

# Statika - 1. gyakorlat

1

## Alapfogalmak - Az erő

Administratív információk: Bereczvai Szabolcs

MM. épület fszt. 11.

berezvai@mm.bme.hu

Honlap: [www.mm.bme.hu/~berezvai](http://www.mm.bme.hu/~berezvai)

↳ órai anyagok, plusz gyakorló feladatok

Eredmények: Moodle-rendszer

Konzultációs időpont:

Hétfő	15:30 - 16:30
Kedd	9:30 - 10:30

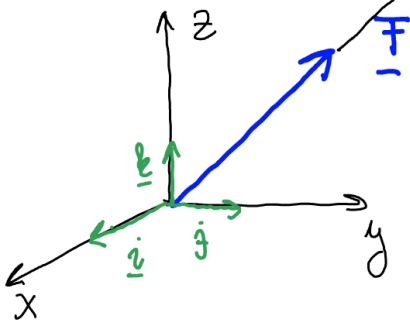
Félévi követelmények: 2 db Zártulaj (8. és 14. hét)  
4 db Házi feladat  
pluszpontok: MiniZH (előadások végén)

A gyakorlaton a jelenlétet mindig ellenőrizze!

Elmaradó órák: 1. oktatási hét

Elméleti összefoglaló:

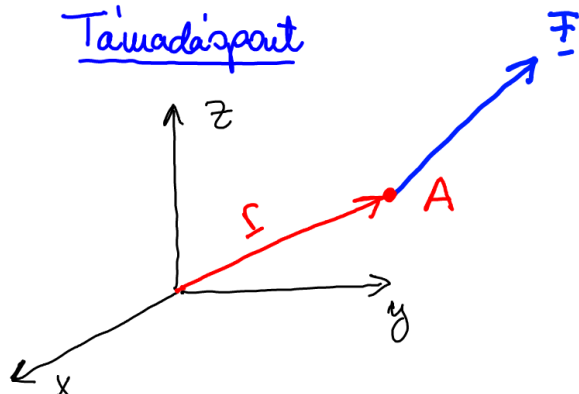
~ hatásával



$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

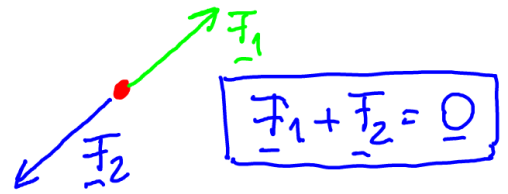
( $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ )  
vektormegjelölés!

Támadáspont



## Axiómák:

- 1) Két test kölcsönhatása  $\rightarrow$  Erő és ellenerő azonos nagyság, de ellentétes irány!
- 2) Két erő egyensúlya  
 $\hookrightarrow$  Közös hatásvonal, azonos nagyság  
ellentétes irány!
- 3) Erőösszeg (közös támadáspont)  
 $\hookrightarrow$  Eredőerő  $\rightarrow$  matematikailag: vektori összeg
- 4) Egyensúlyi erőrendszer hozzáadása  
 $\hookrightarrow$  Az erő hatásvonalát mentén eltolható!
- 5) Helyettesíthetőség



## Kényszerek:

Támasz



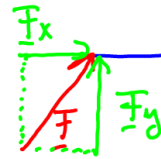
Csukló



Kötél

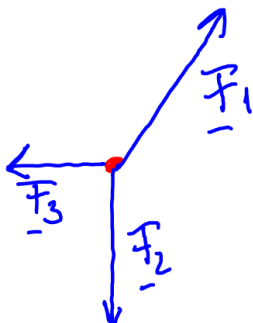


Reakcióerő



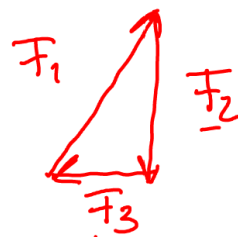
## Három erő egyensúlya:

- Hatásvonaluk egy pontban metsződik
- Záródó vektorháromszöget alkotnak!

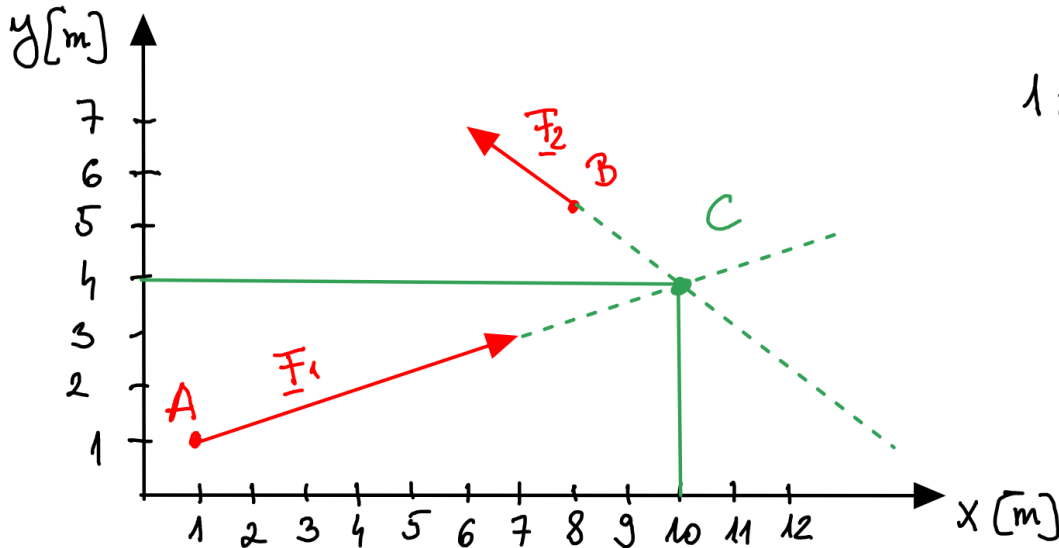


$$\underline{F_1 + F_2 + F_3 = 0}$$

Erőháromszög



**1. feladat** Egy vektor törtet az ábrán megadott  $\underline{F}_1$  és  $\underline{F}_2$  erők terhelik. Helyettesítsük a két erőt az eredőjével és adjuk meg az eredő irányvonalának egy pontját!  
Milyen szöveget zár be az eredő irányvonal az x-tengellyel?



$1 \text{ m} \hat{=} 10 \text{ N}$   
 $\hookrightarrow$  előlepték!

