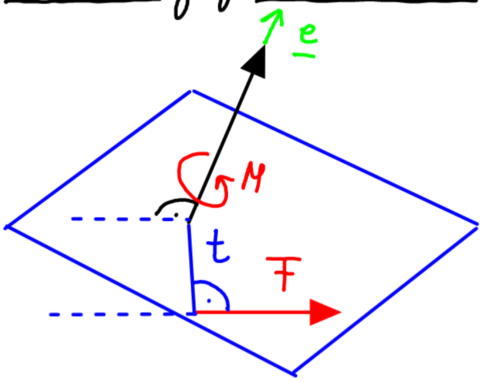
Statika – 2. gyakorlat

Alapfogalmak – Nyomaték

Elméleti áttekintés:

• **Erő tengelyre számított nyomatéka**

Az erő síkjára merőleges tengely esetén!



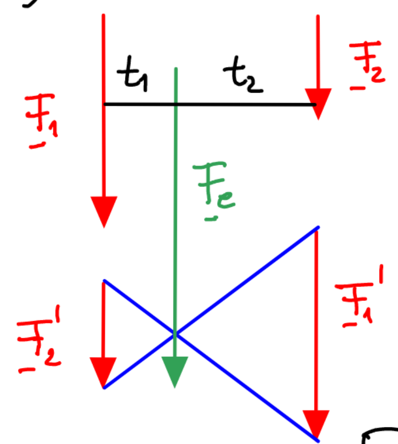
$M = F \cdot t$

merőleges távolság

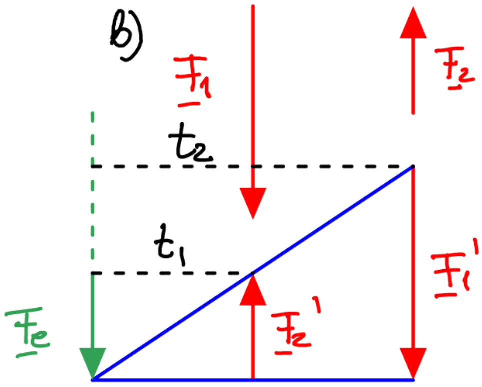
$\boxed{\underline{M} = M \cdot \underline{e}}$ vektormennyiség

• **Párhuzamos erők eredője**

a)

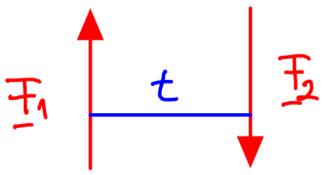


b)



$$\boxed{F_1 t_1 = F_2 t_2}$$

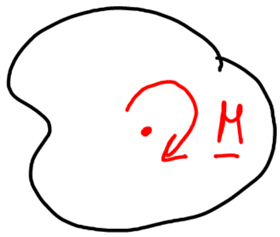
c) Erőpár



$M = F \cdot t$

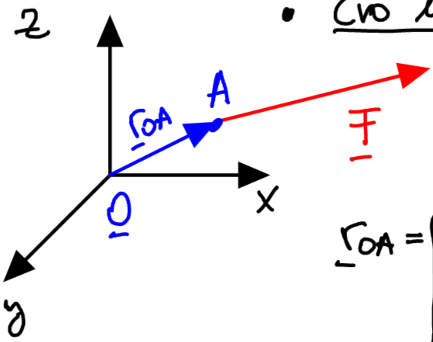
(a síkra merőleges)

