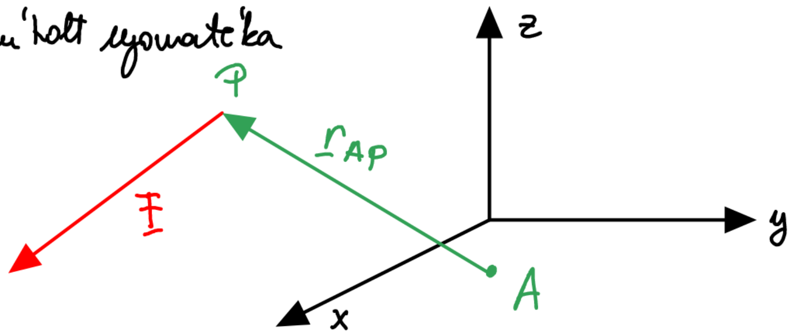
Statika - 4. gyakorlat

Erőrendszer redukáltja

Elméleti áttekintés:

↳ Erő pontra számított nyomatéka

$\underline{M}_A = \underline{r}_{AP} \times \underline{F}$



↳ Erőrendszer redukáltja A → B pontok között

Ismert: $\underline{M}_A$ és $\underline{F}$

$[\underline{F}; \underline{M}_A]_A$

statikai vektorkettős

$\underline{M}_B = \underline{M}_A + \underline{r}_{BA} \times \underline{F}$

$[\underline{F}; \underline{M}_B]_B$

↳ Több erő esetén:

$$\underline{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \underline{M}_j$$

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

n db erő

m db koncentrált erőpár

↳ Egyenértékűség

$$[\underline{F}'; \underline{M}_A']_A = [\underline{F}''; \underline{M}_A'']_A$$

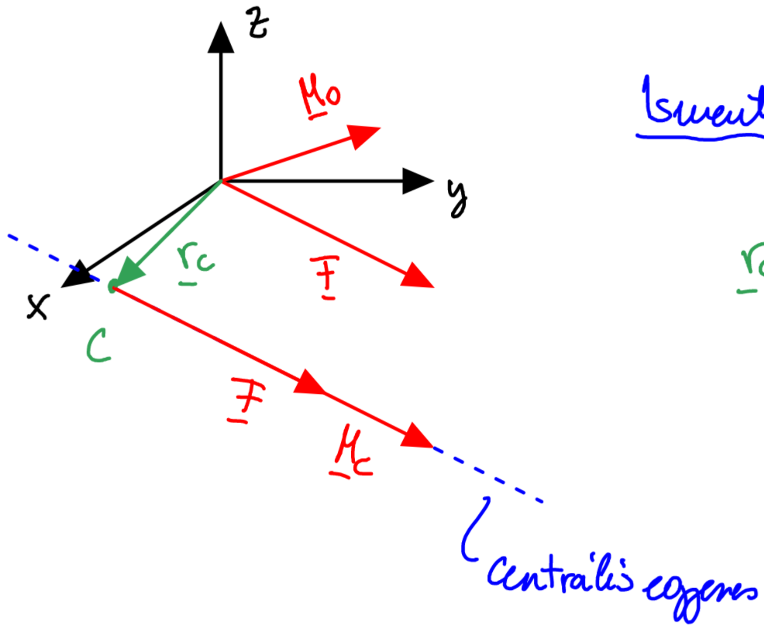
Kérdés: elég ezt egy pontra belátni?

↳ Skalár invariáns: $\underline{F} \cdot \underline{M}_A = \underline{F} \cdot \underline{M}_B \in \mathbb{R}$

független a ponttól!

↳ **Centrális egyenes**: ~ olyan egyenes, ahol $\underline{F} \parallel \underline{M}_C$

C a centrális egyenes egy pontja!