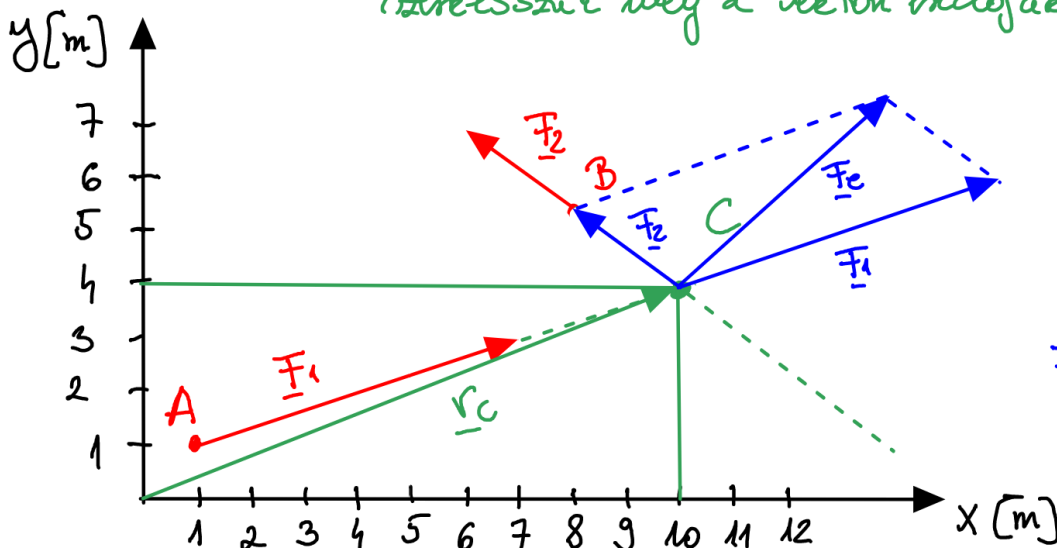
1. megoldás : Szerkesztéssel

- ① Az erők a határvonalak mentén eltolhatók  
 $\hookrightarrow$  húzzuk meg a határvonalakat  
 $\hookrightarrow$  A metszéspontban tudjuk őket összegezni!

C pont koordinátája leolvasható

$C(10, 4)$

- ② Töljük el az erőket a C pontba és szerkesszük meg a vektorok eredőjét!



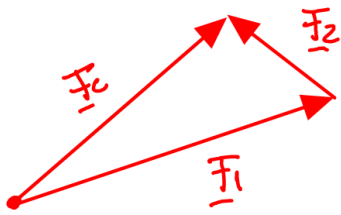
$\hookrightarrow$  parallelogramma szabály!

leolvasható:

$$\underline{F}_e \hat{=} \begin{bmatrix} 4 \\ 3,5 \end{bmatrix} [\text{m}] \rightarrow \underline{F}_e = \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Másképpen: Erőábra  $\rightarrow$  vektorsokszög módszer

• Innen is leolvasható:



$$\underline{F}_E = \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Mekkora az erdőmő nagysága?

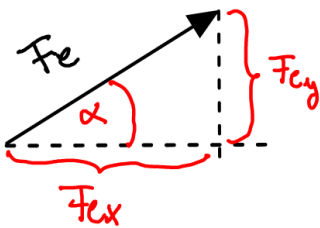
$$|\underline{F}_E| = \sqrt{F_{Ex}^2 + F_{Ey}^2} = \sqrt{40^2 + 35^2} = \sqrt{2825} = \underline{\underline{53,15 \text{ N}}}$$

Tehát az erdőmő:  $\underline{F}_E = \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \end{bmatrix} \text{ N}$  Találadáspontja:  $\underline{r}_E = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ m}$

Az x-tengellyel bezárt szög:

$$\tan \alpha = \frac{F_{Ey}}{F_{Ex}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{F_{Ey}}{F_{Ex}}\right) = \arctan\left(\frac{35}{40}\right) = \underline{\underline{41,19^\circ}}$$



2. megoldás: SZÁMOLÁSSAL

Olvasuk le az ábráról az erők találadáspontjait és az erők vektort:

$$\bullet \underline{r}_1 = \underline{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ m} \quad \underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ N}$$

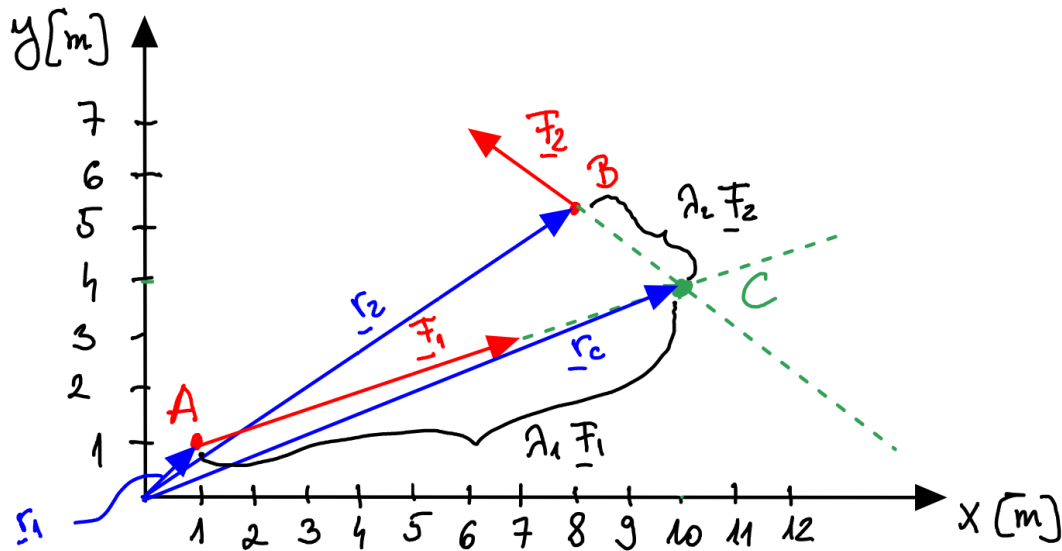
$$\bullet \underline{r}_2 = \underline{r}_{OB} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5,5 \end{bmatrix} \text{ m} \quad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -20 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Az erdőmő

$$\underline{F}_E = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_E = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 40 \\ 35 \end{bmatrix} \text{ N}}}$$

## Támadáspont kiszámítása



A C pontba mutató helyvektor:  $\underline{r}_c = \underline{r}_1 + \lambda_1 \underline{F}_1 = \underline{r}_2 + \lambda_2 \underline{F}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 \cdot 60 \\ 1 + \lambda_1 \cdot 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - \lambda_2 \cdot 20 \\ 5,5 - \lambda_2 \cdot 15 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ egyenlet} \\ 2 \text{ ismeretlen} \end{array}$$

$$\ominus \begin{cases} 60 \lambda_1 + 20 \lambda_2 = 7 & (1) \\ 20 \lambda_1 - 15 \lambda_2 = 4,5 & (2) \end{cases}$$

$$60 \lambda_1 - 45 \lambda_2 = 13,5$$

$$65 \lambda_2 = -6,5 \rightarrow \lambda_2 = -0,1$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = 0,15$$