• **Koncentrált erőpár:**



vektormennyiség

• **Erő nyomatéka**

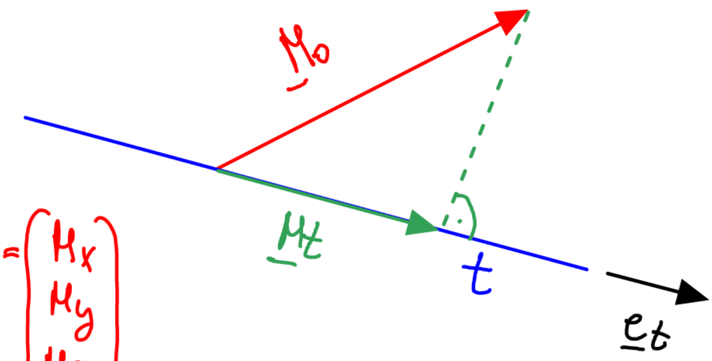


$$\underline{M}_O = \underline{r}_{OA} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_z r_y - F_y r_z \\ F_x r_z - F_z r_x \\ F_y r_x - F_x r_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{OA} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

Keresztszorzás / Vektori szorzás!

- **Tengelyre számított nyomaték:**



t irányú egységvektor

$$\underline{M}_t = M_t \cdot \underline{e}_t$$

előjeles nagyság

$$M_t = \underline{M}_0 \cdot \underline{e}_t$$

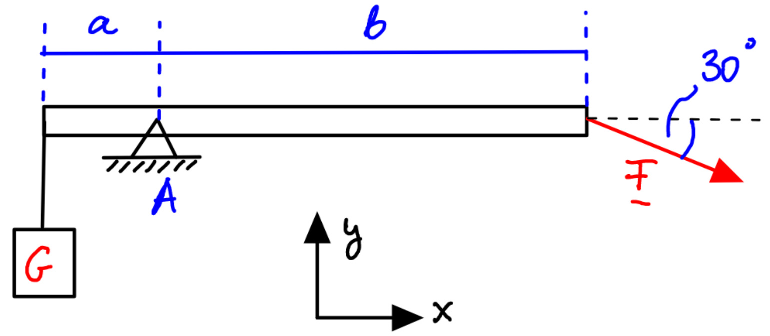
skaláris szorzat

$$\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_t = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_0 \, \underline{e}_t = M_x \cdot e_x + M_y \cdot e_y + M_z \cdot e_z$$

1. feladat Egy súlytalannak tekintett merev rudat a $G=300\ N$ súlyú teher terheli. A rúd az A pontban csuklósan rögzített. Mekkora legyen F erő nagysága, hogy egyensúly legyen?



Adatok:

$a = 2m$

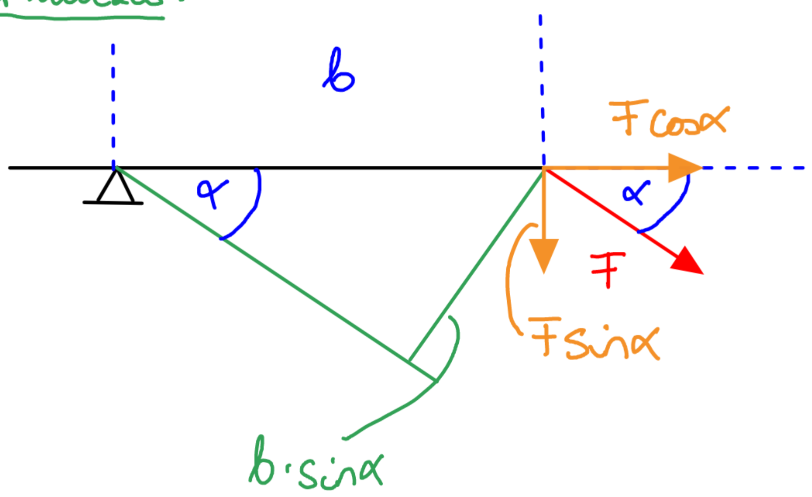
$b = 10m$

Megoldás: Ha egyensúly van: az A pontra számított nyomaték zérus!

