Szilárdságtan - 12. hét

Munkatételek alkalmazása II.
Castigliano-tétel, statikailag határozott és határozatlan rudak

Elméleti összefoglaló:

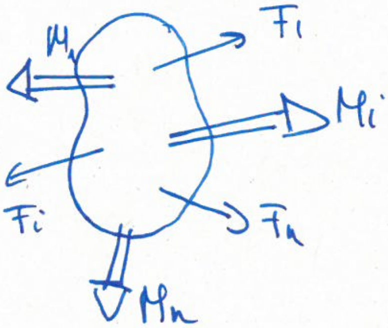
• Betti-tétel:

$$\overset{1N}{''F''} \cdot w = \int_l \frac{M_h(x)\, m_h(x)}{IE}\, dl + \int_l \frac{N(x)\, n(x)}{AE}\, dl$$

$$= \underset{1Nm}{''M \cdot \varphi''}$$

$$\underbrace{\int_l \frac{M_h(x)\, m_h(x)}{IE}\, dl}_{U_{12}^{Mh}} + \underbrace{\int_l \frac{N(x)\, n(x)}{AE}\, dl}_{U_{12}^{N}} = U_{12} = W_{12} = W_{21}$$

• Castigliano-tétel



$U(F_1, \dots F_i, \dots F_n, M_1 \dots M_n)$

alakváltozási energia a rúdban

↳ $w_i = \dfrac{\partial U}{\partial F_i}$ ← Adott F_i irányú elmozdulás

↳ $\varphi_i = \dfrac{\partial U}{\partial M_i}$ ← Adott M_i irányú elfordulás

Rúdmodell esetén:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \int_l \frac{M_h}{IE} \frac{\partial M_h}{\partial F}\, dl + \int_l \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial F}\, dl + \int_l \frac{M_{cs}}{I_p G} \frac{\partial M_{cs}}{\partial F}\, dl$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \underbrace{\int_l \frac{M_h}{IE} \frac{\partial M_h}{\partial M_i}\, dl}_{\substack{\text{hajlítás} \\ U^{Mh}}} + \underbrace{\int_l \frac{N}{AE} \frac{\partial N}{\partial M_i}\, dl}_{\substack{\text{húzás} \\ U^{N}}} + \underbrace{\int_l \frac{M_{cs}}{I_p G} \frac{\partial M_{cs}}{\partial M_i}\, dl}_{\substack{\text{csavarás} \\ U^{Mcs}}}$$

Valamennyi alakváltozási komponenst fel kell írni

↳ Igénybevételi fajták! → Fontos, hogy megjelenjen F_i erő

↳ A reakciókban is

Ha a vizsgált pontban nincs aktív erő, akkor $F = 0N$ v. $M = 0Nm$-t kell odahelyezni!

Alkalmazás:

↳ Statikailag határozatlan szerkezet

↳ reakciók meghatározása ?

pl.:

$w_1 = 0$ $w_2 = 0$

① Az ismeretlen reakciók közül aktívvá tesszük az ismeretlen reakciók közül egyet!

② Alakváltozási feltétel

pl: $w_1 = 0$

$w_2 = 0$

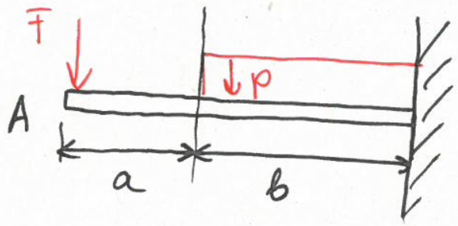
③ Castigliano tétellel

$$w_1 = \int_l \ldots \, dl$$

$\Downarrow$

Az ismeretlen reakció megoldható!

1. Feladat Számítsuk ki az alábbi tartó A pontjának függőleges elmozdulását és a keresztmetszet elfordulását a Castigliano-tétel segítségével!



