Statika – 4. hét

Síkbeli erőrendszer felbontása 3 komponensre

Elméleti összefoglaló:

Adott egy erőrendszer $\longrightarrow$ egyértelmű az eredő $[\underline{F}; \underline{M}_A]_A$

Visszafelé nem egyértelmű

Példa: egy erő felbontása komponensekre

- $\underline{F} \rightarrow \underline{F}_1 + \underline{F}_2$ csak akkor ha $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ hatásvonala $\underline{F}$ hatásvonalán metsződik!
- Síkban 3db egyensúlyi egyenlet

  ↳ $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_{Az} = 0$

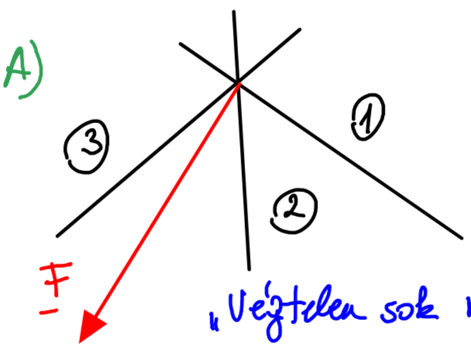
  ↳ Tehát ha egy erőt több komponensre akarunk felbontani $\Longrightarrow$ Legfeljebb három db ismeretlen lehet!

Feladat: Bontsunk fel egy erőt 3 az erővel egy síkba eső erőre!

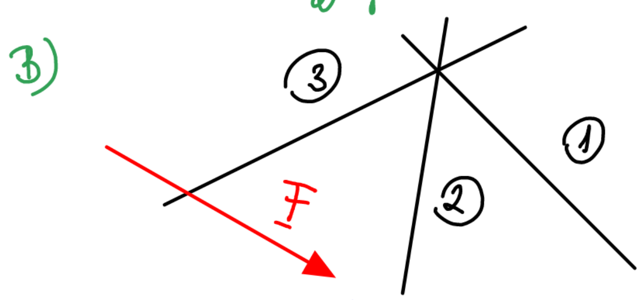
Az erők iránya adott! (hatásvonalak ismert)

