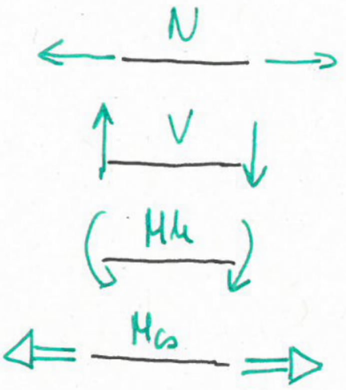
Statika - 9. hét II.

Igénybevételek

Ismétlés

Igénybevételek és előjelkonvenció



normáligénybevétel

nyíró igénybevétel

hajlító igénybevétel

csavaró igénybevétel

Fontos, hogy mindig rajzoljuk oda az igénybevételi ábra mellé az előjelkonvenciót!

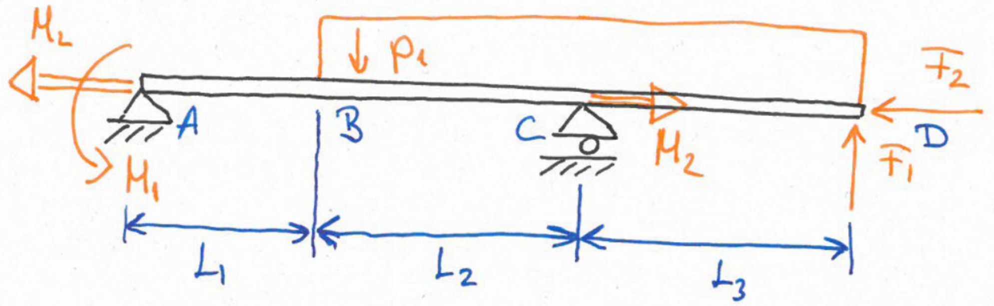
Kapcsolat az igénybevételek között

$$\boxed{\begin{aligned} p(x) &= V'(x) \\ V(x) &= -M_h'(x) \end{aligned}}$$

Minden olyan szakaszon ahol nem ébred koncentrált terhelés

↓ Ha van koncentrált terhelés ⇒ részekre kell bontani és az egyes szakaszokra külön-külön függvényt kell felírni!

1. feladat Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és ábrákat!



Adatok

$L_1 = 2\,m$

$L_2 = 3\,m$

$L_3 = 4\,m$

$F_1 = 8\,kN$

$F_2 = 7\,kN$

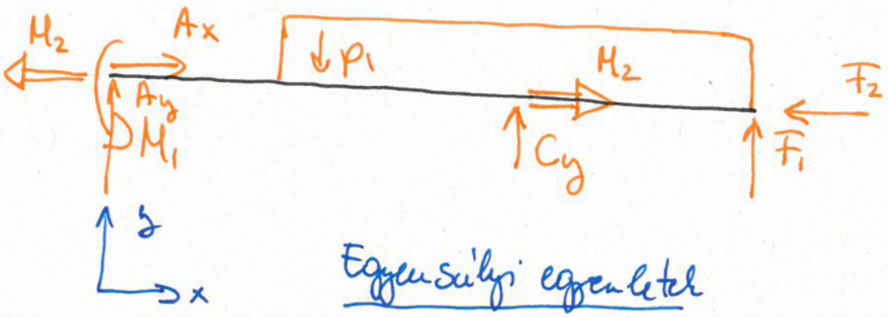
$M_1 = 4\,kNm$

$M_2 = 6\,kNm$

$p_1 = 5\,kN/m$

1) Reakcióerők kiszámítása

SZTÁ



Egyensúlyi egyenletek

$\sum F_x = 0: \quad A_x - F_2 = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = 0: \quad A_y - p_1(L_2+L_3) + C_y + F_1 = 0 \quad (2)$

$\sum M_A = 0 \quad C_y(L_1+L_2) + F_1(L_1+L_2+L_3) + M_1 - p_1(L_2+L_3)\left(L_1+\frac{L_2+L_3}{2}\right) = 0 \quad (3)$

