Szilárdságtan 9. gyakorlat

Alakváltozási Energia

Elméleti összefoglaló

Hooke-tv.: $\underline{\underline{\sigma}} = f(\underline{\underline{\varepsilon}})$ vagy $\underline{\underline{\varepsilon}} = g(\underline{\underline{\sigma}})$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}\right)$$

Számítások során → terhelések (aktív erők) ⇒ feszültség komponensek

→ geometriai feltételek ⇒ alakváltozás komponensek

Alakváltozási energia

↳ Külső erők munkát végeznek

↳ Belső energia változik (nő)

$$\boxed{U = \int_V u \, dV}$$

ahol $u = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ (egy adott pontban)

fajlagos alakváltozási E

alakváltozási E sűrűség

Terhelési esetek:

Hajlítás: $\int_0^{\ell} \frac{M_h^2(x)}{2 I_y E} dx$ ~ hajlító merevség

Nyomásnál $\int_0^{\ell} \frac{N^2(x)}{2 A E} dx$ ~ húzó merevség

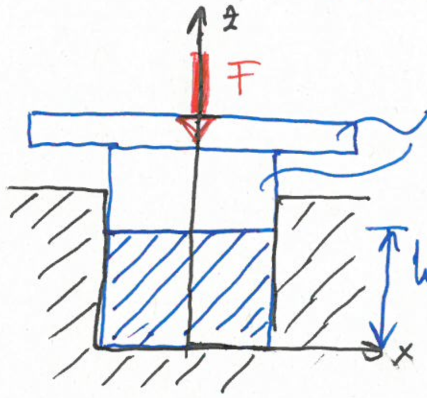
Csavarásnál $\int_0^{\ell} \frac{M_{cs}^2(x)}{2 I_p G} dx$ ~ csavaró merevség

$$U = U^N + U^{M_h} + U^{M_{cs}} (+ U^V)$$

elhanyagolható

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

1. Feladat Egy axa állandó keresztmetszetű, rugalmas hasábot merev fal vesz körül. A hasábot egy merev fedélen keresztül F nyomóerővel terheljük. Mekkora feszültségek ébrednek a hasáb belső pontjaiban és mekkora a zsugorodás?



Adatok:

$a = 200$ mm
$F = 160$ kN
$E = 50$ GPa
$\nu = 0{,}35$
$h = 1$ m

↳ Terhelés: nyomás $\sigma_z = \frac{-F}{A} = \frac{-F}{a^2} = \underline{\underline{-4\text{ MPa}}}$

↳ Csúsztatófeszültség nem ébred!

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

DE keresztirányban a merev fal nem engedi az alakváltozást
⇓
lesz. fesz!

a szimmetria miatt: $\sigma_x = \sigma_y$

↳ Alakváltozás → a gátlás miatt $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$!

↳ nincs csúsztató fesz → $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$!

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\varepsilon_I = \varepsilon_z!}$$

Hooke-tv.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right)$$ → írjuk ki a komponens-egyenleteket

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\overset{=0}{\varepsilon_x} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z\right) = \frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z$$

Hasonlóan

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left(\overset{=0}{\varepsilon_y} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z\right) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\varepsilon_z$$

valamint

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z\right) = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_z\left(1+\frac{\nu}{1-2\nu}\right) = \frac{E\cdot(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_z$$

$$\hookrightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_z(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} = \underline{\underline{-4,98\cdot 10^{-5}}}$$

Visszaírva..

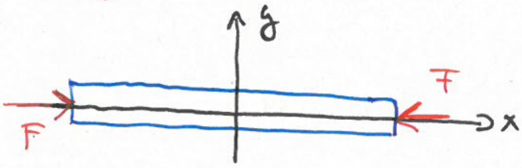
$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\varepsilon_z = \underline{\underline{-2,15\ \mathrm{MPa}}}$$

Mekkora a zsugorodás?

$$\Delta h = \varepsilon_z\cdot h = \underline{\underline{-4,98\cdot 10^{-2}}}\ \mathrm{mm}$$

2. Feladat Egy l hosszúságú egyenes, d átmérőjű körkeresztmetszetű rudat a végén 10kN nyomóerő terheli. Mekkora a rúd fajlagos térfogatváltozása?