Adatok:

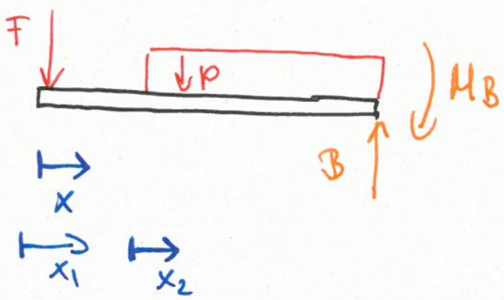
$a = 3\,m$
$b = 8\,m$
$p = 0{,}5\,kN/m$
$F = 2\,kN$
$IE = 10^8\,Nm^2$

Feladat:

$w_A = ?$
$\varphi_A = ?$

① Reakciók

SZTA'



$$M_B = F(a+b) + \frac{p \cdot b^2}{2} = \underline{\underline{38\,kNm}}$$

$$B = F + pb = \underline{\underline{6\,kN}}$$

(Amúgy a reakciók itt nem fontosak az igénybevétel szempontjából)

② Igénybevételi fgvek:

	$0<x<a$	$a<x<a+b$
	$0<x_1<a$	$0<x_2<b$
M_h	Fx_1	$F(x_2+a) + p\frac{x_2^2}{2}$

$$\frac{\partial M_{h1}}{\partial F} = x_1 \qquad \frac{\partial M_{h2}}{\partial F} = x_2 + a$$

$$w_A = \frac{1}{IE}\left[\int_0^a \frac{M_{h1}}{IE}\frac{\partial M_{h1}}{\partial F}\,dx_1 + \int_0^b \frac{M_{h2}}{IE}\frac{\partial M_{h2}}{\partial F}\,dx_2\right] = \frac{1}{IE}\left[\int_0^a F x_1^2\,dx_1 + \int_0^b F(x_2+a)^2 + \frac{p x_2^2 (x_2+a)}{2}\,dx_2\right]$$

$$= \frac{1}{IE}\left(\left[\frac{F x_1^3}{3}\right]_0^a + \left[\frac{F(x_2+a)^3}{3} + \frac{p x_2^4}{8} + \frac{p a x_2^3}{6}\right]_0^b\right) =$$

$$= \frac{1}{IE}\left(\frac{Fa^3}{3} + \frac{F(a+b)^3}{3} - \frac{Fa^3}{3} + \frac{pb^4}{8} + \frac{pab^3}{6}\right) = 0{,}0127\,m = \underline{\underline{12{,}7\,mm}}$$

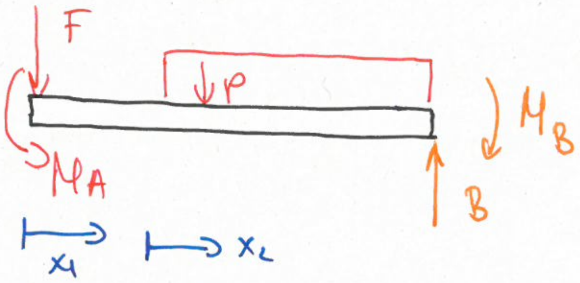
φ_A szögelfordulás.

↳ Nincs nyomaték az A pontban!

↳ Tegyünk oda $M_A = 0$ Nm-t!

A reakciókat újra kell számolni ⇒ M_A paraméteresen jelenjen meg!

SZTÁ



$$M_B = F\cdot(a+b) + \frac{pb^2}{2} + M_A$$

$$B = F + pb$$

M_A-val paraméteresen kell felírni az igénybevételeket!

	$0<x_1<a$	$0<x_2<b$
M_h	$Fx_1 + M_A$	$F(x_2+a) + \frac{px_2^2}{2} + M_A$

$$\frac{\partial M_{h1}}{\partial M_A} = 1 \qquad \frac{\partial M_{h2}}{\partial M_A} = 1$$

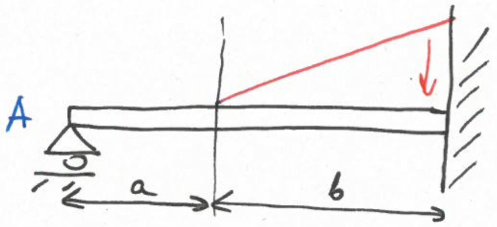
$$\varphi_A = \frac{1}{IE}\left[\int_0^a M_{h1}\frac{\partial M_{h1}}{\partial M_A}\,dx_1 + \int_0^a M_{h2}\frac{\partial M_{h2}}{\partial M_A}\,dx_2\right]$$

