Szilárdságtan 8. gyakorlat

Többtengelyű feszültségi állapot II.
Főfeszültségek és főirányok meghatározása Mohr-körökkel

Elméleti összefoglaló

↳ A feszültségi állapot Mohr-körökkel is jellemezhető

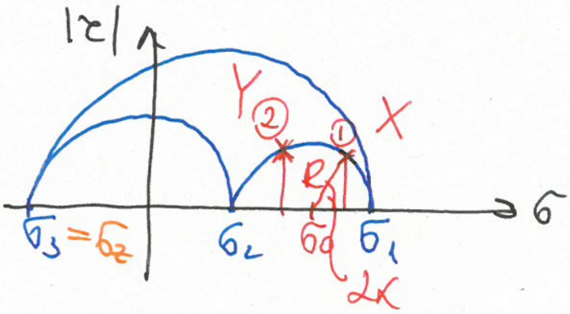
↳ Ehhez 1 főfeszültséget ismerni kell!

A példában σ_z főfeszültség → Honnan lehet tudni

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Sora és oszlopa is üres!

Algoritmus



① Ismert pontok felvétele

X = ① (σ_x, τ_{xy}) és Y = ② (σ_y, τ_{xy})

② $\sigma_0 = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ és $R = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_0)^2 + \tau_{xy}^2}$ kiszámítása

③ Főfeszültségek $\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 + R \\ \sigma_2 &= \sigma_0 - R \end{aligned}\right\}$ HA! $\sigma_z = \sigma_3$
↳ a legkisebb!!!

④ Főirányok Mivel $\sigma_3 = \sigma_z \rightarrow \underline{e}_3 = [0 \;\; 0 \;\; 1]^{*}$

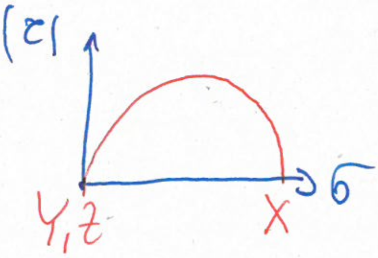
$$e_1 = (\cos\alpha \;\; \sin\alpha \;\; 0)$$
$$e_2 = (-\sin\alpha \;\; \cos\alpha \;\; 0)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_0}{R} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\sigma_x - \sigma_0}{R}\right)$$

Az x-y síkon az ① es ponthoz tartozó tengelyt (α) szöggel kell forgatni τ-irányába!

Alapigénybevételek esete

• **Húzás** $\sigma_x = \frac{N}{A}$ → $\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



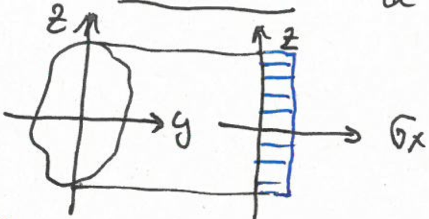
főirányok: $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\sigma_1 = \sigma_x$

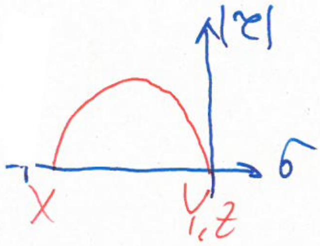
$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$!

Veszt. km.: a fesz. eloszlás konstans

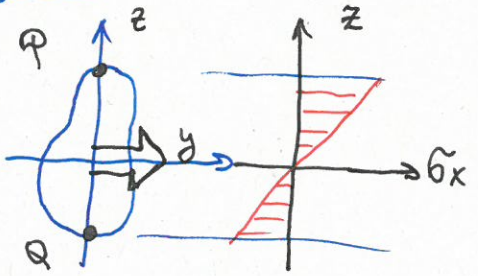
↳ minden pont veszélyes



• **Nyomás** $\sigma_x = \frac{-N}{A}$ ⇒ ugyanaz, mint húzásnál



• **Hajlítás**:

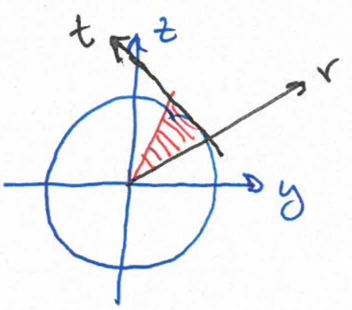


P-pont húzott $\sigma_x > 0$ ⇒ húzás

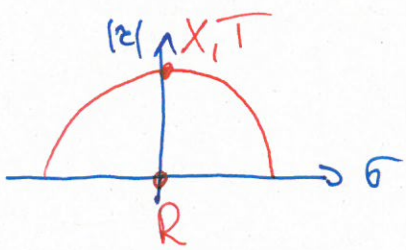
Q-pont nyomott $\sigma_x < 0$ ⇒ nyomás

veszélyes: szélső szál!