Ismeretlenek: A három erő nagysága

Feltétel: A három hatásvonal nem metsződhet egy pontban



„Végtelen sok megoldás”
3 ismeretlen 2 egyenlet

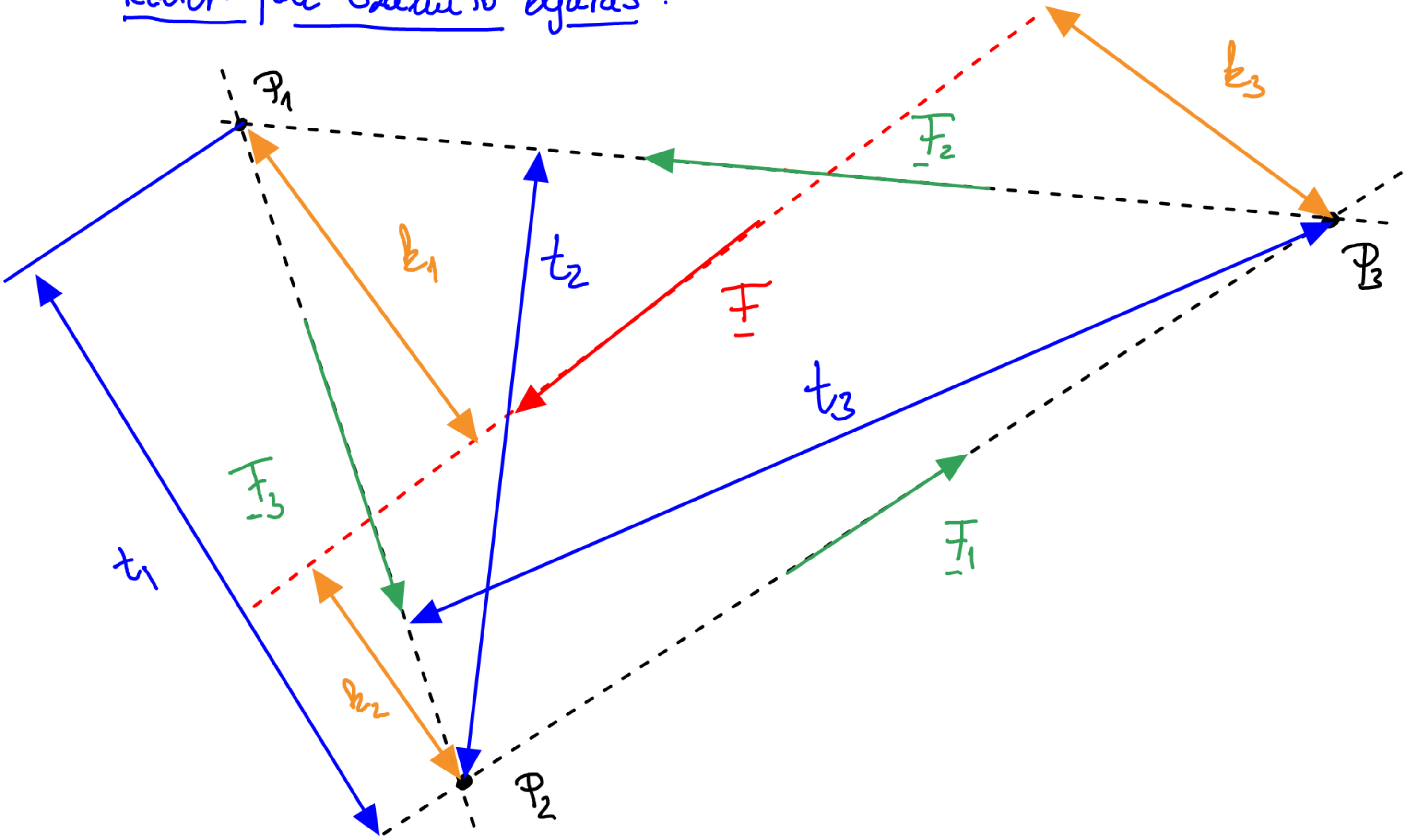


Nincs megoldás
↳ $\underline{F}$ nem megy át a metszésponton

Ha nem egy pontban metsződik → Megoldható

Két módszer: Ritter-féle számító eljárás
Culmann-féle szerkesztés

Ritter-féle számító eljárás :



1) vegyük fel az erők hatásvonalait → Metszéspontok (P_1, P_2, P_3)

2) vegyük fel az erők hatásvonalainak merőleges távolságát a pontoktól

$F \rightarrow k_1, k_2, k_3$

$F_1 \rightarrow t_1$

$F_2 \rightarrow t_2$

$F_3 \rightarrow t_3$

3) Nyomatékok egyenlősége P_1, P_2, P_3 ra

MINDIG ÁBRA ALAPJÁN!

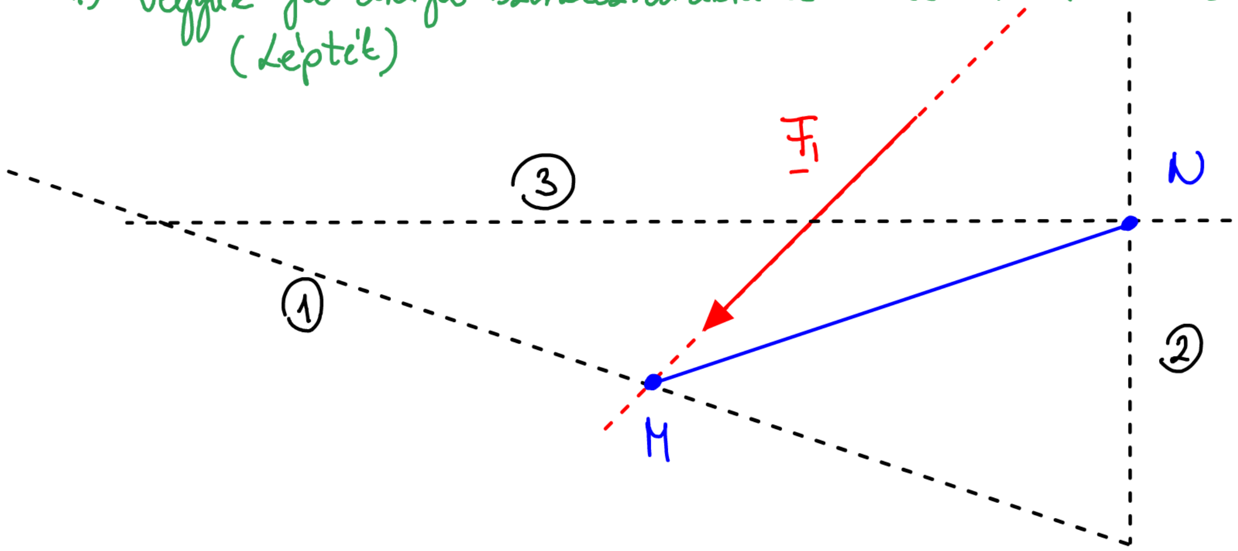
P_1 pont: $F_1 t_1 = -F \cdot k_1 \rightarrow F_1 = -\dfrac{F \cdot k_1}{t_1}$

