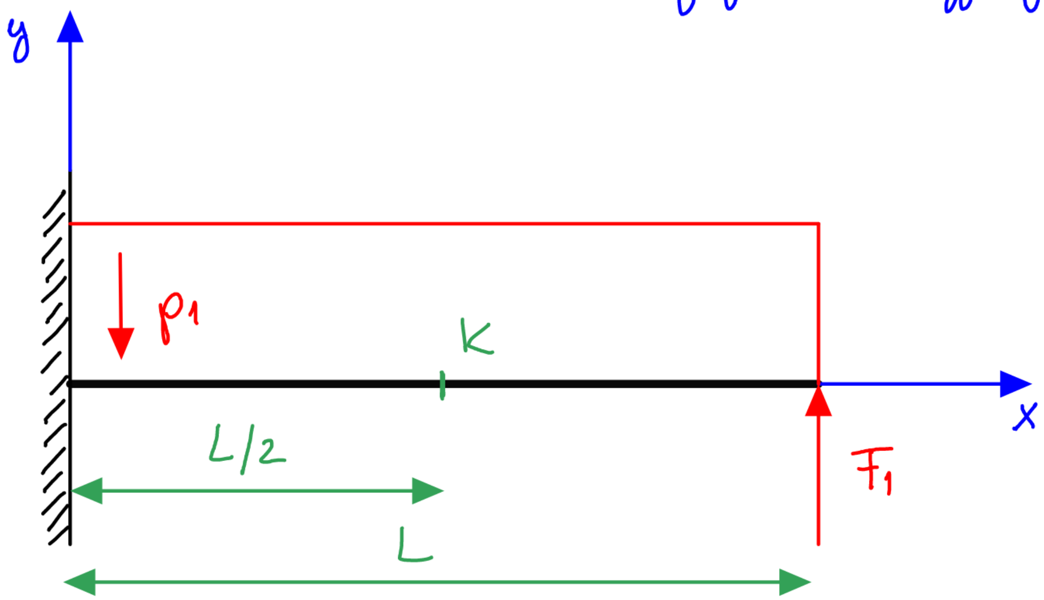
Statika - 9. gyakorlat - I.

Igénybevételek, igénybevételi ábrák

Parabola-szerkesztés: Nézzük az előző gyakorlat 2. feladatát!

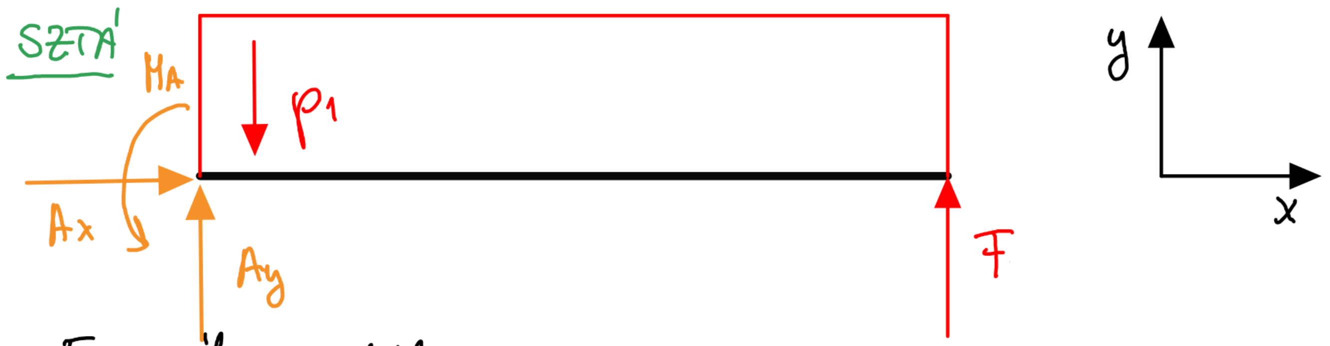
2. feladat Írjuk fel az igénybevételi függvényeket és számítsuk ki a K keresztmetszetben az igénybevételek nagyságát!



Adatok:

$L = 4\,m$
$p_1 = 3\,kN/m$
$F = 3\,kN$

Most meheztünk azonnal jobbról vagy kiszámoljuk a reakciókat és balról redukálunk!



