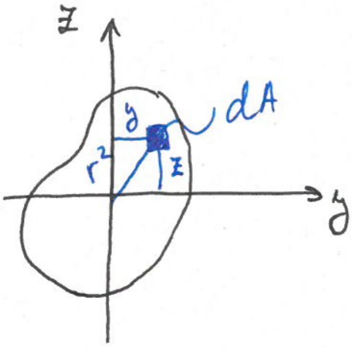
Szilárdságtan – 2. gyakorlat

Keresztmetszetek másodrendű nyomatéka

Elméleti összefoglaló

Keresztmetszet másodrendű nyomatéka (Area moment of inertia)



$$I_y = \int_A z^2\,dA$$

$$I_z = \int_A y^2\,dA$$

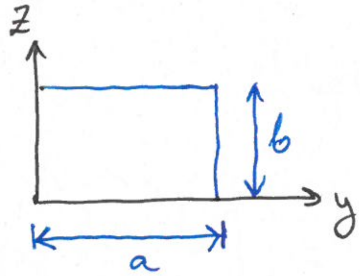
$$\left.\right\} \Longrightarrow I_p = \int r^2\,dA = I_y + I_z$$

$$I_{yz} = \int_A yz\,dA$$

Fontos: $I_y > 0$; $I_z > 0$ de I_{yz} lehet negatív is!

dimenzió $[m^4]$ / $[mm^4]$

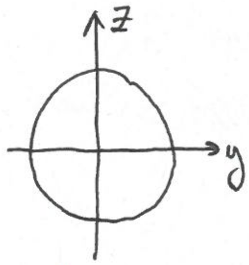
Téglalap



$$I_y = \frac{a \cdot b^3}{3} \qquad I_{yz} = \frac{a^2 b^2}{4}$$

$$I_z = \frac{b \cdot a^3}{3}$$

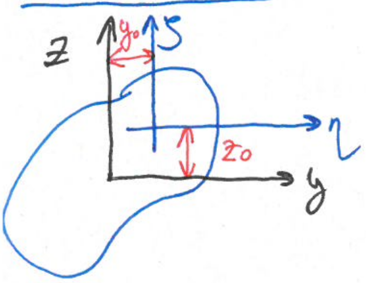
Kör



$$I_z = I_y = \frac{d^4 \pi}{64}$$

$I_{yz} = 0 \rightarrow$ a szimmetria miatt

Steiner-tétel

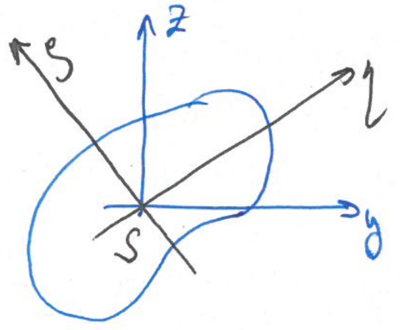


I_z, I_y ismert $\boxed{\text{súlyponti}}$!!!

$$I_\eta = I_y + z_0^2 A \;;\; I_\zeta = I_z + y_0^2 A \;;\; I_{\eta\zeta} = I_{yz} + z_0 y_0 A$$

Mindig a súlypontira lehet felírni!

Mindig a súlyponti a legkisebb (I_y, I_z re)



$$\underline{\underline{I}}_S = \begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

↑ Másodrendű nyomatéki mátrix!

↳ Ha forgatom a koordinátarendszert az értékek változnak

Speciális kitüntetett helyzet:

$$\underline{\underline{I}}_{\eta\xi} = \begin{bmatrix} I_\eta & 0 \\ 0 & I_\xi \end{bmatrix}$$ a tengelypárra vett másodrendű nyomaték zérus!

↓ Melyik ez a szöghelyzet?
Mik ilyenkor az ún. főmásodrendű nyomatékok?

<u>sajátérték</u> + <u>sajátvektor</u> számítás

$$\underline{\underline{I}}_S \cdot \underline{e} = \lambda \cdot \underline{e}$$ $\underline{\underline{E}}$ - egységtenzor

$$\downarrow\ (\underline{\underline{I}}_S - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \underline{e} = \underline{0}$$

↳ lin. egyenletrendszer (homogén)

$$\det(\underline{\underline{I}}_S - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\det\left[\begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right] = \begin{vmatrix} I_y - \lambda & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z - \lambda \end{vmatrix} = (I_y - \lambda)(I_z - \lambda) - I_{yz}^2 = 0$$

↓ λ_1, λ_2 számítható

sajátértékek!