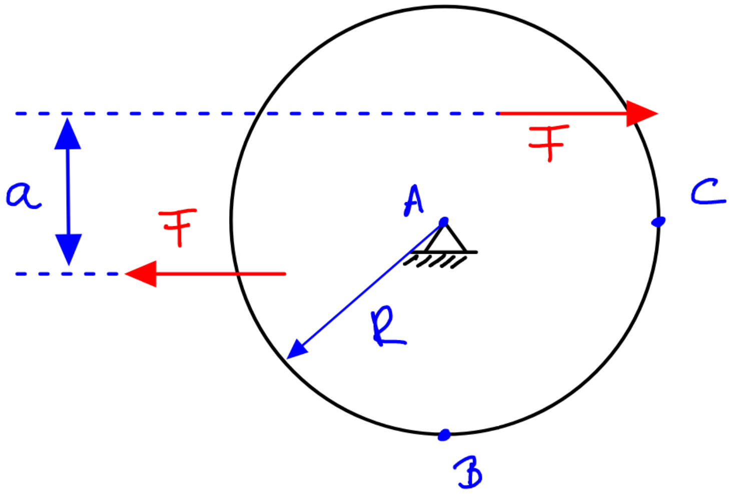
$$M_A = G \cdot a - F \cdot b \cdot \sin\alpha = 0$$

$$F = \frac{G \cdot a}{b \sin\alpha} = 120N$$

Értelmezés:



2. feladat Az $R=20\,cm$ sugarú korong az A ponton átmenő tengely körül foroglat. A korongot az $F=10\,N$ nagyságú erőkből álló erőpár terheli, ahol az erők távolsága $a=20\,cm$. Mekkora és milyen irányú Q erőt kell alkalmazni a BC hatásvonalon, hogy a korong egyensúlyban maradjon?



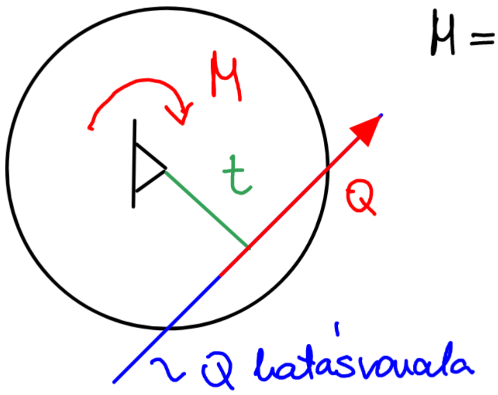
Adatok:

$R = 20\,cm$

$a = 20\,cm$

$F = 10\,N$

Megoldás: Az erőpár → helyettesíthető koncentrált erőpárral

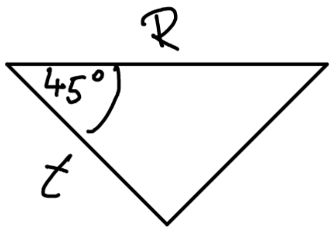


$$M = -F \cdot a = -2\,Nm$$

óramutató járásának megfelelő

↳ negatív irány

Egyensúly → $\curvearrowleft M_A = -M + Q \cdot t = 0$



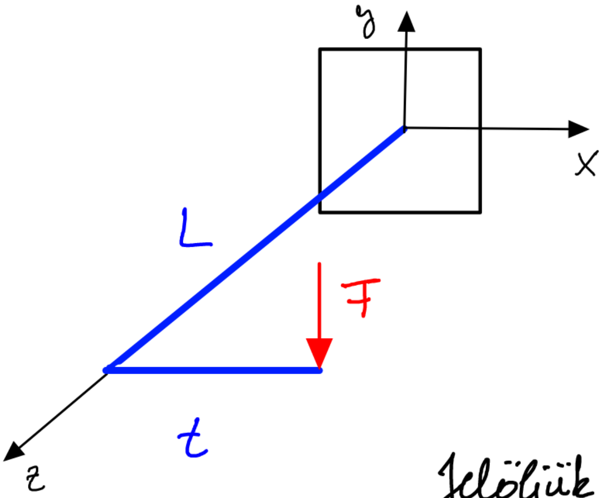
$$Q = \frac{M}{t} = \frac{M}{R\cos(45°)} = \frac{\sqrt{2}\,M}{R}$$

$$\underline{\underline{Q = 14,142\,N}}$$

$\boxed{\text{3. feladat}}$

Az $L = 2\,m$ és $t = 30\,cm$-es egyenes szakaszokból álló merev törtvonalú tartó az O pontban mereven rögzített a falhoz. A tartó terhelése a végén működő y-tengellyel párhuzamos $F = 20\,N$ nagyságú koncentrált erő.

