Szilárdságtan - 3. gyakorlat

Egyenes rúd méretezése, ellenőrzése hajlításra (és normálerőre)

Elméleti összefoglaló

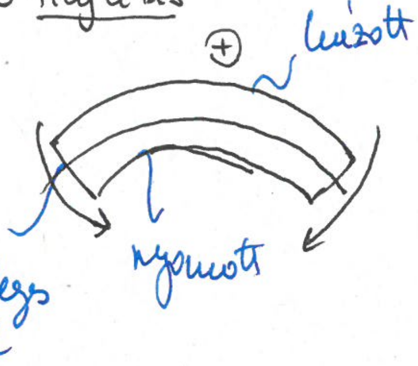
↳ Húzás → Egytengelyű Hooke-tv

$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$

$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$

Poisson-tényező

↳ Hajlítás



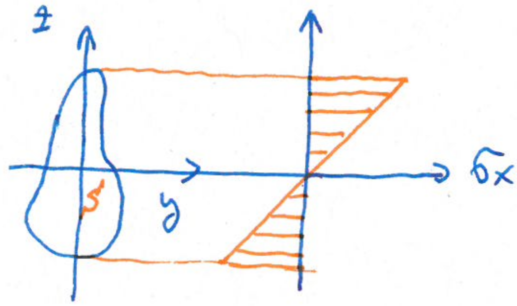
~ Bernoulli hipotézisek

~ körív alakú rúd

Navier-képlet: $\sigma_x(x,z) = \frac{M_h(x)}{I_y(x)} \cdot z$

$\varepsilon_x(x,z) = \frac{M_h(x)}{I_y(x)\, E} \cdot z$

hajlító merevség $[Nm^2]$



A feszültségeloszlás lineáris a rúd mentén

↳ A szélső szálakban a legnagyobb

$\frac{I_y}{z_{max}} = K_y \; [mm^3]$ keresztmetszeti tényező

Méretezés

$\sigma_{max} \leq \sigma_{meg}$

→ mérét. $K_{y\,min.}$ a minimális km-i tényező megadása

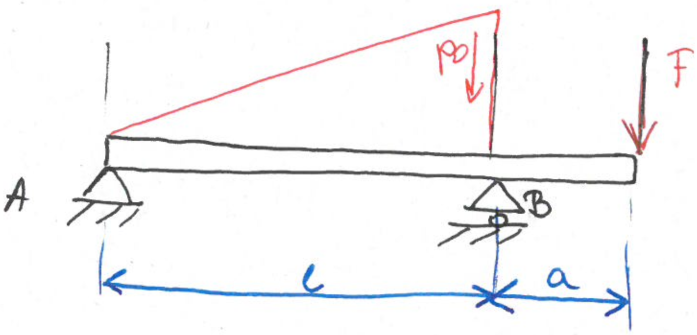
→ ell. jó v. nem!

Nem tiszta hajlítás: $\sigma_x = \sigma_x^{N} + \sigma_x^{M_h}$ → hajlításra méretezünk majd nyomásra + hajlításra ellenőrzünk ⇒ iteráció

Igénybevételi függvények: $\boxed{\frac{dV(x)}{dx} = p(x)}$ és $\boxed{\frac{dM_h(x)}{dx} = -V(x)}$

1. feladat

Ellenőrizzük az alábbi körkeresztmetszetű tartót hajlításra és rajzoljuk meg a veszélyes keresztmetszetben a feszültségeloszlást!



Adatok

$l = 0{,}9\ m$

$a = 0{,}3\ m$

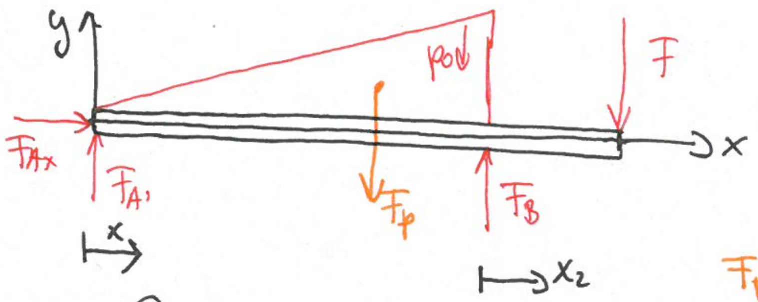
$p_0 = 4\ kN/m$

$F = 1\ kN$

$d = 40\ mm$

$\sigma_{meg} = 100\ MPa$

1) Reakcióerők



Egyensúlyi egyenletek

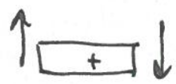
- $\sum F_x = 0 \quad \boxed{F_{Ax} = 0\ N}$
- $\sum F_y = 0 : F_A + F_B - F - \underbrace{\frac{p_0 \cdot l}{2}}_{F_p} = 0$
- $\sum M_A = 0 : F_B \cdot l - F(a+l) - \underbrace{\frac{p_0 \cdot l}{2}}_{F_p} \cdot \frac{2}{3} l = 0$

$$F_B = \frac{\frac{p_0 l^2}{3} + F(a+l)}{l} = 2{,}53\dot{3}\ kN \approx \underline{\underline{2{,}53\ kN}}$$

$$F_A = \frac{p_0 l}{2} + F - F_B = 0{,}27\ kN$$

itt is kerekített érték lesz

Igénybevételi függvények: Két részre osztjuk a rudat!