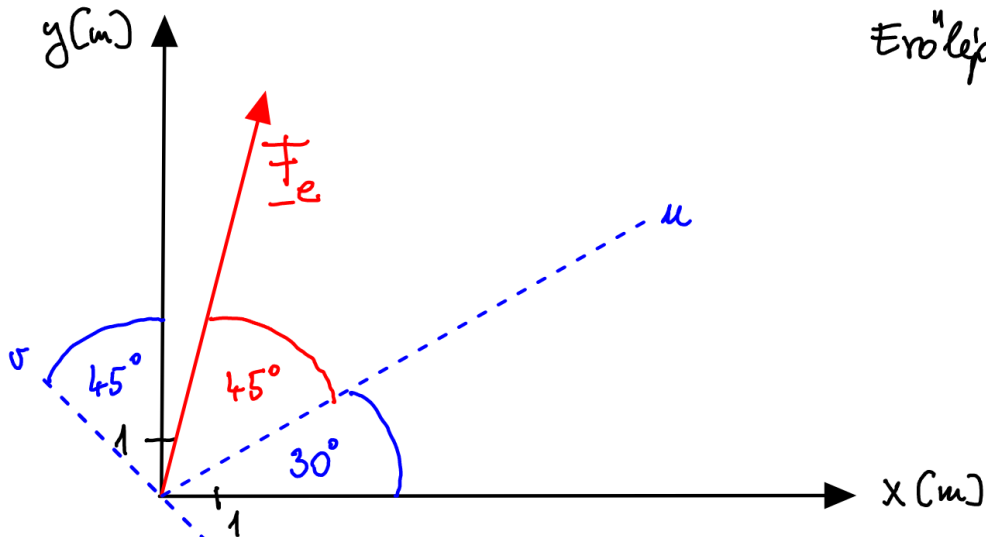
Visszaírva  $\underline{r}_c$ -be:

$$\underline{r}_c = \underline{r}_1 + \lambda_1 \cdot \underline{F}_1 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ m}}}$$

## 2. feladat

Egy ismeretlen ható erő iránya és értéke az ábra szerinti, nagysága  $F_e = 1000 \text{ N}$ . Bontsd fel az erőt a megadott  $u$  és  $v$  hatásvonalakba eső komponensekre! Írd fel a komponensek nagyságát!

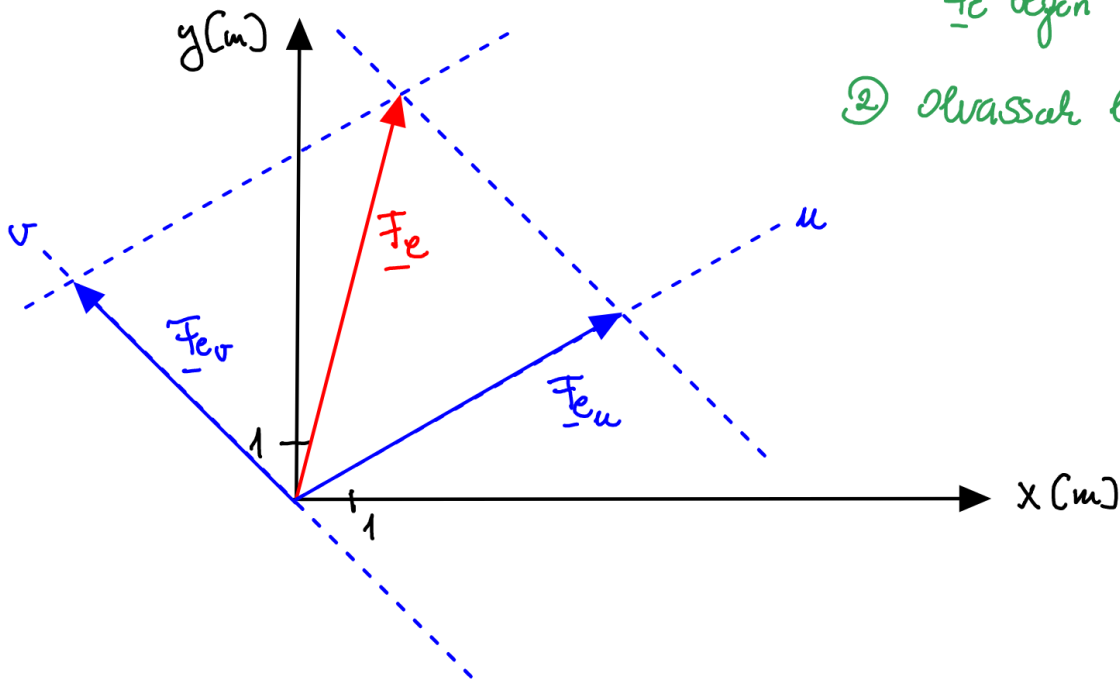
Értékték:  $1000 \text{ N} \approx 7,7 \text{ m}$



1. megoldás: szerszakkal

① húzzunk párhuzamos egyeneseket  $\underline{F_e}$  végén  $u$  és  $v$  egyenesekkel

② olvassuk le a vetületeket!



Leolvassuk:  $|\underline{F_{eu}}| \sim 6,89 \text{ m} \rightarrow |\underline{F_{eu}}| = 896 \text{ N}$

$|\underline{F_{ev}}| \sim 5,36 \text{ m} \rightarrow |\underline{F_{ev}}| = 732 \text{ N}$

## 2. megoldás: számolással

↳ ugyanúgy párhuzamosokat húzunk!

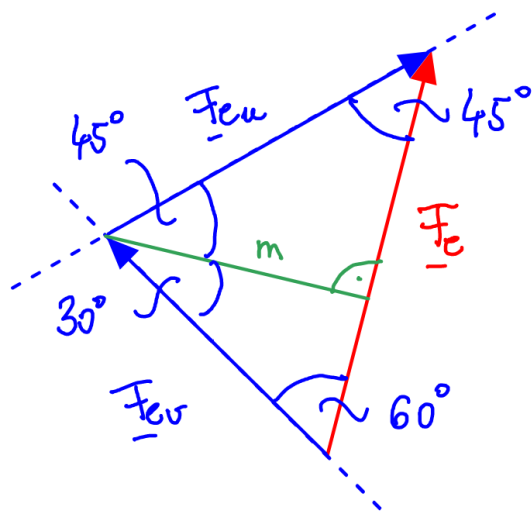
↓ A komponensek bontás miatt

$$\underline{F}_E = \underline{F}_{Eu} + \underline{F}_{Ev}$$

A háromszög oldalai:

$$F_E = |\underline{F}_E| = 1000 \text{ N}$$

$$F_{Eu} = |\underline{F}_{Eu}| \text{ és } F_{Ev} = |\underline{F}_{Ev}|$$



Geometriai egyenletek a két derékszögű háromszögből:

$$\left. \begin{aligned} F_E &= F_{Ev} \cdot \cos 60^\circ + F_{Eu} \cdot \cos 45^\circ \\ m &= F_{Ev} \cdot \sin 60^\circ = F_{Eu} \cdot \sin 45^\circ \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_E &= \frac{1}{2} F_{Ev} + \frac{1}{\sqrt{2}} F_{Eu} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} F_{Ev} &= \frac{1}{\sqrt{2}} F_{Eu} \end{aligned}$$