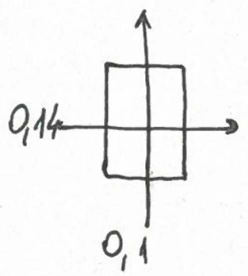
$$\varphi_A = \frac{1}{IE}\left[\int_0^a (Fx_1 + \underbrace{M_A}_{=0})\cdot 1\,dx_1 + \int_0^b \left(F(x_2+a) + p\frac{x_2^2}{2} + \underbrace{M_A}_{=0}\right)\cdot 1\,dx_2\right]$$

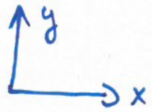
$$= \frac{1}{IE}\left[\frac{Fx_1^2}{2}\right]_0^a + \left[\frac{F(x_2+a)^2}{2} + \frac{px_2^3}{6}\right]_0^b\Bigg) = \frac{1}{IE}\left(\frac{Fa^2}{2} + \frac{F(a+b)^2}{2} - \frac{Fa^2}{2} + \frac{pb^3}{6}\right)$$

$$\varphi_A = 0{,}001637\ \text{rad} = \underline{\underline{0{,}0937^\circ}}$$

2. Feladat Határozzuk meg az A reakcióerőt Castigliano-tétel segítségével!







Adatok:

$p_{max} = 5$ kN/m

$a = 4$ m

$b = 6$ m

Statikailag határozatlan

↳ Befogás: x, y, φ } 4 DoF

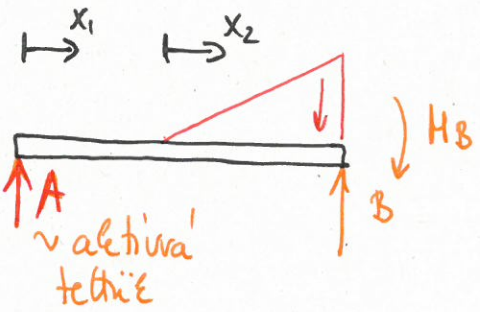
↳ görgős: y

De csak 3 skalár egyenlet!

4 reakció: $A,\ \underset{\overset{\|}{0}}{B_x},\ B_y,\ M_B$

Legyen A aktív erő: $+\ w_A = 0$

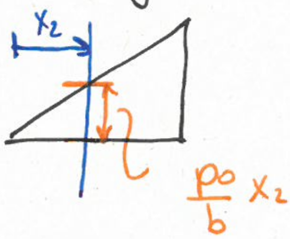
SZTÁ:



Reakciók:

- $B = \dfrac{p_{max} \cdot b}{2} - A$
- $M_B = \dfrac{p_{max} \cdot b^2}{6} - A(a+b)$

~ most nincs erre szükség



	$0 < x_1 < a$	$0 < x_2 < b$
M_h	$-A x_1$	$-A(x_2+a) + \dfrac{p_0 x_2^2}{b \cdot 2} \dfrac{x_2}{3}$

$$\frac{\partial M_{h_1}}{\partial A} = -x_1$$

$$\frac{\partial M_{h_2}}{\partial A} = -(x_2+a)$$

$$\longrightarrow w_A = 0 = \frac{1}{IE}\left[\int_0^a M_{h_1} \frac{\partial M_{h_1}}{\partial A} dx_1 + \int_0^b M_{h_2} \frac{\partial M_{h_2}}{\partial A} dx_2\right]$$

$$w_A = \frac{1}{IE}\left[\int_0^a A x_1^2\,dx_1 + \int_0^b A(x_2-a)^2 - \frac{p_0}{6b}x_2^3(x_2+a)\,dx_2\right] =$$

$$= \frac{1}{IE}\left(\left[\frac{A_1 x_1^3}{3}\right]_0^a + \left[\frac{A(x_2+a)^3}{3} - \frac{p_0 x_2^5}{30b} - \frac{p_0 a x^4}{24b}\right]_0^b\right) =$$

$$= \frac{1}{IE}\left(\cancel{\frac{A_1 a^3}{3}} + \frac{A(a+b)^3}{3} - \cancel{\frac{A a^3}{3}} - \frac{p_0 b^5}{30b} - \frac{p_0 a b^4}{24b}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow \quad A = \frac{1}{(a+b)^3}\,p_0\left(\frac{b^4}{10} + \frac{ab^3}{8}\right) = \underline{\underline{1188\ N}}$$

