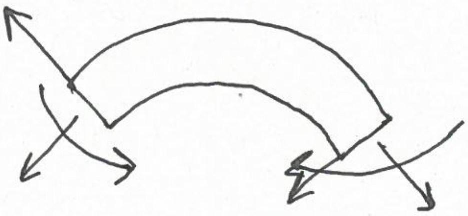
Szilárdságtan - 5. gyakorlat

Síkgörbe rudak hajlítása

Elméleti áttekintés



alapmodell: terheletlen állapotban is görbült a rúd

↓

ha terheljük további alakváltozás

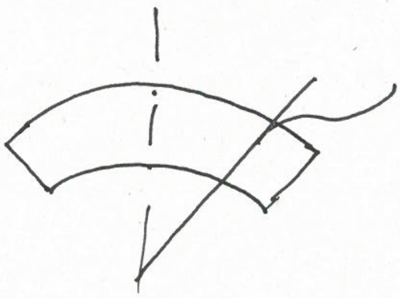
Igénybevételek
- Normálerő
- Nyíróerő
- Hajlítónyomaték

Geometriai jellemző
- R görbületi sugár
- z a km „magassága"

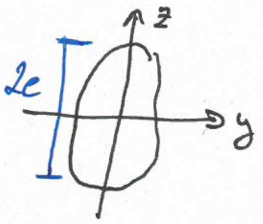
Grashoff-képlet: $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_0} \cdot z \frac{R}{R+z}$

I_0 - redukált nyomaték $I_0 = \int_A \frac{R}{R+z} z^2 \, dA$

Alkalmazása:

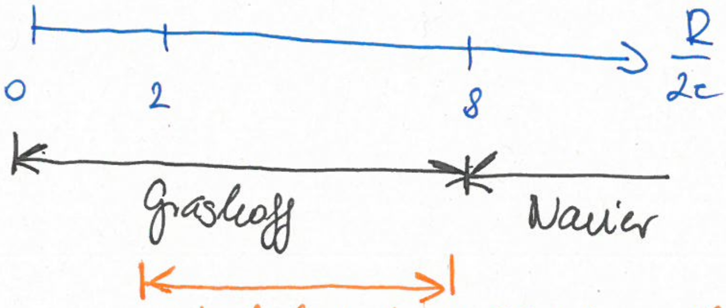


adott km:



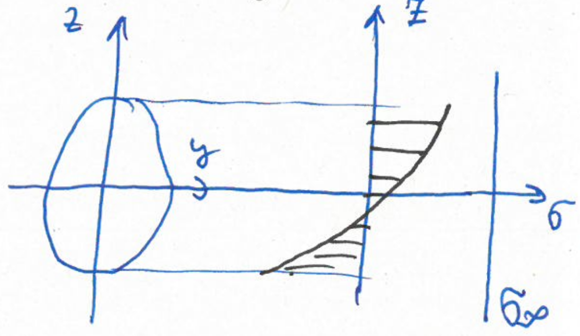
• $\frac{R}{2c}$ - dimenzió nélküli viszonyszám

minnél nagyobb, annál jobban közelít az egyenes rúdhoz!



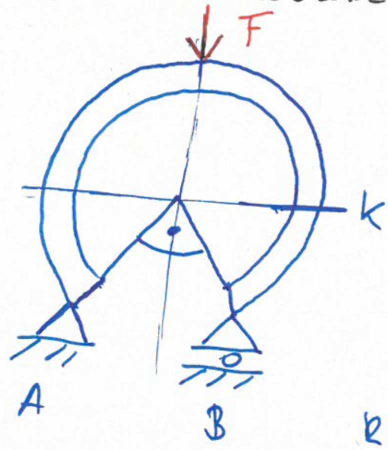
I_0 helyett I_y-t lehet használni!

Hiperbolikus fesz. eloszlás!



1. Feladat

A vázolt négyzet keresztmetszetű rudat a jelzett helyzetben F koncentrált erő terheli. Határozzuk meg a reakciókat, rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat és a K keresztmetszetben a normálfeszültség eloszlását! Mekkora a feszültség a külső és a belső szálban?