• **Csavarás**

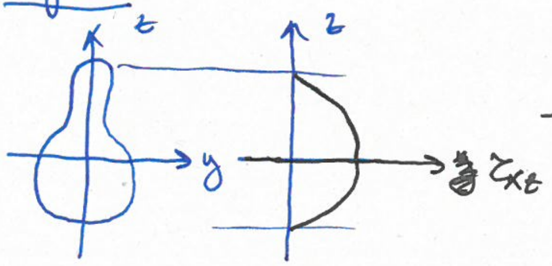


$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,r,t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xt} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xt} & 0 & 0 \end{bmatrix}$



veszélyes: a kör km. kerülete!

• **Nyírás**



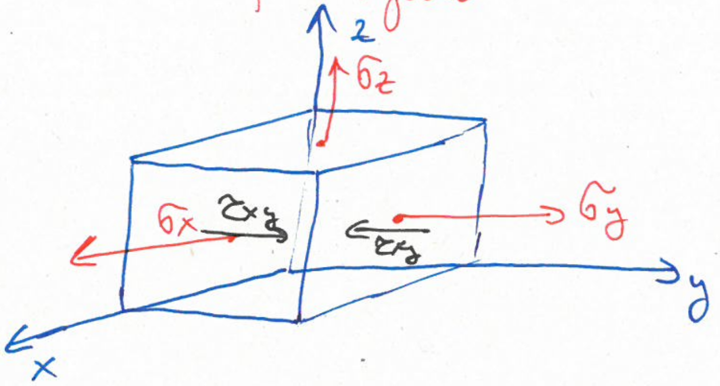
hasonló

1. Feladat

Egy nyugalmas test valamely pontjában az alábbi feszültségek ébrednek

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 80 & 60 & 0 \\ 60 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Határozzuk meg Mohr kör segítségével a főfeszültségeket és a főirányokat!



Biztos:

$\sigma_z = 20$ MPa főfeszültség (sajátérték)

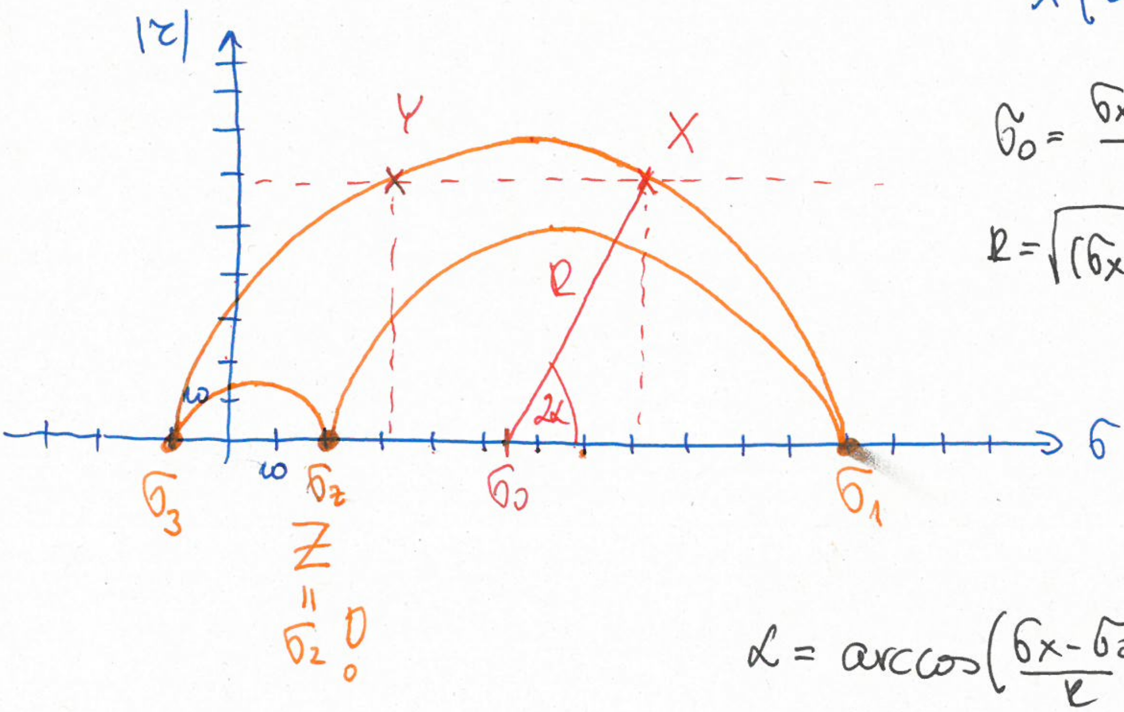
↳ a hozzá tartozó irány (főirány)