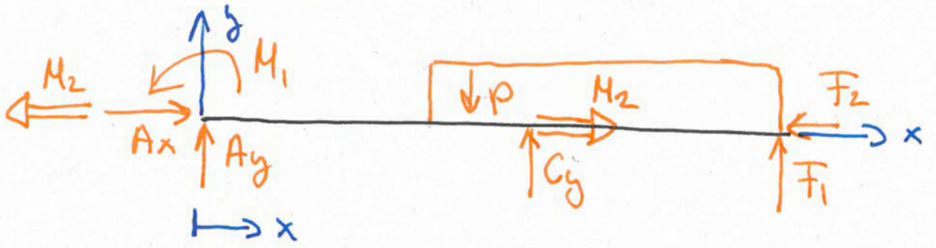
(1): $A_x = F_2 = 7\,kN\ (\rightarrow)$

(3): $C_y = \dfrac{p_1(L_2+L_3)\left(L_1+\frac{L_2+L_3}{2}\right) - M_1 - F_1(L_1+L_2+L_3)}{L_1+L_2} = 23{,}3\,kN$ $(\uparrow)$

(2): $A_y = p_1(L_2+L_3) - C_y - F_1 = 3{,}7\,kN\ (\uparrow)$

Most, hogy megvannak a reakciók, minden terhelés ismert ⟹ igénybevételek

Az igénybevételi fgv-eket mindig a SZTÁ alapján írjuk fel!



Látható, hogy 3 részre kell osztani a rudat: x [m]

① $0 < x < L_1$ $\quad 0 < x < 2$

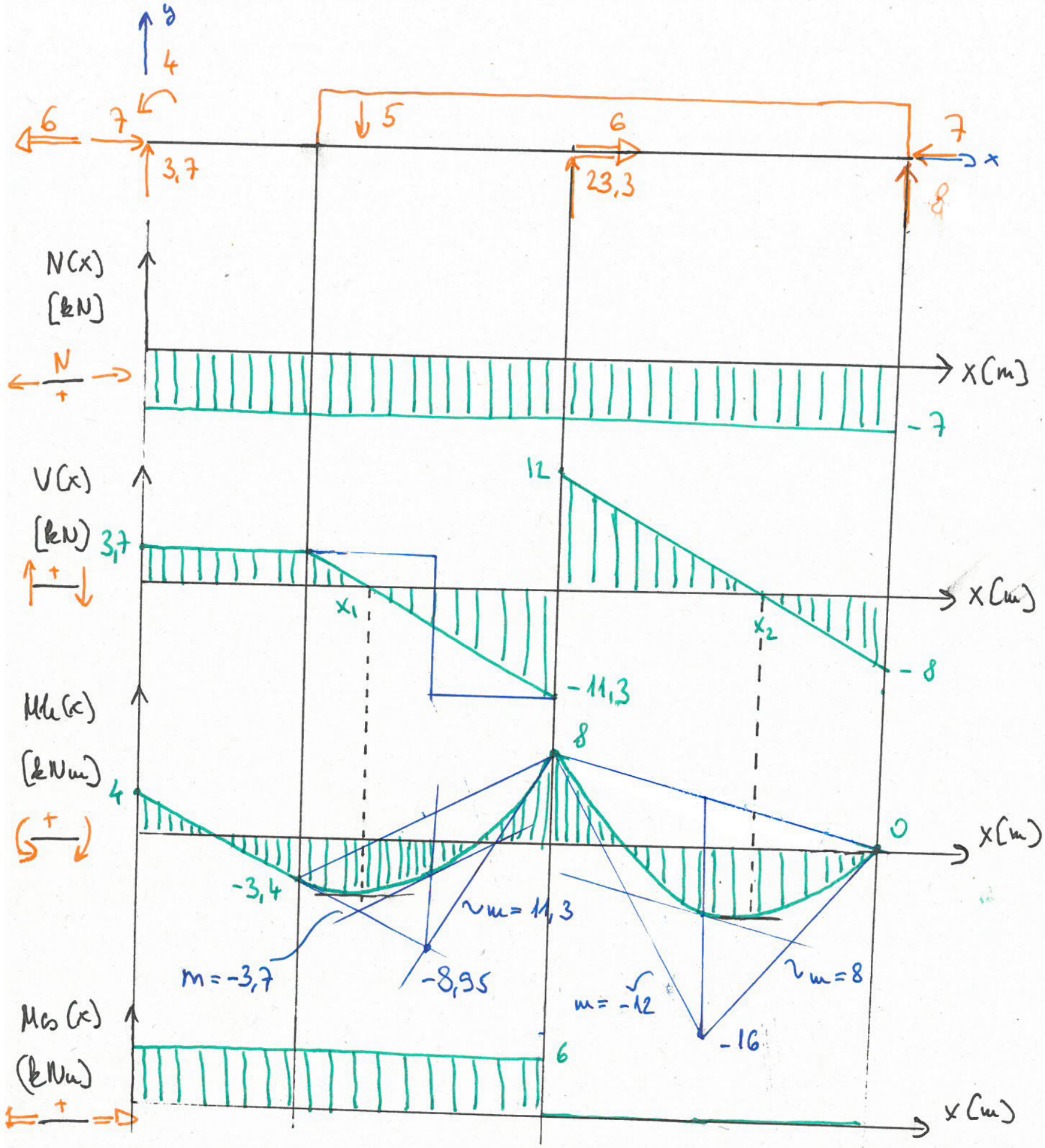
② $L_1 < x < L_1 + L_2$ $\quad 2 < x < 5$