Ismert: $[\underline{F} \,;\, \underline{M}_O]_O$

$$\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{F^2}$$

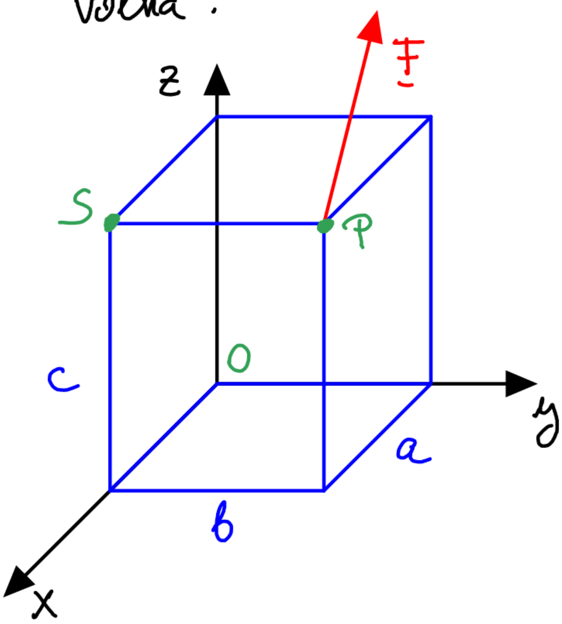
az egyenes egyenlete:

$$\underline{r} = \underline{r}_C + \lambda \cdot \underline{e}_F \qquad \underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|}$$

Mekkora itt a nyomaték?

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O - \underline{r}_C \times \underline{F} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{|\underline{F}|^2} \cdot \underline{F}$$

1. feladat Helyezzük át a merev hasábot P pontban terhelő $\underline{F}$ koncentrált $\underline{F}$ erőt az S pontba! Milyen $\underline{M}_S$ nyomatékvektort kell az S pontban működtetnünk akkor, hogy az eredeti $\underline{F}$ erő hatásával egyenértékű hatás érje a testet? Redukáljuk az S pontban működő erőrendszert az O pontra! Írjuk fel $\underline{M}_O$-t és számítsuk ki mintha a P pontbeli erőt közvetlenül az O-ba redukáltuk volna!



Adatok:

$a = 20\,mm$

$b = 40\,mm$

$c = 60\,mm$

$$\underline{F} = 10\underline{i} + 50\underline{j} + 70\underline{k}\ N = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix} N$$

Ha áthelyezzük $\underline{F}$ erőt S-be $\Rightarrow$ a forgató hatását az $\underline{M}_S$ nyomatékkal tudjuk helyettesíteni $\Rightarrow$ Redukáljuk $\underline{F}$-t S-re!

$$\underline{r}_{SP} = \underline{p} - \underline{s} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} mm$$

$$\underline{M}_S = \underline{r}_{SP} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 40 & 0 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} Nmm$$

Tehát, ha áthelyezzük az erőt S-be akkor egy

$$\underline{M}_S = \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} Nmm$$

nagyságú koncentrált erőpárt kell alkalmazni!

Redukáljunk: $S \to O$

$$\underline{r}_{os} = \underline{s} - \underline{o} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} \text{mm}$$

$$\underline{M}_o = \underline{M}_s + \underline{r}_{os} \times \underline{F} = \underline{M}_s + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 20 & 0 & 60 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 - 3000 \\ 600 - 1400 \\ 1000 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -800 \\ 600 \end{bmatrix} \text{Nmm}$$

- Nézzük meg ha a P-ből megyünk:

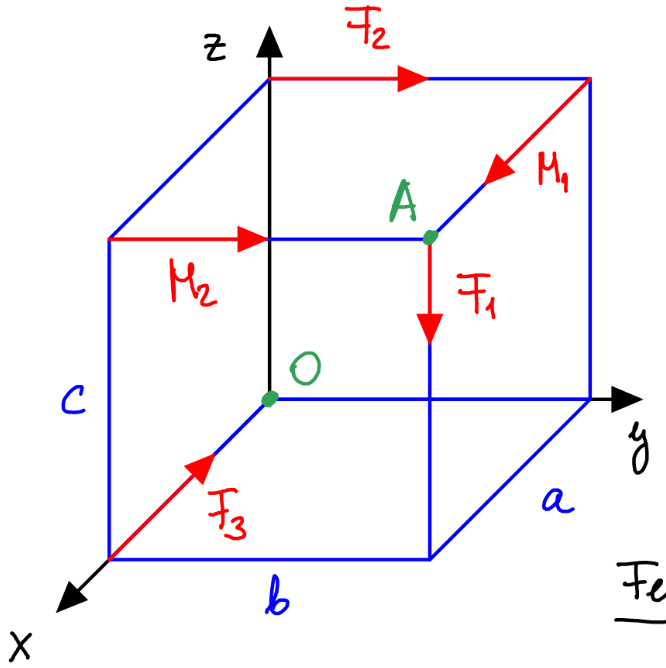
Mekkora nyomatékot kell O-ba tenni, hogy a forgatóhatás ne változzon!

$$\underline{r}_{op} = \underline{p} - \underline{o} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix} \text{mm}$$

$$\underline{M}_o = \underbrace{\underline{M}_p}_{=0} + \underline{r}_{op} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 20 & 40 & 60 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 - 3000 \\ 600 - 1400 \\ 1000 - 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -800 \\ 600 \end{bmatrix} \text{Nmm}$$

Látjuk, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk!