P_2 pont: $F_2 t_2 = F k_2 \rightarrow F_2 = \dfrac{F k_2}{t_2}$

P_3 pont: $F_3 t_3 = F k_3 \rightarrow F_3 = \dfrac{F k_3}{t_3}$

Culmann-féle szerkesztő eljárás:

1) Vegyük fel arányos szerkesztett ábrába a hatásvonalakat és az erőt! (Lépték)



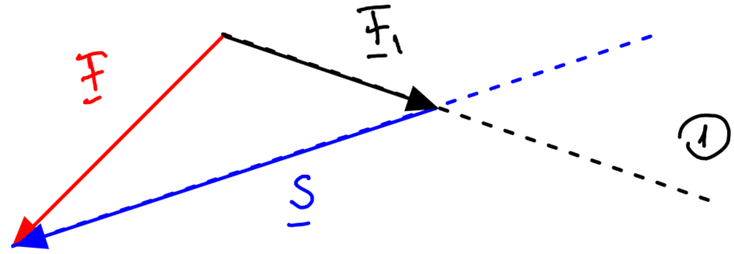
2) Vegyünk fel egy segéderőt ($\underline{S}$), amelynek hatásvonalát az alábbi két pont jelöli ki:

<u>M pont</u>: $\underline{F}$ és az egyik hatásvonal metszéspontja

<u>N pont</u>: A másik két hatásvonal metszéspontja

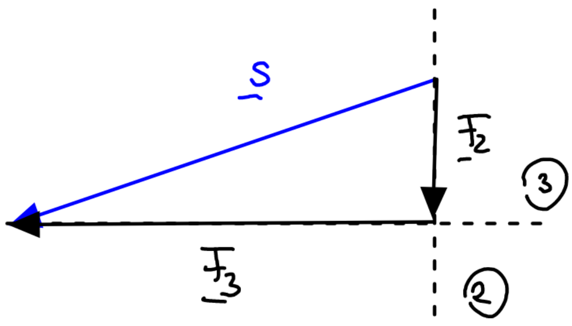
3) Bontsuk fel $\underline{F}$ erőt $\underline{S}$ és $\underline{F}_1$ komponensekre!

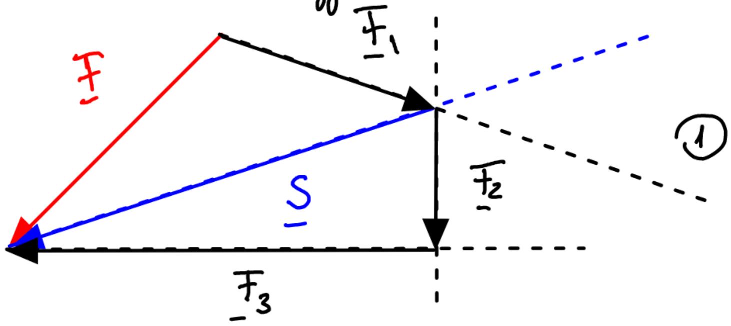
<u>Erőábra</u>:



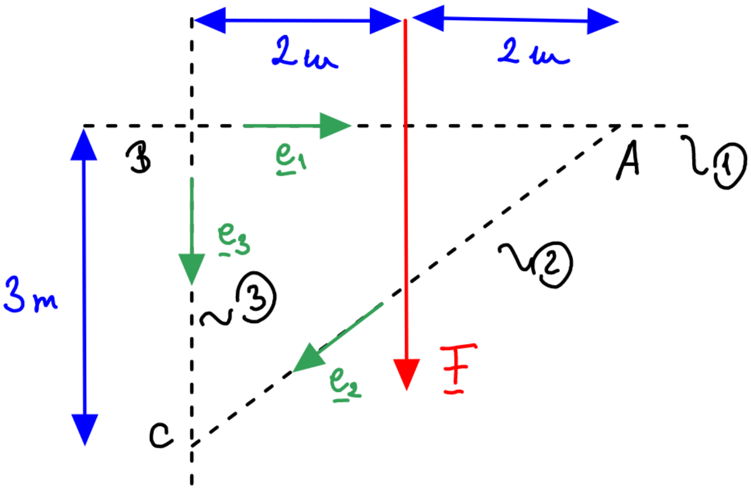
4) Majd az így kapott $\underline{S}$ erőt toljuk el N-be és bontsuk fel 2-3 irányú komponensekre!

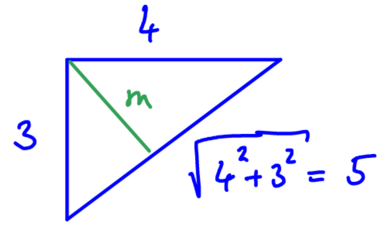
Ezt lehet egy erőábrában is:





1. feladat Bontsuk fel az adott $\underline{F} = 60\,kN$ nagyságú y hatásvonalú erőt az ábra szerinti $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ és $\underline{e}_3$ vektorok irányába eső összetevőkre!





$$T_\Delta = \frac{3\cdot 4}{2} = \frac{5\cdot m}{2}$$

Számítással:

Vegyük fel a metszéspontoktól vett távolságot.

$\underline{F}$ - A	$k_1 = 2m$	A - (3)	$t_1 = 4m$
$\underline{F}$ - B	$k_2 = 2m$	B - (2)	$t_2 = m = \frac{3\cdot 4}{5} = 2{,}4m$
$\underline{F}$ - C	$k_3 = 2m$	C - (1)	$t_3 = 3m$

Nyomatékok egyenlősége:

$$F\cdot k_1 = F_3 \cdot t_1 \longrightarrow F_3 = \frac{F k_1}{t_1} = \underline{\underline{30N}}$$

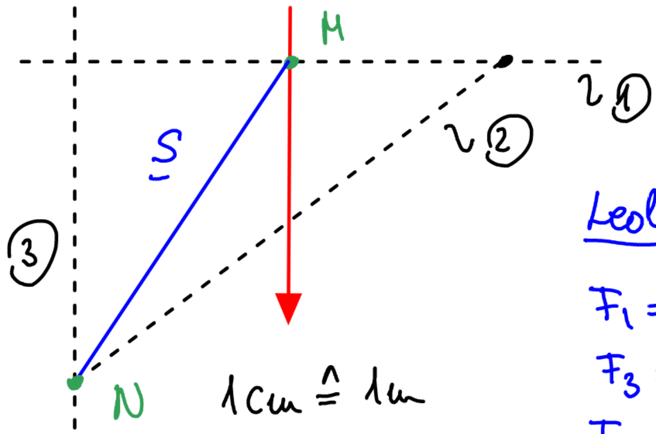
$$F k_2 = F_2 \cdot t_2 \longrightarrow F_2 = \frac{F k_2}{t_2} = \underline{\underline{50N}}$$

$$-F k_3 = -F_1 t_3 \longrightarrow F_1 = \frac{F k_3}{t_3} = \underline{\underline{40N}}$$

Szerkesztéssel:

1) Arányos ábra, M és N segédpontok → $\underline{S}$ hatásvonal

2) $\underline{F}$ felbontása $\underline{F}_1 + \underline{S}$, majd $\underline{S} = \underline{F}_2 + \underline{F}_3$