③ $L_1 + L_2 < x < L_1 + L_2 + L_3$ $\quad 5 < x < 9$

Táblázatosan írjuk fel az igénybevételi fgv-eket!

Igénybevételi fgv	① $0 < x < L_1$	② $L_1 < x < L_1 + L_2$	③ $L_1 + L_2 < x < L_1 + L_2 + L_3$
$N(x)$	$-A_x$	$-A_x$	$-A_x \quad (-F_2)$
$V(x)$	A_y	$A_y - p(x - L_1)$	$A_y + C_y - p(x - L_1)$ vagy $-F_1 + p(L_1 + L_2 + L_3 - x)$
$M_h(x)$	$M_1 - A_y x$	$M_1 - A_y x + \frac{p(x-L_1)^2}{2}$	$M_1 - A_y x + p\frac{(x - L_1)^2}{2} - C_y(x - (L_1 + L_2))$ vagy $-F_1(L_1 + L_2 + L_3 - x) + p\frac{(L_1 + L_2 + L_3 - x)^2}{2}$
$M_{cs}(x)$	M_2	M_2	0

Igénybevételi ábrák megrajzolása



Nyíróerő:

$V(0) = A_y = 3{,}7\ kN$

$V(L_1)_- = A_y = 3{,}7\ kN$

$V(L_1)_+ = A_y = 3{,}7\ kN$

$V(L_1+L_2)_- = A_y - pL_2 = -11{,}3\ kN$

$V(L_1+L_2)_+ = A_y - pL_2 + C_y = 12\ kN$

$V(L_1+L_2+L_3) = -F_1 = -8\ kN$

Hajlítónyomaték:

$M_h(0) = M_1 = 4\ kNm$

$M_h(L_1) = M_1 - A_y L_1 = -3{,}4\ kNm$

$M_h(L_1+L_2) = \dots = 8\ kNm$

$M_h(L_1+L_2+L_3) = 0\ kNm$

Parabolaszerkesztés lépései (az első parabola példáján)

① kezdő és végső érintők felvétele

↳ nyírőerőből

$$M_h'(L_1) = -V(L_1) = -3{,}7\ kN$$

$$M_h'(L_1+L_2) = -V(L_1+L_2) = 11{,}3\ kN$$

② Érintők metszéspontjának kiszerkesztése

$$M_h\left(L_1+\frac{L_2}{2}\right) = M_h(L_1) - V(L_1)\cdot\frac{L_2}{2} = -8{,}95\ kN$$

③ Húr megrajzolása, majd eltolása az érintők metszéspontja és a húr közötti szakasz felezőjébe