2. feladat Egy merev testre az $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ és $\underline{F}_3$ koncentrált erők és az $\underline{M}_1$ és $\underline{M}_2$ koncentrált erőpárok hatnak az ábrán látható módon.



Adatok:

$F_1 = 25\,N$ $\quad a = 2\,m$

$F_2 = 70\,N$ $\quad b = 3\,m$

$F_3 = 60\,N$ $\quad c = 4\,m$

$M_1 = 90\,Nm$

$M_2 = 110\,Nm$

Feladatok

1) Számítsuk ki az erőrendszer redukáltját az O pontra!

2) Redukáljuk az erőrendszert az A pontra!

3) Igazoljuk, hogy $\underline{F} \cdot \underline{M}_O$ tényleg invariáns!

4) Írjuk fel a centrális egyenes egyenletét! Redukáljuk az erőrendszert a centrális egyenes egy pontjára!

5) Milyen O pontbeli erőrendszerrel kell kiegészíteni az erőrendszert hogy egyensúly legyen!

Mielőtt bármit számolnánk $\Rightarrow$ írjuk fel az erőrendszer vektorait!

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} -F_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm} \qquad \underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

A redukáláshoz kell az erők támadáspontjaiba mutató helyvektorokat!

Az origóba redukálunk: $\underline{r}_{op}$ vektor kell!

$$\underline{r}_1 = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k} \longrightarrow \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$\underline{r}_2 = c\underline{k} \longrightarrow \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$\underline{r}_3 = a\underline{i} \longrightarrow \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}$$

<u>Az erőrendszer redukáltja:</u>

- $$\underline{F} = \sum_{i=1}^{3} \underline{F}_i = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix}}} \text{ N}$$

- $$\underline{M}_0 = \sum_{i=1}^{3} \underline{r}_i \times \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{2} \underline{M}_j = \underbrace{\underline{r}_1 \times \underline{F}_1}_{\underline{M}_{0F_1}} + \underbrace{\underline{r}_2 \times \underline{F}_2}_{\underline{M}_{0F_2}} + \underbrace{\underline{r}_3 \times \underline{F}_3}_{\underline{M}_{0F_3}} + \underline{M}_1 + \underline{M}_2$$

Külön:

$$\underline{M}_{0F_1} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -75 - 0 \\ 0 + 50 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

$$\underline{M}_{0F_2} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 70 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 280 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

$$\underline{M}_{0F_3} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -60 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

Vagy másképp:

$$\underline{M}_{OF_2} = (4 \cdot \underline{k}) \times (70\,\underline{j}) = 280\,\underbrace{\underline{k} \times \underline{j}}_{-\underline{i}} = -280\,\underline{i}$$

$$\underline{M}_{OF_3} = (2\,\underline{i}) \times (-60\,\underline{i}) = -120\,\underbrace{\underline{i} \times \underline{i}}_{\underline{0}} = \underline{0}$$

Visszaírva:

$$\underline{M}_O = \begin{bmatrix} -75 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

Tehát az erőrendszer redukáltja:

$$[\underline{F}; \underline{M}_O]_O = \left[\begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix}\right]_O$$

- Redukáljuk az A pontba:

1. megoldás:

$$\left.\begin{aligned} \underline{F} &= \sum_{i=1}^{3} \underline{F}_i \\ \underline{M}_A &= \sum_{i=1}^{3} \underline{r}_{Ai} \times \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{2} \underline{M}_j \end{aligned}\right\} \text{hosszú...}$$

2. megoldás:

$$\underline{M}_A = \underline{M}_O + \underline{r}_{AO} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_1 \times \underline{F}$$

$$\underline{r}_{AO} = -\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{m} \qquad \underline{F}_A = \underline{F}_O = \underline{F} = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \text{N}$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & -3 & -4 \\ -60 & 70 & -25 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75 + 280 \\ 240 - 50 \\ -140 - 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 350 \\ -320 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