- $p_1(x) = -\frac{p_0}{l} \cdot x \quad ; \quad p_2(x) = 0$
- $V'(x) = p(x) \rightarrow V(x) = \int p(x)\,dx + V_0$

$$V_1(x) = \int p_1(x)\,dx + V_A = \int -\frac{p_0}{l} x\,dx + F_A = -\frac{p_0}{l}\frac{x^2}{2} + F_A$$

$$V_2(x_2) = \int p_2(x_2)\,dx + V_{B+} = \int 0\,dx + V_{B+} = -\frac{p_0}{l} \cdot \frac{l^2}{2} + F_A + F_B = \underline{\underline{F}}$$

Numerikusan:

$$V_1(x) = 0{,}27 - 2{,}22x^2$$
$$V_1(l) = -1{,}53 \text{ kN}$$
$$V_2(l) = 1 \text{ kN}$$
$$V_2(x) = 1 \text{ kN}$$

zérushely

$$V_1(x_0) = 0$$
$$0{,}27 - 2{,}22x_0^2 = 0$$
$$x_0 = \pm\sqrt{\frac{0{,}27}{2{,}22}} = \pm 0{,}346$$
$$x_0 \approx 0{,}35 \text{ m}$$

• Hajlító nyomaték:

$$M_h' = -V(x) \implies M_h(x) = -\int V(x)\,dx + M_0$$

• $M_{h1}(x) = -\int V_1(x)\,dx + \overset{=0}{M_A} = \frac{p_0}{l}\cdot\frac{x^3}{6} - F_A\cdot x = -0{,}27x + \frac{2{,}22x^3}{3}$ kNm

$$M_h(l) = 0{,}296 \approx 0{,}3 \text{ kNm}$$

• $M_{h2}(x_2) = -\int V_2(x_2)\,dx + \underset{M_h(l)}{M_B} = -\int F\,dx_2 + M_B = -F\cdot x_2 + M_h(l)$

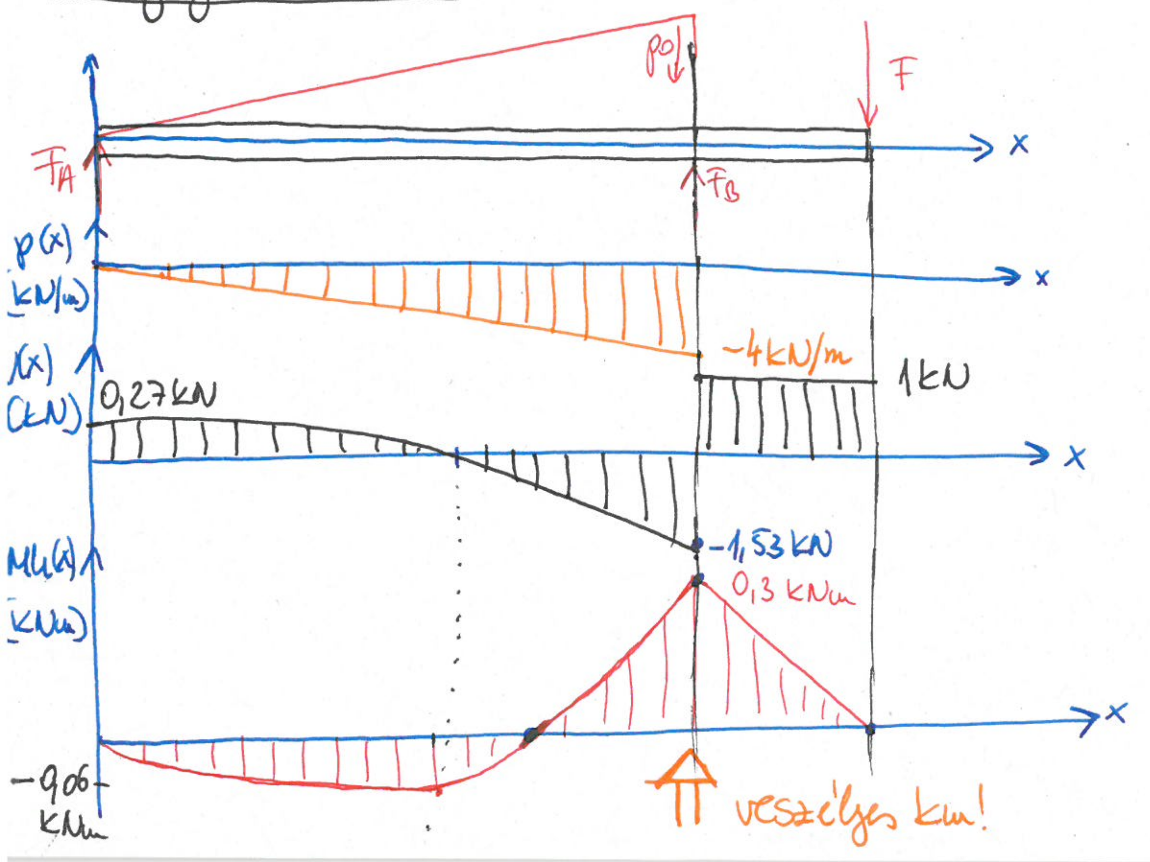
$$M_{h2} = -x_2 + 0{,}3 \text{ kNm}$$

$$M_{h1}(x_0) = -0{,}063 \text{ kNm}$$

zérushely: $M_h(x_1) = 0$

$$-0{,}27x_1 + \frac{2{,}22x_1^3}{3} = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{\frac{0{,}27\cdot 3}{2{,}22}} = 0{,}6 \text{ m}$$

Az igénybevételi ábrák

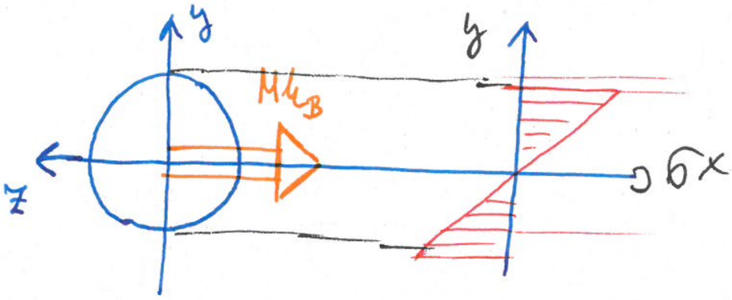


Veszélyes km: „B”

$$M_{h_B} = 0,3 \text{ kNm}$$

$$V_B = -1,53 \text{ kN}$$

$$\sigma_B = \frac{M_{h_B}}{I_z} \cdot y \rightarrow I_z = \frac{d^4\pi}{64} = 1,256 \cdot 10^{-7} \, m^4$$



$$\sigma_{x\,max} = \frac{M_{h_B}}{\frac{d^4\pi}{64}} \cdot \frac{d}{2} = \boxed{44,7 \text{ MPa} < \sigma_{meg}}$$