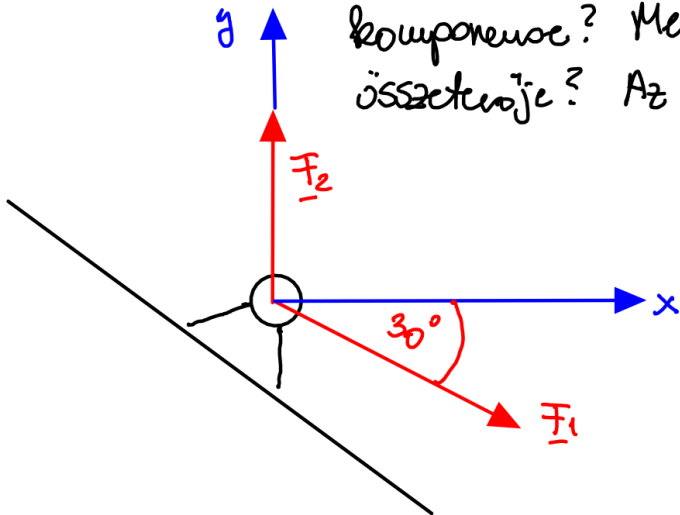
$$F_E = \frac{1}{2} F_{Ev} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{Ev} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} F_{Ev}$$

$$\hookrightarrow F_{Ev} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} F_E = \underline{\underline{732 \text{ N}}}$$

$$\hookrightarrow F_{Eu} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot F_{Ev} = \underline{\underline{897 \text{ N}}}$$

### 3. feladat

Mekkora legyen  $F_1$  erő nagysága, ha azt szeretnénk, hogy a köteleknek átadódó erőnek ne legyen függőleges komponense? Mekkora a köteleknek átadódó erő  $x$ -irányú összetevője? Az  $F_2$  erő nagysága 2 kN.



Az erővektorok:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1 \cos(-30^\circ) \\ F_1 \sin(-30^\circ) \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2000 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Az eredőerő:  $\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} F_1 \cos(-30^\circ) \\ F_1 \sin(-30^\circ) + F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ 0 \end{bmatrix}$

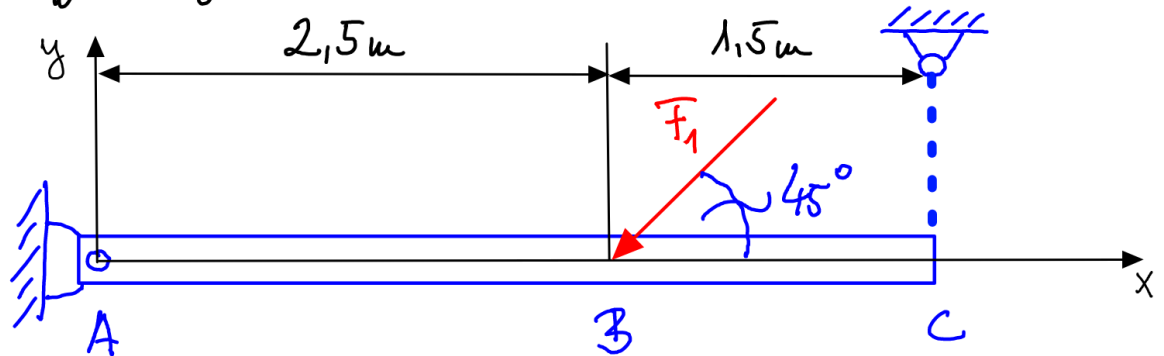
Ebből:  $-\frac{1}{2} F_1 + F_2 = 0 \rightarrow F_1 = 2 F_2 = \underline{\underline{4000 \text{ N}}}$

$$F_e = F_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{3464,1 \text{ N}}}$$

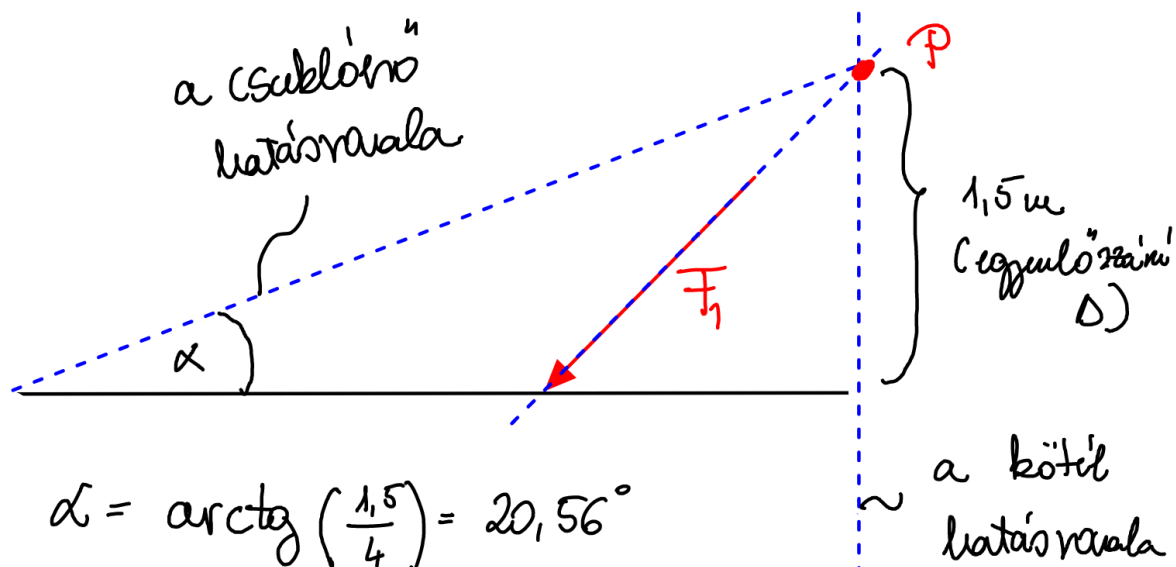


#### 4. feladat

A vízszintes rúd az A helyen csuklóban van megtámasztva, C helyen pedig kötéllel van felfüggesztve. A rúdat a B pontban  $F_1 = 3 \text{ kN}$  nagyságú  $45^\circ$  terhelés éri, hogy a rúd, a fal és az  $m$  egy síkban legyen. A rúd és a fal súlyaól eltekintünk. Mekkora erő adódik át a rúdra az A csuklóban egyensúly esetén? Mekkora a kötélen ábrázolt  $m$ ?

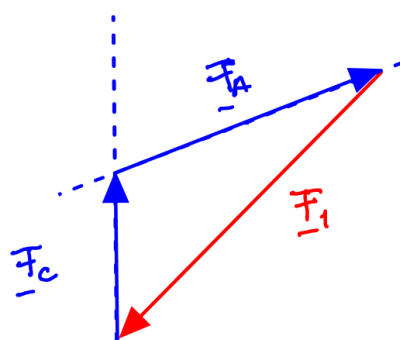


A rúdra 3 erő hat  $\Rightarrow$  Egyensúly, ha  $\rightarrow$  zárt vektorképlet  
 $\rightarrow$  hatásvonalak egy pontba metsződnek