- a λ_1-hez tartozó <u>sajátvektor</u>

  ↳ vissza kell helyettesíteni:

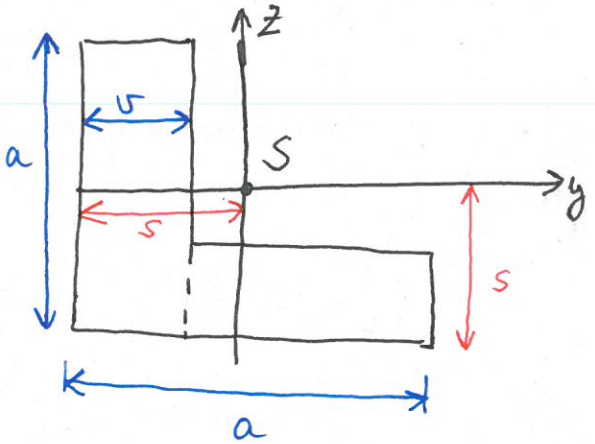
  $$(\underline{\underline{I}}_S - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\underline{e_1} = \underline{0}$$ ⇒ $\underline{e_1}$-re meg kell oldani

- λ_2-re hasonlóan

  $$(\underline{\underline{I}}_S - \lambda_2 \underline{\underline{E}})\underline{e_2} = \underline{0}$$ ⇒ $\underline{e_2}$

1. Feladat

Keressük meg a vázolt L-szelvény súlypontját, majd határozzuk meg a másodrendű nyomatékait az y és z tengelyekre, az (y, z) tengelypárra és számítsuk ki a súlyponti főmásodrendű nyomatékokat és főtengelyeket!

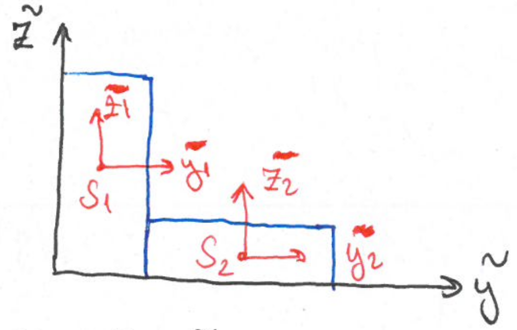


Adatok: $a = 50$ mm, $v = 6$ mm

(y és z) a súlyponti tengelyek!

1) Súlypontszámítás

$\tilde{y}-\tilde{z}$ koordinátarendszerben adjuk meg!



$\tilde{y}_1 = \frac{v}{2}$; $\tilde{z}_1 = \frac{a}{2}$

$\tilde{y}_2 = v + \frac{(a-v)}{2} = \frac{a}{2} + \frac{v}{2}$

$\tilde{z}_2 = \frac{v}{2}$

$A_1 = a \cdot v$

$A_2 = (a-v)\cdot v$

A súlypont:

$$y_S = \frac{\tilde{y}_1 A_1 + \tilde{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} =$$

$$= \frac{\frac{v}{2}\cdot a \cdot v + \left(\frac{a}{2}+\frac{v}{2}\right)(a-v)\cdot v}{a\cdot v + (a-v)\cdot v}$$

$$= \frac{\frac{a\cdot v^2}{2} + \frac{a^2 v}{2} - \frac{v^2 \cdot v}{2}}{2av - 2v^2} = \frac{av + a^2 - v^2}{4a - 4v}$$

$$y_S = 14,7 \text{ mm}$$

$$z_S = \frac{\tilde{z}_1 A_1 + \tilde{z}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \dots = 14,7 \text{ mm}$$

Szimmetria miatt!