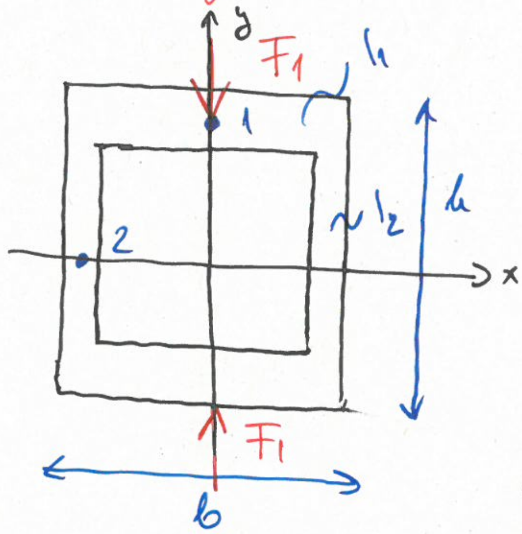
Ebbo'l:

$$\Sigma F_y = A + B - \frac{pb}{2} = 0 \Rightarrow \quad B = \frac{pb}{2} - A = \underline{\underline{13812\ N}}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad -A(a+b) + \frac{p\cdot b}{2}\cdot\frac{b}{3} - M_B = 0$$

$$\hookrightarrow M_B = -A(a+b) + \frac{pb^2}{6} = \underline{\underline{18120\ Nm}}$$

3. Feladat Egy állandó vastagságú, de különböző szélességű rudakból készített rugalmas keretet az ábra szerinti erővel terheljük. Határozzuk meg a keret 1 és 2-es keresztmetszetében ébredő hajlítónyomatékot!



__Adatok:__

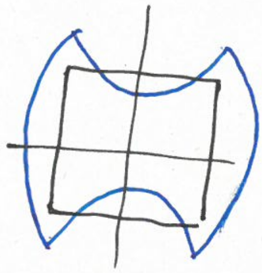
$I_1 E = 5{,}35\cdot10^5\ \mathrm{Nm}^2$

$I_2 = I_1/2$

$b = 1\,\mathrm{m}$

$h = 1{,}5\,\mathrm{m}$

$F_1 = 3{,}1\,\mathrm{kN}$

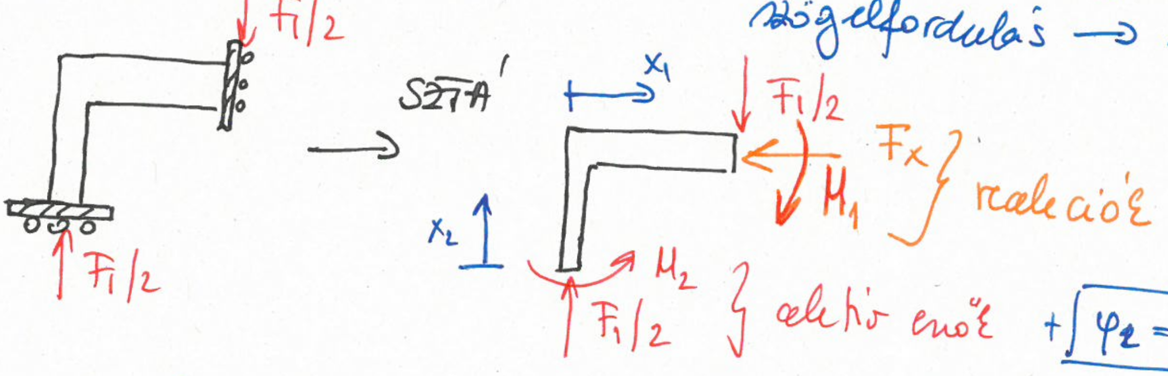


deformált alak!

A számítások során a normáligénybevételtől eltekintünk.