Hogyan változik ez, ha a keresztirányú alakváltozást megakadályozzuk?



Adatok:

$l = 160$ mm

$d = 79,788$ mm

$E = 200$ GPa

$\nu = 0,3$

$F = 10$ kN

a) eset

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Keresztirányban szabadon alakváltozhat
↳ nincs feszültség de van alakvált.!

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} = \frac{-F}{\frac{d^2\pi}{4}} = \underline{\underline{-2\,\text{MPa}}}$$

$\boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z}$
↳ szimmetria miatt!

$\boxed{\sigma_I = \sigma_x}$

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_x\right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left(1 - \frac{\nu}{1+\nu}\right)\sigma_x = \frac{1+\nu}{E}\,\frac{1}{1+\nu}\,\sigma_x = \boxed{\frac{\sigma_x}{E}} = \underline{\underline{-1\cdot 10^{-5}}}$$

↳ Egytengelyű Hooke tv.

$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left(0 - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_x\right) = -\frac{\nu}{1+\nu}\,\frac{1+\nu}{E}\,\sigma_x = \boxed{-\nu\varepsilon_x} = \underline{\underline{0,3\cdot 10^{-5}}}$$

A fajlagos térfogatvált.:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -0,4\cdot 10^{-5} = \underline{\underline{-4\cdot 10^{-6}}}$$

b) eset meg van fogva

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} ; \quad \underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

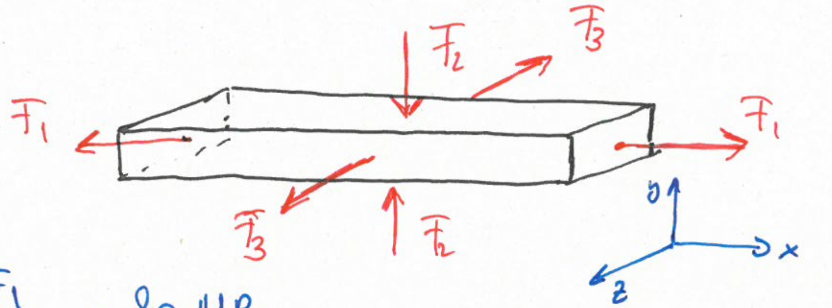
$\varepsilon_I = \varepsilon_x$

ε_I
‖

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\overset{\varepsilon_x}{\overset{\parallel}{\varepsilon_I}}\right) = \frac{E}{1+\nu}\,\frac{(1-\nu)}{1-2\nu}\cdot\varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_x = \underline{\underline{-0,743\cdot 10^{-5}}}$$

3. Feladat Egy 50×25 mm-es téglalap keresztmetszetű hasáb 125 mm hosszú szakaszán 100 kN húzóerő működik. A hasáb 50×125 mm-es alsó és felső lapját 1000 kN nagyságú nyomóerő, míg a 25×125-ös lapokat 400 kN húzóerő terheli. Mekkora a test térfogatváltozása?
Hogyan módosítsuk át 1000 kN erőt, hogy ne legyen térfogatváltozás?