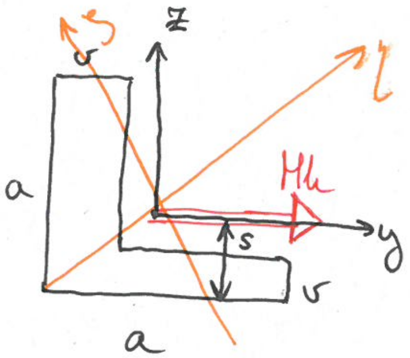
szélső szálban! megfelel!

$$\frac{\frac{d^4\pi}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{d^4\pi}{64} \cdot \frac{2}{d} = \boxed{\frac{d^3\pi}{32} = K_z}$$

kör esetén a km. tényező

2. feladat

Határozzuk meg a σ feszültség eloszlását az alábbi keresztmetszet mentén!



Adatok:

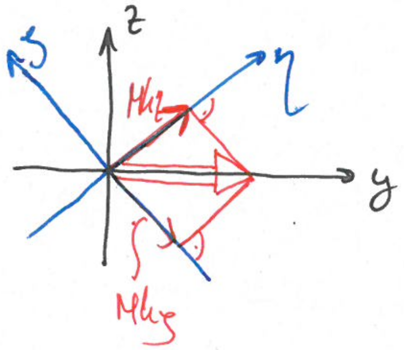
$a = 50$ mm
$v = 6$ mm
$s = 14{,}7$ mm
} lásd előző óra

$I_\eta = 20{,}85\ cm^4$

$I_\zeta = 5{,}41\ cm^4$

$M_h = 500$ Nm

Ez ún. ferde hajlítás $\Rightarrow$ bontsuk fel η és ζ irányú komponensekre!

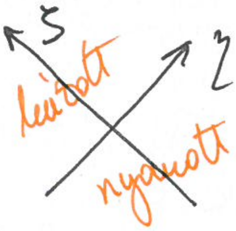


$$M_{h\eta} = M_h \cdot \cos\alpha = M_h \cos 45° = 353{,}55\ Nm$$

$$M_{h\zeta} = -M_h \sin\alpha = -M_h \sin 45° = -353{,}55\ Nm$$

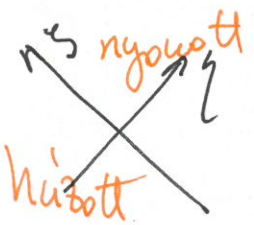
mert $-\zeta$ irányba mutat!

$\Downarrow$ a fesz. eloszlás



- $\sigma_x(\zeta) = \frac{M_{h\eta}}{I_\eta} \cdot \zeta = 1{,}69\,\zeta$ [MPa]

mm-ben!



- $\sigma_x(\eta) = \frac{-M_{h\zeta}}{I_\zeta} \cdot \eta = 6{,}53\,\eta$ [MPa]

- $\sigma_x(\eta, \zeta) = \frac{M_{h\eta}}{I_\eta} \cdot \zeta - \frac{M_{h\zeta}}{I_\zeta} \cdot \eta = \underline{\underline{1{,}69\,\zeta + 6{,}53\,\eta}}$ (MPa)

Zérustengely:

$$\sigma_x(\xi,\eta)=0$$

$$\frac{M_{h\eta}}{I_\eta}\cdot\xi-\frac{M_{h\xi}}{I_\xi}\,\eta=0$$

$\downarrow$

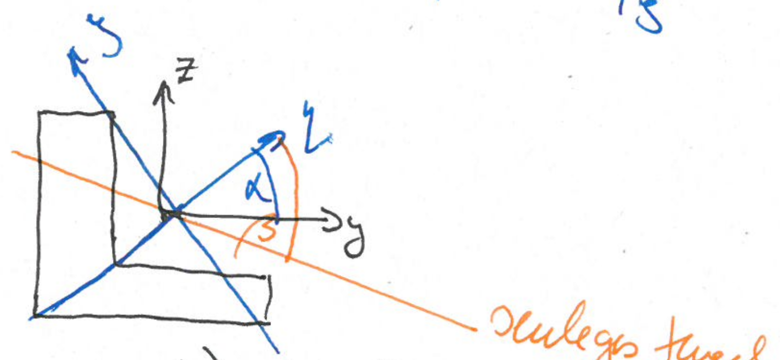
$$\xi=\frac{M_{h\xi}}{M_{h\eta}}\cdot\frac{I_\eta}{I_\xi}\,\eta=\frac{-\cancel{M_h}\sin\alpha}{\cancel{M_h}\cos\alpha}\cdot\frac{I_\eta}{I_\xi}\cdot\eta=-\frac{I_\eta}{I_\xi}\cdot\eta$$

