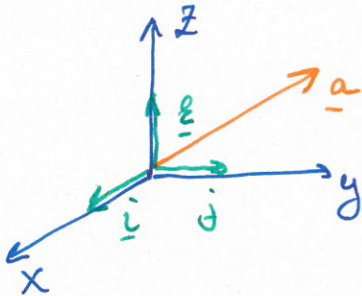


Vektoralgebra, Erők, erőrendszerek

Ismerkedés a vekt. leíróval:



$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$)

fogalmak: koordináta, bázis

$$\underline{a} = \underbrace{|\underline{a}|}_{\text{vektor hossza}} \underline{e_a} = a \underline{e_a}$$

\searrow irány

Műveletek:

- Összeadás
- Kivonás
- Szorzás

skaláris

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos \alpha$$

vektoriális

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \alpha$$

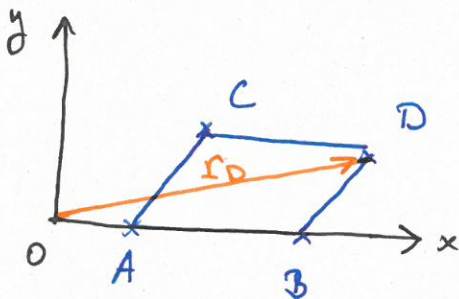
geometria-
összefüggés
↓

1. feladat

Adott az ABCD paralelogramma 3 csúspontja

$$A(1, 0, 0); B(5, 0, 0); C(2, 2, 0)$$

Határozzuk meg a negyedik D csúis helyét!



$\underline{r_D}$ - a D-be mutató helyvektor

Paralelogramma: szemközti

oldalak párhuzamosak

$$\underline{r_{AB}} = \underline{r_{CD}}$$

$$\underline{r_{AB}} = \underline{r_B} - \underline{r_A} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r_D} = \underline{r_C} + \underline{r_{CD}} = \underline{r_C} + \underline{r_{AB}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)

2. feladat Milyen t érték mellett lesz merőleges egymásra az alábbi két vektor?

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} t \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ t \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{ha } \underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = -3t + 20 + t = 20 - 2t = 0$$

$$\underline{\underline{t = 10}}$$

3. feladat Számítsuk ki az alábbi két vektor által bezárt szög koszinuszát!

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

geometrikai azonoság: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos \alpha$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = -6 - 8 + 24 = 10$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

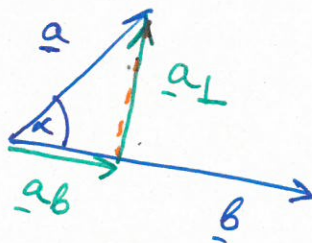
$$|\underline{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| |\underline{b}|} = \frac{10}{6 \cdot 7}$$

$$\underline{\underline{\cos \alpha = 0,238}}$$

4. feladat Határozzuk meg az \underline{a} vektor \underline{b} -be eső vetületét, valamint a \underline{b} -re merőleges vetületét!

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$|\underline{a}_{\parallel}| = |\underline{a}| \cos \alpha$$

$$\underline{a}_{\parallel} = |\underline{a}_{\parallel}| \cdot \underline{e}_b \quad \leftarrow \text{b irányú egységvektor: } \underline{e}_b = \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$$

$$\underline{a}_{\parallel} = (\underline{a} \cdot \underline{e}_b) \cdot \underline{e}_b = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b} = \frac{18}{3^2} \cdot \underline{b} = 2 \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

A b-re merőleges vektort.

(3)

$$\underline{a} = \underline{a}_b + \underline{a}_\perp \rightarrow \underline{a}_\perp = \underline{a} - \underline{a}_b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Ellenőrzés:

$$\underline{a}_b \cdot \underline{a}_\perp = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 8 + 4 = 0 \quad \checkmark$$

5. feladat

Számítsuk ki a · b értéket, ha $|\underline{a}|=3$, $|\underline{b}|=26$
és $|\underline{a} \times \underline{b}|=72$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \cdot \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{|\underline{a}| |\underline{b}|} = 0,923$$

$$\cos \alpha = \pm 0,3846$$

$$\begin{aligned} \downarrow \quad \alpha_1 &= 112,62^\circ + k \cdot 360^\circ \\ \alpha_2 &= 67,38^\circ + k \cdot 360^\circ \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\downarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cdot \cos \alpha = \underline{\underline{\pm 30}}$$