$$e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mohr kör

① Felveszem az ismert pontokat

$X(80;60)$; $Y(30,60)$



$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 55 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_0)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{25^2 + 60^2}$$

$$R = 65 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + R = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_0 - R = -10 \text{ MPa}$$

$$\alpha = \frac{\arccos\left(\frac{\sigma_x - \sigma_0}{R}\right)}{2} = 33{,}69^\circ$$

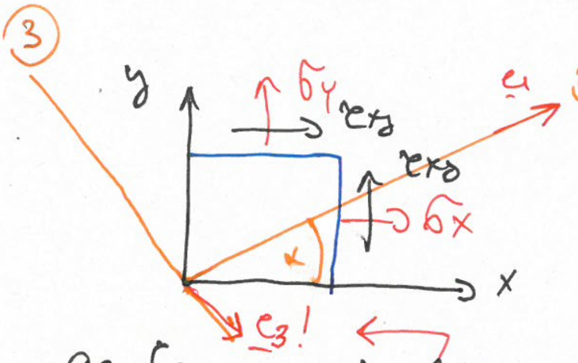
Tehát a főfeszültségek

$\sigma_1 = 120 \text{ MPa} \rightarrow \underline{e}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$

$\sigma_2 = 20 \text{ MPa} \rightarrow \underline{e}_2 = (0, 0, 1)$

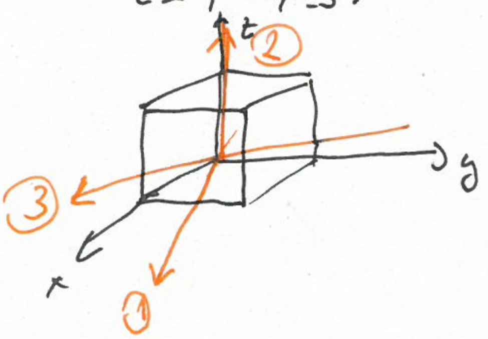
$\sigma_3 = -10 \text{ MPa} \rightarrow \underline{e}_3 = (\sin\alpha, -\cos\alpha \;\; 0)$

előtte!



Az ismert főirányból tekintek rá!

az $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ bázis rendszernek jobbsodrásúnak kell lennie!

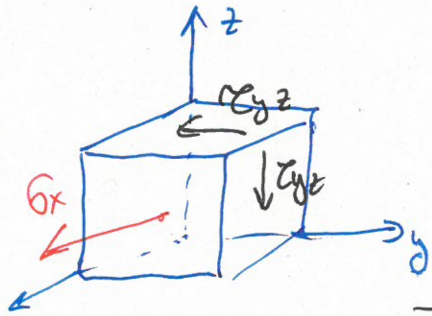


$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0,83205 \\ 0,5547 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0,5547 \\ -0,83205 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Feladat

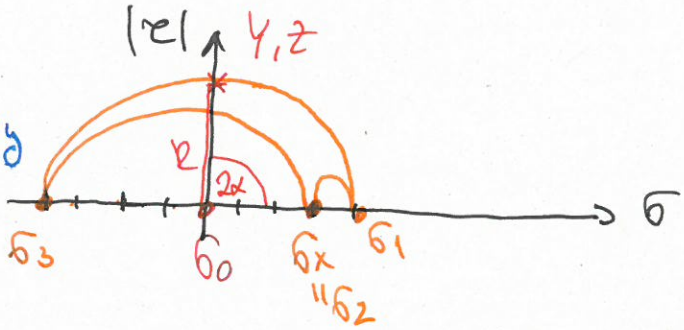
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \\ 0 & -40 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \Longrightarrow \sigma_x = 30 \text{ MPa főfesz.}$$

