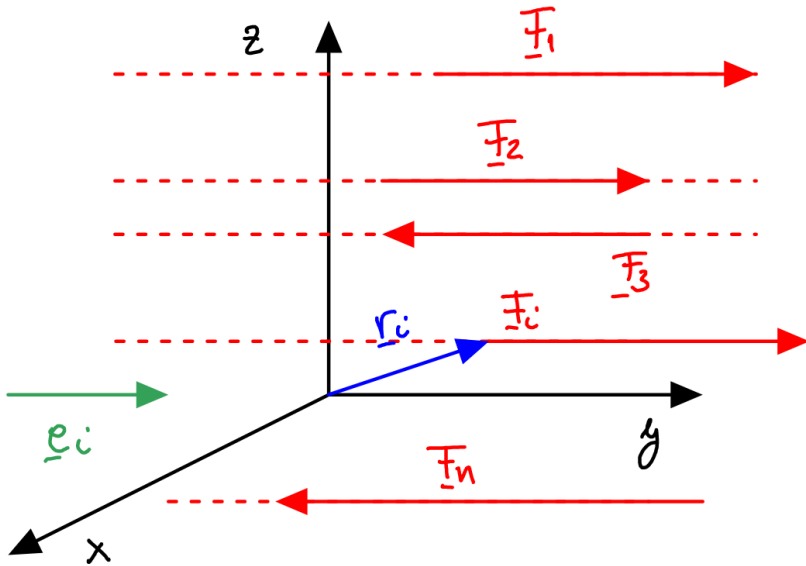


## Statika - 7. gyakorlat

Kapcsoló terhelés, egyenbenteli függvények

Véges sok párhuzamos mó' redukció:

A feladat: Hol helyezkedik el az az egyetlen mó', amely helyettesíti az alábbi mórendszer?



Valamennyi mó' felírható, mint

$$\underline{F}_i = F_i \cdot \underline{e}$$

Redukáljuk ezt az origóba:

$[\underline{F}; \underline{M}_0]_0$ , ahol

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \underline{e}$$

$$\begin{aligned} \underline{M}_0 &= \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times F_i \underline{e} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \underline{r}_i F_i \right) \times \underline{e} \end{aligned}$$

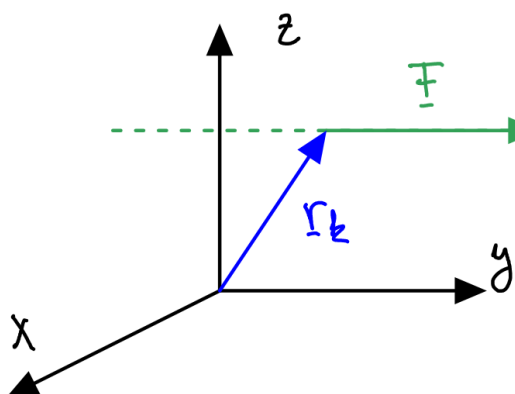
Mivel párhuzamos mó'okból áll  
 $\hookrightarrow \underline{M}_0 \perp \underline{F}$

Emiatt:  $\underline{M}_0 \cdot \underline{F} = 0$

$$\left[ \left( \sum_{i=1}^n \underline{r}_i F_i \right) \times \underline{e} \right] \cdot \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \underline{e} = 0$$

menőleges  $\underline{e}$  re      párhuzamos  $\underline{e}$  vel

Ilyenkor az mórendszer helyettesíthető egy  $\underline{F}$  mó'val (az eredőnővel)



$$\underline{F} = \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \underline{e}$$

Kérdés:  $\underline{r}_k = ?$

Nyomatékok egyenlete:

$$\underline{M}_0 = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \underline{r}_i F_i \right)}_{\text{az eredeti erőrendszert}} \times \underline{e} = \underline{r}_K \times \underline{F}$$

az egyetlen eredő erő

Behelyettesítés:

$$\left( \sum_{i=1}^n \underline{r}_i F_i \right) \times \underline{e} = \underline{r}_K \times \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \cdot \underline{e}$$

Ennek a feladatnak  
végtelen sok  
megoldása van

$$\left( \sum_{i=1}^n \underline{r}_i F_i \right) \times \underline{e} = \underline{r}_K \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \times \underline{e}$$

↳ nekünk  
ldő jó kell

Egy oldalra írva:

$$\left[ \left( \sum_{i=1}^n \underline{r}_i F_i \right) - \underline{r}_K \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \right] \times \underline{e} = \underline{0}$$

Mivel most csak ldő jó megoldás kell  
= 0

↳ ez biztos nem  
nullvektor

- Az eredő erő  
elfoltható a tartás -  
vonal mentén!