Mekkora az erő forgató hatása a koordináta-tengelyek körül?



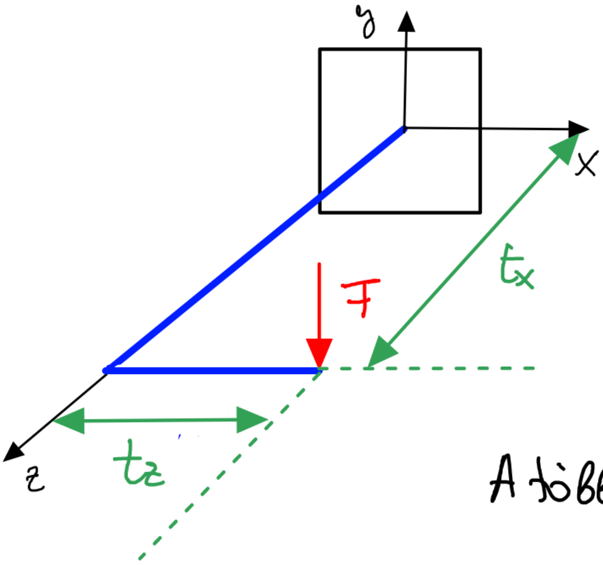
Adatok:

$F = 20\,N$

$L = 2\,m$

$t = 30\,cm = 0{,}3\,m$

Jelöljük be az F erő tengelyektől mért merőleges távolságát, azaz erőkarját!



Csak azokra a tengelyekre kell, amely <u>nem</u> párhuzamos F-fel!

↳ $M_y = 0\,Nm$

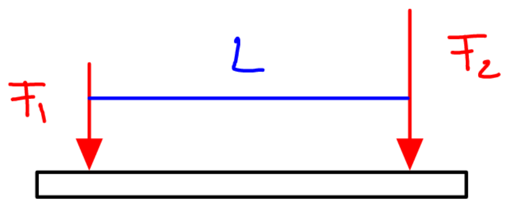
A többi tengely esetén

$$M_x = F \cdot t_x = F \cdot L = 40\,Nm$$

$$M_z = -F \cdot t_z = -F \cdot t = -6\,Nm$$

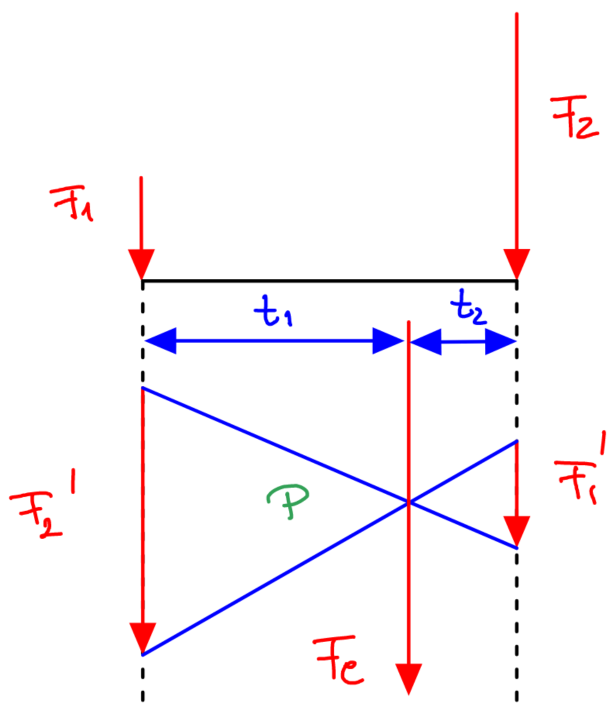
4. feladat Egy merev test terhelése az egymással párhuzamos $F_1 = 4\,kN$ és $F_2 = 10\,kN$ nagyságú erők, amelyek távolsága $L = 7\,m$. Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással az eredő erő helyét és nagyságát!