1cm ≙ 1m

1cm ≙ 10N

Erőábra:

1cm ≙ 10N

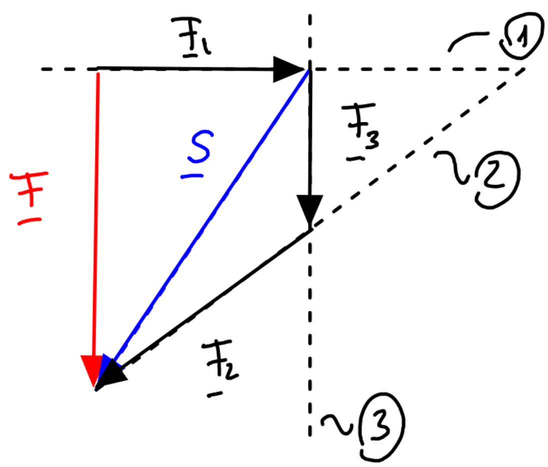
Leolvasva:

$F_1 = 40N$

$F_3 = 30N$

$F_2 = 50N$

$S = 72{,}11N$

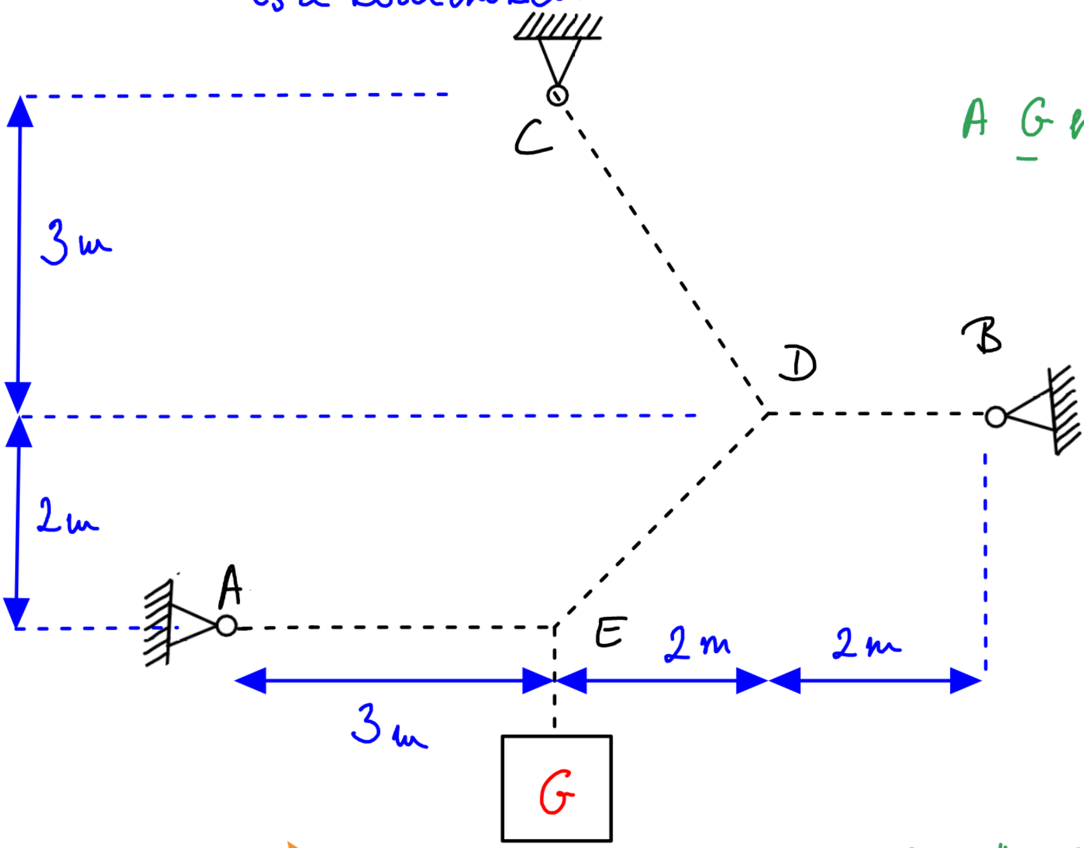


2. feladat

Az ábrán vázolt kötelekből álló szerkezettel oldjuk meg a $G = 100N$ súlyú teher tartását.
A D és E jelű karikákhoz 3-3 kötél kapcsolódik, amelyeket a környező falakhoz rögzítünk.
Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással a reakcióerőket és a kötélerőket!

