Szilárdságtan - 7. gyakorlat (1)

Többtengelyű feszültségi állapot I.
Főfeszültségek és főirányok meghatározása

Elméleti összefoglaló:

↳ Egy test adott normálisú síkjában, megadott P pontban a feszültséget leírhatjuk egy vektorral, mint

$$\underline{\rho}_n^P = \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nm} \\ \tau_{ml} \end{bmatrix}$$

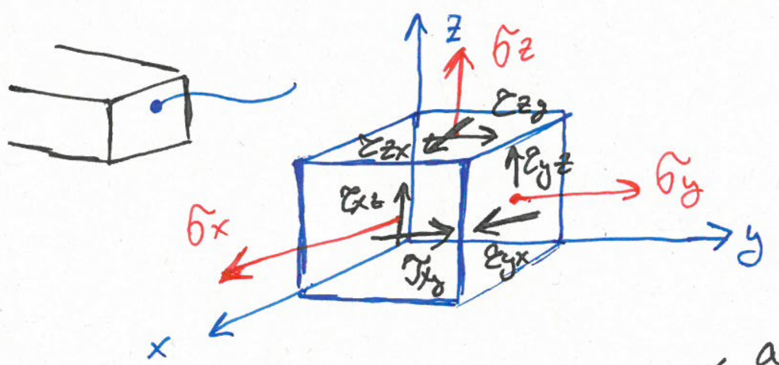
Az adott normálisú síkhoz a feszültségi vektort a $\boxed{\underline{\rho}_n^P = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}}$ leképező adja meg!

$\underline{\underline{\sigma}}$ - feszültségi tenzor ~ szimmetrikus

$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$ → A τ feszültségek párban jelentkeznek!

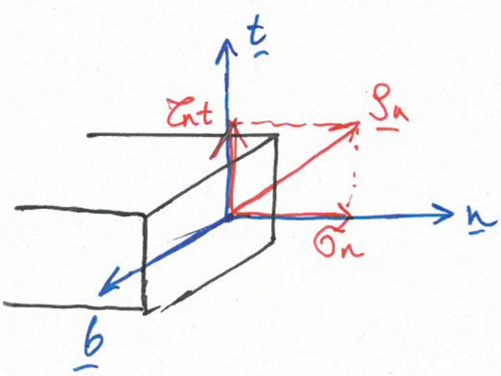
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



a fesz. vektor felbontható síkra merőleges (normál) és síkkal párhuzamos (csúsztató) feszültségekre!

$$\underline{\rho}_n = \sigma_n \cdot \underline{n} + \tau_{nt} \cdot \underline{t} + \tau_{nb} \cdot \underline{b}$$



Síkfeladat esetén 2 komponens!

$$\sigma_n \cdot \underline{n} + \tau_{nt} \cdot \underline{t} = \underline{\rho}_n$$

A feszültség komponensek

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n^T \cdot \underline{n} = \underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}$$
$$\underline{\sigma}_n = \sigma_n \cdot \underline{n}$$
$$\tau_{nt} = \underline{\rho}_n^T \cdot \underline{t} = \underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{t}$$

Általánosan:

$$\boxed{\underline{\tau} = \underline{\rho} - \underline{\sigma}}$$

$$|\underline{\tau}| = \sqrt{\underline{\tau}^T \cdot \underline{\tau}}$$ önmagával vett skaláris szorzat

Főfeszültségek:

$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)}$ szimmetrikus és valóselemű

↓ keressük azt az irányt amelybe elforgatva csak ~~n~~ normálfesz ébred:

$$\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n} = \lambda \underline{n} \rightarrow (\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \underline{u} = \underline{0}$$

sajátérték, sajátvektor számítás!