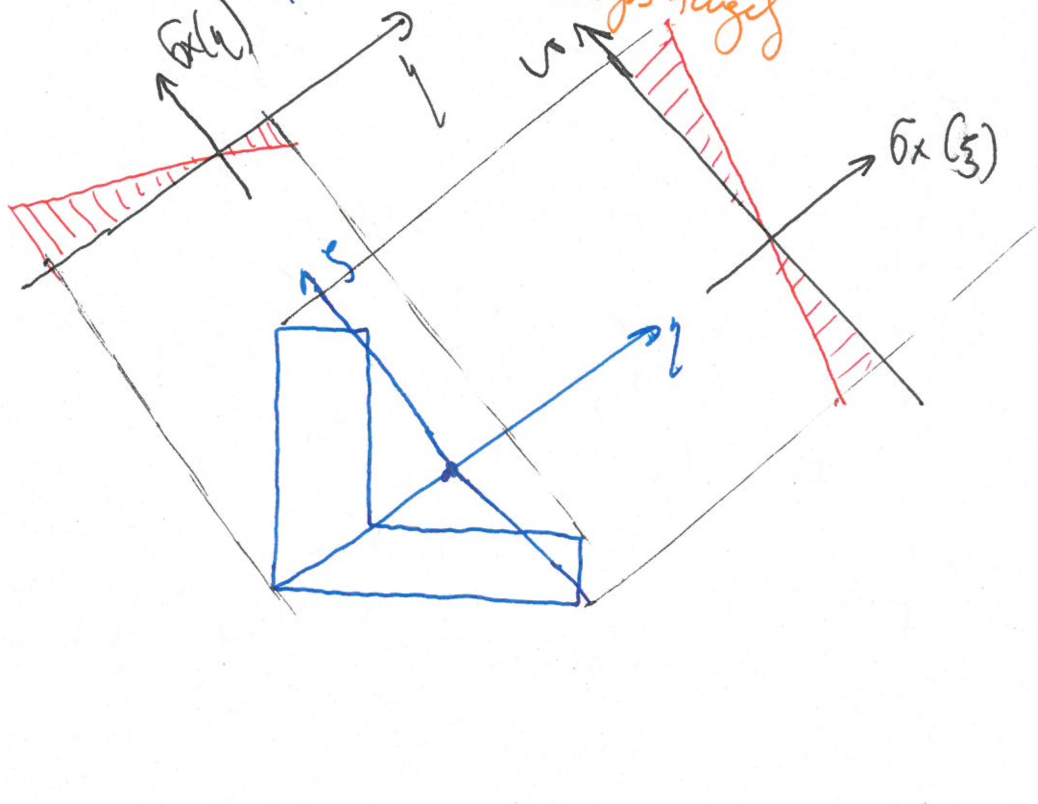
nálunk negatív

egyenes egyenlete!

$$\xi=\operatorname{tg}\beta\cdot\eta$$

$$\operatorname{tg}\beta=-1\cdot\frac{I_\eta}{I_\xi}\;\rightarrow\;\beta=-75{,}45^\circ$$

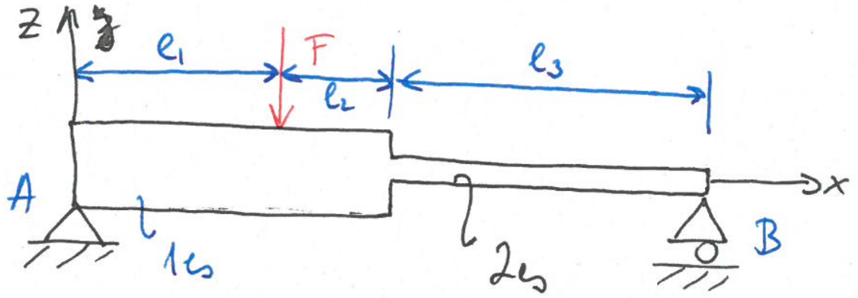


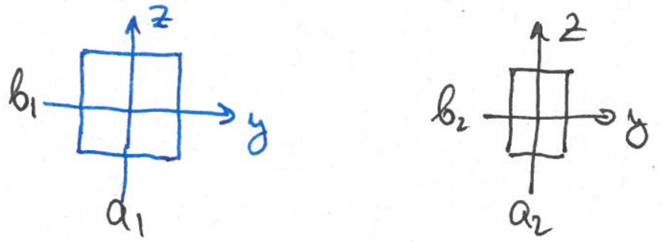


3. feladat

a) Határozzuk meg a tartó AD illetve DB részeinek a keresztmetszet a_1, b_1 illetve a_2, b_2 méreteit, ha $b_1/a_1 = 2$ és $b_2/a_2 = 2$ mellett hajlításra feleljen meg a tartó!

b) Mekkora a minimális a_1, ha az AD szakaszon $N = 300$ kN húzóerő ébred?





Adatok:

$l_1 = 2\,m$

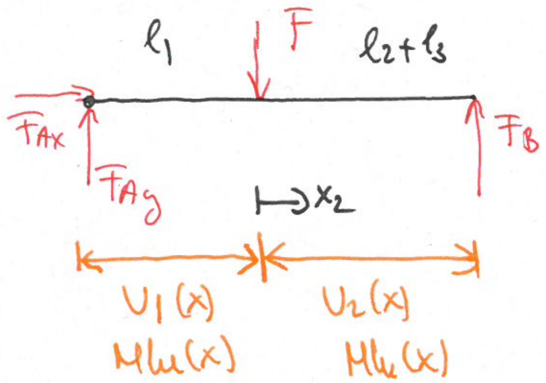
$l_2 = 1\,m$

$l_3 = 4\,m$

$F = 14$ kN

$\sigma_{meg} = 100$ MPa

1. Reakcióerők:



Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0: \quad \underline{\underline{F_{Ax} = 0}}$