Mekkora nagyságú, irányú és értelmű erőt kell alkalmazni, hogy a test egyensúlyban legyen?



Szerkesztéssel

① Arányos ábra kell → lépték!



Hosszlépték:

$1\,cm \mathrel{\hat=} 1\,m$

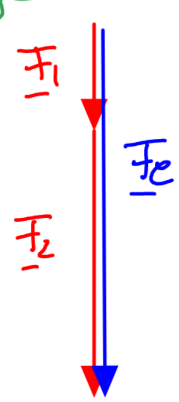
Erőlépték

$1\,cm \mathrel{\hat=} 1\,kN$

② Lemásoljuk a két erőt a másik hatásvonalára

③ Az eredő erő helyének szerkesztése, P pont

④ Az eredő erő az erők vektori összege

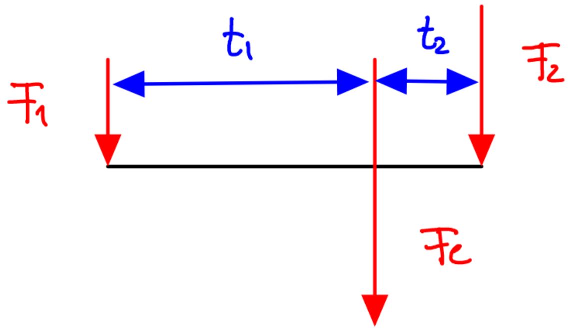


$F_e \sim 7\,cm \rightarrow \underline{\underline{F_e = 14\,kN}}$

$\left.\begin{array}{l} t_1 = 5\,m \\ t_2 = 2\,m \end{array}\right\}$ leolvasva

SZÁMOLÁSSAL

- Mivel a két erő egyirányú → az eredőerő a két erő között helyezkedik el, a nagyobb erőhöz közelebb!



- $t_1 + t_2 = L \rightarrow t_2 = L - t_1$
- arányosság: $F_1 t_1 = F_2 \cdot t_2$

$$F_1 t_1 = F_2 (L - t_1)$$

$$(F_1 + F_2)\, t_1 = F_2 \cdot L$$

$$t_1 = \frac{F_2 \cdot L}{F_1 + F_2} = \underline{\underline{5\,m}}$$

$$t_2 = L - t_1 = \underline{\underline{2\,m}}$$

Az eredőerő: $F_e = F_1 + F_2 = \underline{\underline{14\,kN}}$

Egyensúlyozó:

2 erő egyensúlya

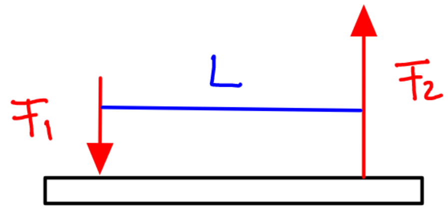
↳ Az előbb kiszámolt F_e erővel

- azonos hatásvonalú
- ellentétes értelmű
- azonos nagyságú erő kell!

5. feladat

Egy merev test terhelése az egymással párhuzamos $F_1 = 5$ kN és $F_2 = 15$ kN nagyságú erők, amelyek távolsága $L = 6$ m. Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással az eredő erő helyét és nagyságát!

Mekkora nagyságú, irányú és értelmű erőt kell alkalmazni, hogy a test egyensúlyban legyen?