Erőábra:

$$4,5 \text{ m} \triangleq 3 \text{ kN}$$

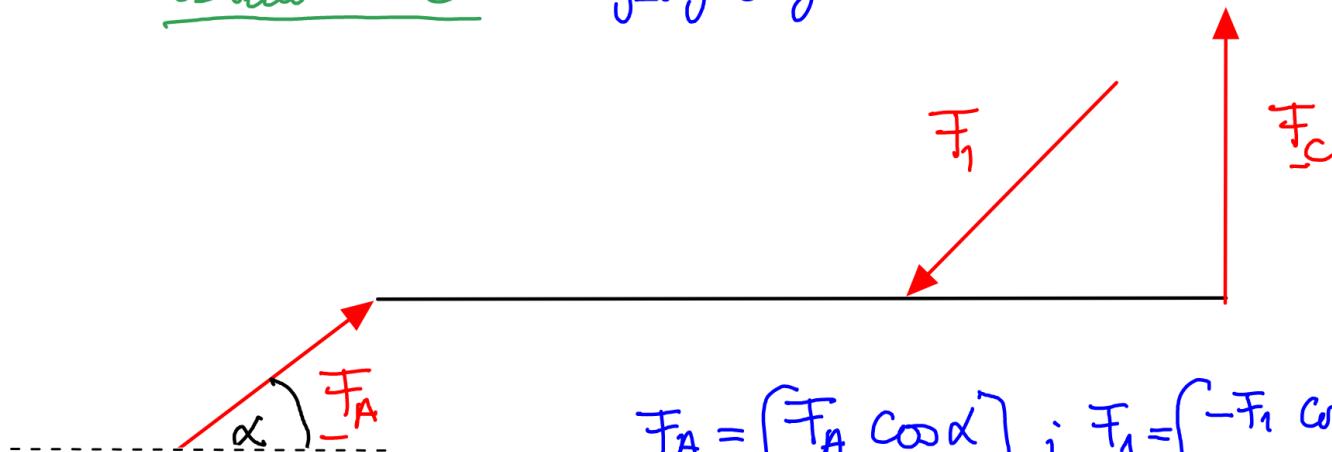


eredmény:  $F_A = 2265,5 \text{ N}$

$F_C = 1325,8 \text{ N}$

## Számtárral

Rajzolyuk fel a nida bató mököt!



$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} F_A \cos \alpha \\ F_A \sin \alpha \end{bmatrix} ; \quad \underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -F_1 \cos 45^\circ \\ -F_1 \sin 45^\circ \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ F_c \end{bmatrix}$$

$$\underline{F_e} = \underline{F_A} + \underline{F_C} + \underline{F_1} = \begin{bmatrix} F_A \cos \alpha - F_1 \cos 45^\circ \\ F_A \sin \alpha + F_C - F_1 \sin 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow F_A = \frac{F_1 \cos 45^\circ}{\cos \alpha} = \underline{\underline{2265,5 \text{ N}}}$$

$$\hookrightarrow F_c = F_1 \sin 45^\circ - F_A \sin 45^\circ = \underline{\underline{1325,83 \text{ N}}}$$

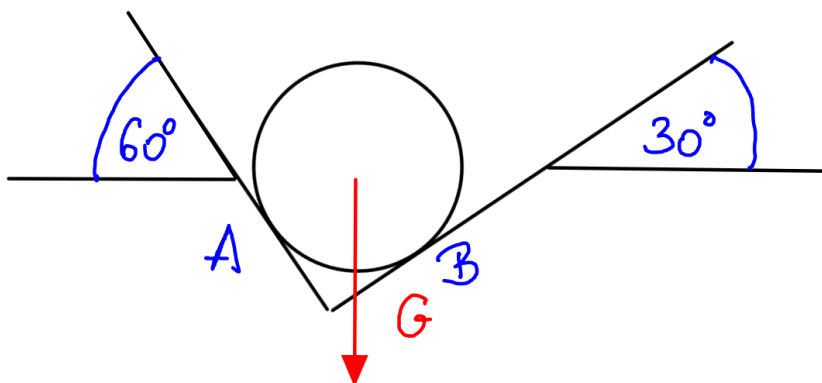
$$F_A = \begin{bmatrix} 2121, 32 \\ 795, 49 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$\underline{F_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1325,83 \end{bmatrix} \text{ N}$$

### 5. feladat

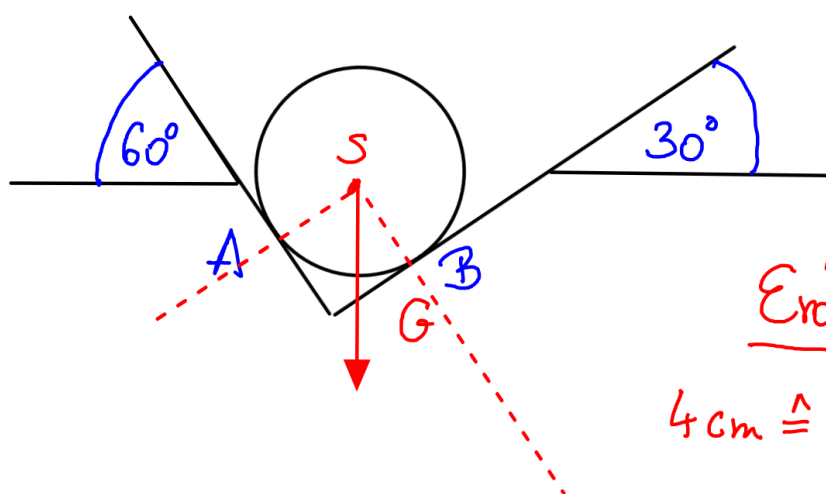
Két teljesre sima a rajz síkjára merőleges síklap által alkotott válygban  $G = 10 \text{ N}$  súlyú korongot helyezünk. Határozzuk meg az A és B felületről átadódó erőket!

Mekkora minimális  $F$  nagyságú vízszintes erőt kell működtetni a korong súlypontjába, hogy az A felület a reakcióerőt zérusra csökkentse? Mekkora ekkor a B felületre cselekvő reakcióerő?



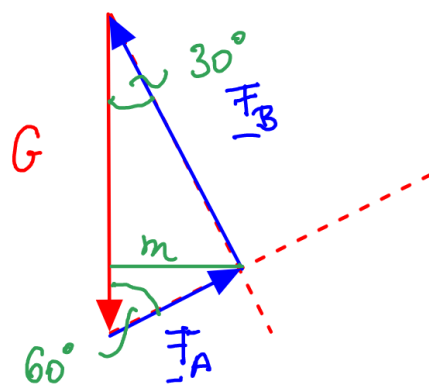
Megoldás: A korongra 3 erő hat  $\rightarrow$  egyensúly

$\rightarrow$  zárt vektor  $\Delta$   
 $\rightarrow$  határozatlanok egy pontba metsződnek