$G = 100N$

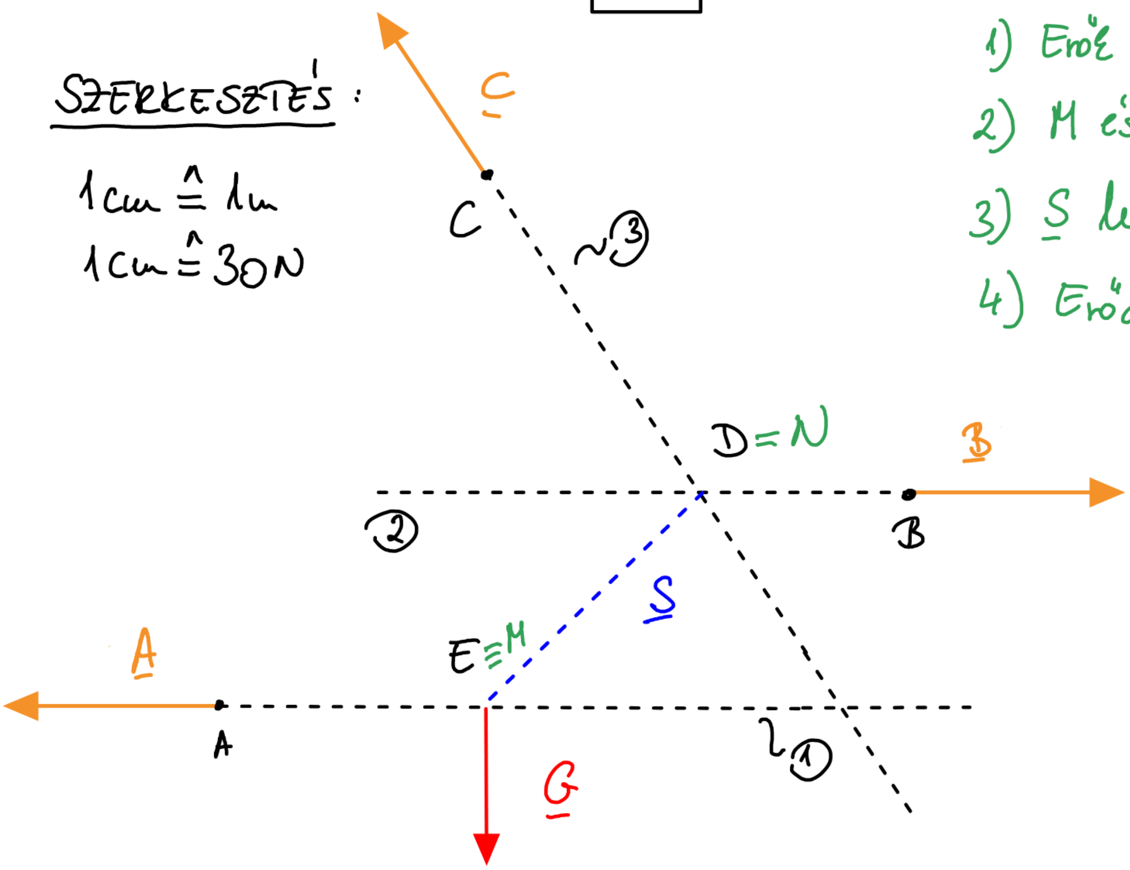
A $\underline{G}$ erővel 3 db kötélerő tart egyensúlyt



SZERKESZTÉS:

1 cm ≙ 1 m
1 cm ≙ 30 N

1) Erők és hatásvonalak
2) M és N pontok
3) $\underline{S}$ hatásvonal
4) Erőábra