2) Másodrendű nyomatékok a saját koordinátarendszerben

↳ 1es test:

$$I_{y_1} = \frac{v \cdot a^3}{12} = 62500 \text{ mm}^4 \qquad I_{y_1z_1} = 0 \text{ (szimmetria tagok)}$$

$$I_{z_1} = \frac{a v^3}{12} = 900 \text{ mm}^4$$

↳ 2es test

$$I_{y_2} = \frac{(a-v)\cdot v^3}{12} = 792 \text{ mm}^4 \qquad I_{y_2z_2} = 0 \text{ (szimmetriatagok)}$$

$$I_{z_2} = \frac{(a-v)^3 \cdot v}{12} = 42592 \text{ mm}^4$$

3) Steiner-tétel

$$I_y = I_{y_1} + \left(s - \frac{a}{2}\right)^2 A_1 + I_{y_2} + \left(s - \frac{v}{2}\right)^2 A_2 = 131258 \text{ mm}^4$$

$$I_z = I_{z_1} + \left(s - \frac{v}{2}\right) A_1 + I_{yz_2} + \left(s - \left(\frac{a}{2} + \frac{v}{2}\right)\right)^2 A_2 = I_y = 131258 \text{ mm}^4$$

szimmetrikus

$$I_{yz} = I_{y_1z_1} + \left(s - \frac{v}{2}\right)\left(s - \frac{a}{2}\right) A_1 + I_{y_2z_2} + \left(\left(\frac{a}{2} - \frac{v}{2}\right) - s\right)\left(s - \frac{v}{2}\right) A_2 = -77234 \text{ mm}^4$$

↳ A másodrendű nyomatéki mátrix:

$$\underline{\underline{I}}_{(y,z)} = \begin{bmatrix} 131258 & -(-77234) \\ -(-77234) & 131258 \end{bmatrix} \text{mm}^4$$

↳ sajátértékekkel a fő másodrendű nyomaték számítható:

$$\det(\underline{\underline{I}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 131258-\lambda & 77234 \\ 77234 & 131258-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13{,}1-\lambda & 7{,}7 \\ 7{,}7 & 13{,}1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (13{,}1-\lambda)^2 - 7{,}7^2 = \lambda^2 - 26{,}26\lambda + 112{,}8 = 0$$

↳ $\lambda_1 = 20{,}85 \text{ cm}^4 = I_1$

↳ $\lambda_2 = 5{,}41 \text{ cm}^4 = I_2$

A sajátvektorok

- $\lambda_1 = 20,85 \text{ cm}^4 \Rightarrow$ vissza kell helyettesíteni

$$(\underline{\underline{I}} - 20,85\,\underline{\underline{E}}) \cdot \underline{v}_1 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -7,7 & 7,7 \\ 7,7 & -7,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow -7,7\,v_{11} + 7,7\,v_{12} = 0$$

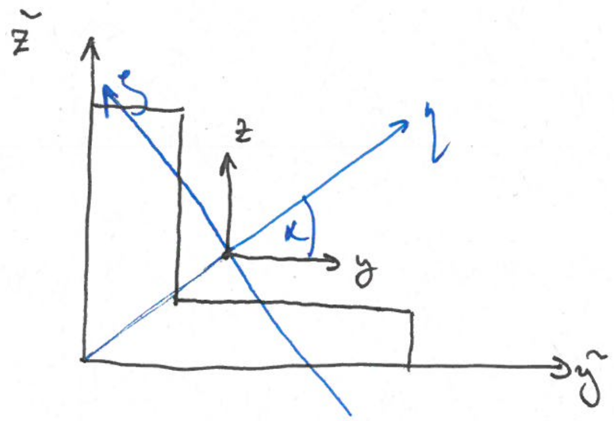
$$v_{11} = v_{12} \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 5,41 \text{ cm}^4$

$$(\underline{\underline{I}} - 5,41\,\underline{\underline{E}})\, \underline{v}_2 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 7,7 & 7,7 \\ 7,7 & 7,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow 7,7\,v_{21} + 7,7\,v_{22} = 0$$

$$\hookrightarrow v_{21} = -v_{22} \Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$\alpha = 45°$

Fontos:

$\underline{\underline{I}}$ mindig szimmetrikus mátrix

$\Downarrow$

A sajátértékek valósak

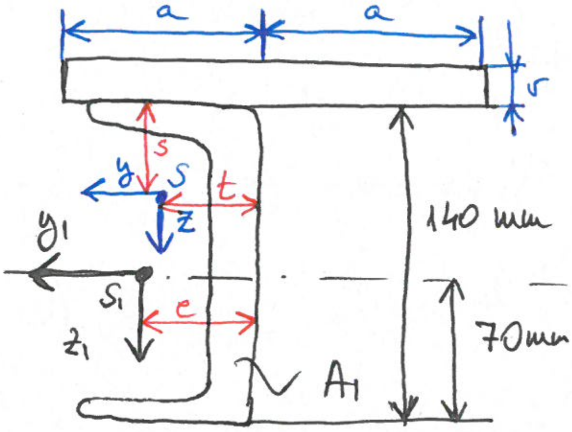
+

a sajátvektorok merőlegesek egymásra!