$\Sigma F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_B - F = 0$

$\overset{\curvearrowleft}{\Sigma} M_A = 0: \quad -l_1 F + (l_1 + l_2 + l_3) F_B = 0$

$$F_B = \frac{l_1 F}{l_1 + l_2 + l_3} = \underline{\underline{4\,kN}}$$

$$F_{Ay} = F - F_B = \underline{\underline{10\,kN}}$$

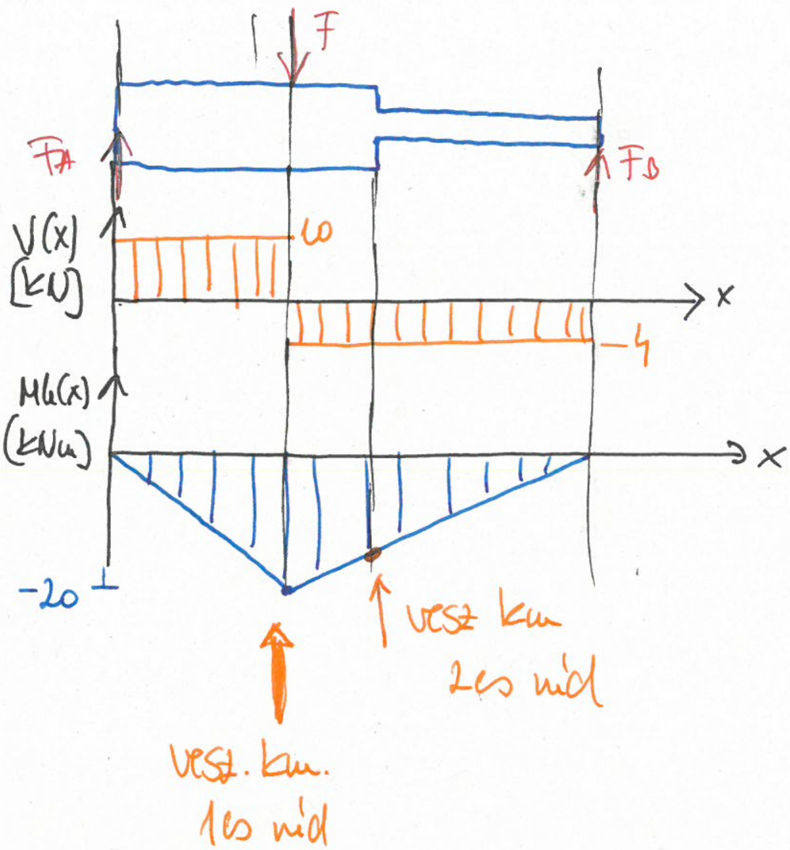
Igénybevételi függvények:

$V_1(x) = F_{Ay} = 10\,kN \longrightarrow M_{h1} = -\int V_1(x)\,dx + M_A = -10x$

$M_{h1}(l_1) = \underline{\underline{-20\,kNm}}$

$V_2(x_2) = F_{Ay} - F = -4\,kN \longrightarrow M_{h2} = -\int V_2(x_2)\,dx_2 + M_C = \underline{\underline{4x_2 - 20}}$

Igénybevételi ábrák

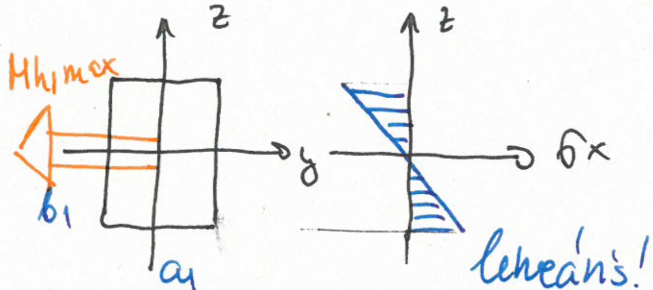


$M_{h\,max_1} = -20\ kNm$

$M_{h\,max_2} = -16\ kNm$

Méretezés:

1es km: (nyomott)



$$\left|\sigma_{x\,max}\right| = \left|\frac{M_{h\,max}}{I_y}\cdot z_{max}\right|$$

$$= \left|\frac{M_{h_1 max}}{\frac{a_1 b_1^3}{12}}\cdot\frac{b_1}{2}\right| = \left|\frac{M_{h_1 max}}{\frac{2}{3}a_1^3}\right| \le \sigma_{meg}$$

$$a_{1\,min} = \sqrt[3]{\frac{M_{h_1}}{\frac{2}{3}\sigma_{meg}}} = \underline{\underline{0{,}067\ m}}$$

$$b_{1\,min} = 2\,a_{1\,min} = \underline{\underline{0{,}134\ m}}$$

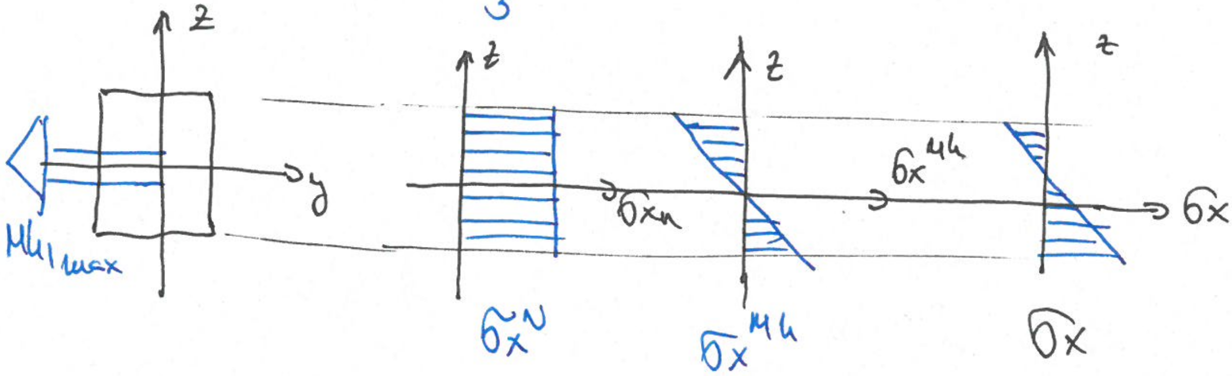
2es km (nyomott)