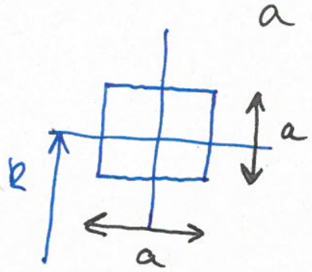


Adatok:

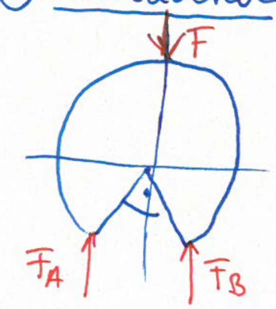
$F = 3000\,N$

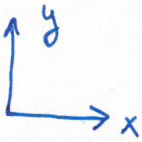
$R = 300\,mm$

$a = 40\,mm$



① Reakcióerők





Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0: \quad 0 = 0$

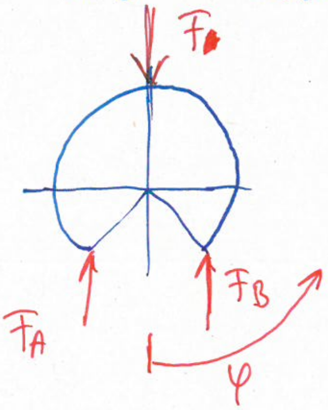
$\Sigma F_y = 0: \quad F_A + F_B - F = 0$

$\Sigma M_A = 0: \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} F R + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} F_B \cdot R = 0$

$\hookrightarrow F = 2F_B$

$\left.\begin{array}{l} F_B = 1500\,N \\ F_A = 1500\,N \end{array}\right\}$ szimmetrikus!

② Igénybevételi függvények



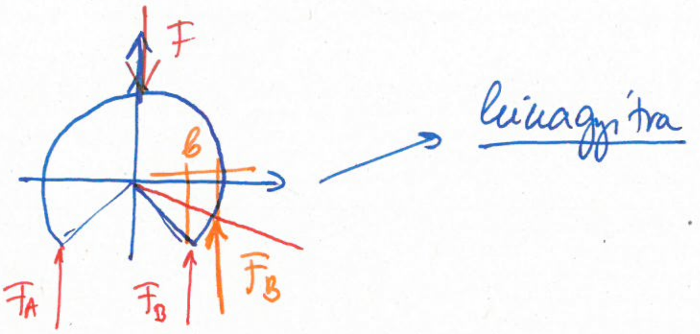
Az igénybevételi függvényeket 2 szakaszra kell felírni:

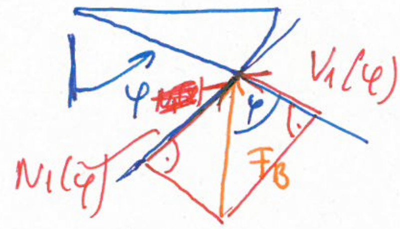
I $\varphi \in [45°; 180°]$

II $\varphi \in [180°; 315°]$

I. szakasz

Át kell kifejezni F_B-t az adott kr-be!





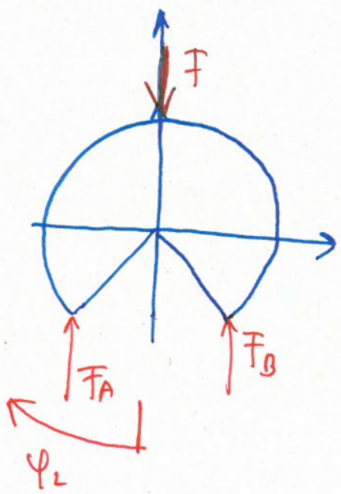
$$N_1(\varphi) = -F_B \cdot \sin\varphi \quad \text{(negatív, mert nyomó erő)}$$