Fontos, mivel $\underline{\underline{\sigma}}$ szimmetrikus és valóselemű ⇒ a sajátértékek valósak + a sajátvektorok merőlegesek

↳ karakterisztikus egyenlet:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$\lambda^3 - \sigma_I \lambda^2 + \sigma_{II} \lambda - \sigma_{III} = 0$$

$$\sigma_I = Tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2}\left((Tr\underline{\underline{\sigma}})^2 - Tr(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \right) =$$

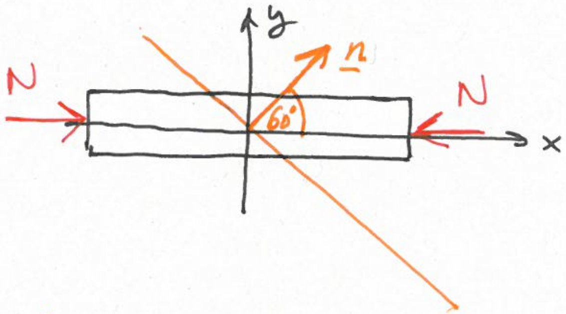
$$= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} =$$

$$= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3$$

$$\sigma_{III} = \det(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

1. Feladat

Egy 25×25 mm-es állandó keresztmetszetű rövid rudat 50kN nagyságú nyomóerő terheli. Mekkora a σ és a τ nagysága azon a lapon, amely normálisa a nyomóerő irányával 60°-ot zár be?



$N = 50\,kN$

$A = 25\,mm \times 25\,mm = 625\,mm^2$

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mi lesz a fesz. tenzor mátrixa $\{x, y, z\}$ kk-ben?

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = -80\,MPa \Rightarrow \underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} -80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \begin{bmatrix} -80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

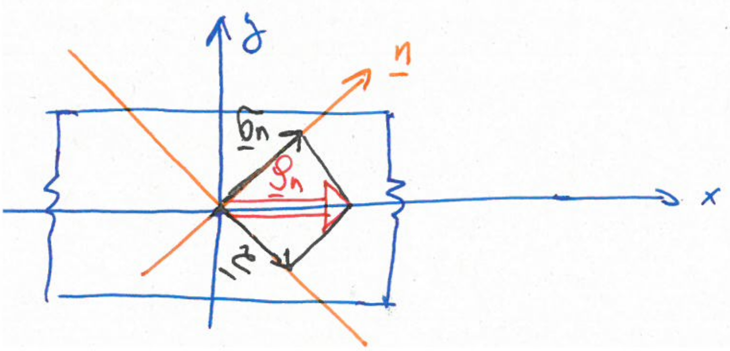
A feszültség komponensek:

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n^T \underline{n} = [-40\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = -20\,MPa$$

$$\underline{\sigma}_n = \sigma_n \underline{n} = -20 \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\underline{\tau} = \underline{\rho}_n - \underline{\sigma}_n = \begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 \\ -10\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 10\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

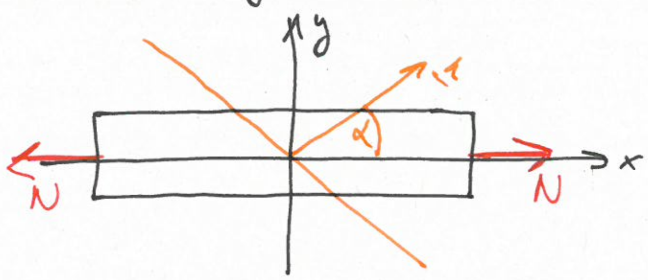
$$\tau = \sqrt{\underline{\tau}^T \cdot \underline{\tau}} = \sqrt{900 + 300} = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3} = 34{,}64\,MPa$$



2. feladat

Egy 50×75 mm-es, állandó keresztmetszetű rúd végét 500 kN nagyságú húzóerő terheli. Mekkora a rúdban ébredő maximális csúsztatófeszültség?

$A = 50 \cdot 70 = 3750\,mm^2$



nincs megmondva melyik síkra kell ezt nézni.
↳ a valódi kérdés, hogy melyik síkban lesz a max. csúsztatófeszt?