Tehát az erőrendszer redukáltja az A pontban:

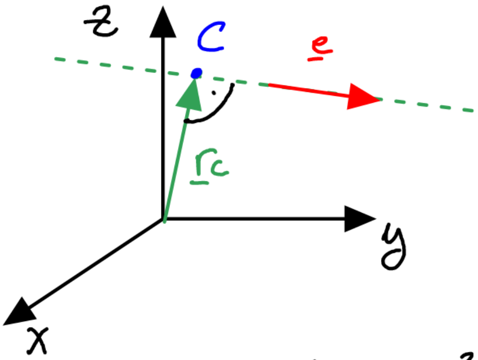
$$[\underline{F}; \underline{M}_A]_A = \left[\begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 90 \\ 350 \\ -320 \end{bmatrix}\right]_A$$

Ellenőrizzük a skalár invariánst:

- $\underline{F} \cdot \underline{M}_O = (-60)(-265) + 70 \cdot 160 + (-25) \cdot 0 = 27100\ Nm^2$
- $\underline{F} \cdot \underline{M}_A = (-60) \cdot 90 + 70 \cdot 350 + (-25)(-320) = 27100\ Nm^2$

✓

Centrális egyenes:



Tudjuk, hogy O-hoz (ahol ismerjük az $(\underline{F}, \underline{M}_O)_O$ statikai vektorkettőst) a centrális egyenes legközelebbi pontja C pont

$$\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{|\underline{F}|^2}$$

$$|\underline{F}|^2 = \left(\sqrt{\underline{F} \cdot \underline{F}}\right)^2 = |\underline{F} \cdot \underline{F}| = (-60)^2 + 70^2 + (-25)^2 = 9125\ N^2$$

$|\underline{F}| = 95{,}525\,N$ (ez a hossza!)

$$\underline{F} \times \underline{M}_O = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -60 & 70 & -25 \\ -265 & 160 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 6625 \\ 8950 \end{bmatrix} Nm^2$$

Tehát:

$$\underline{r}_C = \frac{1}{9125} \cdot \begin{bmatrix} 4000 \\ 6625 \\ 8950 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32/73 \\ 53/73 \\ 358/365 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} 0{,}4384 \\ 0{,}726 \\ 0{,}9808 \end{bmatrix} m$$

Az egyenes egyenlete: egy pontja ismert $(\underline{r}_C)$

kell egy irány: $\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|} = \frac{1}{95{,}525} \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6281 \\ 0{,}7328 \\ -0{,}2617 \end{bmatrix} (-)$

Az egyenlet: $\underline{r}(\lambda) = \underline{r}_C + \lambda \cdot \underline{e}_F$

$$\underline{r}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0{,}4384 - 0{,}6281 \cdot \lambda \\ 0{,}726 + 0{,}7328\,\lambda \\ 0{,}9808 - 0{,}2617\,\lambda \end{bmatrix} m$$

Az erőrendszer redukáltja a C pontban:

1. megoldás: $\underline{M}_C = \underline{M}_A + \underline{r}_{CA} \times \underline{F} = \underline{M}_O + \underline{r}_{CO} \times \underline{F}$

ismert

2. megoldás

$$\underline{M}_C = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{|\underline{F}|^2} \cdot \underline{F} = \frac{27100}{9125} \cdot \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -178{,}192 \\ 207{,}89 \\ -74{,}247 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

skalár invariáns!

Ellenőrzés: $\underline{M}_C \parallel \underline{F} = ?$

- 1. út $\quad \underline{M}_C \times \underline{F} = \underline{0}$ ✓ Teljesülni fog!

- 2. út $\quad \left(\underbrace{\frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{|\underline{F}|^2}}_{\alpha} \cdot \underline{F} \right) \cdot \underline{F} = (\alpha \underline{F}) \times \underline{F} = \alpha (\underline{F} \times \underline{F}) = \underline{0}$ ✓

Mekkora erőrendszer kell, hogy egyensúly legyen?

Adjunk hozzá egy $[\underline{F}^*; \underline{M}_O^*]_O$ erőrendszert az O pontba

↳ új eredő vektorkettős $[\underline{\tilde{F}}; \underline{\tilde{M}}_O]_O = [\underline{0}; \underline{0}]_O$

egyensúly miatt!

