagolható a lehúzás!

a teljes elmozdulás:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{FR^3}{IE}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\pi^2 - 3\pi + 4} = \underline{\underline{0,614\frac{FR^3}{IE}}}$$

5. feladat Határozzuk meg az A keresztmetszet elmozdulását Betti-tétellel!



Adatok:

$a = 2\,m$

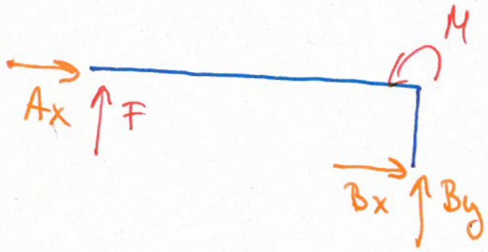
$b = 1\,m$

$M = 4{,}5\,kNm$

$F_A = 2\,kN$

$IE = 400\,kNm^2$

① **Reakciók/a** eredeti



egyensúlyi egyenletek:

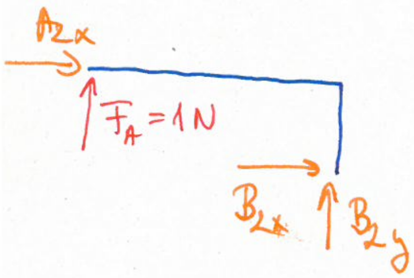
$\sum F_x = 0: \quad A_x + B_x = 0$

$\sum F_y = 0: \quad B_y + F = 0$

$\sum M_B = 0 \quad M - Fa - A_x \cdot b = 0$

- $B_y = \underline{\underline{-2\,kN}}$
- $A_x = \dfrac{M - Fa}{b} = \underline{\underline{+0{,}5\,kN}}$
- $B_x = \underline{\underline{-0{,}5\,kN}}$

Reakciók/b 2es erőrendszer



$\sum F_x = 0: \quad A_{2x} + B_{2x} = 0$

$\sum F_y = 0: \quad B_{2y} + F_A = 0$

$\sum M_B = 0: \quad -F_A \cdot a - A_{2x} \cdot b = 0$

$\hookrightarrow A_{2x} = -\dfrac{F_A \cdot a}{b} = \underline{-2\,N}$

$\hookrightarrow B_{2x} = 2\,N$

$\hookrightarrow B_{2y} = \underline{-1\,N}$

② **Igénybevételek.**

	$0 < x < a$	$0 < y < b$
M_h	$-Fx$	$-F \cdot a + M - A_x \cdot y$
m_h	$-F_A \cdot x$	$-F_A \cdot a + A_{2x}\,y$

pozitív előjellel kell behelyettesíteni!

③ Betti - tétellel

$$W_A = \int_l \frac{M_h \cdot m_h}{IE} dl = \frac{1}{IE} \int_0^a F x^2 dx + \int_0^b F a^2 - M \cdot a + A_x \cdot a y - F A_{2x} a y +$$

$$+ M A_{2x} y - A_x A_{2x} y^2 \, dy = \frac{1}{IE} \left(\left[\frac{F x^3}{3} \right]_0^a + \left[F a^2 y - M a y + \frac{A_x a y^2}{2} - \frac{F A_{2x} a y^2}{2} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{M A_{2x} y^2}{2} - \frac{A_x A_{2x} y^3}{3} \right]_0^b \right)$$

$$\boxed{A_{2x} = \frac{a}{6}}$$

$$W_A = \frac{1}{IE} \left(\frac{F a^3}{3} + F a^2 b - M a b + A_x \cdot \frac{a b^2}{2} - \frac{F A_{2x} a b^2}{2} + \frac{M A_2 \cdot b^2}{2} - \frac{A \cdot A_{2x} b^3}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{IE} \left(\frac{F a^3}{3} + F a^2 \frac{b}{2} - \frac{M a b}{2} - \frac{A_a b^2}{6} \right) = 0{,}0125 \text{ m} = \underline{\underline{12{,}5 \text{ mm}}}$$