$$\left|\sigma_{x\,max}\right| \le \sigma_{meg} \Rightarrow \left|\frac{M_{h_2 max}}{\frac{2}{3}a_2^3}\right| \le \sigma_{meg} \rightarrow a_{2\,min} = \sqrt[3]{\frac{M_{h_2}}{\frac{2}{3}\sigma_{meg}}} = \underline{\underline{0{,}062\ m}}$$

$$b_{2\,min} = 2\,a_{2\,min} = \underline{\underline{0{,}124\ m}}$$

b) az les mid mentéi $N=300\,kN$ húzóerő

$$\sigma_{x\,max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{h\,max}}{\frac{2}{3}a_1^3} \rightarrow \sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^{Mh}$$



$$\sigma_{x\,max} = \frac{N}{a_1 b_1} + \frac{M_{h1\,max}}{\frac{2}{3}a_1^3} = \frac{N}{2a_1^2} + \frac{M_{h\,max}}{\frac{2}{3}a_1^3}$$

$$\Downarrow$$

$$|\sigma_{x\,max}| = \left|\frac{N}{2a_1^2} + \frac{M_{h\,max}}{\frac{2}{3}a_1^3}\right| \leq \sigma_{meg}$$

↳ harmadfokú egyenlet

ITERÁCIÓ

1. iterációs lépés

$a_1 = 0,067\,m = 67\,mm$

$A = 8978\,mm^2$

$K_y = 200509\,mm^3$

$\sigma_{x\,max} = 133,161\,MPa > \sigma_{meg}$ NEM JÓ!

2. lépés

$a_1 = 70\,mm$

$A = 9800\,mm^2$

$K_y = 228667\,mm^3$

$\sigma_x = 118,08\,MPa > \sigma_{meg}$ NEM JÓ

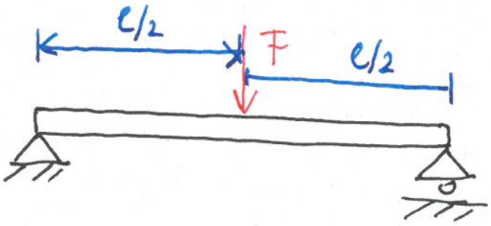
3. lépés

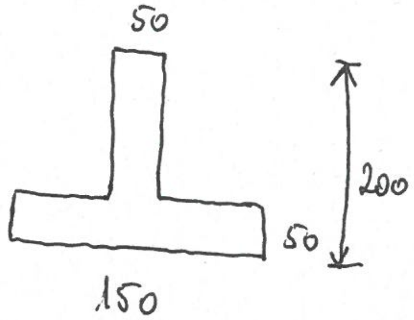
$a_1 = 75\,mm$ $K_y = 281250\,mm^3$

$A = 11250\,mm^2$ $\sigma_x = 97,78\,MPa$ ✓ JÓ

4. feladat

A vázolt rúd anyagára különböző a rugalmassági határ húzásra és nyomásra. Határozzuk meg a rúdban ébredő maximális húzó és nyomófeszültséget, valamint a biztonsági tényezőt!





Adatok:

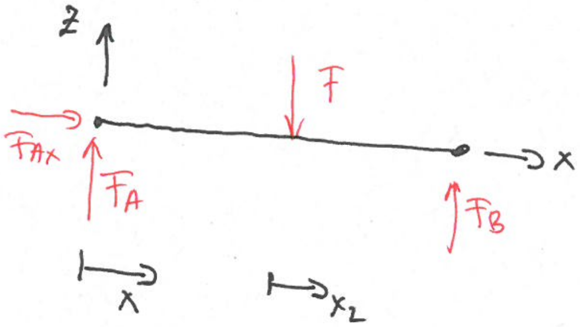
$l = 3{,}6\ (m)$

$F = 8\ kN$

$\sigma_F^{Húzás} = 30\ MPa$

$\sigma_F^{nyomás} = -60\ MPa$

1) Reakciók



Egyensúlyi egyenletek!

$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{F_{Ax} = 0}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_B - F = 0$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F \cdot \frac{l}{2} + F_B \cdot l = 0$

$\Rightarrow F_B = \frac{F \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{l} = \underline{\underline{\frac{F}{2}}} = 4\,kN$