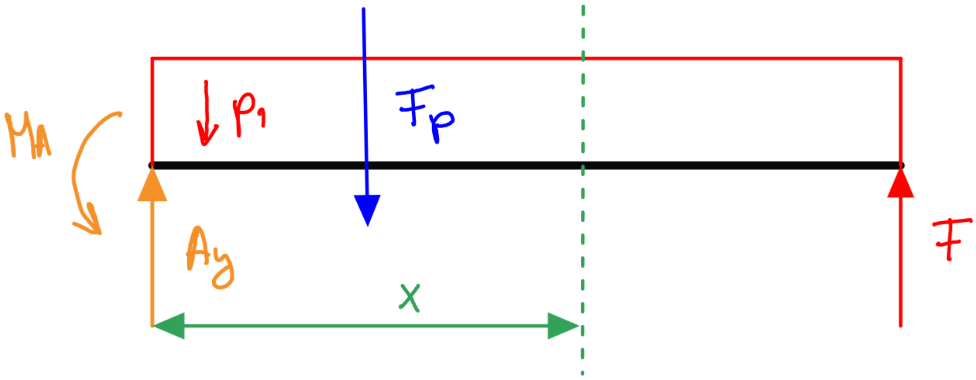
Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0: \boxed{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + F - p_1 L = 0 \quad \Rightarrow A_y = p_1 L - F = \underline{\underline{9\,kN}}\ (\uparrow)$

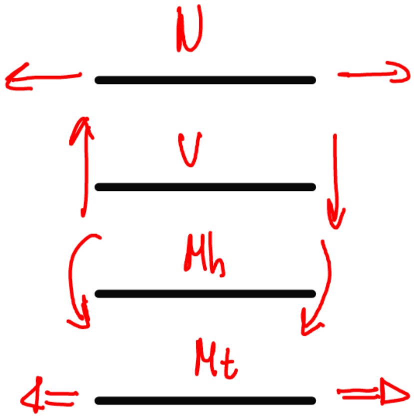
$\Sigma M_A = 0: \quad M_A + F \cdot L - p_1 L \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow M_A = p_1 \frac{L^2}{2} - F \cdot L = \underline{\underline{12\,kNm}}$

Érdemes felrajzolni a testre ható erőket!



Válasszunk ki egy keresztmetszetet!

Mivel a rúdszakaszon belül nincs koncentrált erő és erőpár
↳ egy szakasz elég!



	Balról	Jobbról
N(x)	0	0
V(x)	$A_y - px$ $V(x) = 9 - 3x$ kN méterben	$-F + p(L-x)$ $V(x) = -3 + 12 - 3x = 9 - 3x$
Mh(x)	$-A_y x + \frac{px^2}{2} + M_A$ $Mh(x) = -9x + \frac{3}{2}x^2 + 12$ kNm méterben	$-F(L-x) + \frac{p(L-x)^2}{2}$ $Mh(x) = -3(4-x) + \frac{3(16-8x+x^2)}{2}$ $= -12 + 3x + 24 - 12x + \frac{3}{2}x^2$ $= \frac{3}{2}x^2 - 9x + 12$ kNm méterben
Mt(x)	0	0

Tehát a függvények:

$$p(x) = -p$$

$$V(x) = A_y - px$$

$$M_h(x) = \frac{px^2}{2} - A_y x + M_A$$

Ellenőrizzük a derivált kapcsolatot!

$$V'(x) = -p = p(x) \checkmark$$

$$M_h'(x) = px - A_y = -V(x) \checkmark$$

- keresztmetszet:

$N_K = 0$

$M_{tK} = 0$

$V_K = V(L/2) = 9 - 3 \cdot 2 = \underline{\underline{3\,kN}}$

$M_{hK} = M_h(L/2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 12 = \underline{\underline{0\,kNm}}$

Rúdvég: $(x = L)$

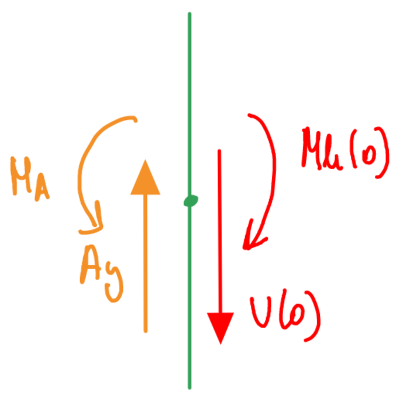
$$\left.\begin{aligned} V(L) &= 9 - 3 \cdot 4 = -3\,kN \\ M_h(L) &= \frac{3}{2} 4^2 - 9 \cdot 4 + 12 = 0\,kNm \end{aligned}\right\}$$

megfelel annak, amit a rúd jobb végén lévő terhelés ad

Befogás $(x = 0)$

$V(0) = 9\,kN$

$M_h(0) = 12\,kNm$



Tényleg egyensúly!