$$V_1(\varphi) = F_B \cos\varphi$$

$$M_{h1}(\varphi) = F_B \cdot b = F_B(R\sin\varphi - R\sin 45^\circ)$$

II. szakasz:

$\varphi \in (180^\circ, 315^\circ]$ vagy $\varphi_2 \in [45^\circ; 180^\circ)$



$$N_2(\varphi_2) = -F_A \sin\varphi_2$$

$$V_2(\varphi_2) = -F_A \cos\varphi_2$$

$$M_{h2}(\varphi_2) = F_A \cdot (R\sin\varphi_2 - R\sin 45^\circ)$$

$\varphi = 360^\circ - \varphi_2 \Rightarrow$ visszaírva

$\sin(360^\circ - \varphi_2) = -\sin\varphi_2$

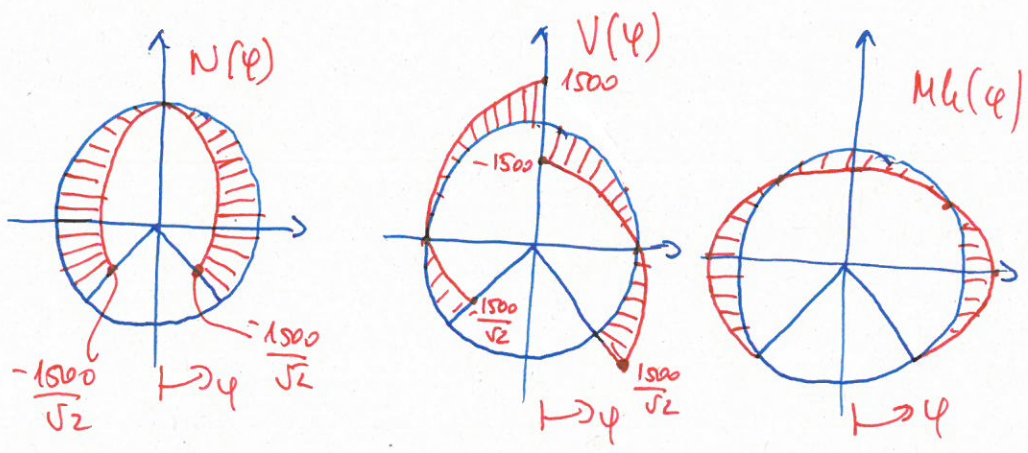
$\cos(360^\circ - \varphi_2) = \cos\varphi_2$