A fenti összefüggésből  $\underline{r}_K$  kifejezhető:

$$\underline{r}_K = \frac{\sum_{i=1}^n \underline{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

Latjuk, hogy  $\underline{r}_K$  független  $\underline{e}$  iránytól  $\rightarrow$  Ha más  $\underline{e}$  irányba mutatnak  
de ugyanott vannak

↳  $\underline{r}_K$  ugyanott lesz!

Az  $\underline{r}_K$  vektor által kijelölt  $K$  pont

a párhuzamos erőrendszert középpontja

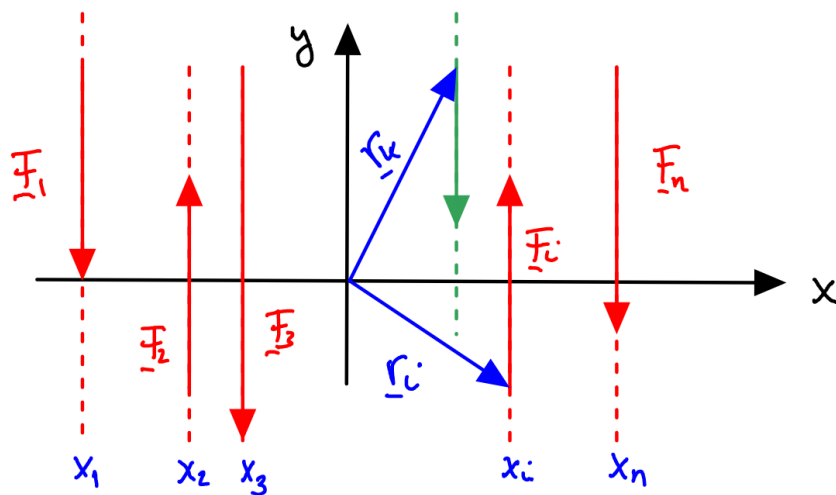
Feltétel, hogy csak  $\sum_{i=1}^n F_i \neq 0$  esetén jó!

• Síkbeli eset

Az erőket:  $\underline{F}_i = F_i \underline{j}$

A támaszpontok:

$$\underline{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = x_i \underline{i} + y_i \underline{j}$$



↳ Most csak az erőkhöz  $x_k$  koordinátája érdekes,  
mivel a hatásvonal mentén ( $\underline{j}$  irányában eltolható)

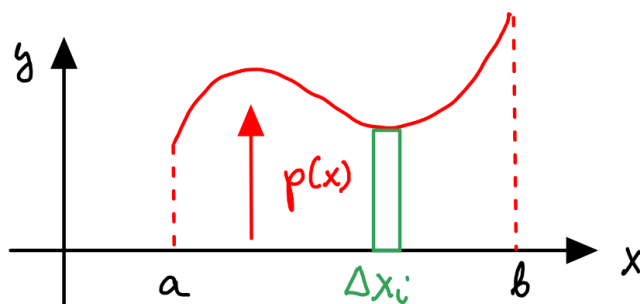
$$\underline{F} = \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \underline{j}$$

Használva a fenti képletet:

$$x_K = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

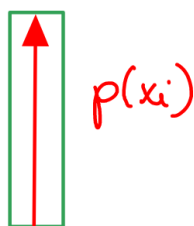
• Vonal mentén megosztó erőrendszer:

$p(x) \rightarrow$  intenzitás  
[N/m]



Egy  $\Delta x_i$  szakaszon:  $\Delta F_i = p(x_i) \Delta x_i$

Kinagyítva:



Az erőkhöz:  $F = \sum_{i=1}^n \Delta F_i \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} F = \int_a^b p(x) dx$

Hol lesz az erőpont?