④ Parabolaív szerkesztése

Szélsőértékek

M_h szélsőértéke ha $M_h'(x)=0$

azaz ahol $V(x)=0$

2. szakaszon

- $V(x_1) = 0 = A_y - p(x_1 - L_1) = 0$

$$x_1 = \frac{A_y + pL_1}{p} = 2{,}74\ m$$

$$M_h(x_1) = M_1 - A_y x_1 + p\frac{(x_1-L_1)^2}{2} = \underline{\underline{-4{,}88\ kNm}}$$

$M_h''(x) = -p(x) > 0$

$\underline{\underline{\text{lok. min}}}$

3. szakaszon

- $V(x_2) = 0 = A_y + C_y - p(x_2 - L_1) = 0$

$$x_2 = \frac{A_y + C_y + pL_1}{p} = \underline{7{,}4\ m}$$

$$M_h(x_2) = M_1 - A_y x_2 + p\frac{(x_2-L_1)^2}{2} - C_y(x_2-(L_1+L_2)) = \underline{\underline{-6{,}4\ kNm}}$$

$M_h''(x) = -p(x) > 0$

lok. min.

A hajlítónyomaték zérushelyei

1 szakaszon

$$M_h(x_3) = 0 = M_1 - A_y x_3 = 0$$

$$x_3 = \frac{M_1}{A_y} = \underline{\underline{1,08\ m}}$$

2 szakaszon

$$M_h(x_4) = 0 = M_1 - A_y x_4 + \frac{p(x_4 - L_1)^2}{2} = 0$$

numerikusan: $\frac{5}{2}x_4^2 - 13,7x_4 + 14 = 0$

másodfokú egyenlet $x_{4_1} = 1,359\ m$ X Nem jó nem 2-re esik

$\boxed{x_{4_2} = 4,12\ m}$ ✓

3 szakaszon

$$M_h(x_5) = 0 = M_1 - A_y x_5 + \frac{p(x_5 - L_1)^2}{2} - G(x_5 - (L_1 + L_2)) = 0$$

numerikusan: $\frac{5}{2}x_5^2 - 37x + 130,5 = 0$

$\hookrightarrow x_{5_1} = 5,8\ m$
$\hookrightarrow x_{5_2} = 9\ m$ } mind kettő jó

Tehát a hajlítónyomaték zérushelyei

$x_3 = 1,08\ m$
$x_4 = 4,12\ m$
$x_5 = 5,8\ m$
$x_6 = 9\ m$

2. feladat

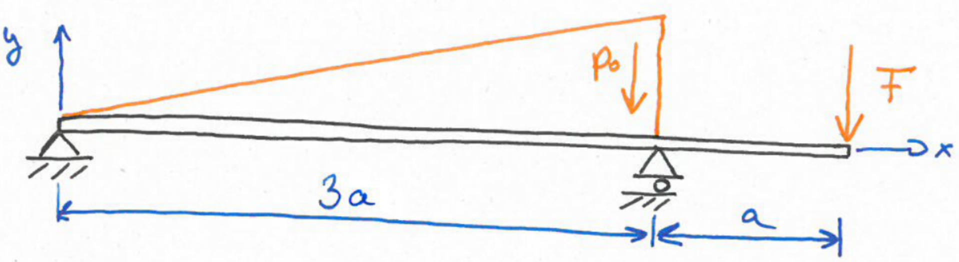
Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és ábrákat!

Adatok:

$a = 0{,}3\ m$

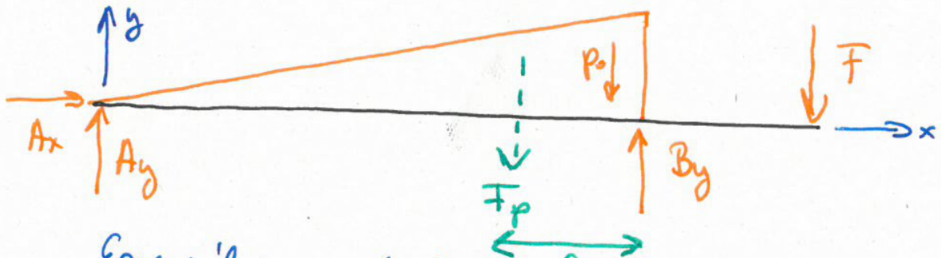
$F = 1\ kN$

$p_0 = 4\ kN/m$



① Reakcióerők

SZTA



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0 \qquad \boxed{A_x = 0}$

$\sum F_y = 0 \qquad A_y + B_y - F - \frac{p_0 \cdot 3a}{2} = 0$

$\sum M_A = 0 \qquad -\frac{p_0 3a}{2} \cdot 2a + B_y \cdot 3a - F \cdot 4a = 0$

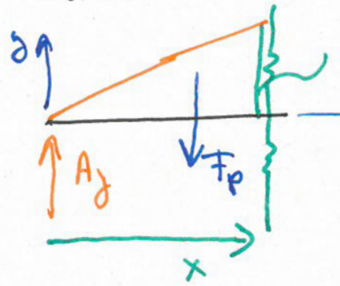
$$B_y = \frac{F \cdot 4a + \frac{p_0 \cdot 6a^2}{2}}{3a} = \underline{\underline{2{,}533\ kN}} \ (\uparrow)$$

$$A_y = \frac{p_0 3a}{2} + F - B_y = \underline{\underline{0{,}267\ kN}} \ (\uparrow)$$

Két szakaszra kell osztani a tartót:

① $0 < x < 3a$

② $3a < x < 4a$



$p(x) = \frac{p_0}{3a} \cdot x$

Az ① es szakasz pontjaiban

Az igénybevételi függvények

$N(x) = 0$ }
$M_{cs}(x) = 0$ } ezeket külön már nem tüntetjük fel

	① $0 < x < 3a$	② $3a < x < 4a$
$V(x)$	$A_y - \left(\frac{p_0}{3a} \cdot x\right)\frac{x}{2}$	F
$M_h(x)$	$-A_y x + \left(\frac{p_0}{3a} x\right)\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$	$F(4a-x)$

$V_1(3a) = -1{,}533$ kN

$V_2(3a) = +1$ kN

$M_{h_1}(3a) = 0{,}3$ kNm

Numerikusan:

$$V_1(x) = 0{,}267 - 2{,}22\,x^2 \quad \text{kNm}$$

$$M_{h_1}(x) = -0{,}267x + 0{,}74\,x^3 \quad \text{kNm}$$

Tényleg teljesül a deriválási szabály!

$$V_2(x) = 1 \text{ kN}$$

$$M_{h_2}(x) = 1{,}2 - x \quad \text{kNm}$$

Zérushelyek: $V_1(x_1) = 0$

$$0{,}267 - 2{,}22\,x_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{\frac{0{,}267}{2{,}22}} = \underline{\underline{0{,}35 \text{ m}}}$$

$$M_{h_1}(x_2) = 0$$

$$-0{,}267x_2 + 0{,}74\,x_2^3 = 0$$

$$x_2(-0{,}267 + 0{,}74x_2^2) = 0$$

$$\underline{\underline{x_{2_1} = 0 \text{ m}}} \qquad x_{2_2} = \sqrt{\frac{0{,}267}{0{,}74}} = \underline{\underline{0{,}6 \text{ m}}}$$

Szélsőérték:

$M_{h_1}(x_3)$ szé, ha $M_{h_1}'(x_3) = 0 \Rightarrow V_1(x_3) = 0$

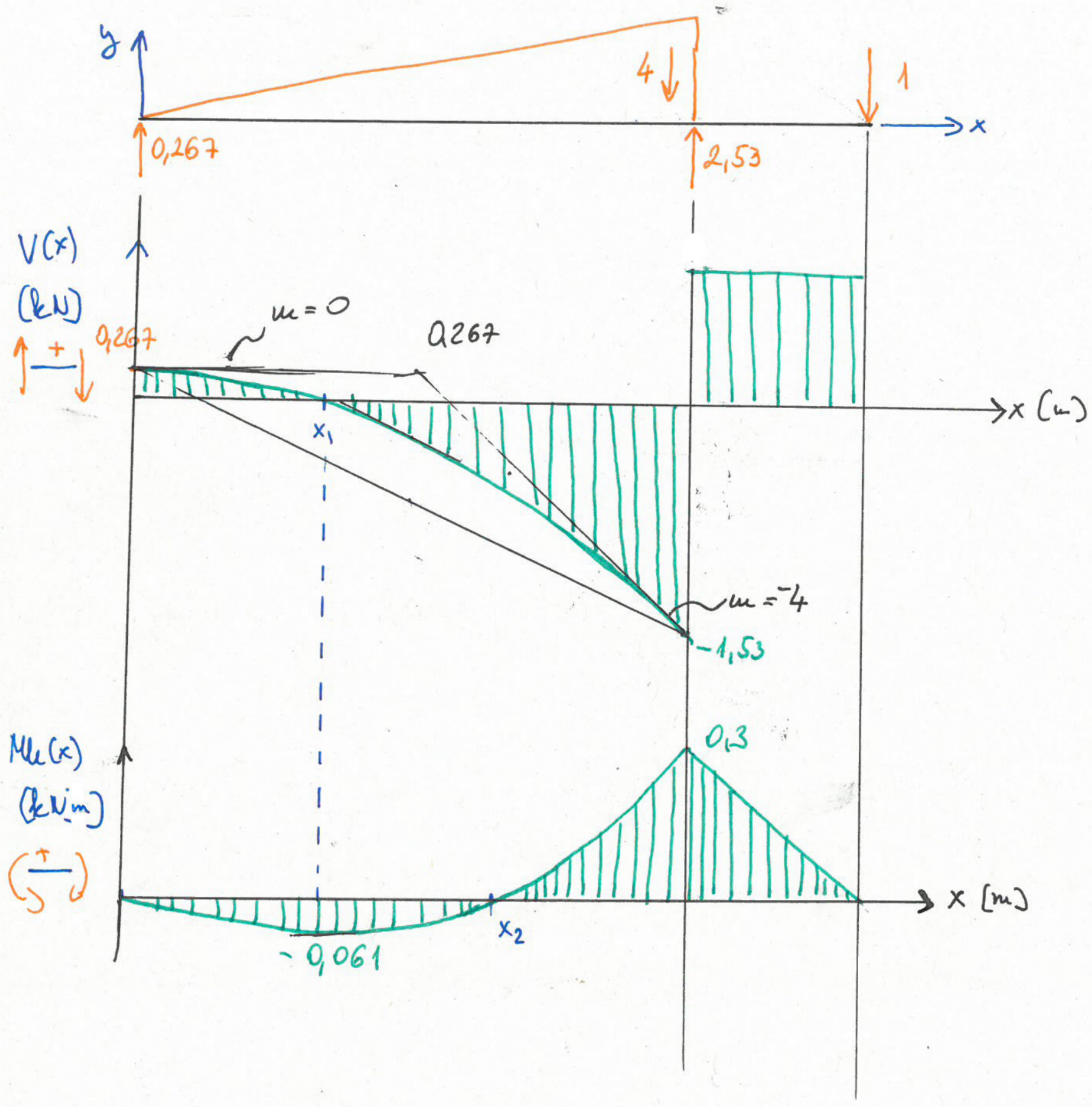
$$x_3 = x_1 = \underline{\underline{0{,}35 \text{ m}}}$$

$$M_{h_1}(x_1) = -0{,}061 \text{ kNm}$$

mivel $M_{h_1}''(x_1) = -p(x_1) > 0$

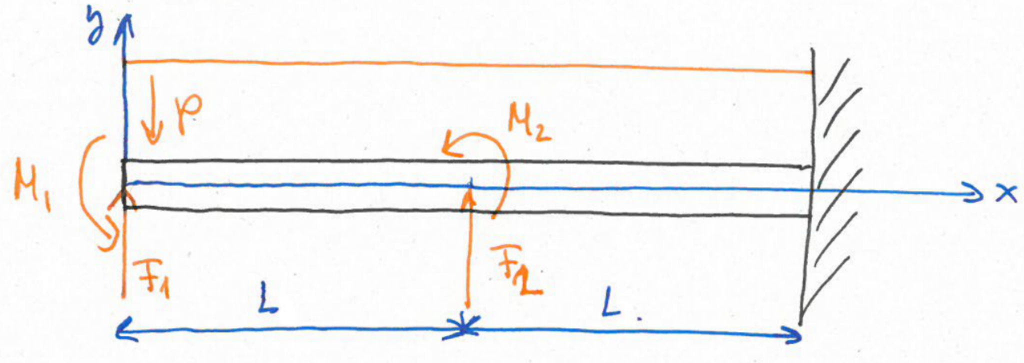
lok. min!