Igénybevételi ábrák:

$V(x) = 9 - 3x$ → könnyen ábrázolható → lineáris egyenes

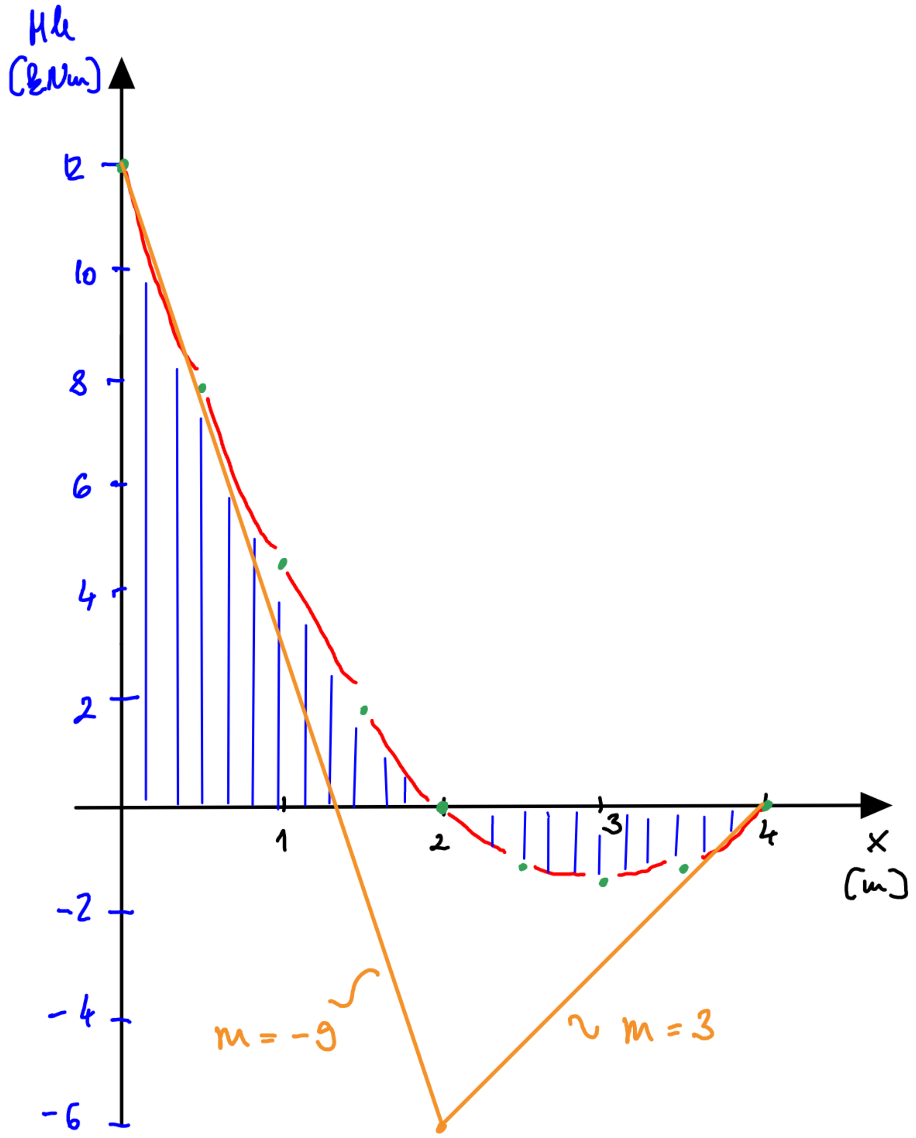
↳ elegendő 2 pontban kiszámolni

$Mh(x) = \frac{3}{2}x^2 - 9x + 12$ → Parabola

↳ nem triviális ábrázolni

1. megoldás: Sok pontban kiszámolni

X [m]	Mh [kNm]
0	12
0,5	7,875
1	4,5
1,5	1,875
2	0
2,5	-1,125
3	-1,5
3,5	-1,125
4	0



Vegyük észre:

Érintők meredeksége:

$Mh'(x) = 3x - 9$

$Mh'(x)\big|_{x=0} = -9$

$Mh'(x)\big|_{x=4} = 3$

→ Tudjuk, hogy $Mh'(x) = -V(x) = 3x - 9$

↳ Tehát ahol $V(x)$ zérus

↳ $Mh(x)$ → szélsőérték

2. megoldás : Nyíró igénybevétel alapján

Tudjuk: $M_h'(x) = -V(x)$

$$\frac{dM_h}{dx} = -V(x) \quad \Big/ \cdot dx$$

formálisan „beszorozzuk"

$$dM_h = -V\,dx \quad \Big/ \int_{x_0}^{x_0+\Delta x}$$

→ egy ismert x_0 ponttól Δx-nyit balra haladva

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dM_h = -\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} V\,dx$$