$E = 208\,GPa$
$\nu = 0{,}3$
$a = 125\,mm$
$b = 50\,mm$
$c = 25\,mm$



$F_1 = 100\,kN$
$F_2 = 1000\,kN$
$F_3 = 400\,kN$

$$\sigma_x = \frac{F_1}{b\cdot c} = \underline{\underline{80\,MPa}}$$

$$\sigma_y = \frac{-F_2}{a\cdot b} = \underline{\underline{-160\,MPa}}$$

$$\sigma_z = \frac{F_3}{ac} = \underline{\underline{128\,MPa}}$$

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

1. út Hooke tv $\Rightarrow$ $\sigma_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \underline{\underline{48\,MPa}}$

↳ Ebből: $\varepsilon_x = \dots$
$\varepsilon_y = \dots$
$\varepsilon_z = \dots$

2. út Hooke tv. a skalár invariánsokra

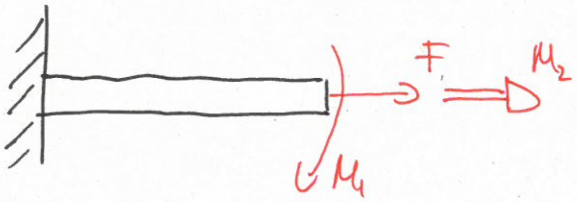
$$\varepsilon_I = \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_I - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \overset{3}{\overset{\parallel}{E_I}}\right) = \frac{1+\nu}{E}\left(1 - \frac{3\nu}{1+\nu}\right)\sigma_I = \frac{1+\nu}{E}\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}\,\sigma_I$$

$$\varepsilon_I = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_I = 9{,}23\cdot 10^{-5} = \frac{\Delta V}{V} \qquad \Delta V = V\cdot\varepsilon_I = \underline{\underline{14{,}4\,mm^3}}$$

↳ Ha nincs térf. vált $\to \varepsilon_I = 0 \Rightarrow \sigma_I = 0$ $\qquad \sigma_I = \overset{80\,MPa}{\overset{\parallel}{\sigma_x}} + \overset{128\,MPa}{\overset{\parallel}{\sigma_z}} - \frac{F_2}{a\cdot b} = 0 \quad \underline{\underline{F_2 = 1{,}3\,MN}}$

6

4. feladat Egy $l = 1$ m hosszú, $d = 10$ mm átmérőjű rúd végén $F = 1$ kN húzóerő, M_1 hajlító nyomaték és M_2 csavarónyomaték működik. Mekkora legyen M_1 és M_2, ha azt akarjuk, hogy az egyes terhelések esetében ugyanakkora legyen az alakvált E a rúdban? Mekkora a teljes alakvált $E = ?$



$E = 200$ GPa
$d = 10$ mm
$\nu = 0{,}3$

Húzóerőből:

$$U^N = \int_l \frac{N^2(x)}{2AE}\,dx = \int_0^l \frac{F^2}{2AE}\,dx = \frac{F^2 l}{2 \cdot \frac{d^2\pi}{4} E} = \underline{\underline{\frac{2F^2 l}{d^2 \pi E}}}$$

Hajlításból

$$U^{Mh} = \int_l \frac{M_h^2}{2I_y E}\,dx = \int_0^l \frac{M_1^2}{2I_y E}\,dx = \frac{M_1^2 l}{2I_y E} = \frac{M_1^2 l}{2 \cdot \frac{d^4 \pi}{64} E} = \frac{32 M_1^2 l}{d^4 \pi E}$$

$$\text{ha } \frac{U^N}{U^{Mh}} = 1 \;\rightarrow\; \frac{\cancel{2}F^2 \cancel{l}}{d^2 \cancel{\pi} \cancel{E}} = \frac{\overset{16}{\cancel{32}} M_1^2 \cancel{l}}{d^4 \cancel{\pi} \cancel{E}} \;\rightarrow\; F^2 = \frac{16 M_1^2}{d^2}$$

$$M_1^2 = \frac{d^2 F^2}{16}$$

$$\boxed{M_1 = \frac{F \cdot d}{4}}$$

Csavarásból.