__Egyszerűsített modell:__ „negyedmodell"

Az egyszerűsített modellben $\Longrightarrow$ a szimmetria miatt nincs szögelfordulás $\rightarrow$ befogás



$+ \boxed{\varphi_2 = 0}$

__Igénybevételi függvények:__

	M_{h1}: $0 < x_2 < \frac{h}{2}$	M_{h2}: $0 < x_1 < \frac{b}{2}$
M_h	M_2	$M_2 - \frac{F_1}{2} x_1$
N	$-F_1/2$	0

$\frac{\partial M_{h1}}{\partial M_2} = 1$

$\frac{\partial M_{h1}}{\partial M_2} = 1$

$\frac{\partial N_1}{\partial M_2} = 0; \quad \frac{\partial N_2}{\partial M_2} = 0$ ← ezek nem kell

$$\varphi_2 = \frac{1}{I_1 E}\left[\int_0^{b/2} M_2 - \frac{F_1}{2} x_1\, dx_1 + 2\cdot\int_0^{h/2} M_2\, dx_2\right] = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{I_1 E}\left(\left[M_2 x_1 - \frac{F_1 x_1^2}{4}\right]_0^{b/2} + 2\left[M_2 x_2\right]_0^{l/2}\right) = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{I_1 E}\underbrace{\left(\frac{M_2 b}{2} - \frac{F_1 b^2}{16} + \frac{2 M_2 l}{2}\right)}_{} = 0$$

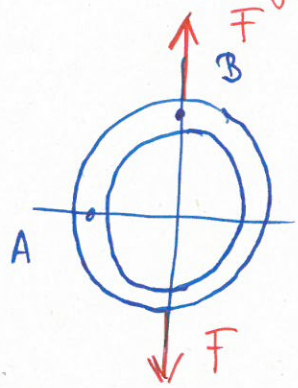
$$\hookrightarrow M_2 = \frac{F_1 b^2}{16\left(l + \frac{b}{2}\right)} = \underline{96{,}875\ Nm}$$

<u>Az „1" es poutban:</u>

$$\overset{\curvearrowleft}{\sum} M_1 = -M_1 - \frac{F_1}{2}\cdot\frac{b}{2} + M_2 = 0$$

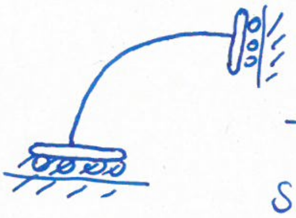
$$\hookrightarrow M_1 = M_2 - \frac{F_1 b}{4} = \underline{-678{,}125\ Nm}$$

4. feladat Egy állandó kör keresztmetszetű gyűrűt a jelzett módon megterheltünk. Hol ébred a maximális hajlítónyomaték?

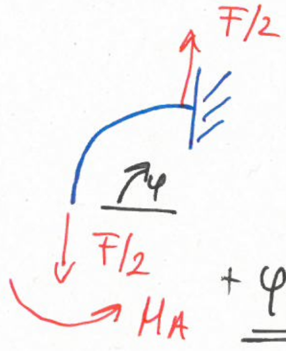


Adatok: R, F, d adott

A szimmetria miatt:

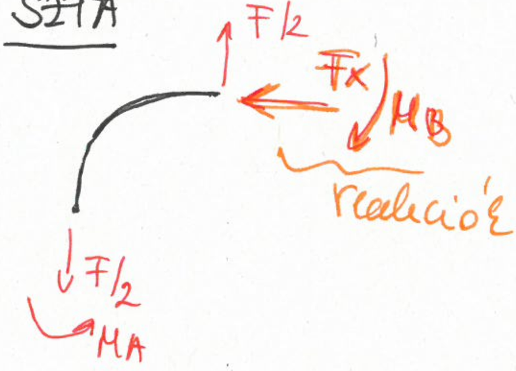


$\longrightarrow$ statikailag határozatlan



$+ \varphi_A = 0$

SZTA'



Igénybevétel:

$$M_h(\varphi) = M_A + \frac{FR}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$N(\varphi) = \frac{F}{2}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial M_A} = 1; \quad \frac{\partial N}{\partial M_A} = 0 \longrightarrow \text{Nem lesz hatása!}$$

$$\varphi_A = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi/2} M_A + \frac{FR}{2} - \frac{FR}{2}\cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{IE}\left[M_A\varphi + \frac{FR}{2}\varphi - \frac{FR}{2}\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = 0$$

$$\varphi_A = \frac{1}{IE}\Big[\underbrace{M_A\frac{\pi}{2} + \frac{FR}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{FR}{2}}\Big] = 0$$

$$\hookrightarrow M_A = \frac{\frac{FR}{2} - \frac{FR}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\pi/2} = FR\left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}}{\pi/2}\right) = FR\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -0{,}1817\,FR$$