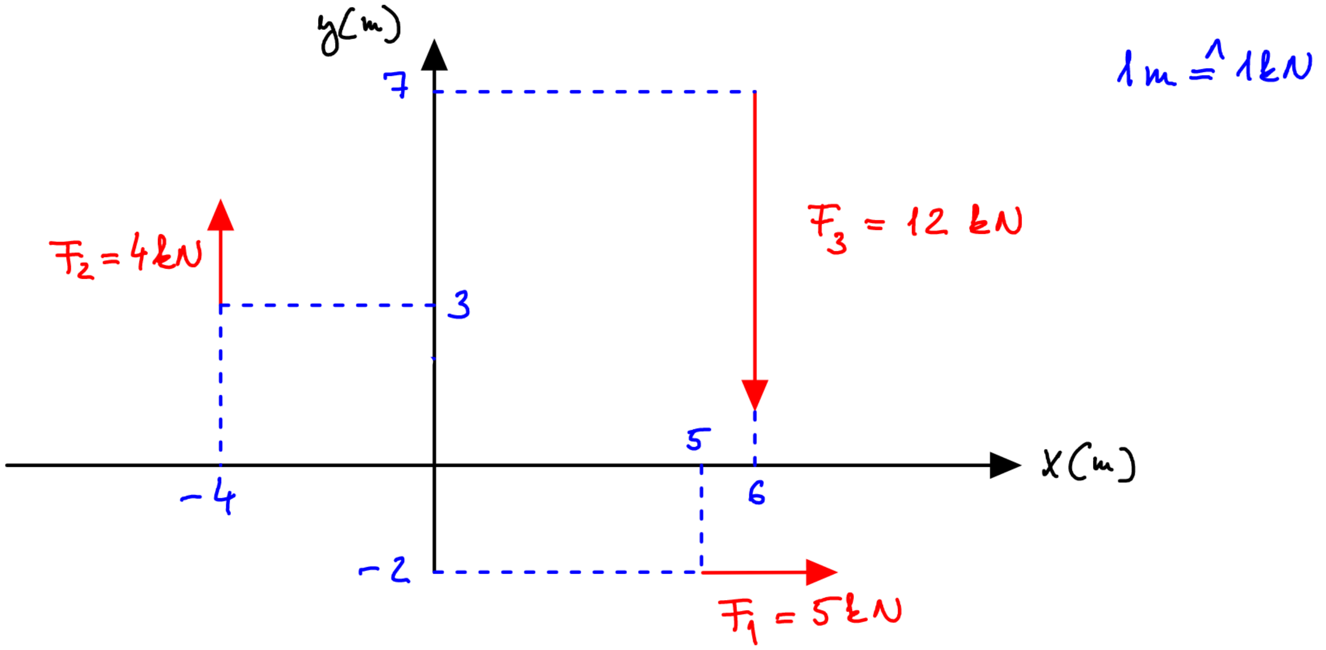
$$\underline{\tilde{F}} = \underline{F}^* + \underline{F} = \underline{0} \rightarrow \boxed{\underline{F}^* = -\underline{F}}$$

$$\underline{\tilde{M}}_O = \underbrace{\underline{M}_O^* + \underline{M}_O}_{} = \underline{0} \rightarrow \boxed{\underline{M}_O^* = -\underline{M}_O}$$