$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ általános helyzetű normálvektor

$$\underset{(x,y,t)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$\tau_{max} = ?$ $\quad |\tau| = \sqrt{\underline{\tau} \cdot \underline{\tau}}$

de $\underline{\tau} = \underline{\rho}_n - \underline{\sigma}_n$ és $\underline{\sigma}_n = \sigma_n \cdot \underline{n} = (\underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n})\underline{n} = \sigma_x \cos^2\alpha \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = \sigma_x \cos^2\alpha$

$$\underline{\sigma}_n = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos^3\alpha \\ \sigma_x \cos^2\alpha \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_x \cos^3\alpha \\ \sigma_x \cos^2\alpha \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x(\cos\alpha - \cos^3\alpha) \\ -\sigma_x(\cos^2\alpha)\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{\tau}| = \sqrt{\underline{\tau}^T \cdot \underline{\tau}} = \sqrt{\sigma_x^2 (\cos^2\alpha - 2\cos^4\alpha + \underbrace{\cos^6\alpha + \cos^4\alpha \sin^2\alpha}_{\cos^4\alpha}}$$

Tehát

$$|\underline{\tau}| = \sqrt{\sigma_x^2\left(\cos^2\alpha - \cos^4\alpha\right)} = \sqrt{\sigma_x^2\left(\cos^2\alpha \sin^2\alpha\right)} = \sigma_x\,|\sin\alpha\cos\alpha|$$

trigonometrikus azonosság

<u>Ennek kell a maximuma!</u>

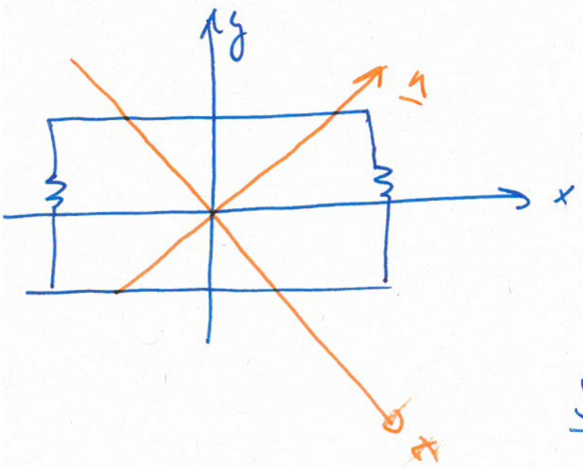
$$\frac{d\left(\sigma_x \sin\alpha\cos\alpha\right)}{d\alpha} = \sigma_x\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$

$$tg^2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{\pm 45^\circ}}$$

$$\tau_{max} = \sigma_x \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{66{,}67\ \text{MPa}}}$$

2. megoldás: Mivel síkfeladat:



a $\underline{\tau}$ fesz. $\underline{t}$ irányú lesz

$\underline{n} \perp \underline{t}$

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

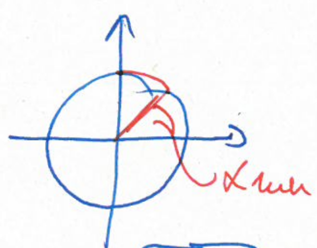
$$\tau = \underline{\rho}_n^T\cdot\underline{t} = -\sigma_x\cos\alpha\sin\alpha = \tau$$

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = -\sigma_x\left(-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 0 \Rightarrow tg^2\alpha = 1 \quad \alpha = \underline{\underline{\pm 45^\circ}}$$

Milyen α esetén $\sigma_n \le \sigma_{meg} = 50$ MPa ?
$[0, \pi/2)$

$$\sigma_n = \sigma_x\cos^2\alpha$$

$$\sigma_x\cos^2\alpha \le 50\ \text{MPa}$$



$$\cos^2\alpha = \frac{\sigma_{meg}}{\sigma_x} \longrightarrow \alpha_{min} = \arccos\sqrt{\frac{\sigma_{meg}}{\sigma_x}} = \underline{\underline{52{,}23^\circ}}$$

3. Feladat

Egy rugalmas test egy pontjában ismert a feszültségi tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & -10 \\ 0 & -10 & 30 \end{bmatrix} \ \underline{\underline{\text{MPa}}}$$

Határozzuk meg a főfeszültségeket és az 1 es főfeszültséghez tartozó főirányt!