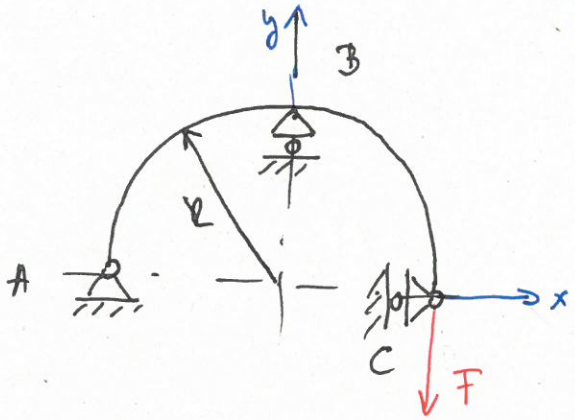
Nézzük az igénybevételi függvényt!

$$M_h(\varphi) = M_A + \frac{FR}{2}\underbrace{(1-\cos\varphi)}_{\text{a } [0,\pi/2]\text{-n monoton növekvő}}$$

$$M_h\left(\frac{\pi}{2}\right) = M_B = M_A + \frac{FR}{2}(1-0) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)FR = \frac{1}{\pi}FR = 0{,}3183\,FR$$

$\boxed{\text{5. feladat}}$ Az ábrán vázolt ABC félkörívből álló rúd terhelése a C görgőnél ható koncentrált erő.

Fejezzük ki a reakcióerőket az F erő segítségével valamint fejezzük ki a C pont y irányú elmozdulását!



Adott: R, IE

Statikailag határozatlan

A pont – 2 reakció (A_x, A_y)

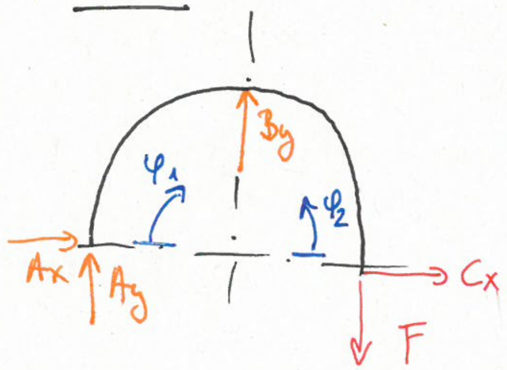
B pont – 1 reakció (B_y)

C pont – 1 reakció (C_x)

Tegyük aktívvá a C_x reakciót

$+\ \boxed{w_{Cx} = 0}$ kinematikai feltétel!

SZTÁ



Egyensúlyi egyenletek

$\sum F_x = 0$: $A_x + C_x = 0$

$\sum F_y = 0$: $A_y + B_y - F = 0$

$\sum M_A = 0$: $B_y R - F 2R = 0$

$\to B_y = \frac{F 2R}{R} = \underline{\underline{2F}}$

$\to A_y = F - B_y = \underline{\underline{-F}}$

A_x és C_x nem határozható meg az egyensúlyi egyenletből!

Igénybevételi függv.:

	$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$	$0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$
M_h	$-A_y R(1-\cos\varphi_1) + A_x R(\sin\varphi_1)$	$FR(1-\cos\varphi_2) - C_x R \sin\varphi_2$
N	$-A_y \cos\varphi_1 - A_x \cdot \sin\varphi_1$	$F\cos\varphi_2 + C_x \sin\varphi_2$

Fontos:

$A_y = -F$
$A_x = -C_x$ } AKTÍV ERŐK KELL, HOGY SZEREPELJENEK

Tehát

	$0<\varphi_1<\frac{\pi}{2}$	$0<\varphi_2<\frac{\pi}{2}$
Mh	$FR(1-\cos\varphi_1)-C_xR\sin\varphi_1$	$FR(1-\cos\varphi_2)-C_xR\sin\varphi_2$
N	$FR\cos\varphi_1+C_x\sin\varphi_2$	$FR\cos\varphi_1+C_x\sin\varphi_2$

Most csak a hajlítással számoljuk tovább!