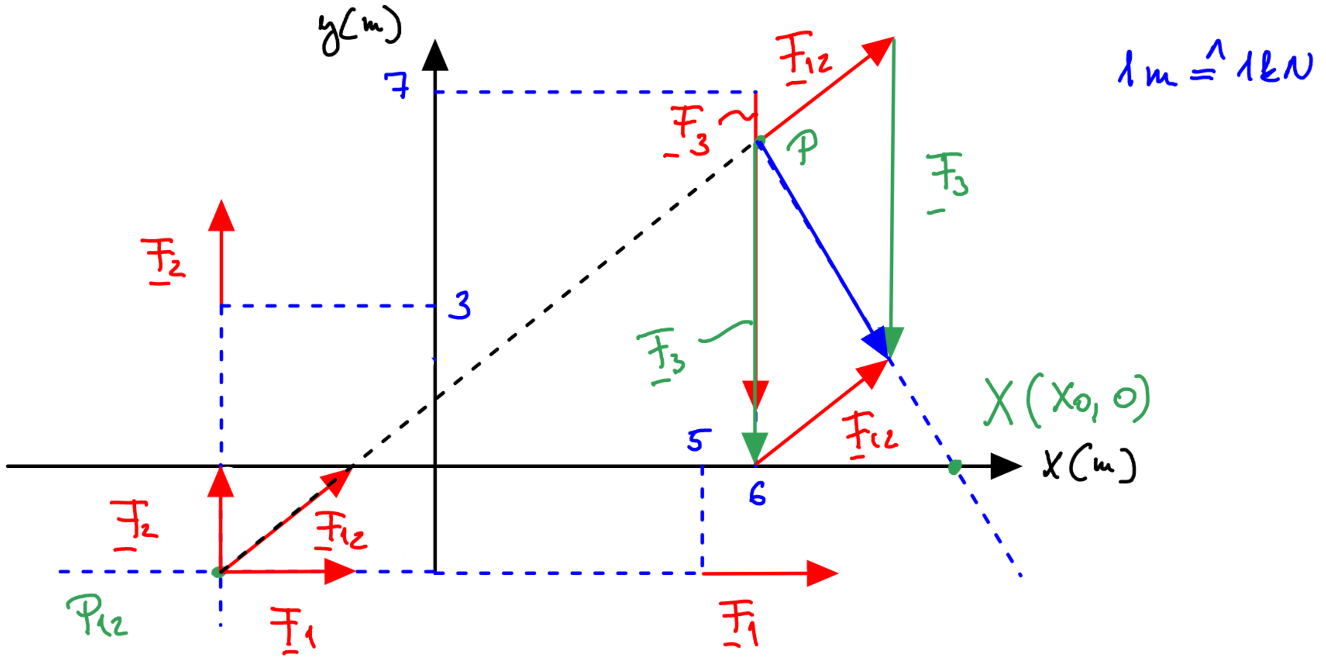
↳ mivel az O-ban vagyunk → minden r erőkar zérus!

Tehát az O-ba redukált statikai vektorkettős (−1)-szeresét kell alkalmazni!

3. feladat Határozzuk meg az alábbi síkbeli erőrendszer $\underline{F}_e$ eredőjének nagyságát és helyét!



Szerkesztéssel:
- $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ eredője
- Ennek az eredője $\underline{F}_3$-mal



A lépések:
① Közös pontba toljuk $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ vektorokat (P_{12} pont)
↳ hatásvonal metszése
② Eredőjük $\underline{F}_{12}$ szerkesztése
③ $\underline{F}_{12}$ és $\underline{F}_3$ közös pontba → hatásvonal metszése (P)
④ $\underline{F}_e$ szerkesztés

Olvassuk le az eredményeket!

$$\underline{F_e} \approx \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \text{kN} \qquad \underline{r_x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}75 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m}$$

$$\underline{r_P} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m}$$

SZÁMOLÁSSAL

Írjuk fel a koncentrált erők helyvektorait és az erővektorokat!

- $\underline{r_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ m $\qquad \underline{F_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kN
- $\underline{r_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ m $\qquad \underline{F_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ kN
- $\underline{r_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ m $\qquad \underline{F_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$ kN

Számítsuk ki az erők eredőjét az origóra (erőrendszer redukálása)

$$\underline{F_e} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$\underline{M_O} = \underline{r_1} \times \underline{F_1} + \underline{r_2} \times \underline{F_2} + \underline{r_3} \times \underline{F_3} =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 7 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0+10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -16-0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -72-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

Vegyük észre, hogy síkfeladat esetén (amikor az erők egy síkban helyezkednek el) $\Longrightarrow$ egy A pontra számított nyomaték a síkra merőleges!

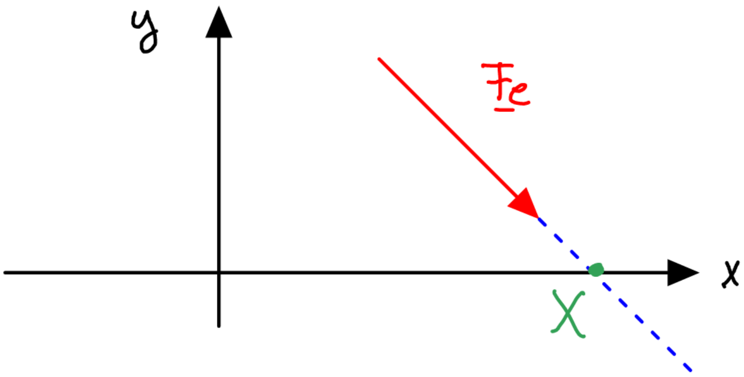
↳ Most az origóban $\underline{F}_e$ és $\underline{M}_o$ az erőrendszer eredője!