$\underline{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ főirány



Y(0,-40)

Z(0,-40)



$$\sigma_0 = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = 0 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_0)^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{0^2 + 40^2} = 40 \text{ MPa}$$

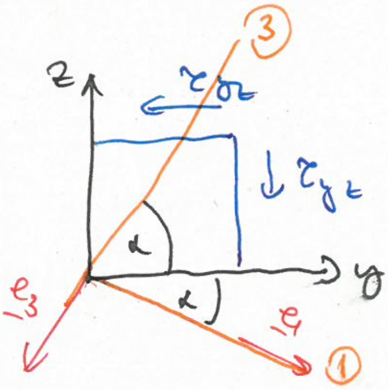
$2\alpha = 90°$

$\underline{\underline{\alpha = 45°}}$

$\sigma_1 = \sigma_0 + R = 40 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = 30 \text{ MPa}$

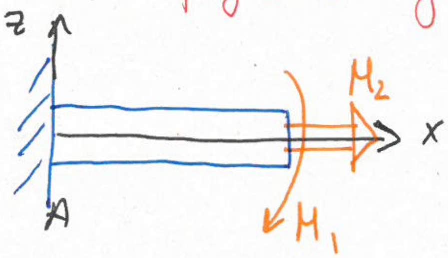
$\sigma_3 = \sigma_0 - R = -40 \text{ MPa}$



$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

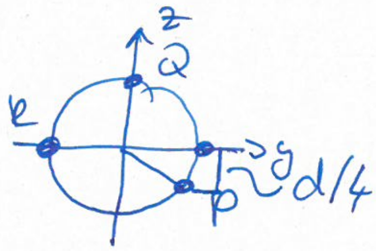
Jobbkézszabály teljesüljön!

3. Feladat Ábrázoljuk a P, Q, R pontokban a feszültségeket kiskockán, írjuk fel a feszültségi tenzor mátrixának elemeit és Mohr körök segítségével határozzuk meg a főirányokat és a főfeszültségeket!



$M_1 = M_2 = 530\ Nm$

$d = 30\ mm$

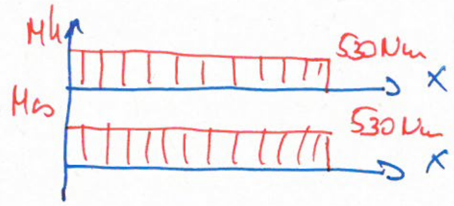


Reakciók

$M_{hA} = 530\ Nm$

$M_{cSA} = 530\ Nm$

Igénybevételek



Geometria

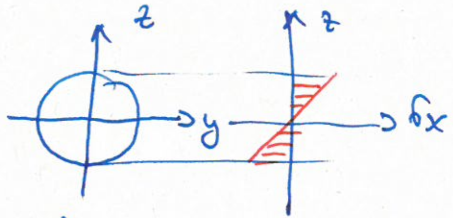
$$I_y = \frac{d^4 \pi}{64} = 39760{,}8\ mm^4$$

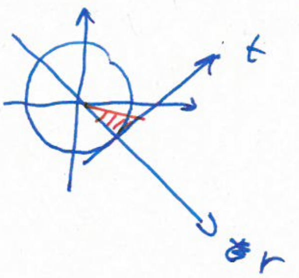
$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = 79521{,}6\ mm^4$$

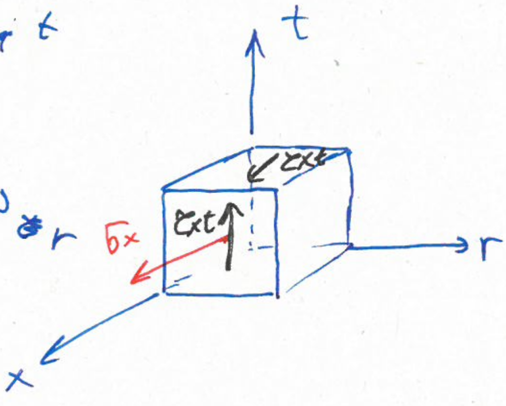
P-pont

$$\sigma_x = \frac{M_1}{I_y} \cdot \left(-\frac{d}{4}\right) = -99{,}97\ MPa$$

$$\tau_{xt} = \frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = 99{,}97\ MPa$$