$\Rightarrow \underline{\underline{F_A = \frac{F}{2} = 4\,kN}}$

2) Igénybevételek

$V_1(x) = F_A$

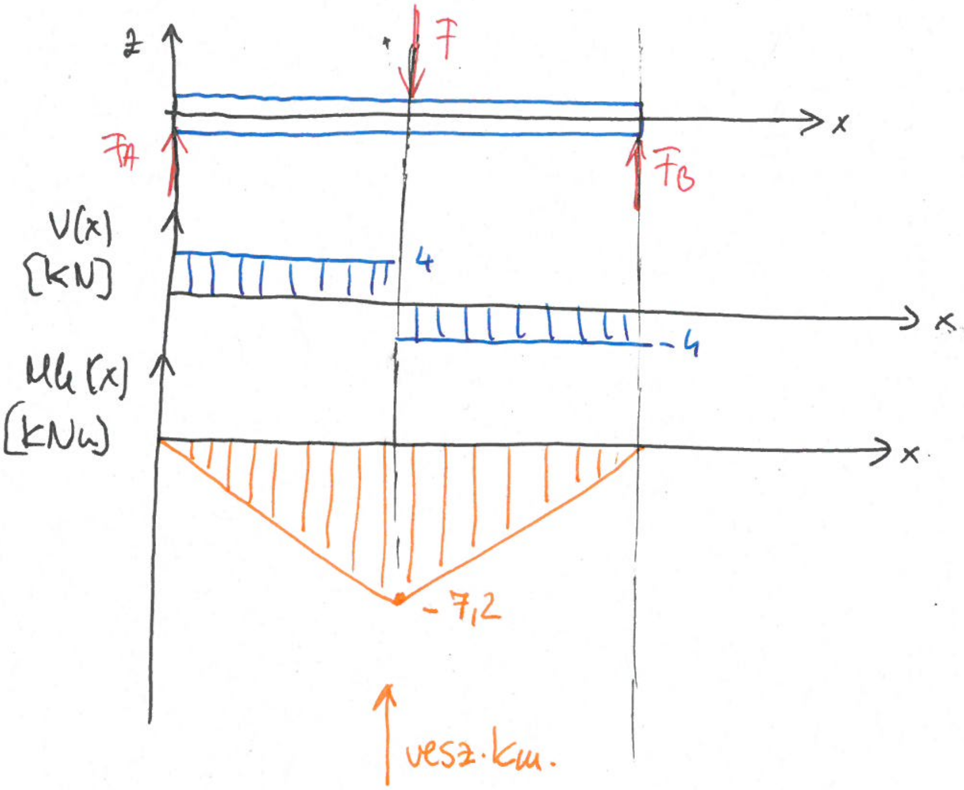
$V_2(x_2) = F_A - F = -F_B$

$M_{h1}(x) = -\int V_1(x)\,dx + \overset{=0}{M_A} = \underline{-F_A \cdot x}$

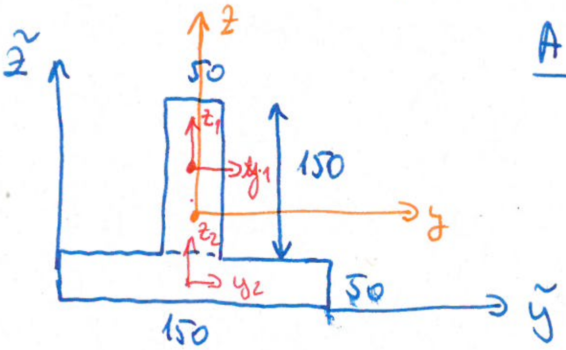
$M_{h1}\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{F_A \cdot l}{2} = -7{,}2\ kNm$

$M_{h2}(x_2) = -\int V_2(x_2)\,dx_2 + M_{02} = F_B \cdot x_2 - \frac{F_A \cdot l}{2}$

Igénybevételi ábrák



2) Másodrendű nyomatékok



A súlypont helye $(\tilde{y}, \tilde{z})$ KR-ben

$$S_y = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{75 \cdot 50 \cdot 150 + 75 \cdot 50 \cdot 150}{50 \cdot 150 + 50 \cdot 150}$$

$$S_y = \underline{\underline{75 \text{ mm}}}$$

$$A_1 = A_2 = 50 \cdot 150 = 75000 \text{ mm}^2$$

$$S_z = \frac{z_1 A_1 + z_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{125 \cdot 50 \cdot 150 + 25 \cdot 50 \cdot 150}{50 \cdot 150 + 50 \cdot 150} =$$

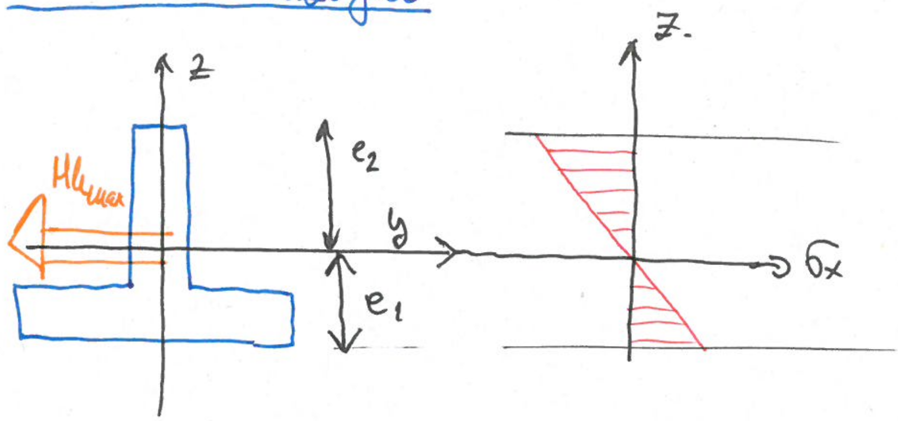
$$S_z = \underline{\underline{75 \text{ mm}}}$$

$$I_y = I_{y1} + (S_z - z_1)^2 A_1 + I_{y2} + (S_z - z_2)^2 A_2$$

$$I_y = \frac{150 \cdot 50^3}{12} + (75-25)^2 \cdot 50 \cdot 150 + \frac{50 \cdot 150^3}{12} + (75-125)^2 \cdot 50 \cdot 150 = 5{,}31 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_z = I_{z1} + 0^2 \cdot A_1 + I_{z2} + 0 \cdot A_2 = \frac{50 \cdot 150^3}{12} + \frac{150 \cdot 50^3}{12} = 1{,}56 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Maximális húzó fesz



- maximális húzófeszt.: $e_1 = 75\ mm$

$$\sigma_x^{H} = \frac{M_{h,max}}{I_y}(-e_1) = \underline{\underline{10{,}2\ MPa}}$$

$$\sigma_F^{Húzás} = 30\ MPa$$

$$n = \frac{\sigma_F^{Húzás}}{\sigma_x^{H}} = \underline{\underline{2{,}95}}$$

- maximális normálfeszt. nyomásra

$$e_2 = 125\ mm$$

$$\sigma_x^{Ny} = \frac{M_{h,max}}{I_y}\cdot e_2 = \underline{\underline{-17\ MPa}}$$

$$\Rightarrow \sigma_F^{Nyom} = 60\ MPa$$

$$n = \frac{|\sigma_F^{Nyom}|}{|\sigma_{x}^{Nyom}|} = \underline{\underline{3{,}54}}$$

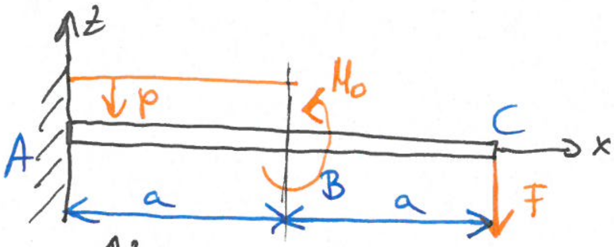
A teljes szerkezet biztonsági tényezője a két tényező közül a kisebb

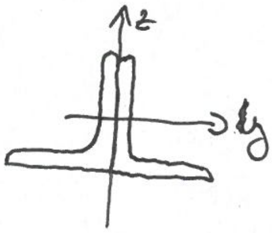
$\Downarrow$

$\underline{\underline{n = 2{,}95}}$

5. feladat

Méretezzük a vázolt rudat, amely két egyenlőszárú L-acélból készült!