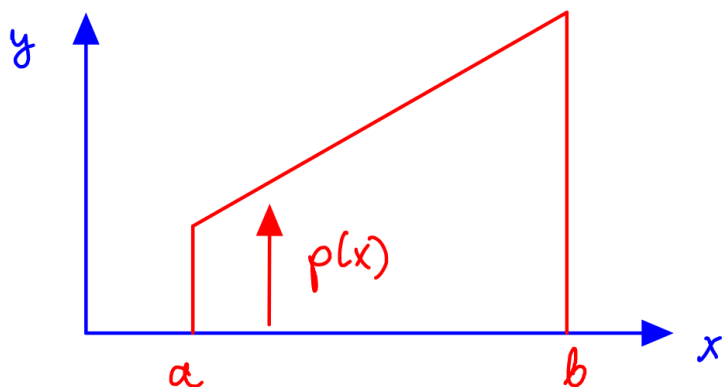
$$x_F = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta F_i}{\sum_{i=1}^n \Delta F_i} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^b x p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}$$

A függvény alatti terület!!

→ A hatásvonal a  $p(x)$  által megadott síkidom súlypontja!

# 1. feladat

Számítsuk ki az alábbi megasztó erőrendszer eredőjét és hatásvonalának helyzetét!



$$a = 1 \text{ m}$$

$$b = 6 \text{ m}$$

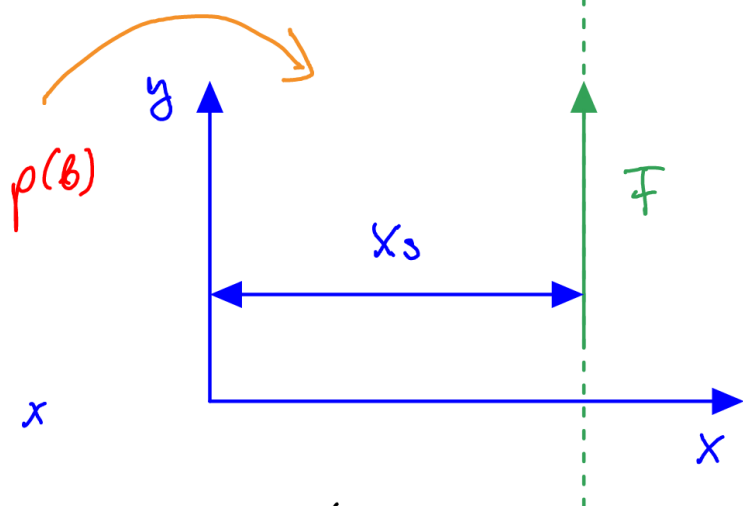
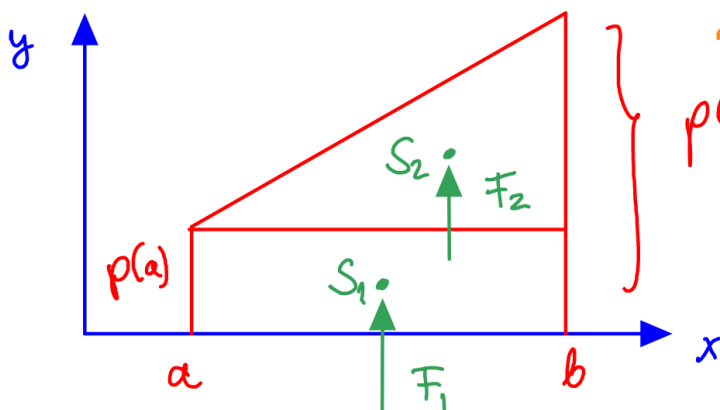
$$p(a) = 2 \text{ kN/m}$$

$$p(b) = 8 \text{ kN/m}$$

Bontsuk ketté a szerkezetet:

Eredőmo' : Trapez terület

Hatásvonal: Súlypont



I. rész : Téglalap

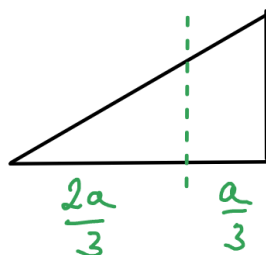
$$F_1 = p(a) \cdot (b-a) = 10 \text{ kN}$$

$$x_{S1} = \frac{a+b}{2} = 3,5 \text{ m}$$

II. rész : Háromszög

$$F_2 = \frac{[p(b)-p(a)](b-a)}{2} = 15 \text{ kN}$$

$$x_{S2} = b - \frac{b-a}{3} = \frac{13}{3} \approx 4,33 \text{ m}$$



Derekszögű  $\Delta$ -nél:

Az oldal  $\frac{1}{3}$ -ánál  
az alaphoz közelebb

Teljes megasztó

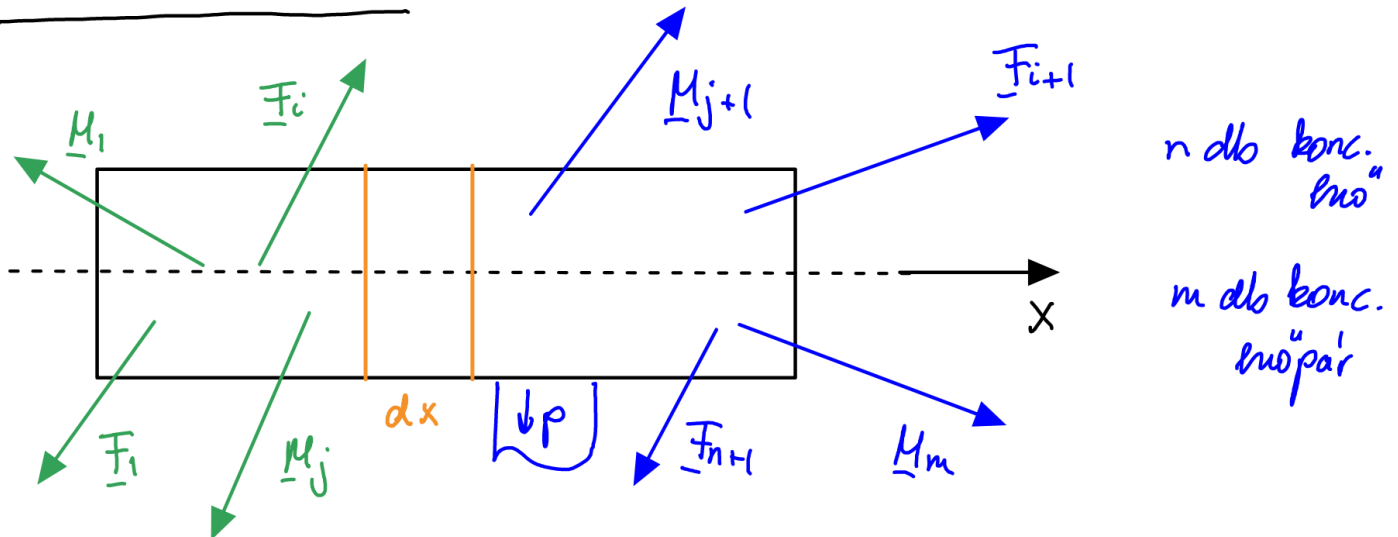
$$F = F_1 + F_2 = 25 \text{ kN}$$

$$x_S = \frac{x_{S1} F_1 + x_{S2} F_2}{F_1 + F_2} = 4 \text{ m}$$

Kapcsolat az igénybevételek függvények között:

↳ Rendszerkezel: 4 db fgv:  $N(x)$ ,  $V(x)$ ,  $M_k(x)$ ,  $M_t(x)$  - igénybevételek  
 pluszban  $p(x)$  - rugósálo' mőrendszer

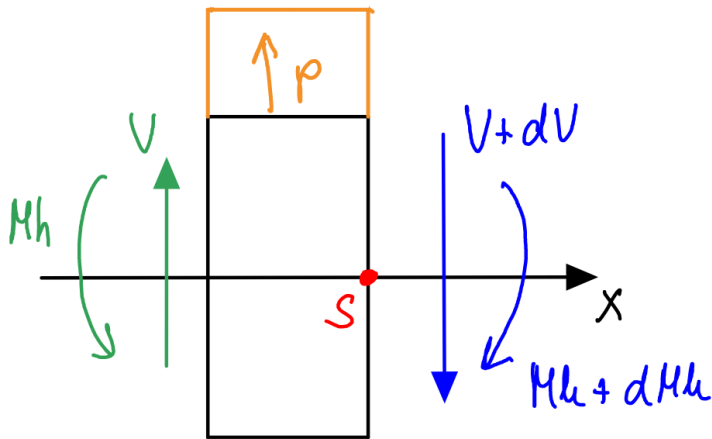
Általános mőszakasz:



Vizsgáljuk egy  $dx$  hosszú ún. „elemi mőddarab” egyensúlyát!