Eroabra

$$4 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ N}$$



Leolvassa:

$$F_A = 5 \text{ N}$$

$$F_B = 8,66 \text{ N}$$

Számolásnál:

$$\left. \begin{aligned} m &= F_A \cdot \sin 60^\circ = F_B \cdot \sin 30^\circ \\ F_A \cos 60^\circ + F_B \cos 30^\circ &= G \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_A = \frac{1}{2} F_B \rightarrow \sqrt{3} F_A = F_B$$

$$\frac{1}{2} F_A + \frac{\sqrt{3}}{2} F_B = G$$

$$\frac{1}{2} F_A + \frac{3}{2} F_A = G$$

$$2F_A = G \rightarrow \frac{G}{2} = F_A = \underline{\underline{5N}}$$

$$F_B = \sqrt{3} F_A = \underline{\underline{8,66N}}$$

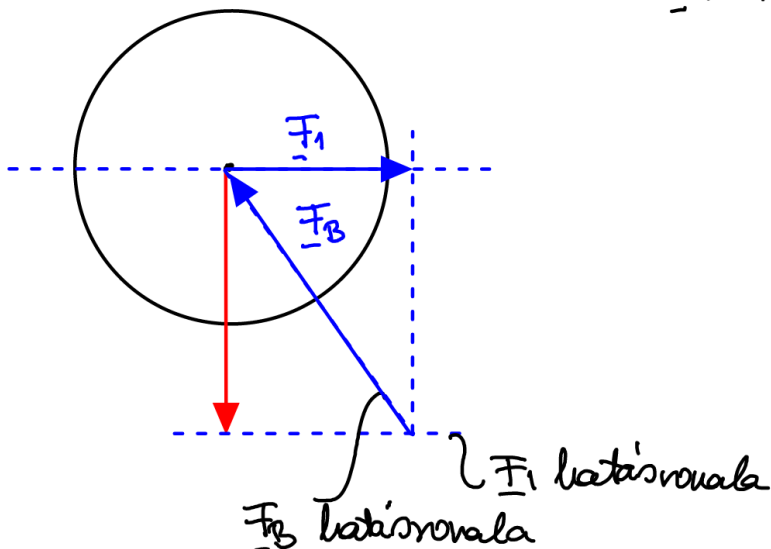
Vektorosan:

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} F_A \cos 30^\circ \\ F_A \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,33 \\ 2,5 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{F}_B = \begin{bmatrix} F_B \cos 120^\circ \\ F_B \sin 120^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,33 \\ 7,5 \end{bmatrix} N$$

Vízszintes  $\underline{F}_1$  erő alkalmasra:

$\underline{F}_1$  erő hatásvonalát vízszintes



Erőegyensúly:

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_B + \underline{G} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_B \cos(120^\circ) \\ F_B \sin(120^\circ) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\hookrightarrow F_B \sin(120^\circ) - G = 0$$

$$\hookrightarrow F_B = \frac{G}{\sin(120^\circ)} = \underline{\underline{11,55N}}$$

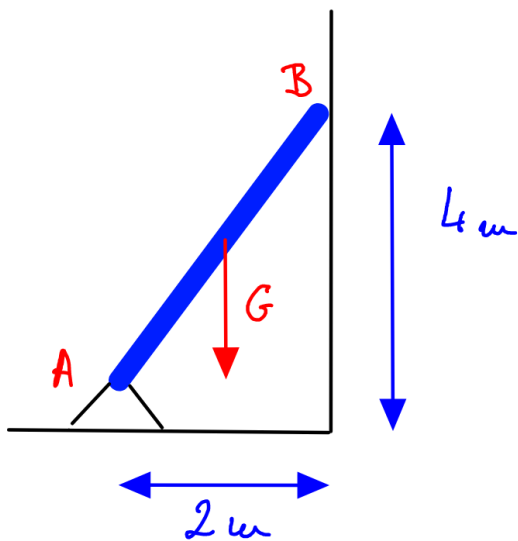
$$\hookrightarrow F_1 = -F_B \cos(120^\circ) = \underline{\underline{5,77N}}$$

Teljes:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 5,77 \\ 0 \end{bmatrix} N ; \quad \underline{F}_B = \begin{bmatrix} -5,77 \\ 11,55 \end{bmatrix} N$$

## 6. feladat

A  $G = 500 \text{ N}$  súlyú rúd A vége szabadon rögzített, B vége a síma falnak támaszkodik. Határozzuk meg a reakcióerőket!

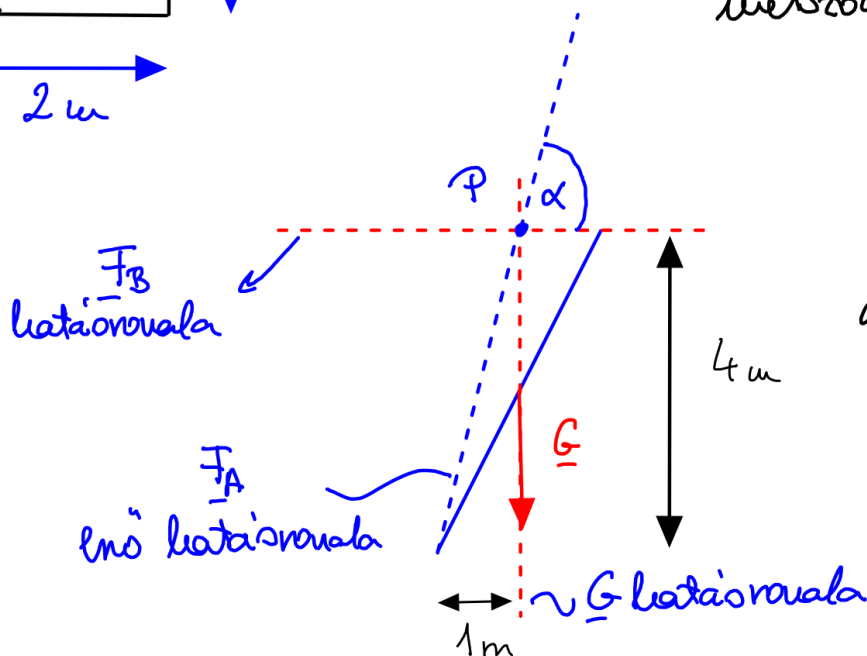


A B pontban csak a falra merőleges reakcióerő ébredhet!

↳ A rúdra 3 erő hat + egyensúly

↳ zártódo vektor  $\Delta$

↳ hatásvonaluk egy pontban metsződnek

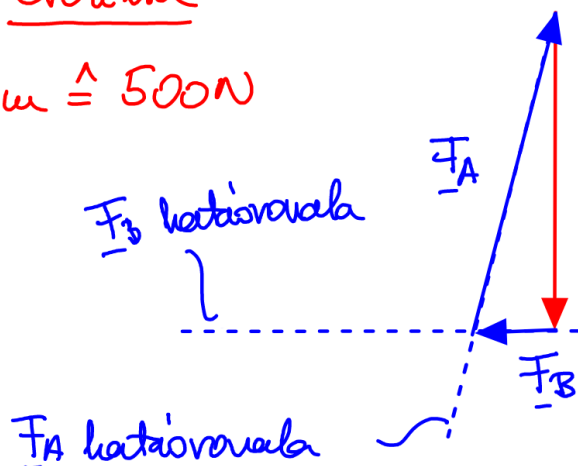


$$\alpha = \arctg\left(\frac{4}{1}\right)$$

$$\alpha = \underline{\underline{75,96^\circ}}$$

Erdőa'bra

$$4 \text{ cm} \hat{=} 500 \text{ N}$$

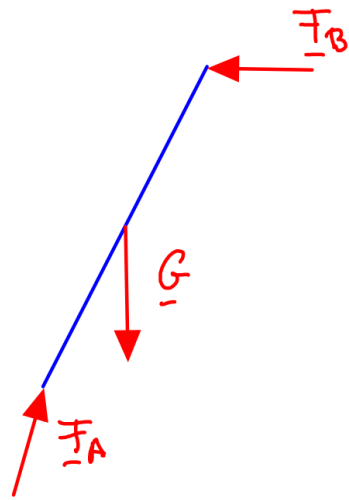


Leolvasva:

$$F_B \sim 4,123 \text{ cm} \rightarrow F_B = 515,4 \text{ N}$$

$$F_A \sim 1 \text{ cm} \rightarrow F_A = 125 \text{ N}$$

Számítások: A rúdra ható erők.