2. Feladat

Egy szabványos U140es szelvényhez (lásd a következő oldalon lévő szelvénytáblázat) az ábrán látható módon $2a \times v$ méretű téglalap keresztmetszetű lapot hegesztünk.

Ismerjük az így kialakuló keresztmetszet súlypontját $S(t, s)$ valamint a geometriai adatokat.



Adatok:

$a = 60\ mm$

$v = 10\ mm$

$s = 4{,}22\ cm$

$t = 1{,}1\ cm$

$A_1 = 20{,}4\ cm^2$

$e = 1{,}75\ cm$

$I_{y_1} = 605\ cm^4$

$I_{z_1} = 62{,}7\ cm^4$

$y_1 - z_1$ jelöli az U140es szelvény S_1 súlypontján átmenő tengelyeket

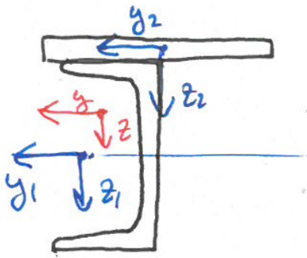
$y - z$ pedig az új keresztmetszet S súlypontján átmenő koordinátarendszert!

Feladat:

- Határozzuk meg a súlypontra számított másodrendű nyomatékokat!
- Számítsuk ki a főmásodrendű nyomatékokat! Valamint az 1es főmásodrendű nyomaték és az y tengely által bezárt α szöget!

A merevítés területe: $A_2 = 2av = 12\ cm^2$

Az egyes testek másodrendű nyomatékai a saját súlyponti koordinátarendszerben



$I_{y_1} = 605\ cm^4$
$I_{z_1} = 62{,}7\ cm^4$ } szelvénytáblázat

$I_{y_1z_1} = 0$ (szimmetriatengely)

$$I_{y_2} = \frac{2a\,v^3}{12} = 1\ cm^4$$

$$I_{z_2} = \frac{(2a)^3 \cdot v}{12} = 144\ cm^4$$

$I_{y_2z_2} = 0$ (szimmetriatengely)

② <u>Steiner-tétel</u> (cm-ben helyettesítünk be)

$$I_y = I_{y_1} + \left(s - \frac{14}{2}\right)^2 A_1 + I_{y_2} + \left(\frac{v}{2} + s\right)^2 A_2 = 1030\ cm^4$$

$$I_z = I_{z_1} + (e-t)^2 A_1 + I_{z_2} + t^2 A_2 = 229{,}839\ cm^4$$

$$I_{yz} = I_{yz_1} + \left(s - \frac{14}{2}\right)(t-e) A_1 + \left(\frac{v}{2} + s\right) t\, A_2 = 99{,}17\ cm^4$$

$$\underset{(y,z)}{\underline{\underline{I}}} = \begin{bmatrix} 1030 & -99{,}17 \\ -99{,}17 & 229{,}8 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{sajátérték}$$

$$\det(\underline{\underline{I}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 1030-\lambda & -99{,}17 \\ -99{,}17 & 229{,}8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1030-\lambda)(229{,}8-\lambda) - 99{,}17^2 = \lambda^2 - 1259{,}84\lambda + 226900 = 0$$

↳ $\lambda_1 = I_1 = 1042{,}11\ cm^4$

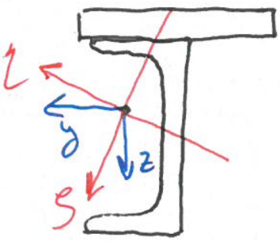
↳ $\lambda_2 = I_2 = 217{,}732\ cm^4$

↳ <u>Visszaírom λ_1-et</u>:

$$(\underline{\underline{I}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\,\underline{e}_1 = \underline{0} \qquad \begin{bmatrix} 1030-1042{,}11 & -99{,}17 \\ -99{,}17 & 229{,}8-1042{,}11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

↳ $-12{,}1 e_1 - 99{,}17 e_2 = 0$

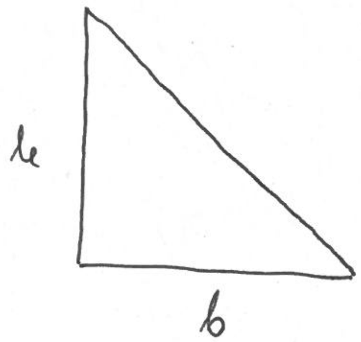
$e_1 = 1$ (én választom) $\Rightarrow e_2 = -0{,}131$