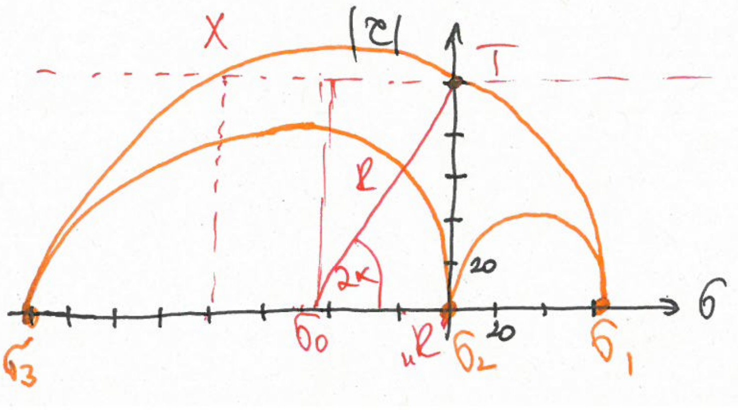






$$\underset{(x,r,t)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} -99{,}97 & 0 & 99{,}97 \\ 0 & & \\ 99{,}97 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$\hookrightarrow \sigma_r = 0\ MPa$ főfesz! $\underline{e}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ főirány



$T(0, 99{,}97)$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_T}{2} = -50\ MPa$$

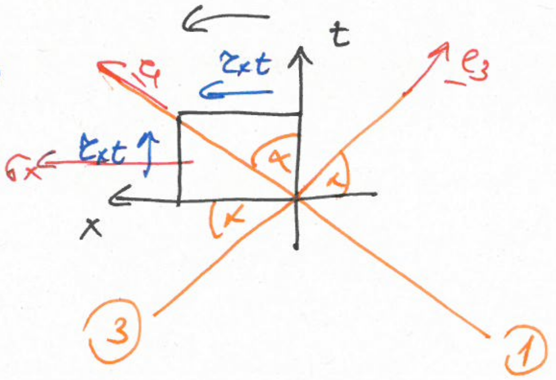
$$R = \sqrt{50^2 + 100^2} = 111{,}803\ MPa$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + R = 61{,}803\ MPa$$

$$\sigma_2 = 0\ MPa$$

$$\sigma_3 = \sigma_0 - R = -161{,}803\ MPa$$

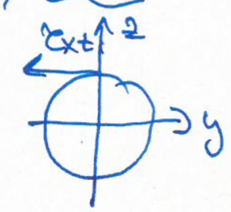
$$\alpha = \frac{\arccos\left(\frac{\sigma_t-\sigma_0}{R}\right)}{2} = 31{,}72^\circ$$



$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix}-\sin\alpha\\0\\\cos\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}5257\\0\\0{,}8506\end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};\quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix}\cos\alpha\\0\\\sin\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}8506\\0\\0{,}5257\end{bmatrix}$$

Q pont

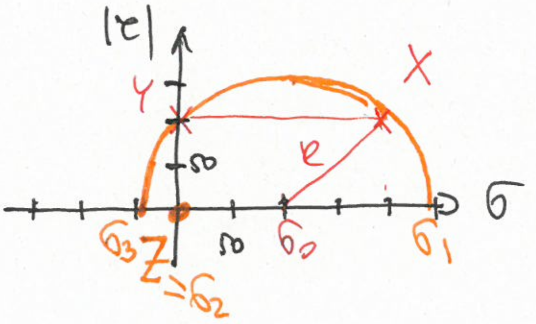


$$\sigma_x = \frac{M_h}{I_y}\cdot\frac{d}{2} = 199{,}95 \approx 200\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_t}{I_p}\cdot\frac{d}{2} = -100\ \text{MPa}\ !$$

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \underset{(x,r,t)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix}200 & -100 & 0\\-100 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \sigma_{\cancel{z}} = 0\ \text{MPa főfesz.}$$

$$\underline{e}_y = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\ \text{főir.}$$



Y(0,−100)
X(200,100)