$$U^{Mcs} = \int_l \frac{M_{cs}^2}{2I_p G}\,dx = \int_0^l \frac{M_{cs}^2}{2I_p G}\,dx = \frac{M_{cs}^2 l}{2I_p G} = \frac{M_{cs}^2 l}{2\frac{d^4\pi}{32} \cdot \frac{E}{2(1+\nu)}} = \frac{32 M_{cs}^2 l (1+\nu)}{d^4 \pi E}$$

$U^N = U^{M_{cs}}$

$$\frac{\cancel{2}F^2\cancel{\ell}}{\cancel{d^2\pi E}} = \frac{\overset{16}{\cancel{32}}\,M_{cs}^2\,\cancel{\ell}\,(1+\nu)}{\cancel{d^4}\,\cancel{\pi E}} \longrightarrow M_{cs}^2 = \frac{F^2\cdot d^2}{16(1+\nu)}$$

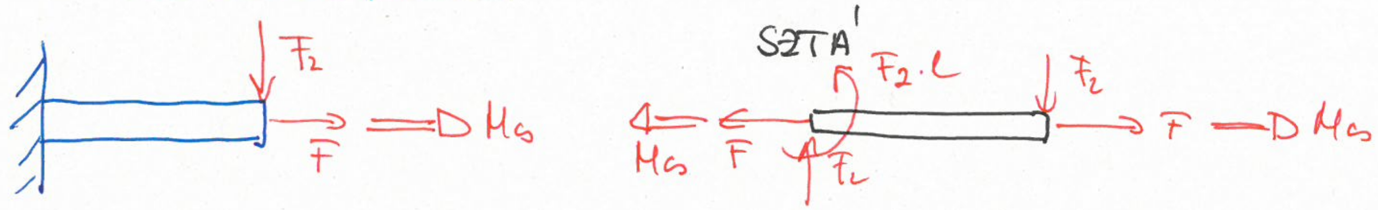
$$M_{cs} = \frac{F\cdot d}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\nu}}$$

Numerikusan:

$$U^N = U^{M_h} = U^{M_{cs}} = 3{,}183\ \text{Nmm} = 3{,}183\cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

$$U = 3U^N = 9{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

Módosítsuk a példát.



$$M_h(x) = F_2\cdot\ell - F_2x$$

$$U^{M_{h_2}} = \frac{1}{2I_yE}\int_0^\ell (F_2\ell - F_2x)^2\,dx = \frac{1}{2I_yE}\left[\frac{(F_2\ell - F_2x)^3}{3(-F_2)}\right]_0^\ell =$$

$$= \frac{1}{2I_yE}\left(-\frac{F_2^3\ell^3}{3(-F_2)}\right) = \frac{1}{2I_yE}\,\frac{F_2^2\ell^3}{3} = \frac{32F_2^2\ell^3}{3d^4\pi E}$$

$U^{M_{h_2}} = U^N$

$$\frac{\overset{16}{\cancel{32}}\,F_2^2\,\ell^{\cancel{3}\,2}}{3\,\cancel{d^4}^{\,2}\cancel{\pi E}} = \frac{\cancel{2}F^2\cancel{\ell}}{\cancel{d^2\pi E}} \qquad F_2^2 = \frac{F^2\cdot 3d^2}{16\ell^2}$$

$$\Downarrow$$

$$F_2 = \frac{F\cdot d}{4\ell}\sqrt{3}$$

Elméleti összefoglaló

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix felbontható két mátrix összegére:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_d + \underline{\underline{A}}_g$$

$\underline{\underline{A}}_d$ – deviátoros

$\underline{\underline{A}}_g$ – gömbi / hidrosztatikus

$$\underline{\underline{A}}_g = \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{3} A_I \underline{\underline{E}} = \frac{1}{3} (A_x + A_y + A_z) \underline{\underline{E}}$$

↳ diagonális!

$$\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}_g = \underline{\underline{A}} - \frac{1}{3} A_I \underline{\underline{E}}$$

↳ főátlóbeli elemek összege zérus!