↳  $dx$  kicsi:  $\rightarrow p(x)$  konstans!

Rajzoljuk be az elhagyott részektől szálunkból igénybevételeket!



Most csak  $p(x)$  -  $V(x)$  -  $M_k(x)$  kapcsolatát vizsgáljuk!

Futás, hogy így válasszuk ki a  $dx$  elemi mőszakaszt, hogy koncentrált mő/mőpár ne e'bredjen

Erőegyensúly:  $\sum F_x = 0$

$$\sum F_y = 0 \quad V - (V + dV) + p dx = 0$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dx} = V'(x) = p(x)$$

$$\sum M_s = 0: \quad M_k - V dx - p dx \cdot \frac{dx}{2} - (M_k + dM_k) = 0$$

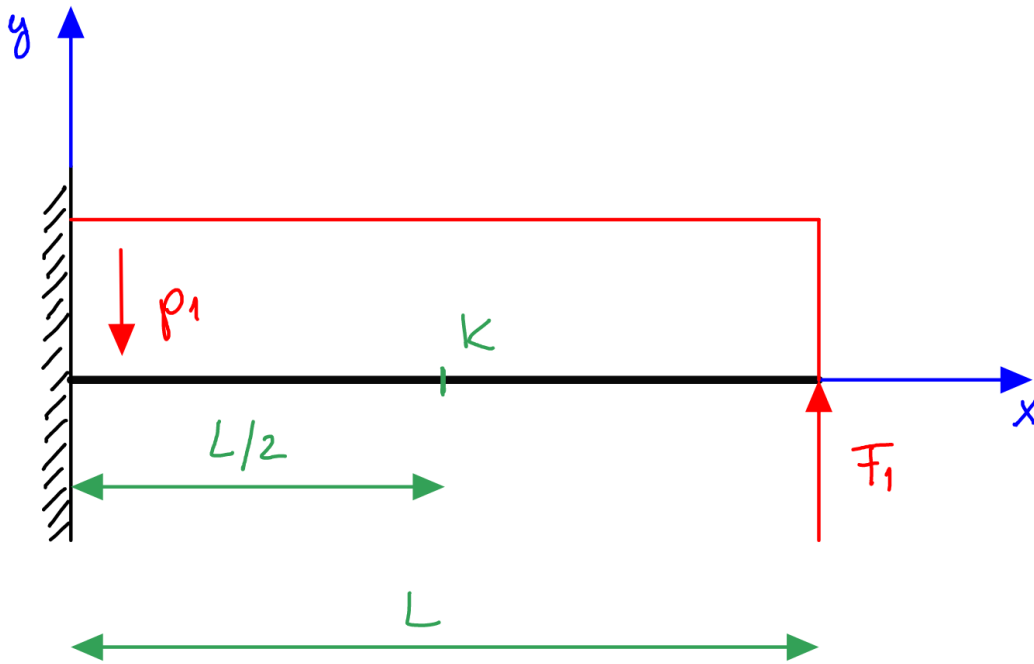
$$dM_k = -V dx - \frac{p dx^2}{2} \approx 0 \text{ elhanyagoljuk}$$

$$\rightarrow \frac{dM_k}{dx} = M_k'(x) = -V(x)$$

Tellat :

$p(x)$	zérus	konstans	linea'is
$V(x)$	konstans	linea'is	ma'sodjoku'
$M_k(x)$	linea'is	ma'sodjoku'	harmadjoku'

2. feladat Írjuk fel az igénybeveteli függvényeket és számítsuk ki a K keresztmetszetben az igénybevetések nagyságait!