6. feladat

Számítsuk ki az $|(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b})|$ és
 $|(3\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{a} - 2\underline{b})|$ kifejezések értékeit, ha
 $|\underline{a}|=3$, $|\underline{b}|=4$ és $\underline{\underline{\alpha=90^\circ}}$ (a és b merőleges!)

$$\bullet |(\underline{a} + \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{b})| = |\underline{a} \times \underline{a} - \underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{a} - \underline{b} \times \underline{b}| = |-2 \underline{a} \times \underline{b}|$$

$$= 2 |\underline{a} \times \underline{b}| = 2 |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \alpha = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = \underline{\underline{24}}$$

$$\begin{aligned} \bullet |(3\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{a} - 2\underline{b})| &= |3\underline{a} \times \underline{a} - 6\underline{a} \times \underline{b} - \underline{b} \times \underline{a} + 2\underline{b} \times \underline{b}| = 5 |\underline{a} \times \underline{b}| \\ &= 5 |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \alpha = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = \underline{\underline{60}} \end{aligned}$$

(4)

7. feladat Számítsuk ki \underline{a} és \underline{b} vektorok által bezárt

sög szinuszt! Adjunk meg egy olyan \underline{c} vektort az \underline{a} és \underline{b} síkjában amely merőleges \underline{a} -ra!

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -12-3 \\ 2-12 \\ 6+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{15^2 + 10^2 + 10^2} = \sqrt{425} = 20,616$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{4+9+36} = 7$$

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{|\underline{a}| |\underline{b}|} = \frac{20,616}{3 \cdot 7}$$

$$\sin \alpha = \underline{\underline{0,982}}$$

Ha \underline{c} vektor \underline{a} és \underline{b} síkjában van

$$\underline{c} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} \quad (\text{nekünk elég egy ígét megadni})$$

$$\alpha = 1$$

$$\boxed{\underline{c} = \underline{a} + t \cdot \underline{b}}$$

$$\text{lehet } \underline{c} \perp \underline{a}$$

$$\hookrightarrow \underline{c} \cdot \underline{a} = 0!$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{a} + t \cdot \underline{b}) = \underline{a} \cdot \underline{a} + t \cdot \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$

$$t = \frac{-\underline{a} \cdot \underline{a}}{\underline{a} \cdot \underline{b}} = - \frac{4+4+1}{4 \cdot -6 + 6} = \underline{\underline{-\frac{9}{4}}}$$

$$\underline{c} = \underline{a} - \frac{9}{4} \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{9}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5/2 \\ -35/4 \\ -25/2 \end{bmatrix}}}$$

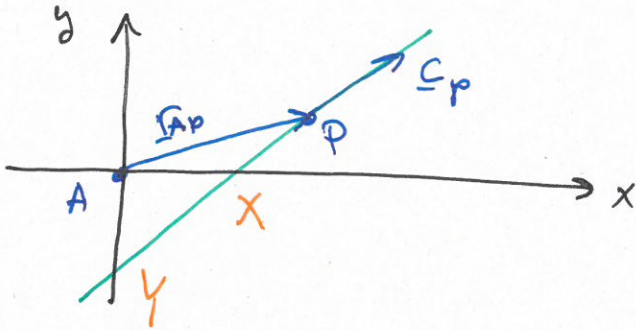
Ellenőrzés:

$$\underline{a} \cdot \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5/2 \\ -35/4 \\ -25/2 \end{bmatrix} = -5 + \frac{35}{2} - \frac{25}{2} = \underline{\underline{0}} \quad \checkmark$$

⑤

8. feladat Adott \underline{r}_{AP} és \underline{c}_p . Határozzuk meg a P

ponton található \underline{c}_p vektor határváltozásak a koordináta-tengelyekkel vett metszéspontjait!



$$\underline{r}_{AP} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} ; \underline{c}_p = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{Ax} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \underline{r}_{Ay} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{Ax} = \underline{r}_{AP} + \lambda \cdot \underline{c}_p = \begin{bmatrix} 12 - 8\lambda \\ 5 + 4\lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 5 + 4\lambda &= 0 \\ \lambda &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\underline{r}_{Ax} = \begin{bmatrix} 12 - 8 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{Ay} = \underline{r}_{AP} + \lambda \cdot \underline{c}_p = \begin{bmatrix} 12 - 8\lambda \\ 5 + 4\lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 12 - 8\lambda &= 0 \\ \lambda &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\underline{r}_{Ay} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 + 4 \cdot \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$