Mi egyetlen erővel szeretnénk helyettesíteni!

↳ az erőhatás miatt ez $\underline{F}_e$ kell legyen!

↳ Az a kérdés, hogy hol van?

$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$



Mivel hatásvonala mentén eltolható → Toljuk el az $X(x_0, 0)$ pontba!

Ekkor ugyanakkora nyomatéknak kell ébredni az $\underline{O}$-ra!

$$\underline{M}_o = \underline{r}_{ox} \times \underline{F}_e = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_0 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} kNm$$

$$x_0 = \frac{78}{8} = 9{,}75\,m$$

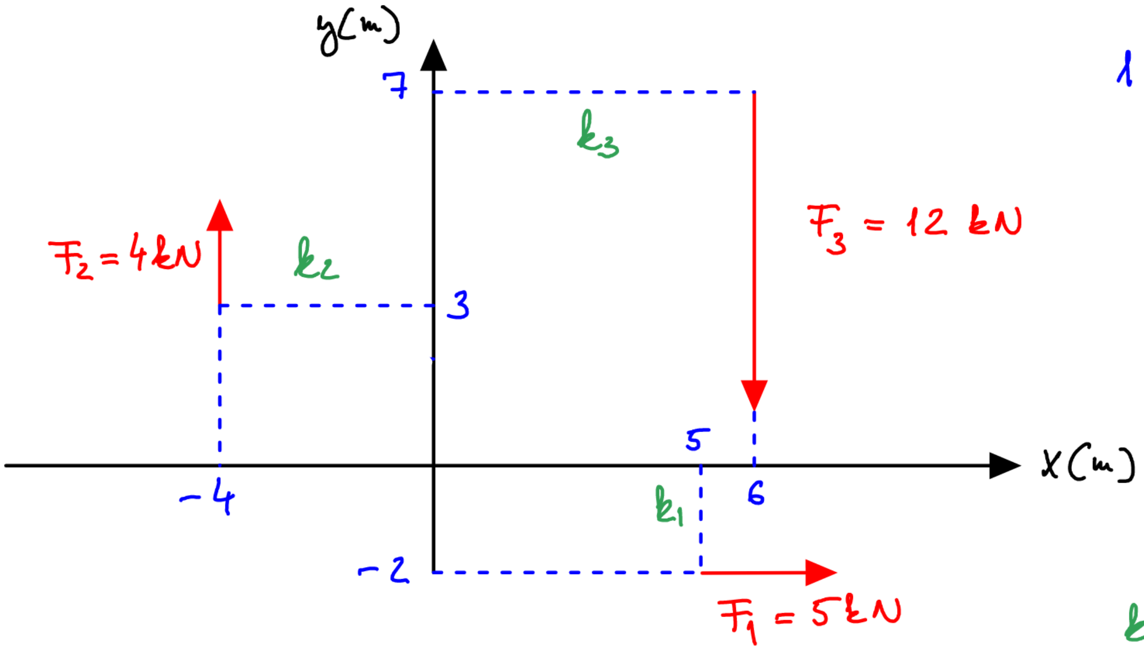
vektorosan kiszámolható:

$$\underline{M}_o = (x_0\,\underline{i}) \times (5\underline{i} - 8\underline{j}) = 5x_0 \underbrace{(\underline{i} \times \underline{i})}_{\underline{0}} - 8x_0 \underbrace{(\underline{i} \times \underline{j})}_{\underline{k}}$$

$$\underline{M}_o = -8x_0\,\underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8x_0 \end{bmatrix}$$

Egyszerűsítés ha síkfeladat

$1\,m \hat{=} 1\,kN$



$k_1 = 2\,m$
$k_2 = 4\,m$
$k_3 = 6\,m$

$$M_0 = F_1 k_1 - F_2 \cdot k_2 - F_3 \cdot k_3 = \underline{\underline{-78\,kNm}}$$

előjelre figyelni kell!