$$N_2(\varphi) = F_A \sin\varphi$$

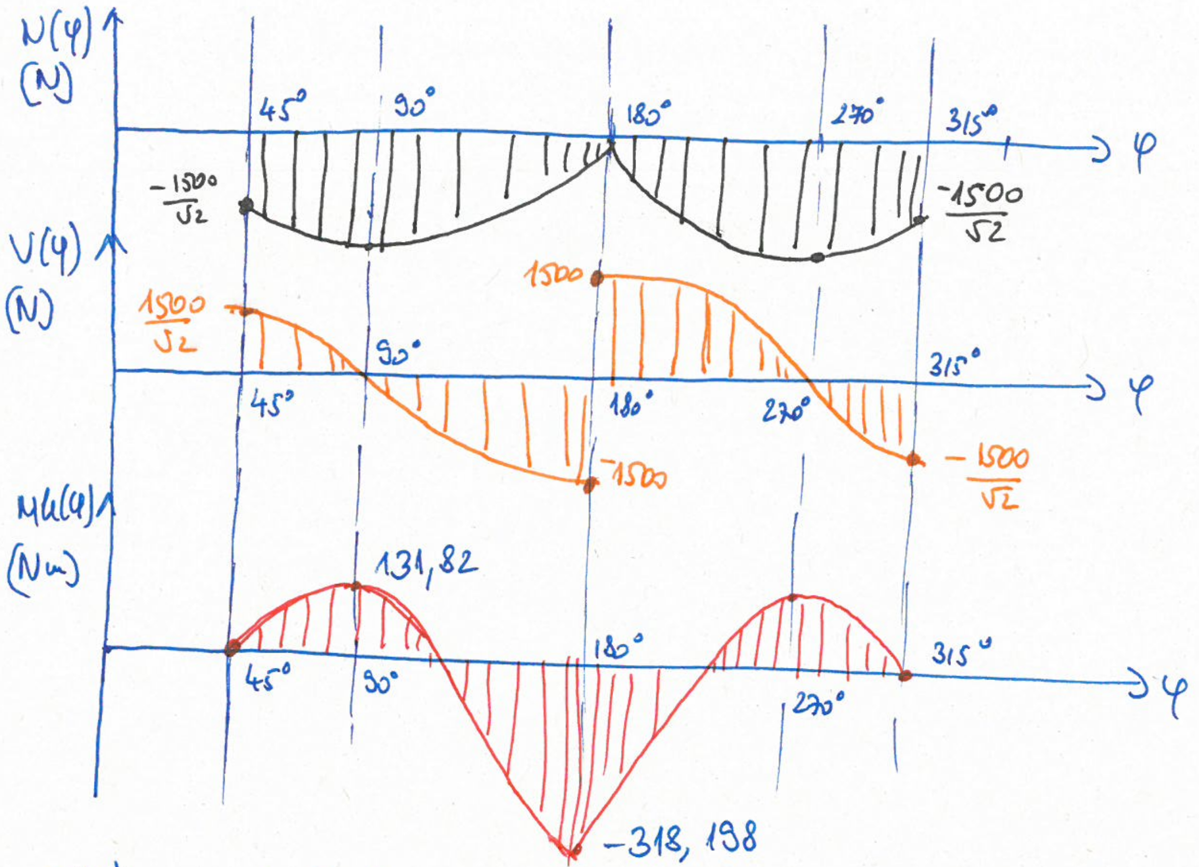
$$V_2(\varphi) = -F_A \cos\varphi$$

$$M_{h2}(\varphi) = F_A(-R\sin\varphi - R\sin 45^\circ)$$

3) Igénybevételi ábrák



Kiterítve



$$N(\varphi)_{max} = N(90°) = N(270°) = F_B = \underline{\underline{1500\,N}}$$

$$N(45°) = N(315°) = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B = 1500 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1500}{\sqrt{2}}$$

$$V(45°) = -V(315°) = \frac{F_B}{\sqrt{2}}$$

$$V(\varphi)_{max} = V(180°)_- = -F_B = -1500\,N$$

$$V(180°)_+ = F_B = 1500\,N$$

$$Mh_{max} = Mh(180°) = F_B\left(-\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = 318,198\ Nm$$

$$Mh(90°) = RF_B\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = F_B \cdot R\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = 131,802\ Nm$$

4) K-keresztmetszet:

$$\left.\begin{aligned} N_K &= N(90°) = -1500\,N \\ V_K &= V(90°) = 0\,N \\ Mh_K &= Mh(90°) = 131,802\,Nm \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{R}{2e} = \frac{R}{a} = \frac{0,3}{0,04} = 7,5$$

$$\Downarrow$$

Grashoff de $I_0 \approx I_y$

$A = a^2 = 1600\ mm^2$

$R = 300\ mm$

$I_y = \frac{a^3 \cdot a}{12} = 213\,333{,}33\ mm^4$

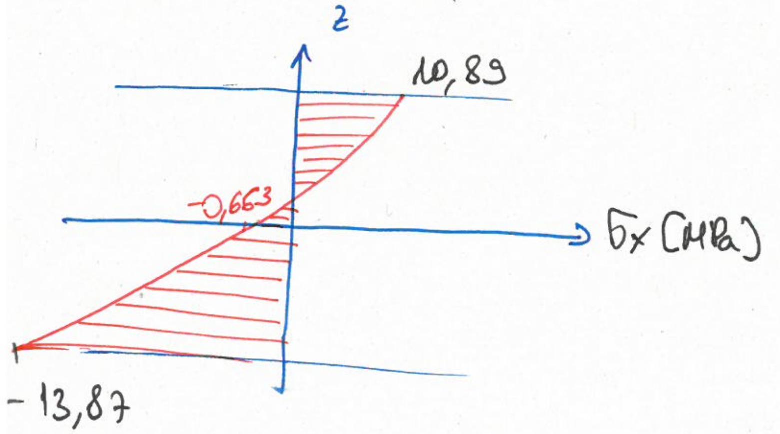
$\sigma_x(z) = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{RA} + \frac{Rz}{R+z}\,\frac{M_h}{I_y}$ (mm – MPa) dimenziók!

$\uparrow$ lokális kr

$\sigma_x(z) = \frac{-1500}{1{,}6\cdot 10^3} + \frac{131\,802}{300\cdot 1600} + \frac{300z}{300+z}\cdot\frac{131\,802}{213\,333{,}33}$

$\sigma_x(z) = -0{,}6629 + \frac{300z}{300+z}\cdot 0{,}616$

mm-ben!