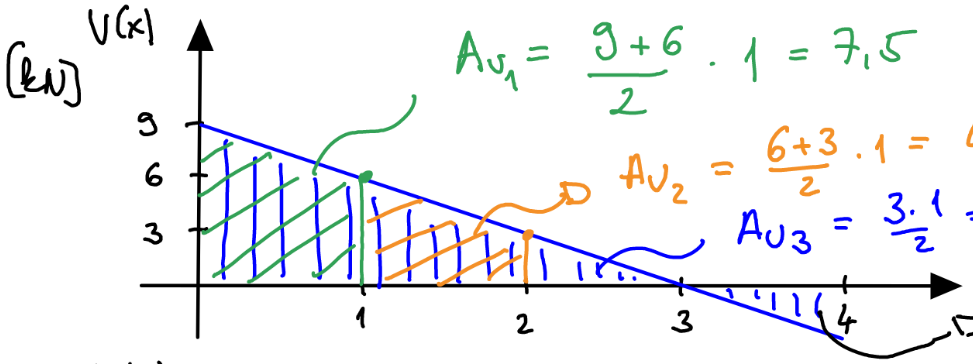
M_h változása

$$M_h(x_0+\Delta x) - M_h(x_0) = -\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} V\,dx$$

A $V(x)$ függvény alatti terület A_V

→ előjeles terület

$$M_h(x_0+\Delta x) = M_h(x_0) - A_V$$

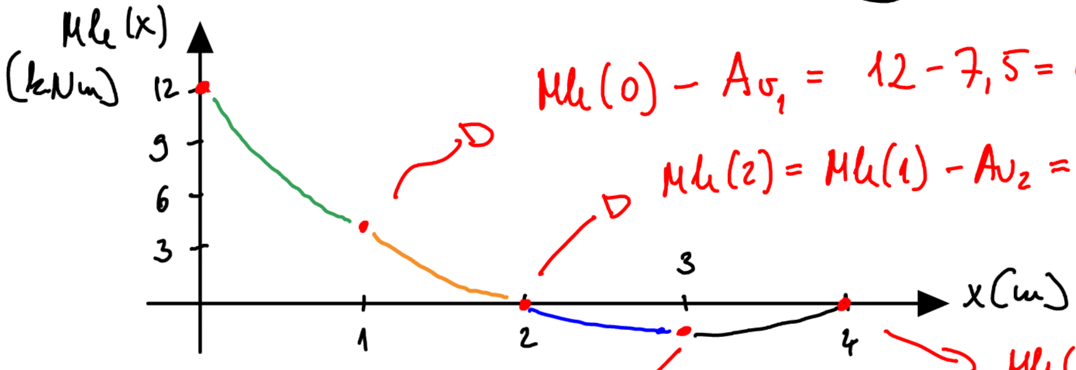


$A_{V_1} = \frac{9+6}{2} \cdot 1 = 7{,}5$

$A_{V_2} = \frac{6+3}{2} \cdot 1 = 4{,}5$

$A_{V_3} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5$

$A_{V_4} = -\frac{1 \cdot 3}{2} = -1{,}5$



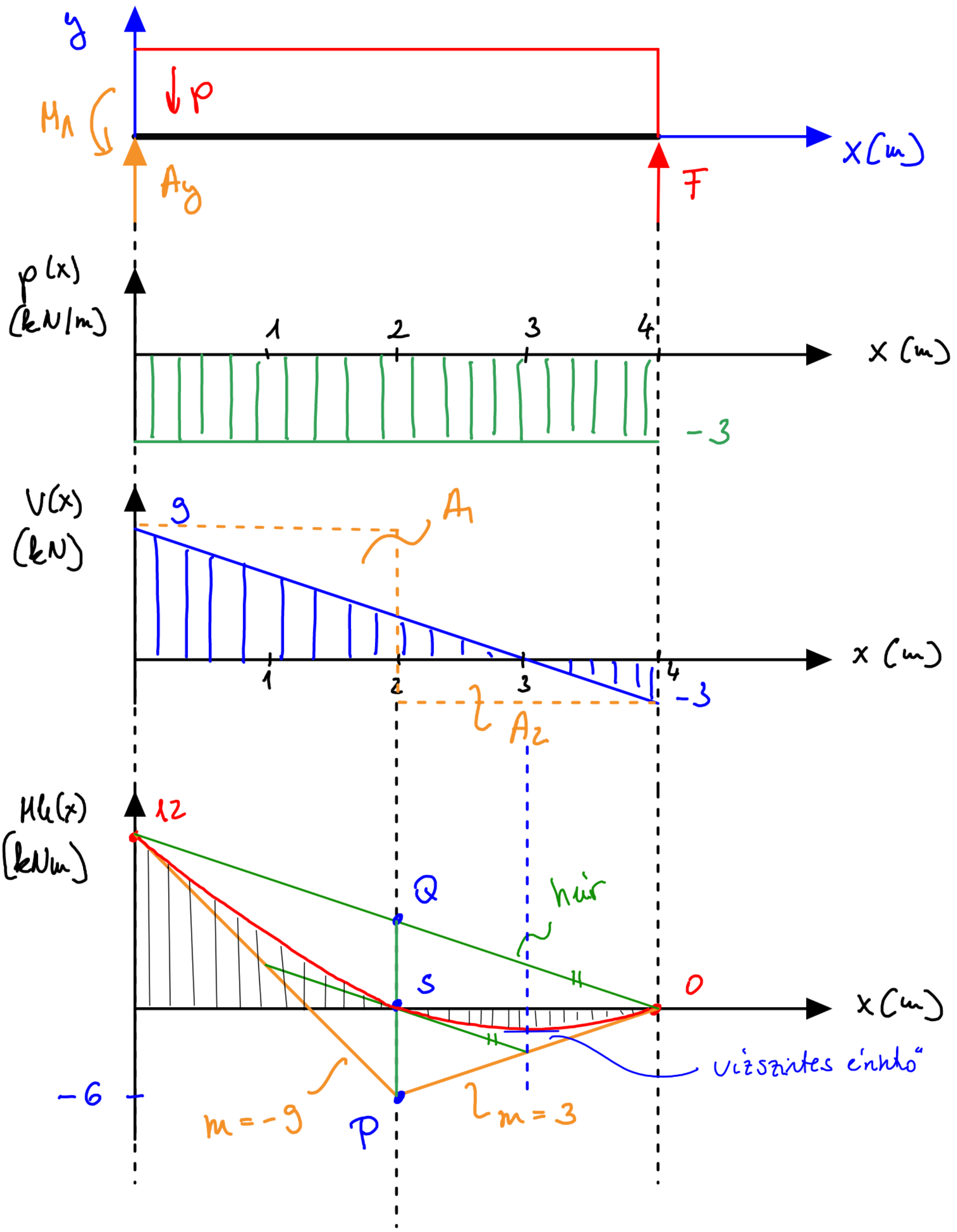
$M_h(0) - A_{V_1} = 12 - 7{,}5 = 4{,}5 = M_h(1)$

$M_h(2) = M_h(1) - A_{V_2} = 4{,}5 - 4{,}5 = 0$

$M_h(3) = M_h(2) - A_{V_3} =$
$= 0 - 1{,}5 = -1{,}5$

$M_h(4) = M_h(3) - A_{V_4} =$
$= -1{,}5 - (-1{,}5) = 0$

Hogyan szerkesszük az igénybevételi ábrát?



① p(x) és V(x) felrajzolása, segédvonal a lineáris V(x) tartomány felénél

② Vegyük fel Mh kezdő és végső értékét!

$Mh(0) = 12\,kNm$

$Mh(L) = 0\,kNm$