Igénybevételi ábrák:



3. feladat

Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és ábrákat!

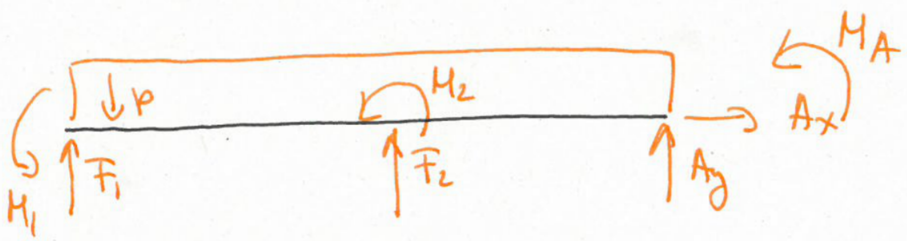


Adatok:

$p = 50\ kN/m$
$L = 2\ m$
$F_1 = 50\ kN$
$F_2 = 50\ kN$
$M_1 = 20\ kNm$
$M_2 = 20\ kNm$

① Reakciók

Most erre nem lenne feltétlen szükség! (balról fel lehet írni mindent!)



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0 \quad \boxed{A_x = 0}$

$\sum F_y = 0 \quad F_1 + F_2 + A_y - p\cdot 2L = 0$

$\sum M_A = 0 \quad M_1 + p2L \cdot L + M_2 - F_1 \cdot 2L - F_2 \cdot L + M_A = 0$

$A_y = p2L - F_1 - F_2 = 100\ kN\ (\uparrow)$

$M_A = F_1 \cdot 2L + F_2 \cdot L - M_1 - M_2 - 2pL^2 = -140\ kNm\ (\circlearrowright)$

Két szakaszra kell osztani a tartót:

① $0 < x < L$

② $L < x < 2L$

Az igénybevételi függvényeket a SZTA alapján írjuk fel!