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = 100\ \text{MPa}$$

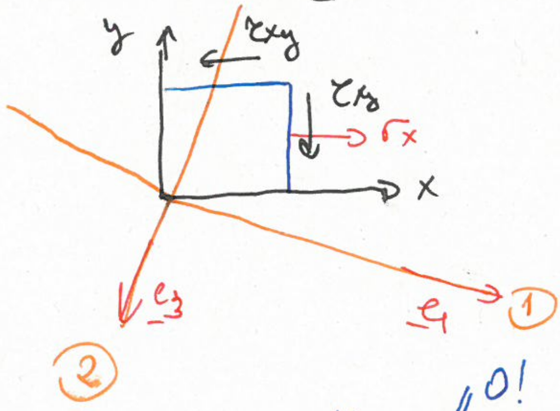
$$R = \sqrt{(\sigma_x-\sigma_0)^2+\tau_{xy}^2} = 141{,}4\ \text{MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + R = 241{,}421\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 0\ \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_0 - R = -41{,}421\ \text{MPa}$$

$$\alpha = \frac{\arccos\frac{\sigma_x-\sigma_0}{R}}{2} = 22{,}5^\circ$$

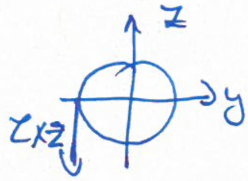


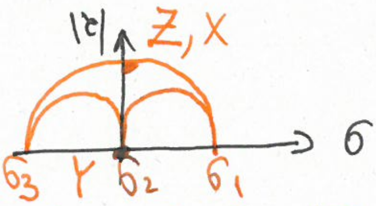
$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix}\cos\alpha\\-\sin\alpha\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}9239\\-0{,}3827\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix}-\sin\alpha\\-\cos\alpha\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}3827\\-0{,}9239\\0\end{bmatrix}$$

R pont

$$\sigma_x = \frac{M_1}{I_y}\cdot(\overset{=0!}{z}) = 0\ \text{MPa}$$





$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -100\\0 & 0 & 0\\-100 & 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \sigma_y = 0\ \text{MPa}$$

$$\underline{e}_y = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\sigma_0 = 0$ MPa

$\sigma_1 = 100$ MPa; $\sigma_2 = 0$ MPa, $\sigma_3 = -100$ MPa

$\alpha = 45^\circ$

Elméleti összefoglaló — Hooke-törvény

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\sigma_I\,\underline{\underline{E}}\right)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon_I\,\underline{\underline{E}}\right)$$

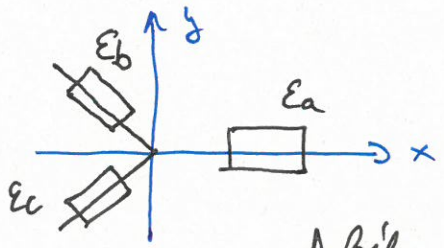
$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 1/2\,\gamma_{xz} \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 1/2\,\gamma_{yz} \\ 1/2\,\gamma_{xz} & 1/2\,\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\varepsilon_n = \underline{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{n}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\gamma_{nm} = \underline{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{m}}$$

4. Feladat — Nyúlásmérő bélyeg kiértékelése

Egy nyugalmas test felületén nyúlásmérő bélyegekkel az alábbi értékeket mérjük:



$\varepsilon_a = -70\cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_b = 400\cdot 10^{-6}$

$\varepsilon_c = 100\cdot 10^{-6}$

Adatok

$E = 200\,GPa$

$\nu = 0{,}3$

A bélyegek 120°-os szöget zárnak be egymással

Feladatok:

a) Határozzuk meg az alakváltozási tenzor komponenseit az (x,y) síkban!

b) Számítsuk ki a feszültség komponensek értékeit!

c) Mohr körökkel számoljuk ki a főfeszültségeket!

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 1/2\,\gamma_{xz} \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ 1/2\,\gamma_{xz} & 1/2\,\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Nyúlásmérő bélyeg esetén

↳ feltételezzük, hogy $\boxed{\sigma_z = 0}$

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

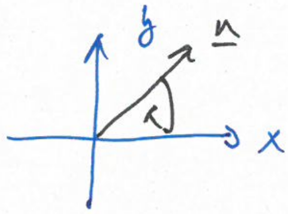
Nem zérus!