③ Érintők berajzolása

↳ $Mh'(0) = -V(0) = -9$

↳ $Mh'(L) = -V(L) = 3$

(4) Érintők metszéspontjának kiszámítása

Rajzoljunk két téglalapot a $U(x)$ fgv két feltartománya-ra
↳ magasság a kezdő és a végérték

$$A_1 = 9 \cdot 2 = 18$$
$$A_2 = (-3) \cdot 2 = -6$$

↳ Segédpont: Mh kezdőértékéből vonjuk le A_1 et
$12 - 18 = -6$ → az érintők metszéspontja

↳ Nem muszáj ismerni a végpontot:
$$Mh(L) = P - A_2 = -6 - (-6) = \underline{\underline{0}}$$

(5) Húzzuk be a húrt $Mh(0)$ és $Mh(L)$ közé
↳ legyen Q pont a szakasz felénél lévő pontja a húrnak

(6) Felezzük meg a PQ szakaszt → Felezőpont „S"

(7) Húzzunk párhuzamost a húrral az S pontban
↳ ez lesz a parabola érintője!

(8) Rajzoljuk meg a parabolát
↳ kezdő és végpontban adott az érintő
↳ S pontban is adott
↳ Ha van $U(x) = 0$ → ott szélsőérték
↳ $Mh(x)$-nek vízszintes érintője van

Fontos: Amit fel kell tüntetni → az érintők és a P pont!
Ki kell számolni a helyét!