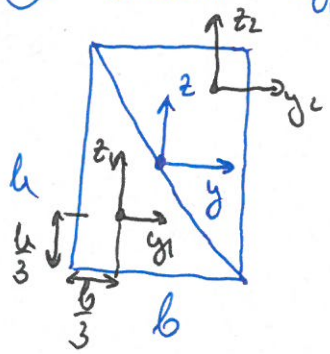
$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}131 \end{bmatrix} \Longrightarrow \alpha = \underline{\underline{-7{,}6^\circ}}$$

3. feladat

Határozzuk meg egy derékszögű háromszög másodrendű nyomatékait a súlyponti y és z tengelyekre!



① Nézzünk egy $b \times h$ téglalapot



$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

$$I_{yz} = 0$$

② A téglalapot fel tudjuk osztani 2 db derékszögű háromszögre!

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \;;\quad I_{y_1} = I_{y_2} \;;\quad I_{z_1} = I_{z_2} \quad \text{(mert egyformák!)}$$

Írjuk fel a Steiner-tételt: azaz a két háromszögből állítsuk össze a téglalapot (amit ismerünk)

$$I_y = I_{y_1} + \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{3}\right)^2 A + I_{y_2} + \left(\frac{2h}{3} - \frac{h}{2}\right)^2 A =$$

A téglalap!

$$= 2 I_{y_1} + A\left(\left(\frac{h}{6}\right)^2 + \left(\frac{h}{6}\right)^2\right) = 2\left[I_{y_1} + \frac{A \cdot h^2}{36}\right] = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$\Downarrow \quad I_{y_1} = \frac{bh^3}{24} - \frac{bh^3}{72} = \frac{2bh^3}{72} = \underline{\underline{\frac{bh^3}{36}}}$$

$$I_z = I_{z_1} + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 A + I_{z_2} + \left(\frac{2b}{3} - \frac{b}{2}\right) \cdot A = \ldots = \frac{b^3 h}{12}$$

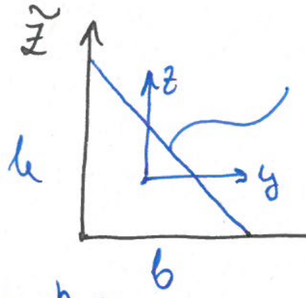
A téglalap

$$\hookrightarrow I_{z_1} = \underline{\underline{\frac{b^3 \cdot h}{36}}}$$

$$I_{yz} = I_{y_1 z_1} + \frac{b}{6} \cdot \frac{h}{6} \cdot A + I_{y_1 z_1} = \left(-\frac{b}{6}\right)\left(-\frac{h}{6}\right) A = 2A \cdot \frac{b \cdot h}{36} + 2 \cdot I_{y_1 z_1} = 0$$

$$I_{y_1 z_1} = \underline{\underline{-\frac{b^2 h^2}{72}}}$$

Másképpen



ennek az egyenesnek az egyenlete

$$\tilde{z} = h - \frac{h}{b}\tilde{y}$$

$$\bullet\ I_{\tilde{y}} = \int_A \tilde{z}^2\, dA = \int_0^b \int_0^{h-\frac{h}{b}\tilde{y}} \tilde{z}^2\, d\tilde{z}\, d\tilde{y} = \int_0^b \left[\frac{\tilde{z}^3}{3}\right]_0^{h-\frac{h}{b}\tilde{y}} d\tilde{y} =$$

$$= \int_0^b \frac{1}{3}\left(h - \frac{h}{b}\tilde{y}\right)^3 d\tilde{y} = \underline{\underline{\frac{b \cdot h^3}{12}}}$$

$$I_y = I_{\tilde{y}} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{b \cdot h}{2} = \underline{\underline{\frac{b h^3}{36}}}$$

Hasonlóan

$$I_{\tilde{z}} = \int_A \tilde{y}^2\, dA = \int_0^h \int_0^{b-\frac{b}{h}\tilde{z}} \tilde{y}^2\, d\tilde{y}\, d\tilde{z} = \dots = \frac{h b^3}{12}$$