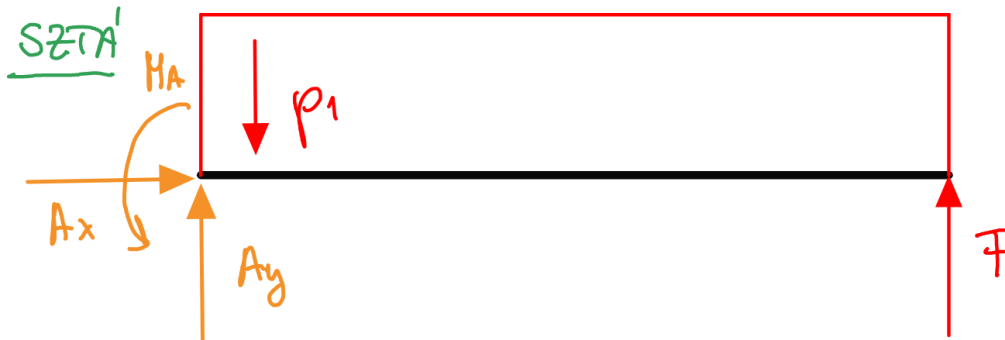
Adatok:

$$L = 4 \text{ m}$$

$$p_1 = 3 \text{ kN/m}$$

$$F = 3 \text{ kN}$$

Most mehetünk azonnal jobbról vagy kiszámoljuk a reakciókat és balról redukálunk!



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: \boxed{A_x = 0}$$

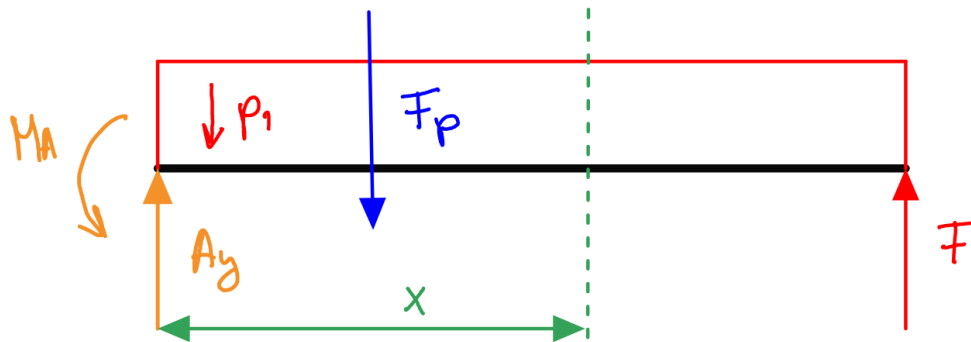
$$\sum F_y = 0: A_y + F - p_1 L = 0$$

$$\hookrightarrow A_y = p_1 L - F = \underline{\underline{9 \text{ kN}}} (\uparrow)$$

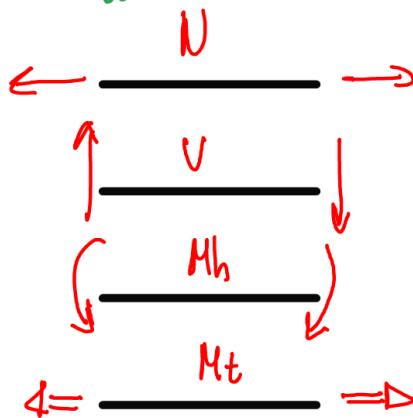
$$\sum M_A = 0: M_A + F \cdot L - p_1 L \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\hookrightarrow M_A = p_1 \frac{L^2}{2} - F \cdot L = \underline{\underline{12 \text{ kNm}}} \curvearrowright$$

Érdekes felrajzolni a testre ható erőket!



Válasszuk ki egy keresztmetszetet! Mivel a midszakaszon belül nincs koncentrált erő és nyomaték  
 ↳ egy szakasz elég!