Szerkesztéssel

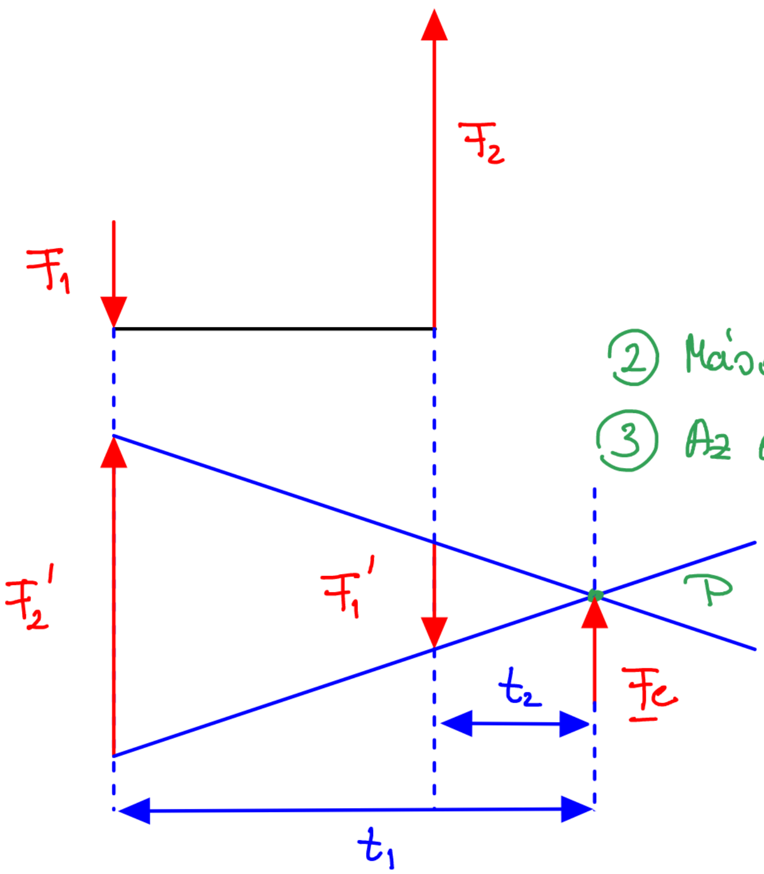
① Arányos ábra

Hosszlépték

1 cm ≙ 1 m

Erőlépték

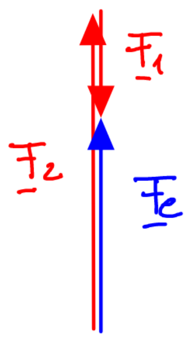
1 cm ≙ 2,5 kN



② Másoljuk át az erőket

③ Az eredő erő hatásvonalának szerkesztése (P)

④ Eredő erő szerkesztése



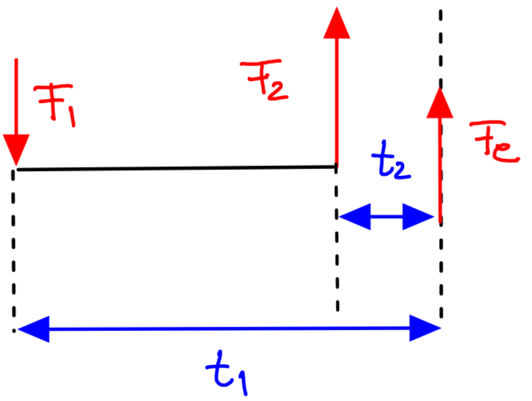
Leolvasva: $F_e = 10$ kN

$t_1 = 9$ m

$t_2 = 3$ m

SZÁMOLÁSSAL

↳ Két ellentétes irányú erő → Az eredő kívül lesz a nagyobb erő mellett



Egyenletek:

$$t_1 - t_2 = L \quad \rightarrow \quad t_1 = L + t_2$$

$$F_1 \cdot t_1 = F_2 \cdot t_2$$

$$F_1 (L + t_2) = F_2 \cdot t_2$$

$$F_1 \cdot L = (F_2 - F_1)\, t_2$$

$$t_2 = \frac{F_1 \cdot L}{F_2 - F_1} = 3\,\text{m}$$

$$t_1 = L + t_2 = 6\,\text{m}$$

Az eredőerő $F_e = F_2 - F_1 = \underline{10\,\text{kN}}$

Egyensúlyoz:

2 erő egyensúlya

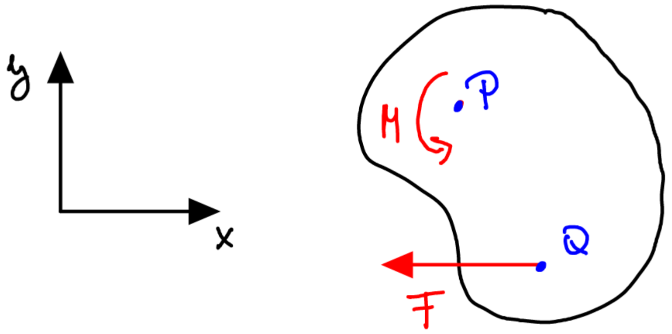
↳ Az előbb kiszámolt F_e erővel

- azonos hatásvonalú
- ellentétes értelmű
- azonos nagyságú erő kell!

6. feladat

Az ábrán vázolt síkbeli merev testet a P pontban működő $M = 3$ kNm nagyságú koncentrált erőpár és a Q pontban ható $F = 10$ kN nagyságú vízszintes erő terheli.

Határozzuk meg az erőrendszer egyetlen eredő erejét!



Adatok:

$M = 3$ kNm

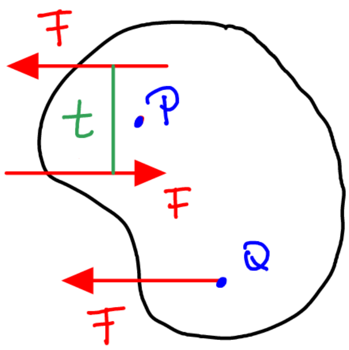
$F = 10$ kN

Megoldás: Síkbeli erők és erőpárok eredője → 1 db erő

Ez párhuzamos az eredőerővel

↳ most F-fel!

Írjuk fel M-et két F nagyságú erőpár segítségével

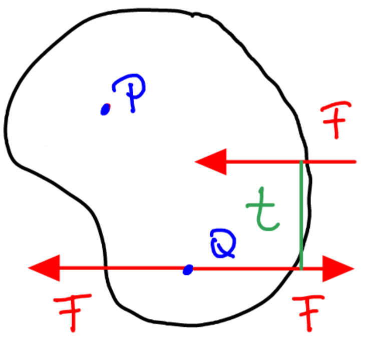


↳ Mekkora kell t-nek lennie?

$$M = F \cdot t$$

↳ $t = \dfrac{M}{F} = \underline{\underline{0{,}3\,m}}$

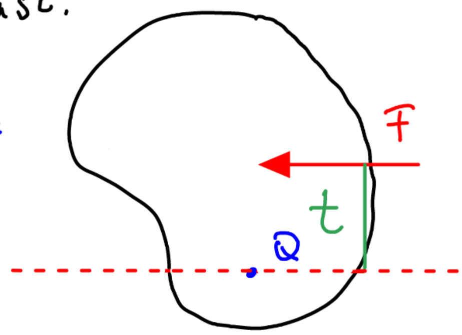
• Az erőpár szabadon áthelyezhető:



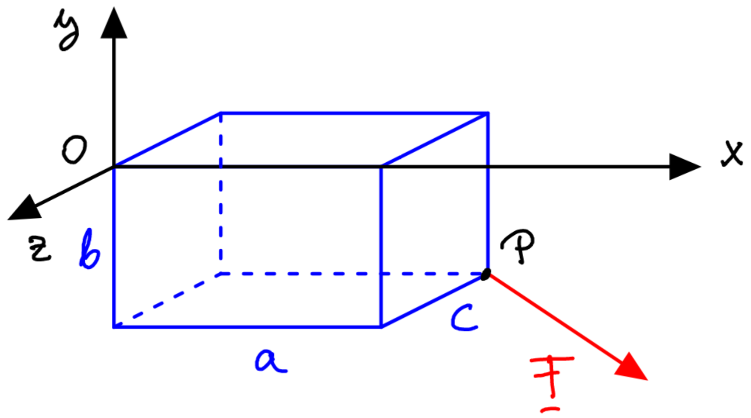
↳ Innen a Q pontban lévő két erő kiejti egymást!