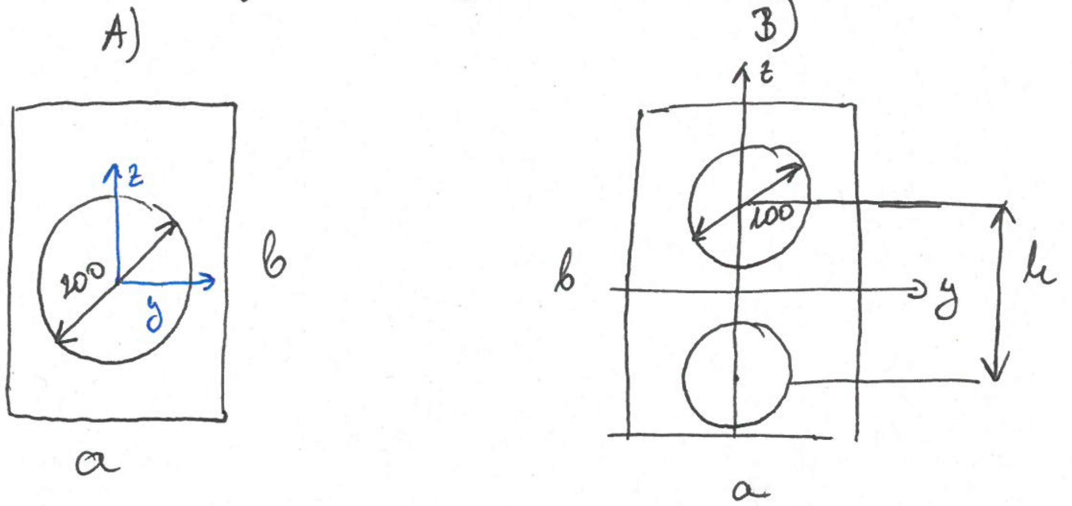
$$I_z = I_{\tilde{z}} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{b^3 h}{36}$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = \int_A yz\, dA = \int_0^b \int_0^{h-\frac{h}{b}\tilde{y}} \tilde{z}\tilde{y}\, d\tilde{z}\, d\tilde{y} = \dots = \frac{b^2 h^2}{24}$$

$$I_{yz} = I_{\tilde{y}\tilde{z}} - \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3}\, \frac{h \cdot b}{2} = \underline{\underline{-\frac{b^2 h^2}{72}}}$$

4. feladat

Hogyan változik egy 240x300-as téglalap területe és y-tengelyre számított másodrendű nyomatéka, ha egy 200 mm-es furat helyett 2db 100 mm-es furatot vágunk bele?



Adatok:

$a = 240$ mm
$b = 300$ mm
$d_1 = 200$ mm
$d_2 = 100$ mm
$h = 150$ mm

1) Területek

$$A_1 = a \cdot b - \frac{d_1^2 \pi}{4} = 40584{,}1 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = a \cdot b - \frac{2 d_2^2 \pi}{4} = 56292 \text{ mm}^2$$

$$\frac{A_2}{A_1} = 1{,}387 \Rightarrow 38{,}7\% \text{ -kal nőtt}$$

2) Másodrendű nyomatékok – 1. eset

$$I_{y_1} = \frac{a b^3}{12} - \frac{d_1^4 \pi}{64} = 4{,}6146 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_1} = \frac{b \cdot a^3}{12} - \frac{d_1^4 \pi}{64} = 2{,}67 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

2. eset:

$$I_{y_2} = \frac{a \cdot b^3}{12} - 2\left(\frac{d_2^4 \pi}{64} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{d_2^2 \pi}{4}\right) = 4{,}4182 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_2} = \frac{a^3 b}{12} - 2 \cdot \left(\frac{d_2^2 \pi}{64}\right) = 3,35 \cdot 10^8 \, mm^4$$

<u>A változás:</u>

- $\frac{I_{y_2}}{I_{y_1}} = 0,9575 \Rightarrow 4,25\%$ <u>csökkenés!</u>

- $\frac{I_{z_2}}{I_{z_1}} = 1,257 \Rightarrow 25,7\%$ -os <u>növekedés!</u>

$$I_{yz_1} = 0 - 0 = 0$$

$$I_{yz_2} = 0 - 2\left(0 + \frac{h}{2} \cdot 0 \cdot \frac{d_2^2 \pi}{4}\right) = 0$$ ez nem változott!