Balról

Jódról

$N(x)$	0	0
$V(x)$	$A_y - p x$ $V(x) = 9 - 3x$ ← méterben kn	$-F + p(L-x)$ $V(x) = -3 + 12 - 3x = 9 - 3x$
$M_b(x)$	$-A_y x + \frac{p x^2}{2} + M_A$ $M_b(x) = -9x + \frac{3}{2} x^2 + 12$ ← knm méterben	$-F(L-x) + p \frac{(L-x)^2}{2}$ $M_b(x) = -3(4-x) + \frac{3(16-8x+x^2)}{2}$ $= -12 + 3x + 24 - 12x + \frac{3}{2} x^2$ $= \frac{3}{2} x^2 - 9x + 12$ ← knm méterben
$M_t(x)$	0	0



Teljes a függvények:

$$p(x) = -p$$

$$V(x) = A_y - px$$

$$M_k(x) = \frac{px^2}{2} - A_y x + M_A$$

Ellenőrizze a derivátor kapcsolatát!

$$V'(x) = -p = p(x) \checkmark$$

$$M_k'(x) = px - A_y = -V(x) \checkmark$$

K - keresztmetszet:

$$N_k = 0$$

$$M_{tk} = 0$$

$$V_k = V(L/2) = 9 - 3 \cdot 2 = \underline{3 \text{ kN}}$$

$$M_{kx} = M_k(L/2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 12 = \underline{\underline{0 \text{ kNm}}}$$

Rúd vég: (x=L)

$$V(L) = 9 - 3 \cdot 4 = -3 \text{ kN}$$

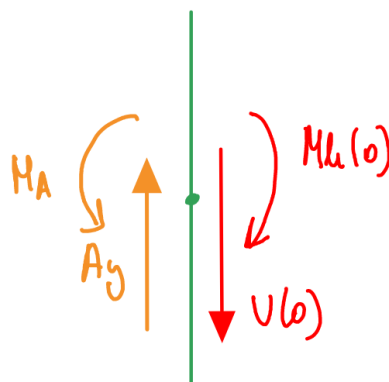
$$M_k(L) = \frac{3}{2} \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 12 = 0 \text{ kNm}$$

} megfelel annak, amit a  
"nál jobb végén lévő" terhelés  
ad

Befogás (x=0)