$\sigma_x\left(\frac{a}{2}\right) = 10{,}89\ MPa$

$\sigma_x\left(-\frac{a}{2}\right) = -13{,}87\ MPa$

Ha I_0-t számolnánk:

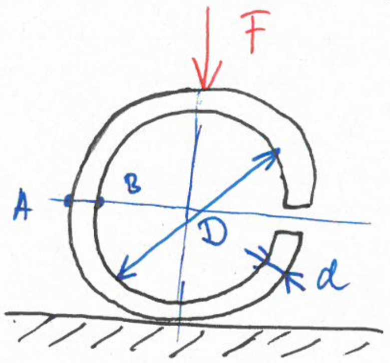
$$I_0 = \int_A \frac{Rz^2}{R+z}\,dA = \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2}\int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} \frac{Rz^2}{R+z}\,dy\,dz = \dots = R^2a^2\left(\frac{R}{a}\ln\left(\frac{2R+a}{2R-a}\right)-1\right)$$

$$\underline{\underline{I_0 = 213\,904\ mm^4}}$$

nagyon kicsi az eltérés!

2. feladat

A vázolt gyűrű alakú, körkeresztmetszetű rudat az F koncentrált erő terheli. Mekkora feszültségek ébrednek A és B pontokban?



Adatok:

$D = 120\ mm$

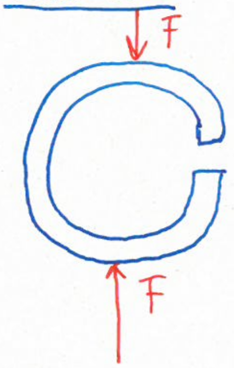
$d = 80\ mm$

$F = 20\ kN$

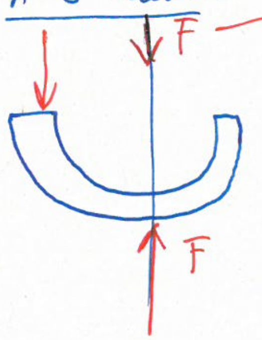
$$I_0 \approx \frac{d^4\pi}{64}\left(1+\frac{1}{8}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right)$$

$$R = \frac{D+d}{2} = 100\ mm$$

Reakciók



Igénybevételek az A-B km-ben: → ezt kell átredukálni!



$N = F = -20\ kN$

$V = 0$

$M_h = F \cdot R = 2\ kNm$

Grashoff-képlet: $N \to$ Newton, $M_h \to Nmm$, $I_0 \to mm^4$, $A \to mm^2$, $z \to mm$ } $\sigma \to$ MPa!

$$\frac{R}{2e} = \frac{R}{d} = \frac{100}{80} = 1{,}25 \Rightarrow \text{Grashoff!}$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 5026{,}54\ mm^2$$

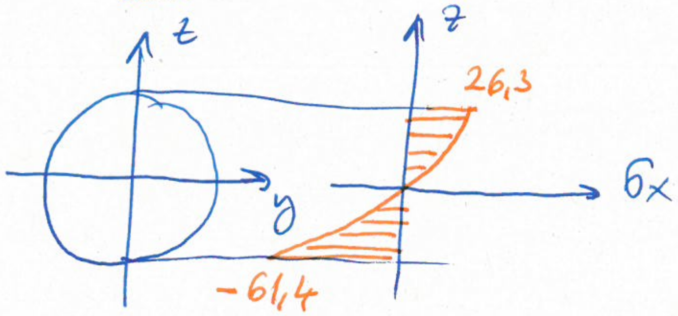
$$I_0 = \frac{d^4\pi}{64}\left(1+\frac{1}{8}\left(\frac{d}{R}\right)^2\right) = 2{,}17\cdot 10^6\ mm^4$$

$$\sigma_x(z) = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_0}\cdot\frac{Rz}{R+z} = \underbrace{\cancel{-3{,}97+3{,}97}}_{\text{kivételes!}} + 0{,}92\cdot\frac{100z}{100+z}$$

$$\sigma_x(z) = 0{,}92\cdot\frac{100z}{100+z}$$

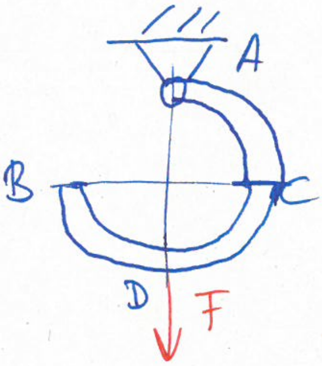
$$\sigma_x\left(\frac{d}{2}\right) = 26{,}3\ MPa$$

$$\sigma_x\left(-\frac{d}{2}\right) = -61{,}4\ MPa$$



3. feladat

Méretezzük az alábbi görbe rudat és rajzoljuk meg a C keresztmetszetben a normálfesz. eloszlást!