Adatok:

$M_0 = 2\ kNm$

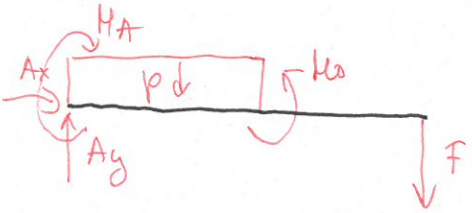
$p = 500\ N/m$

$F = 1\ kN$

$a = 1\ m$

$\sigma_{meg} = 150\ MPa$

1) Reakcióerők



Egyensúlyi egyenletek

$$\Sigma F_x = 0: \quad \boxed{A_x = 0}$$

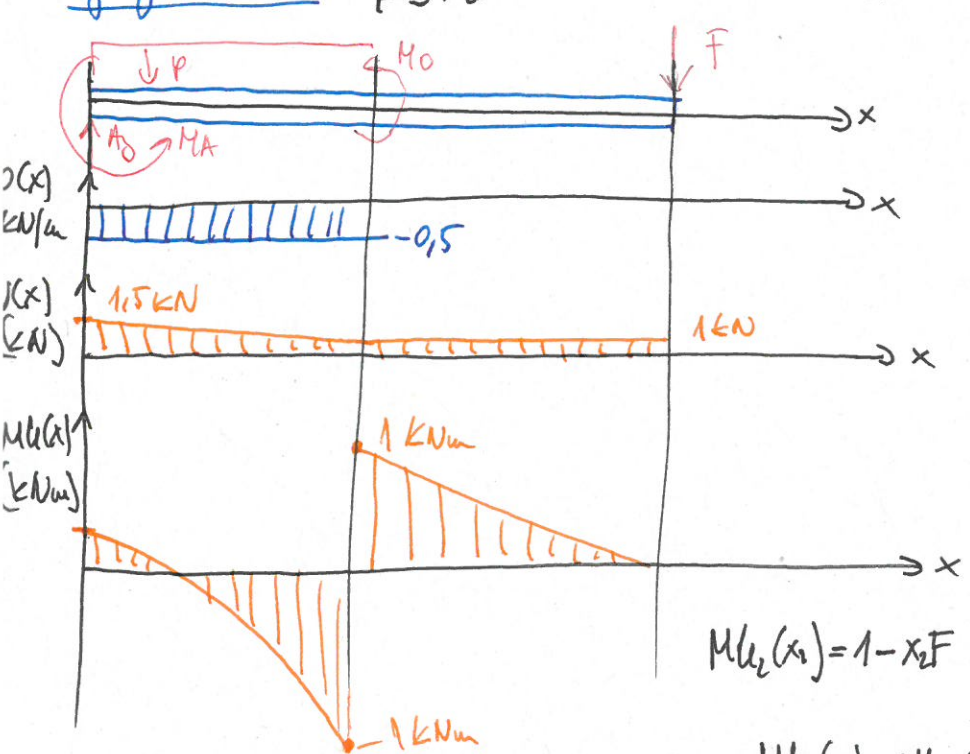
$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y - pa - F = 0$$

$$A_y = F + p \cdot a = \underline{\underline{1{,}5\ kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0: \quad -M_A + M_0 - F \cdot 2a - \frac{p \cdot a^2}{2} = 0$$

$$M_A = M_0 - F \cdot 2a - \frac{pa^2}{2} = -0{,}25\ \underline{\underline{kNm}}$$

Igénybevételek



$$p_1(x) = -p$$

$$p_2(x_2) = 0$$

$$V_1(x) = \int p_1(x)\,dx + A_y = -px + A_y$$

$$V_1(a) = 1\ kN$$

$$V_2(x_2) = F = 1\ kN$$

$$M_{h1}(x) = -\int V_1(x)\,dx + M_A$$

$$M_{h2}(x_2) = 1 - x_2 F \qquad M_{h1}(x) = \frac{px^2}{2} - A_y x + 0{,}25$$

$$M_{h1}(a) = \frac{pa^2}{2} - A_y a + 0{,}25 = -1$$

$$M_{h2}(a) = M_{h1}(a) + M_0 = 1\ kNm$$

Veszélyes km „B"

$$M_{h_B} = \pm 1 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{x\,max} = \frac{M_{h_B}}{K_y} \longrightarrow K_y = \frac{|M_{h_B}|}{\sigma_{x\,meg}} = 6666{,}66 \text{ mm}^3 = \underline{\underline{6{,}66 \text{ cm}^3}}$$

keresztmetszeti tényező"

Ez a két L szelvény együtt!

Szelvénytáblázat (lásd hivatkozás)

mivel 2 L-szelvény van összeillesztve

1db L-szelvény: $K_{y\,min} = \underline{\underline{3{,}33 \text{ cm}^3}}$

A táblázatban $(W_x = K_y)$ kell

A választott szelvény: $\underline{\underline{50.50.6}}$

$$W_x = \underline{\underline{3{,}61 \text{ cm}^3}}$$