Az $\underline{n}$ vektor irányában az alakváltozás (nyúlás)

$$\varepsilon_n = \underline{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{n}$$

↳ Nálunk 3 db bélyeg van amelyek az x-tengellyel különböző szöget zárnak be:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_a &= 0° \\ \alpha_b &= 120° \\ \alpha_c &= 240° \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{ábra}$$



$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ → Ezt beírva: $\varepsilon_n = (\cos\alpha \;\; \sin\alpha \;\; 0)\, \underline{\underline{\varepsilon}} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\varepsilon_n = \underline{\varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha + 2\cdot\frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha}$$

↳ Alkalmazzuk a három bélyegre!

- $\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2(0°) + \varepsilon_y \sin^2(0°) + \gamma_{xy}\sin 0° \cos 0° = \varepsilon_x$

  azaz $\varepsilon_a = \boxed{\varepsilon_x = -70\cdot 10^{-6}}$

- $\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2(120°) + \varepsilon_y \sin^2(120°) + \gamma_{xy}\sin(120°)\cos(120°) =$

  $= \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = 400\cdot 10^{-6}$ (1)

- $\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos(240°) + \varepsilon_y \sin^2(240°) + \gamma_{xy}\sin(240°)\cos(240°) =$

  $= \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = 100\cdot 10^{-6}$ (2)

Adjuk össze az egyenleteket: (1) + (2)

$$\underbrace{\varepsilon_b + \varepsilon_c}_{\text{adott!}} = 2\frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4}\cdot 2\cdot\varepsilon_y \rightarrow$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_b + \varepsilon_c - \frac{\varepsilon_x}{2}}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{356{,}67\cdot 10^{-6}}}$$

Visszaírva (1) be:

$$\gamma_{xy} = \frac{-\varepsilon_b + \frac{\varepsilon_x}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \underline{\underline{-346{,}4\cdot 10^{-6}}}$$

b) Feszültségkomponensek:

Hooke tv.: $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right)$

Nálunk:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Komponensenként:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right]$$

$\sigma_z = 0!$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] = 0!$$

↳ Ebből $\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) = 0$

$$\varepsilon_z\left(1+\frac{\nu}{1-2\nu}\right) = -\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z\left(\frac{1-\nu}{\cancel{1-2\nu}}\right) = -\frac{\nu}{\cancel{1-2\nu}}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

Tehát $\varepsilon_z = \underline{\underline{-122,86\cdot 10^{-6}}}$

Ebből $\varepsilon_I = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\left(\frac{-\nu}{1-\nu}\right)(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = \underbrace{\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)}$

visszaírva σ_x, σ_y képletébe!

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{\cancel{1-2\nu}}\cdot\frac{\cancel{1-2\nu}}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)\right) = \boxed{\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)}$$

Hasonlóan

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

Ebből a feszültségek

$\sigma_x = 8,13 \text{ MPa}$

$\sigma_y = 73,77 \text{ MPa}$

τ_{xy}-t a Hooke törvényből

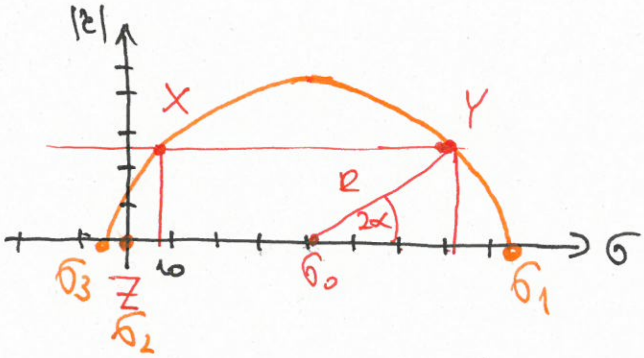
$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\right) = \underline{\underline{-26,64 \text{ MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 8,13 & -26,64 & 0 \\ -26,64 & 73,77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{\text{MPa}}}$$

c) Mohr kör

↳ $\sigma_z = 0 \text{ MPa}$ főfesz.