$$\underline{F}_B = \begin{bmatrix} -F_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} F_A \cos \alpha \\ F_A \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_e = \underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{G} = \underline{0} \quad \left. \begin{array}{l} F_A \cos \alpha - F_B = 0 \\ F_A \sin \alpha - G = 0 \end{array} \right\}$$

$$F_A = \frac{G}{\sin \alpha} = \underline{\underline{515,388 \text{ N}}}$$

$$F_B = F_A \cos \alpha = \underline{\underline{125 \text{ N}}}$$

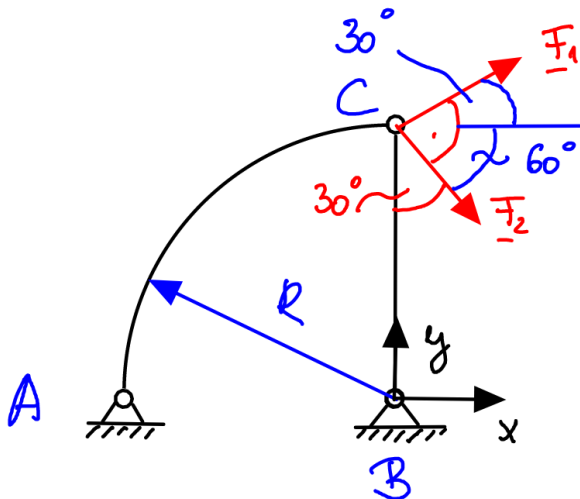
A reakcióerők:

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} F_A \cos \alpha \\ F_A \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 500 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$\underline{F}_B = \begin{bmatrix} -F_B \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -125 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N}}}$$

## 7. feladat

A negyedkörív alaki AC és a függőleges egyenes BC merev rudak csuklósan kapcsolódnak egymáshoz, valamint csuklósan vannak rögzítve A és B pontban. A szerkezetet  $F_1 = 700\text{ N}$  és  $F_2 = 1200\text{ N}$  nagyságú erők terhelik. Határozza meg  $\underline{F}_A$  és  $\underline{F}_B$  reakcióerőket!



$$\text{Vezessük be } \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{F}_C - \text{t}$$

↳ A két aktív erőt helyettesítsük egy erővel.

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1 \cos(30^\circ) \\ F_1 \sin(30^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 606,22 \\ 350 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} F_2 \cos(-60^\circ) \\ F_2 \sin(-60^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ -1039,23 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Ezekből:

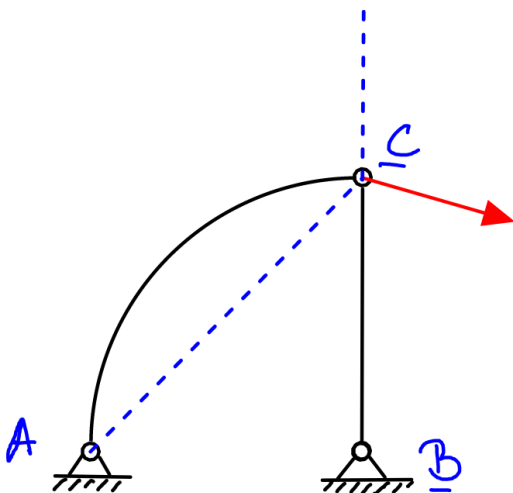
$$\underline{F}_C = \begin{bmatrix} 606,22 \\ 350 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 600 \\ -1039,23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1206,22 \\ -689,23 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Az x-tengellyel bezárt szög

$$\alpha = \arctg\left(\frac{-689,23}{1206,22}\right) = -29,74^\circ$$

$$\text{vagy másképp: } \alpha = 330,26^\circ$$

$$|\underline{F}_C| = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = \underline{\underline{1389,24 \text{ N}}}$$

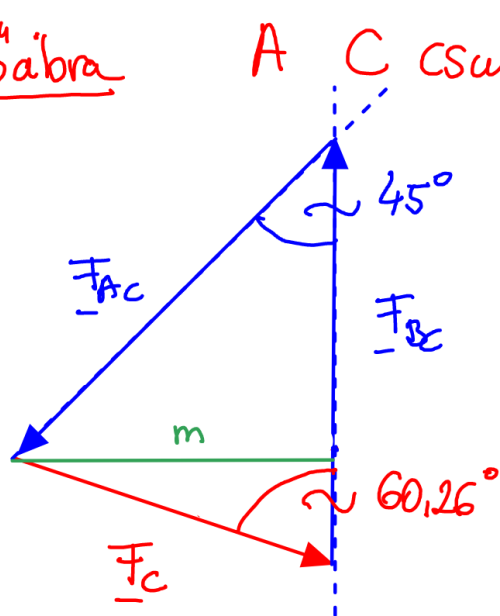


Tudjuk, hogy AC rúd nem terhelés

↳ A reakcióerők nullaivá válnak!

Hasonlóan BC rúdról is csak BC irányú erő adódhat át!

Erőábra



$$F_{AC} = |F_{AC}|$$

$$F_{BC} = |F_{BC}|$$

$$F_C = |F_C|$$

A geometria: egyenletekből:

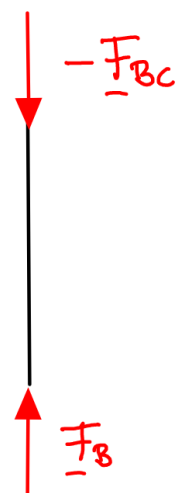
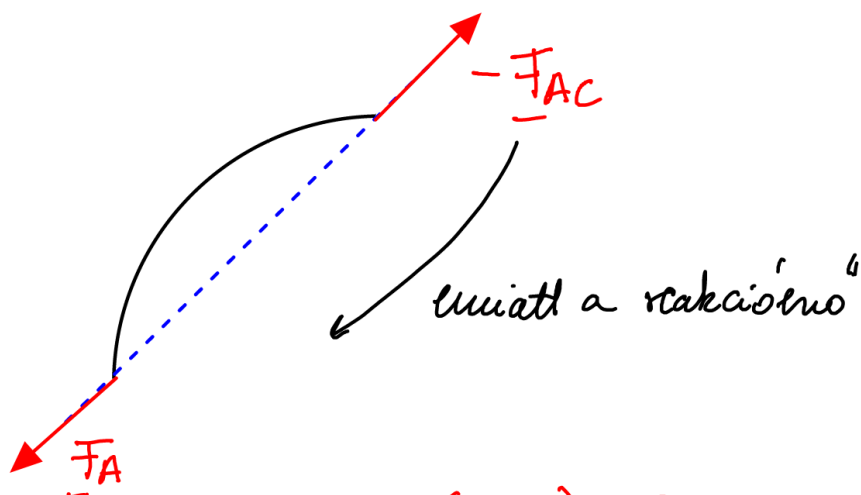
$$F_{AC} \cdot \sin 45^\circ = F_C \cdot \sin 60,26^\circ$$

$$F_{BC} = F_{AC} \cos 45^\circ + F_C \cdot \cos 60,26^\circ$$

$$\hookrightarrow F_{AC} = \frac{F_C \cdot \sin 60,26^\circ}{\cos 45^\circ} = \underline{\underline{1705,9 \text{ N}}}$$

$$\hookrightarrow F_{BC} = F_{AC} \cos(45^\circ) + F_C \cos(60,26^\circ) = \underline{\underline{1895,41}}$$