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{\sigma}}_{g/H} + \underline{\underline{\sigma}}_d \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{\varepsilon}}_{g/H} + \underline{\underline{\varepsilon}}_d \end{aligned}\right\} \text{hasonlóan}$$

↓

$$u = u_d + u_g$$

$$u_d = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d$$

$$u_g = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_g : \underline{\underline{\varepsilon}}_g = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_H : \underline{\underline{\varepsilon}}_H$$

5. feladat

Egy lágyacélból készített test valamely pontjában egytengelyű a fesz. állapot. A nemzérus főfeszültség σ. Anyagjellemzők E és ν.

Mekkora az alakváltozási E-sűrűség.

Mekkora a térfogatváltozásra / torzulásra jutó rész?

$\sigma = 10\ MPa$

$E = 200\ GPa$

$\nu = 0{,}3$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_I = \sigma = \underline{\underline{10\ MPa}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_H = \frac{1}{3}\sigma_I \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1/3\,\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1/3\,\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1/3\,\sigma \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_H = \begin{bmatrix} 2/3\,\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -1/3\,\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -1/3\,\sigma \end{bmatrix}$$

$$u = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \left[\frac{1+\nu}{E}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\frac{(-\nu)}{1+\nu}\sigma_I \underbrace{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{E}}}_{\sigma_I} = \underline{\underline{\frac{1}{4G}\left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I^2\right)}}$$

$$\frac{2(1+\nu)}{4E} = \frac{1}{4G}$$

Nálunk:

$$u = \frac{2(1+\nu)}{4E}\left(\sigma^2 - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma^2\right) = \frac{\cancel{2(1+\nu)}}{\cancel{2}4E}\frac{1}{\cancel{(1+\nu)}}\sigma^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}}}$$

$$\underline{\underline{u = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ J/cm^3}}$$

$$\underline{\underline{u = u_g + u_d}}$$

Gömbi / Hidrosztatikus

$$u_g = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_g : \underline{\underline{\varepsilon}}_g = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_g : \frac{1+\nu}{E} \left(\underline{\underline{\sigma}}_g - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_I \underline{\underline{E}}_g \right)$$

$$u_g = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \Big(\underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_g : \underline{\underline{\sigma}}_g}_{} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_I \underbrace{\underline{\underline{\sigma}}_g : \underline{\underline{E}}_g}_{} \Big)$$

$$\frac{1}{3} \sigma_I \underline{\underline{E}} : \frac{1}{3} \sigma_I \underline{\underline{E}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \sigma_I^2 \underbrace{\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}}}_{3} = \frac{1}{3} \sigma_I^2$$

$$\frac{1}{3} \sigma_I \underbrace{\underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}}_g}_{3}$$

$$u_g = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_I^2}{3} \left(1 - 3 \frac{\nu}{1+\nu} \right) = \frac{1}{2} \frac{\cancel{1+\nu}}{E} \frac{\sigma_I^2}{3} \frac{1-2\nu}{\cancel{1+\nu}}$$

$$\boxed{u_g = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_I^2}$$

Nálunk: $\underline{u_g = 3{,}3 \cdot 10^{-5} \ \mathrm{J/cm^3}}$

Deviátoros

$$u_d = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}_d : \left(\frac{1+\nu}{E} \left(\underline{\underline{\sigma}}_d - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_I \overset{0!}{\underline{\underline{E}}_d} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\frac{1}{4G} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d}}$$

Nálunk:

$$u_d = \frac{1+\nu}{2E} \left(\left(\frac{2}{3}\sigma\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma\right)^2 \right) = \frac{1+\nu}{2E} \sigma^2 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) =$$

$$= \frac{1+\nu}{\cancel{2}E} \sigma^2 \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{9}_{\,3}} = \underline{\underline{\frac{1+\nu}{3E}}} \sigma^2 = 2{,}2 \cdot 10^{-4} \ \underline{\underline{\mathrm{J/cm^3}}}$$