Tehát az eredő:

$\underline{\underline{t = 0{,}3\,m}}$



7. feladat Az a, b, c élhosszúságú merev téglatestet a P pontban az $\underline{F} = 6\underline{i} - 2\underline{j} + 8\underline{k}$ kN koncentrált erő terheli. Számítsuk ki az erő nyomatékát az O pontra!



Adatok

$a = 5\,m$

$b = 3\,m$

$c = 4\,m$

- Az erővektor: $\underline{F} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} kN$

- A vizsgált pont és az erő támadáspontját összekötő vektor $\longrightarrow$ $\underline{r}_{OP} = \begin{bmatrix} a \\ -b \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} m$

Az $\underline{F}$ erő nyomatéka O pontra:

$$\underline{M}_O = \underline{r}_{OP} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a & -b & -c \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -3 & -4 \\ 6 & -2 & 8 \end{vmatrix} =$$

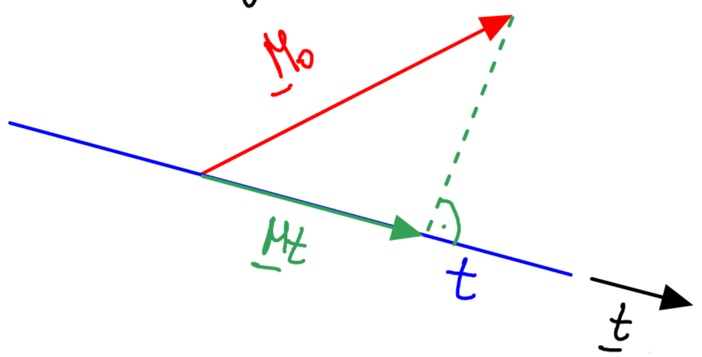
$$= \begin{bmatrix} -3 \cdot 8 - (-4)(-2) \\ 6 \cdot (-4) - 5 \cdot 8 \\ 5 \cdot (-2) - (-3)\, 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 - 8 \\ -24 - 40 \\ -10 + 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 \\ -64 \\ 8 \end{bmatrix} kNm$$

$$M_O = |\underline{M}_O| = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{\underline{M}_O \cdot \underline{M}_O} = \sqrt{32^2 + 64^2 + 8^2} = 72\,kNm$$

$\boxed{\text{8. feladat}}$

Egy merev testre ható külső erőhatások nyomatéka az O pontra: $\underline{M}_o = 21\underline{i} - 7\underline{j} + 14\underline{k}$ Nm.

Jelölje ki a $\underline{t} = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ vektor egy tengelyt az O ponton keresztül. Mekkora az erre a tengelyre vett nyomaték?



Írjuk fel a vektorokat!

$$\underline{M}_o = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Tengelyre számított nyomaték:

egységvektor!

$$\boxed{M_t = \underline{M}_o \cdot \underline{e}_t}$$

$$\underline{e}_t = \frac{\underline{t}}{|\underline{t}|} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{t}| = \sqrt{\underline{t} \cdot \underline{t}} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$$

$$M_t = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix} =$$

$$= 21 \cdot \frac{2}{7} - 7 \cdot \frac{3}{7} + 14 \cdot \frac{6}{7} = 15 \text{ Nm}$$

Írjuk fel $\underline{M}_t$ vektort!

$$\underline{M}_t = M_t \cdot \underline{e}_t = 15 \cdot \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/7 \\ 45/7 \\ 90/7 \end{bmatrix} \text{Nm}$$