$\underline{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ főirány



$X(8,13; -26,64)$

$Y(73,77, -26,64)$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \underline{\underline{40,55 \text{ MPa}}}$$

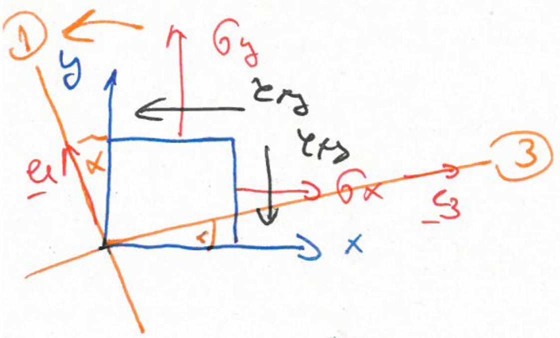
$$R = \sqrt{(\sigma_y - \sigma_0)^2 + \tau_{xy}^2} = \underline{\underline{42,27 \text{ MPa}}}$$

$\sigma_1 = \sigma_0 + R = 83,22 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$

$\sigma_3 = -1,32 \text{ MPa}$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sigma_y - \sigma_0}{R} = \underline{\underline{19,53^\circ}}$$



$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,334 \\ 0,942 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,942 \\ 0,334 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. feladat

Egy rugalmas test valamely terheletlen felületi pontjában mért nyúlások értéke: $\varepsilon_x = 350 \cdot 10^{-6}$ és $\varepsilon_y = 50 \cdot 10^{-6}$.
A legnagyobb főnyúlás $\varepsilon_1 = 420 \cdot 10^{-6}$.
Határozzuk meg γ_{xy}-t és a másik két főnyúlás értékét, ha $\nu = 0{,}3$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mert a felület terheletlen!

Hooke tv alapján

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\overbrace{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}^{\varepsilon_I}\right] = 0!$$

$$\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0$$

$$\varepsilon_z\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) = -\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z\left(\frac{1-2\nu+\nu}{1-2\nu}\right) = \frac{-\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z\left(\frac{1-\nu}{\cancel{1-2\nu}}\right) = \frac{-\nu}{\cancel{1-2\nu}}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \underline{\underline{-171 \cdot 10^{-6}}}$$

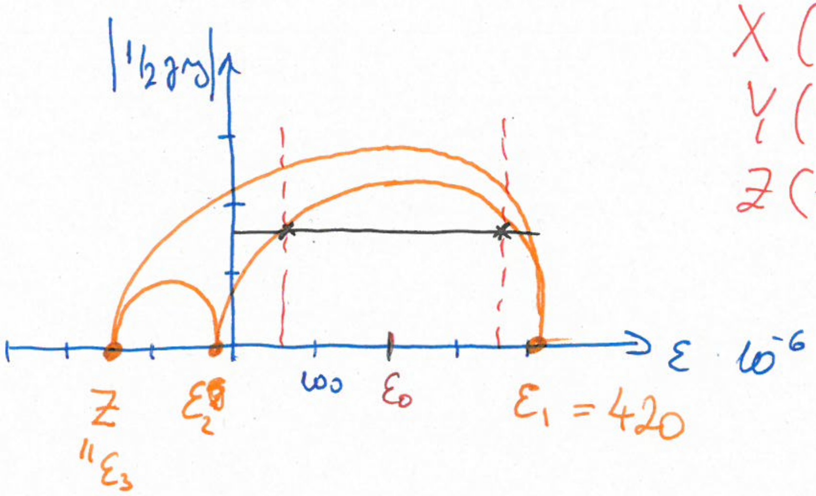
$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

→ ismeretlen

ε_z – főnyúlás!

↳ Mohr körök! (most az alakváltozásra!)

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} 350 & 1/2\,\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\,\gamma_{xy} & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -141 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$



$X\left(350, \frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)$

$Y\left(350; \frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)$

$Z(-141; 0)$

A legnagyobb főnyúlás

$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + R \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = 200 \cdot 10^{-6}$

$R = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_0)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$

$R = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$

$R = 220 \cdot 10^{-6}$

$\longrightarrow 2\sqrt{R^2 - (\varepsilon_x - \varepsilon_0)^2} = \gamma_{xy}$

Vissza az ábrába! Ott 1/2 γ_{xy} van! $\longleftarrow$ $\gamma_{xy} = \underline{\underline{322 \cdot 10^{-6}}}$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + R = 420 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_0 - R = -20 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_z = -141 \cdot 10^{-6} \end{aligned}\right\} \text{főnyúlások}$$

Fajlagos térfogatváltozás

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \underline{\underline{259 \cdot 10^{-6}}}$$