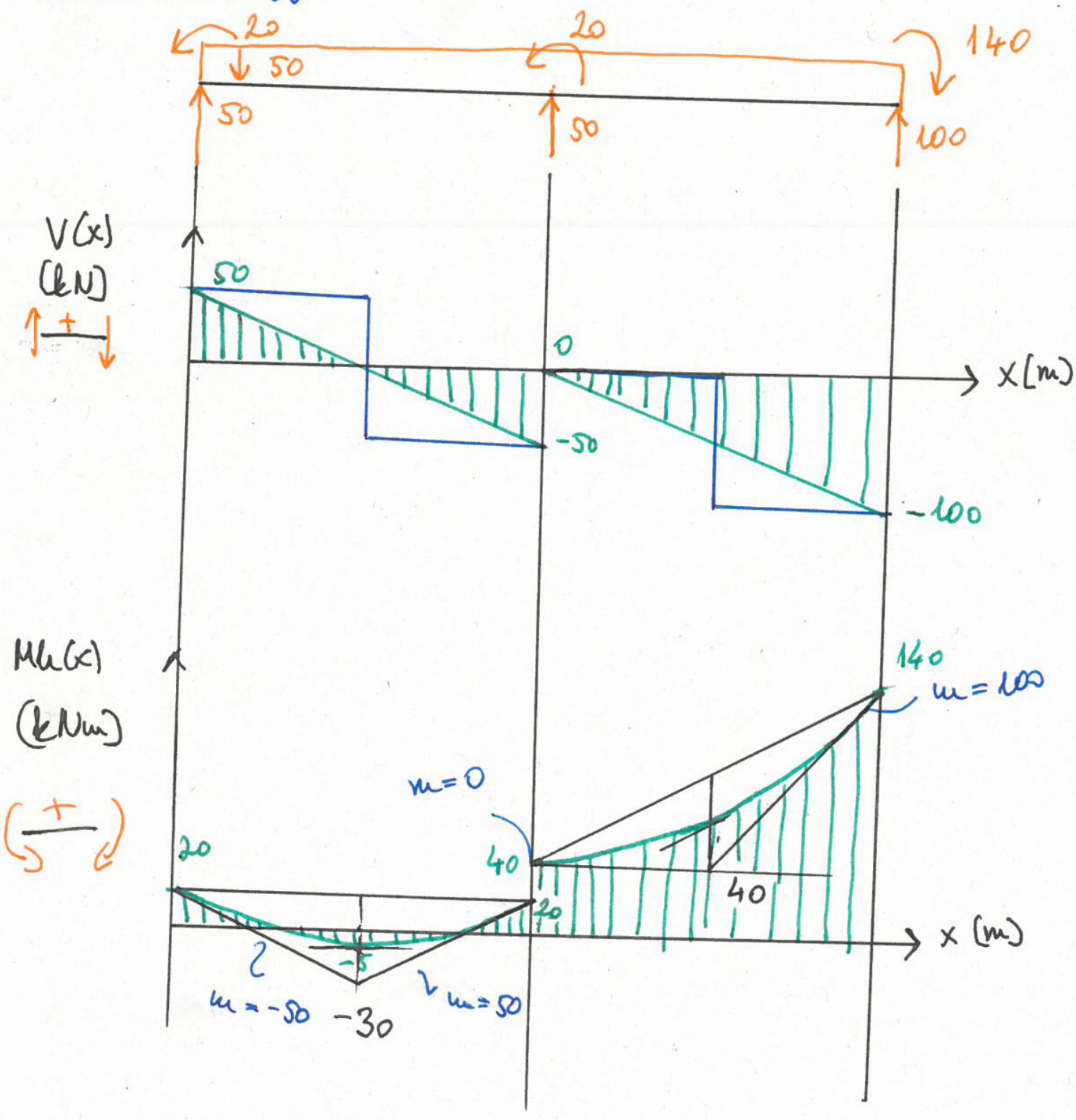
$$\left.\begin{aligned} N(x) &= 0 \\ M_{cs}(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ ezeket nem tüntetjük fel}$$

	① $0 < x < L$	② $L < x < 2L$
$V(x)$	$F_1 - px$	$F_1 - px + F_2$
$M_h(x)$	$M_1 - F_1 x + \frac{px^2}{2}$	$M_1 + M_2 - F_1 x + \frac{px^2}{2} - F_2 (x-L)$

$V_1(L) = -50\ kN$ $\qquad V_2(L) = 0\ kN$ $\qquad V_2(2L) = -100\ kN$

$M_{h1}(L) = 20\ kNm$ $\qquad M_{h2}(L) = 40\ kNm$ $\qquad M_{h2}(2L) = 140\ kNm$

Igénybevételi függvények



Zérushelyek:

$V_1(x_1)=0 \qquad F_1 - p x_1 = 0$

$$x_1 = \frac{F_1}{p} = 1\,m$$

$V(x_2)=0 \qquad \cancel{F_4} - p x_2 + F_2 = 0$

$$x_2 = \frac{F_1+F_2}{p} = 2\,m$$

$M_{h1}(x^*)=0 \qquad M_1 - F_1 x^* + \frac{p x^{*2}}{2} = 25x^{*2} - 50x^* + 20 = 0$

$$x_1^* = 0{,}553\ m$$
$$x_2^* = 1{,}447\ m$$

$M_{h2}(\tilde{x})=0 \qquad M_1 + M_2 - F_1 x + \frac{p x^2}{2} - F_2(x-L) = 25\tilde{x}^2 - 100\tilde{x} + 140 = 0$

nincs megoldás!

Szélsőérték

- $M_{h1}'(x_1) = -V_1(x_1) = 0 \Rightarrow$ itt lehet szé!

  $M_{h1}''(x_1) = -p(x_1) > 0$ lok. min.

  $M_{h1}(x_1) = -5\ kNm$

- $M_{h2}'(x_2) = -V_2(x_2) \Rightarrow$ itt lehet szé!

  $M_{h2}''(x_2) = -p(x_2) > 0$ lok. min.

  $M_{h2}(x_2) = 40\ kNm$