Sajátérték, sajátvektor számítás

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{E}})\underline{e} = \underline{0} \longrightarrow \det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$$

- Invariánsokkal:

$$\lambda^3 - \sigma_I \lambda^2 + \sigma_{II} \lambda - \sigma_{III} = 0$$

$$\sigma_I = -2 + 60 + 30 = 88 \text{ MP}$$

$$\sigma_{II} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 60 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 30 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 60 & -10 \\ -10 & 30 \end{vmatrix} = -120 - 60 + 1800 - 100 = 1520$$

$$\sigma_{III} = \det \underline{\underline{\sigma}} = -2 \begin{vmatrix} 60 & -10 \\ -10 & 30 \end{vmatrix} = -3400$$

$$\hookrightarrow \lambda^3 - 88\lambda^2 + 1520\lambda + 3400 = 0$$

↳ kézzel bonyolult és nehéz (Cardano formula)

HONLAP!

- Szabatosan

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 60-\lambda & -10 \\ 0 & -10 & 30-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\left[(60-\lambda)(30-\lambda) - 100\right] =$$

$$= (-2-\lambda)(1800 - 90\lambda + \lambda^2 - 100)$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 90\lambda + 1700)$$

$$\lambda_1 = \underline{\underline{-2 \text{ MPa}}}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{90 \pm \sqrt{8100 - 6800}}{2} \begin{cases} \underline{\underline{63{,}027 \text{ MPa}}} \\ \underline{\underline{26{,}972 \text{ MPa}}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \lambda_2 = 63{,}027 \text{ MPa}\\ \sigma_2 &= \lambda_3 = 26{,}972 \text{ MPa}\\ \sigma_3 &= \lambda_1 = -2 \text{ MPa}\end{aligned}\right\}$$ adott a sorrend $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

σ_1-hez tartozó sajátvektor: $(\underline{\sigma} - \sigma_1 \underline{E})\underline{e} = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} -2-\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 60-\sigma_1 & -10 \\ 0 & -10 & 30-\sigma_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -65{,}027 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}027 & -10 \\ 0 & -10 & 33{,}027 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

LER

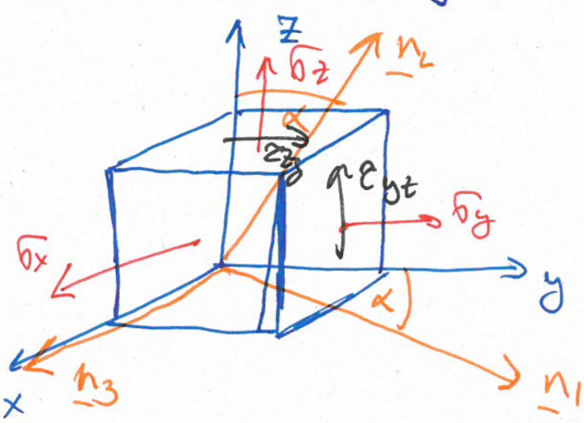
$\boxed{e_1 = 0}$

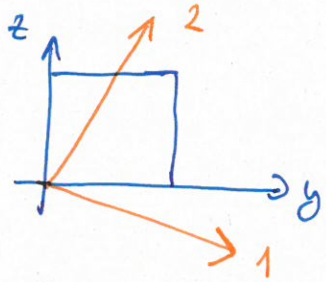
$$\begin{bmatrix} -3{,}027 & -10 \\ -10 & 33{,}027 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$ $\boxed{e_2 = 1}$ mi választhatjuk!

$-3{,}027\, \underset{1}{\underset{\shortparallel}{e_2}} - 10 e_3 = 0 \Rightarrow e_3 = -0{,}3027$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}3027 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{n}_e = \frac{\underline{e}}{|\underline{e}|} = \frac{\underline{e}}{\sqrt{1+0{,}916}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}9571 \\ -0{,}2897 \end{bmatrix} = \underline{n}_1$$

↳ σ_3-hoz: $\underline{n}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ↳ σ_2-höz $\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2897 \\ 0{,}9571 \end{bmatrix}$





$$\underset{(1,2,3)}{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 63{,}027 & 0 & 0 \\ 0 & 26{,}972 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$