Adatok:

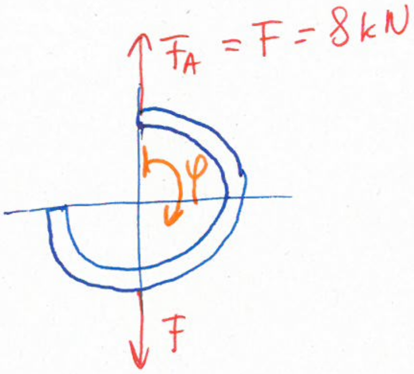
$R = 125\ \mathrm{mm}$ $\qquad d = ?$

$F = 8\ \mathrm{kN}$

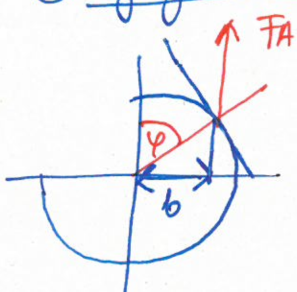
$\sigma_{meg} = 100\ \mathrm{MPa}$

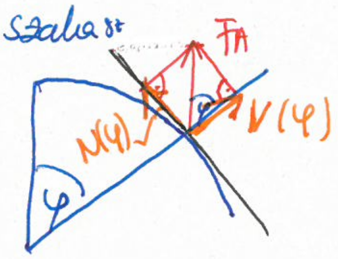
Fontos: Méretezni Navier ⇒ ellenőrizni Grashoff

① Reakcióerők



② Igénybevételek A – D szakaszon





DB szakaszon nincs aktív erő }!

$N(\varphi) = F_A \cdot \sin\varphi$

$V(\varphi) = F_A \cos\varphi$

$M_h(\varphi) = -F_A \cdot b = -F_A R \sin\varphi$

negatív mert egyenesít!

Maximális hajlítónyomaték $\varphi = \pi/2$ helyen 90°-nál C pontban

$N_C = F_A \sin\frac{\pi}{2} = F_A = 8\ \mathrm{kN}$

$V_C = F_A \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$M_{hC} = -F_A \cdot R \sin\frac{\pi}{2} = -F_A \cdot R = -1000\ \mathrm{Nm}$

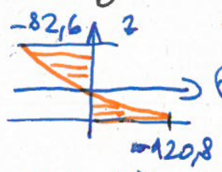
Méretezés Navier: $|\sigma_{max}| = \left|\frac{M_{hC}}{K_y}\right| = \left|\frac{M_{hC}}{\frac{d^3\pi}{32}}\right| \le \sigma_{meg} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{hC}}{\sigma_{meg}\pi}} = 46{,}7\ \mathrm{mm}$

$d_1 = 47\ \mathrm{mm}$ $\qquad \frac{R}{2e} = \frac{R}{d_1} = 2{,}66 \rightarrow$ Grashoff de $I_0 \approx I_y$

ellenőrizni kell!

$I_0 = \frac{d_1^4\pi}{64} = 239\,531\ \mathrm{mm}^4$

$A = \frac{d_1^2\pi}{4} = 1734{,}94\ \mathrm{mm}^2$



Túl nagy!

$\sigma_x(z) = \frac{N}{A} + \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_y}\cdot\frac{Rz}{R+z} = -4{,}174\,\frac{Rz}{R+z} \rightarrow \sigma_{belső} = \sigma\left(-\frac{d}{2}\right) = 120{,}8\ \mathrm{MPa}$

$\sigma_{külső} = \sigma\left(\frac{d}{2}\right) = -82{,}6\ \mathrm{MPa}$

Nagyobb méret kell ⇒ $d_2 = 50\ \mathrm{mm}$ ⇒ $\boxed{\sigma_{x\,belső} = 96{,}5\ \mathrm{MPa} < }$ OK!