A rudakra ható erők:



$$\bullet \quad F_A + (-F_{AC}) = 0$$

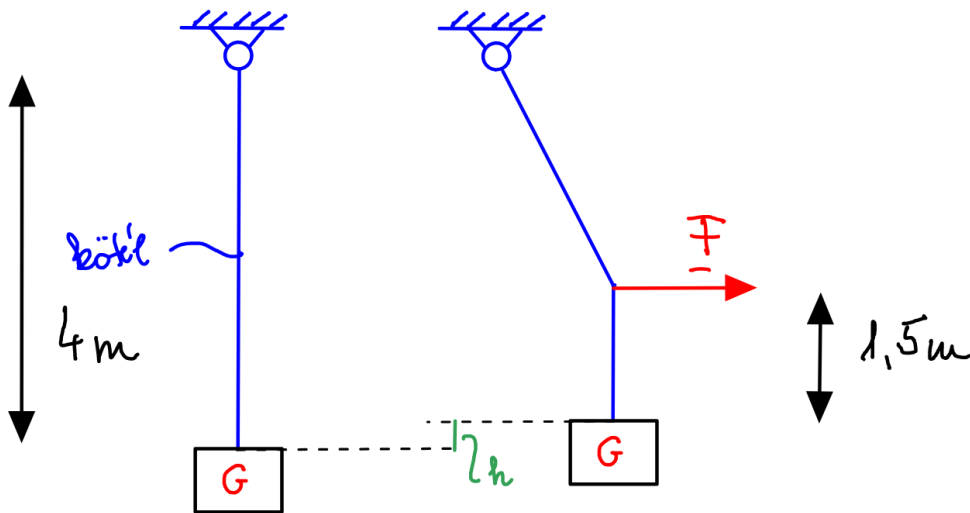
$$F_A = F_{AC} = \begin{bmatrix} F_{AC} \cos 225^\circ \\ F_{AC} \sin 225^\circ \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1206,22 \\ -1206,22 \end{bmatrix} \text{ N}}}$$

$$\bullet \quad F_B + (-F_{BC}) = 0$$

$$F_B = F_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1895,45 \end{bmatrix} \text{ N}$$



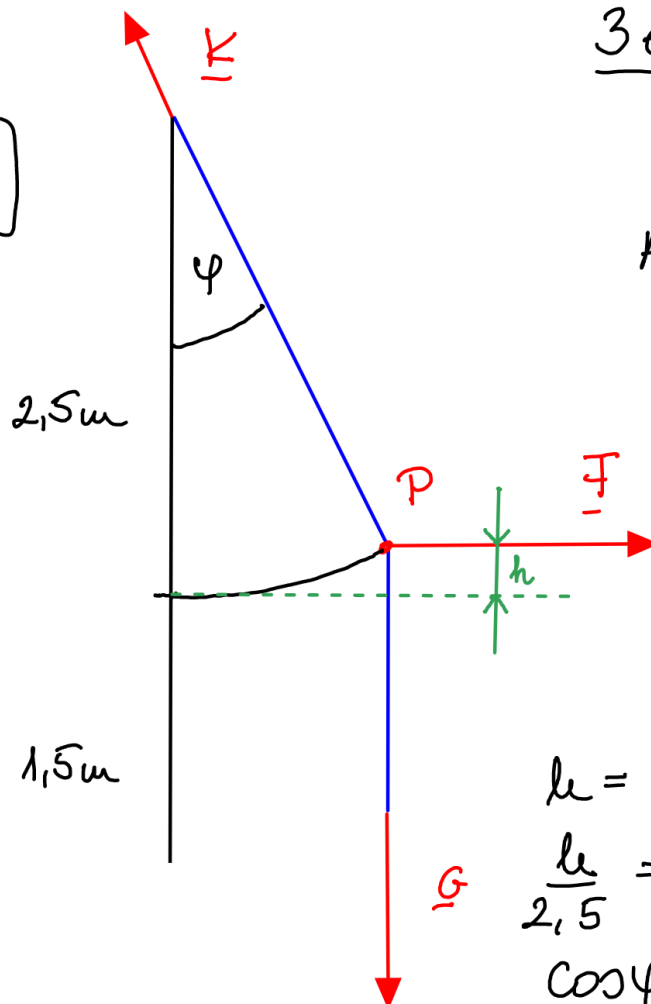
**8. feladat** A  $G = 1500\text{N}$  súlyú terhet a súlytalannak tekinthető kötéltartja, amelynek hosszváltozásait elhanyagoljuk. Mekkora  $F$  erőt kell alkalmazni a megadott helyen, hogy a terhet  $10\text{cm}$ -rel megemeljük. Írjuk fel paraméteresen az  $F/G$  arány változását a  $h$  függvényében!



Megoldás

Rajzoljuk fel a kötéltre ható erőket!

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -K \sin \varphi \\ K \cos \varphi \end{bmatrix}$$



3 erő hat a kötéltre

$\hookrightarrow F, G$  és  $\underline{K}$   
 $\hookrightarrow$  kéngörse

A P pontban kell metsződniük

Fejezzük ki  $h$ -t

$$h = 2,5 - 2,5 \cos \varphi$$

$$\frac{h}{2,5} = 1 - \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{h}{2,5}$$

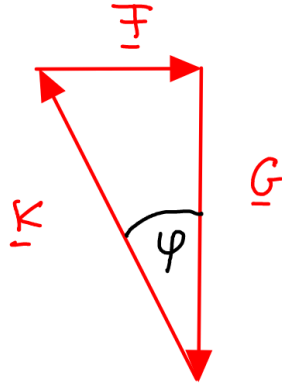
Kifejezve  $\varphi$ -t:  $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{h}{2,5}\right)$

Behelyettesítve  $h = 0,1 \text{ m}$ -t



$\varphi = \arccos(0,96) = \underline{\underline{16,26^\circ}}$

Erőábra



Erőegyenlet:

$$\underline{K} + \underline{G} + \underline{F} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -K \sin \varphi \\ K \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$K = \frac{G}{\cos \varphi} = 1562,5 \text{ N}$$

$$F = K \sin \varphi = G \tan \varphi = \underline{\underline{437,5 \text{ N}}}$$

$\frac{F}{G}$  arány kifejezése:

$$\frac{F}{G} = \tan(\varphi) = \tan\left(\arccos\left(1 - \frac{h}{2,5}\right)\right)$$

Felhasználva:  $\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\frac{F}{G} = \frac{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{h}{2,5}\right)^2}}{1 - \frac{h}{2,5}} = \frac{\sqrt{5h - h^2}}{2,5 - h}$$