$$W_{Cx}=0 \rightarrow \frac{\partial Mh_1}{\partial C_x}=-R\sin\varphi_1 \qquad \frac{\partial Mh_2}{\partial C_x}=-R\sin\varphi_2$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial C_x}=\sin\varphi_1 \qquad \frac{\partial N_2}{\partial C_x}=\sin\varphi_2$$

$$W_{Cx}=\frac{1}{IE}\left(\int_0^{\pi/2} Mh_1\frac{\partial Mh_1}{\partial C_x}R\,d\varphi_1+\int_0^{\pi/2} Mh_2\frac{\partial Mh_2}{\partial C_x}R\,d\varphi_2\right)=$$

$$=\frac{1}{IE}\left(2\int_0^{\pi/2}(FR(1-\cos\varphi_1)-C_xR\sin\varphi_1)(-R\sin\varphi_1)R\,d\varphi_1\right.$$

$$=\frac{1}{IE}2\int_0^{\pi/2}-FR^3(1-\cos\varphi_1)\sin\varphi_1+C_xR^3\underbrace{\sin^2\varphi_1}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\varphi_1)}d\varphi_1=$$

$$=\frac{2}{IE}\left(\left[-\frac{FR^3(1-\cos\varphi_1)^2}{2}\right]_0^{\pi/2}+\left[\frac{C_xR^3}{2}\varphi_1-\frac{C_xR^3}{2}\sin(2\varphi_1)\right]_0^{\pi/2}\right.$$

$$=\frac{2}{IE}\left(-\frac{FR^3}{2}+\frac{C_xR^3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\underline{\underline{0=W_{Cx}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{C_x\cancel{R^3}\pi}{\cancel{2}\cdot 2}=\frac{F\cancel{R^3}}{\cancel{2}} \rightarrow \underline{\underline{C_x=\frac{2F}{\pi}}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{A_x=\frac{-2F}{\pi}}}$$

y irányú elmozdulás (F aktív erő jelöli ki)

Cx erő már aktív erő ⇒ nem függ F-től!

$$\frac{\partial M_{h1}}{\partial F} = R(1-\cos\varphi_1) \qquad \frac{\partial M_{h2}}{\partial F} = R(1-\cos\varphi_2)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial F} = R\cos\varphi_1 \qquad \frac{\partial M_2}{\partial F} = R\cos\varphi_2$$

$$w_{cy} = \frac{1}{IE}\left(\int_0^{\pi/2} M_{h1}\frac{\partial M_{h1}}{\partial F} R\,d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} M_{h2}\frac{\partial M_{h2}}{\partial F} R\,d\varphi_2\right) =$$

$$= \frac{1}{IE}2\int_0^{\pi/2} FR^3(1-\cos\varphi_1)^2 - C_x \cdot \cancel{F}R^3(1-\cos\varphi_1)\sin\varphi_1\,d\varphi_1$$

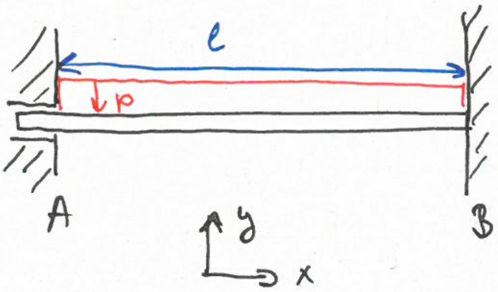
$$1-2\cos\varphi_1+\cos^2\varphi_1 = \frac{3}{2}-2\cos\varphi_1+\cos(2\varphi_1)$$

$$= \frac{2}{IE}\left(\left[\frac{FR^3}{2}\cdot 3\varphi_1 - 2FR^3\sin\varphi_1 + \frac{FR^3}{2}\sin(2\varphi_1)\right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{C_x \cancel{F}R^3(1-\cos\varphi_1)^2}{2}\right]_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{2}{IE}\left(\frac{3FR^3\cdot\pi}{4} - 2FR^3 - \frac{C_x\,\cancel{F}R^3}{2}\right) = \frac{FR^3}{2IE}\,\frac{3\pi^2-8\pi-4}{\pi}$$

$$C_x = \frac{2F}{\pi}$$

6. feladat A vázolt AB rúd B keresztmetszete be van fogva, az A helyszer viszont lehetővé teszi az x-irányú elmozdulást! Határozzuk meg a reakciókat!