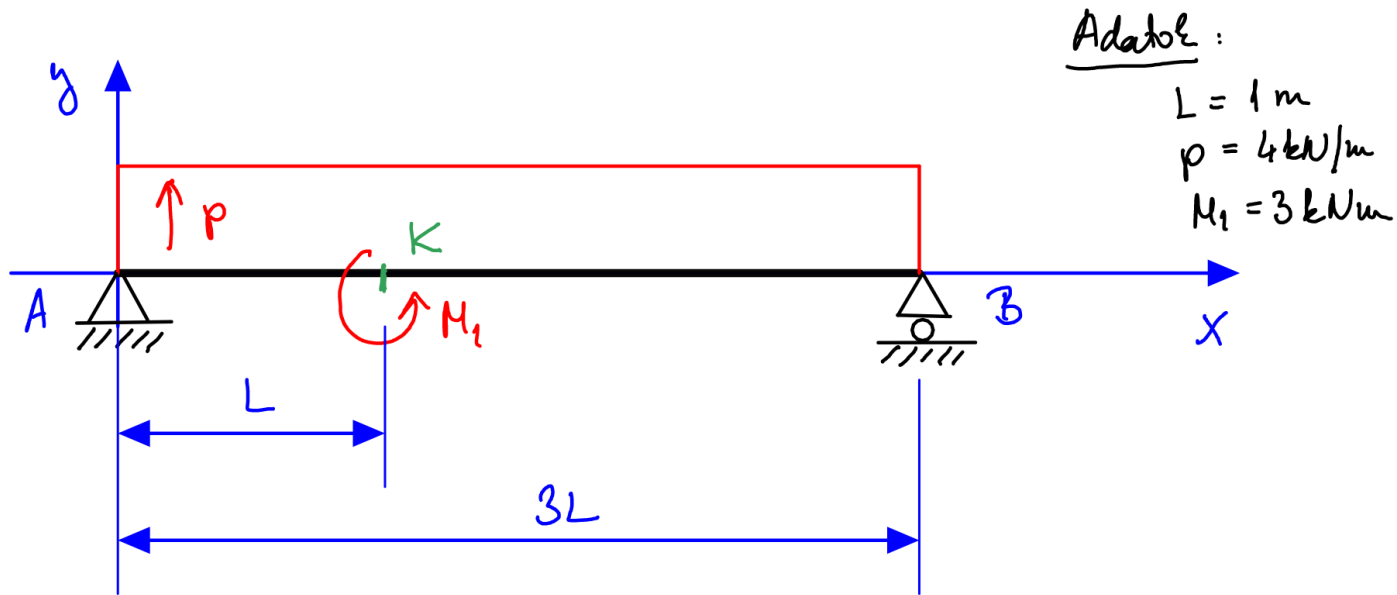
$$V(0) = 9 \text{ kN}$$

$$M_k(0) = 12 \text{ kNm}$$



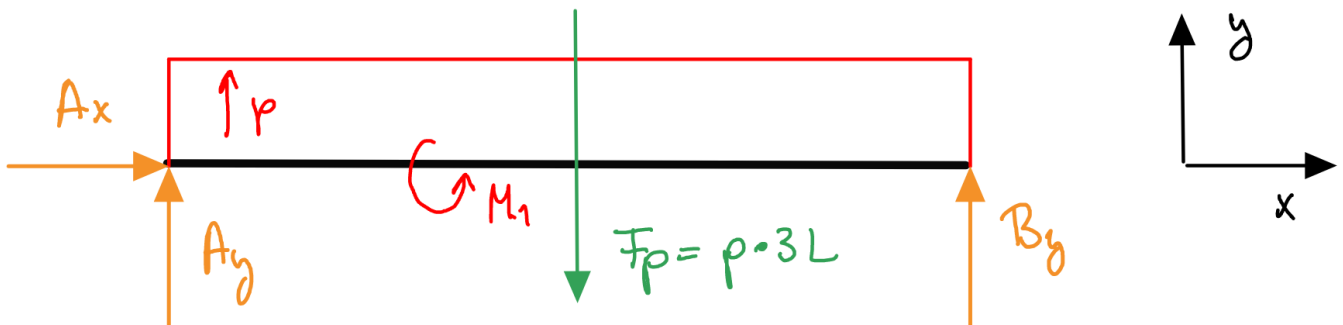
Tengely egyenűg!

3. feladat Írjuk fel az igénybeveteli függvényeket és számítsuk ki a K keresztmetszetben az igénybevetések nagyságait!



① Reakcióerők számítása

SZTA:



Equilibrium equations:

$$\sum F_x = 0: \quad \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y + B_y + p \cdot 3L = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_1 + B_y \cdot 3L + p \cdot 3L \cdot \frac{3}{2}L = 0$$

$$\hookrightarrow B_y = \frac{-p \frac{3L^2}{2} - M_1}{3L} = \underline{\underline{-7 \text{ kN}}} (\downarrow)$$

$$\hookrightarrow A_y = -p \cdot 3L - B_y = \underline{\underline{-5 \text{ kN}}} (\downarrow)$$



Mivel a rúdön van koncentrált terhelés ( $M_1$ )  $\rightarrow$  két szakasz kell!  
balról redukálunk

	<u>I. szakasz</u> $0 < x < L$	<u>II. szakasz</u> $L < x < 3L$
$N(x)$	0	0
$V(x)$	$A_y + px = -5 + 4x$	$A_y + px = -5 + 4x$
$M_h(x)$	$-A_y x - \frac{px^2}{2}$	$-A_y x - \frac{px^2}{2} + M_1 = -2x^2 + 5x + 3$
$M_t(x)$	0	0

A < -keresztmetszet :  $\rightarrow$  pont a határ  $\rightarrow$  mindkét oldalt  
meg kell nézni

$$\begin{aligned} V(L-) = V_1(L) &= -1 \text{ kN} \\ V(L+) = V_2(L) &= -1 \text{ kN} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} V(L-) = V_1(L) &= -1 \text{ kN} \\ V(L+) = V_2(L) &= -1 \text{ kN} \end{aligned}} \right\} \text{itt nincs különbség}$$

$$\begin{aligned} M_h(L-) = M_{h1}(L) &= 3 \text{ kNm} \\ M_h(L+) = M_{h2}(L) &= 6 \text{ kNm} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M_h(L-) = M_{h1}(L) &= 3 \text{ kNm} \\ M_h(L+) = M_{h2}(L) &= 6 \text{ kNm} \end{aligned}} \right\} \text{itt van különbség} \\ &\quad \rightarrow \text{megj. van a görben!}$$