Adott: l, p, IE

A befogások miatt:

B part: 3 reakció: B_x, B_y, M_B

A part: 2 reakció: A_y, M_A

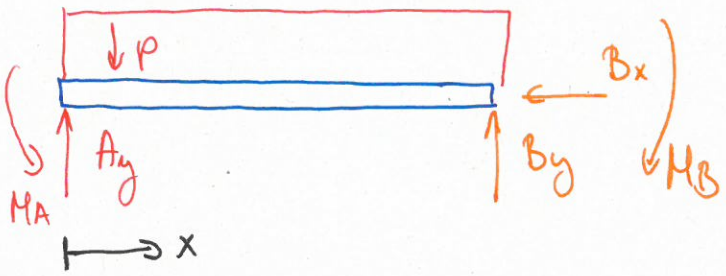
3 db egyensúlyi egyenlet $\longleftrightarrow$ 5 reakció

Kétszeresen határozatlan a szerkezet $\longrightarrow$ 2 reakciót kell aktíválni!

↳ A_y és M_A

$w_A = 0$ és $\varphi_A = 0$

SZTA



$\Sigma F_x = 0$: $\boxed{B_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0$: $A_y + B_y - pl = 0$

$\Sigma M_A = 0$: $+M_A - \frac{pl^2}{2} + B_y l - M_B = 0$

Igénybevételek:

	$0 < x < l$
$M_h(x)$	$M_A - A_y x + \frac{px^2}{2}$
$N(x)$	0

$M_h(x)$ csak az aktív erőktől függ!

$$\frac{\partial M_h}{\partial M_A} = 1$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial A_y} = -x$$

Tehát

- $$w_A = 0 = \frac{1}{IE}\int_0^{\ell} M_h(x)\frac{\partial M_h}{\partial A_y}\,dx = \frac{1}{IE}\int_0^{\ell} -M_A x + A_y x^2 - \frac{p x^3}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{IE}\left[-\frac{M_A x^2}{2} + \frac{A_y x^3}{3} - \frac{p x^4}{8}\right]_0^{\ell} = \underline{\underline{\frac{1}{IE}\left(-\frac{M_A \ell^2}{2} + \frac{A_y \ell^3}{3} - \frac{p \ell^4}{8}\right) = 0}}$$

- $$\varphi_A = 0 = \frac{1}{IE}\int_0^{\ell} M_h(x)\frac{\partial M_h}{\partial M_A} = 0 = \frac{1}{IE}\int_0^{\ell} M_A - A_y x + \frac{p x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{IE}\left[M_A x - \frac{A_y x^2}{2} + \frac{p x^3}{6}\right]_0^{\ell} = \underline{\underline{\frac{1}{IE}\left(M_A \ell - \frac{A_y \ell^2}{2} + \frac{p \ell^3}{6}\right) = 0}}$$

↳ egyenletrendszer:

$$-M_A \frac{\ell^2}{2} + A_y \frac{\ell^3}{3} - p\frac{\ell^4}{8} = 0 \qquad (1)$$

$$M_A \ell - A_y \frac{\ell^2}{2} + p\frac{\ell^3}{6} = 0 \qquad (2)$$

(1) $+ \frac{\ell}{2}$(2).

$$M_A \frac{\ell^2}{2} - A_y \frac{\ell^3}{4} + \frac{p \ell^4}{12} = 0 \qquad \frac{\ell}{2}\cdot(2)$$

$$A_y \ell^3 \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{12}} - p\ell^4 \underbrace{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right)}_{\frac{1}{24}} = 0$$

$$↳ A_y = \frac{p\ell\left(\frac{1}{24}\right)}{\frac{1}{12}} = \frac{12 p\ell}{24} = \underline{\underline{\frac{p\ell}{2}}}$$

$$↳ B_y = p\ell - A_y = \underline{\underline{\frac{p\ell}{2}}}$$

$$↳ M_A = A_y \frac{\ell}{2} - \frac{p\ell^2}{6} = \frac{p\ell^2}{4} - \frac{p\ell^2}{6} = \underline{\underline{\frac{p\ell^2}{12}}}$$

$$↳ M_B = M_A - \frac{p\ell^2}{2} + B_y \ell = \frac{p\ell^2}{12} - \frac{p\ell^2}{2} + \frac{p\ell^2}{2} = \frac{p\ell^2}{12}$$