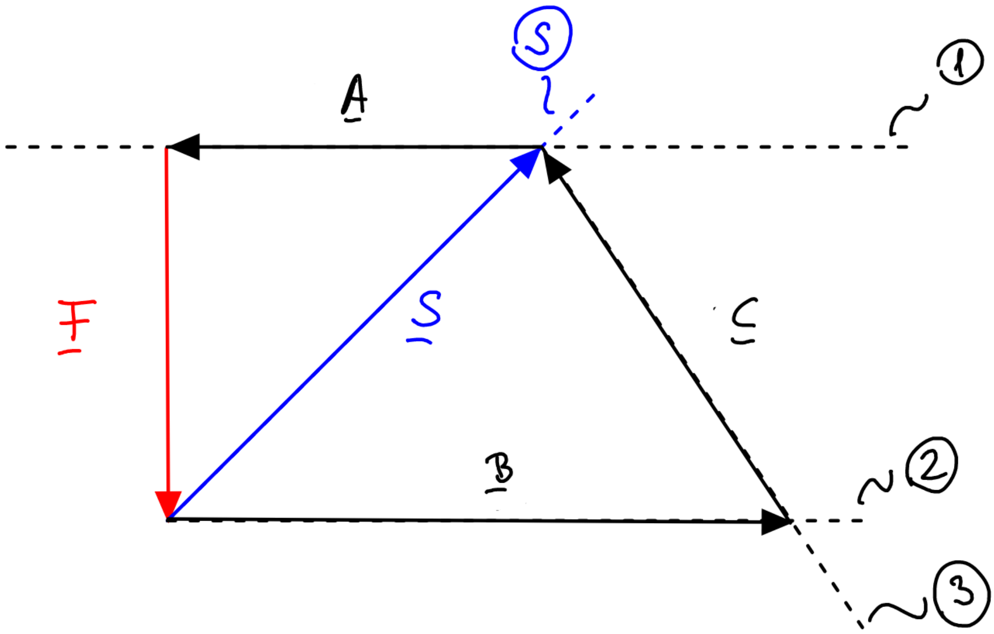


Erőábra

$1\,cm \mathrel{\hat{=}} 30\,N$

Most egyensúly kell, hogy legyen

5) ↳ $\underline{G}$, $\underline{S}$ és $\underline{A}$ záródó vektor∆-et kell alkosson



6) Az N pontban $\underline{S}$ et felbontjuk ② és ③ irányú komponensre

7) Leolvasva

$A = 100\,N$

$B = 166{,}67\,N$

$C = 120\,N$

$\underline{S} = 141{,}42\,N$

SZÁMOLÁSSAL:

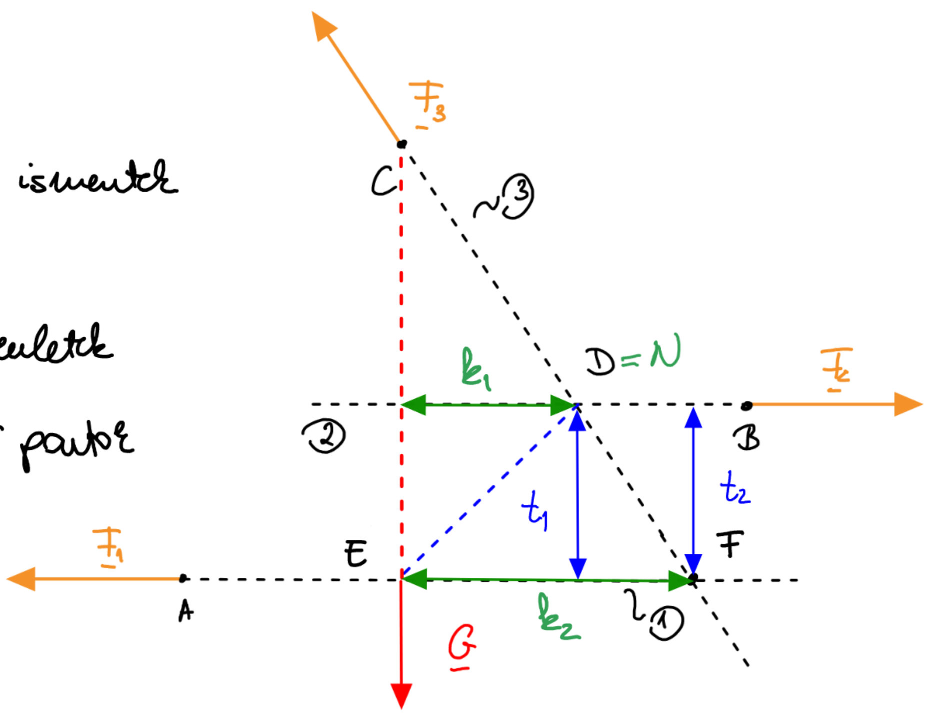
A kötelekben húzóerő

↳ hatásvonalak ismertek

Most egyensúly van

↳ egyensúlyi egyenletek

Nyomatékok: D, E, F pontra



- $\overset{\curvearrowleft}{\sum} M_D = k_1 F - A t_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad A = \frac{k_1 F}{t_1} = \underline{\underline{100 N}}$

  $k_1 = 2m$

  $t_1 = 2m$

- $\overset{\curvearrowleft}{\sum} M_F = k_2 F - B t_2 = 0$

  k_2 hasonló háromszögekből

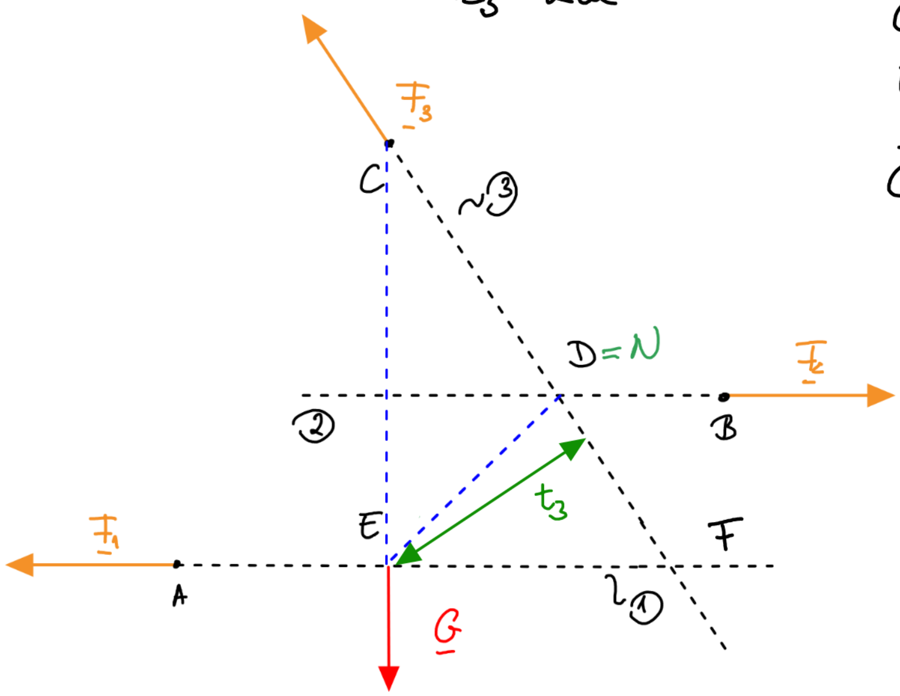
  $\frac{k_1}{3} = \frac{k_2}{5} \quad \rightarrow \quad k_2 = \frac{5}{3} k_1 = \frac{10}{3} m$

  $t_2 = 2m$

  $\nearrow \; B = \frac{F \cdot k_2}{t_2} = \underline{\underline{166{,}67 N}}$

- $\overset{\curvearrowleft}{\sum} M_E = 0: \; - k_3 B + t_3 C = 0$

  $k_3 = 2m$



$\overline{CE} = 5m$

$\overline{EF} = \frac{10}{3} m$

$\overline{CF} = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{EF}^2} = 6{,}01 m$

$T_{EFCD} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{\overline{CF} \cdot t_3}{2}$

$\hookrightarrow t_3 = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{EF}}{\overline{CF}} = \underline{\underline{2{,}77 m}}$

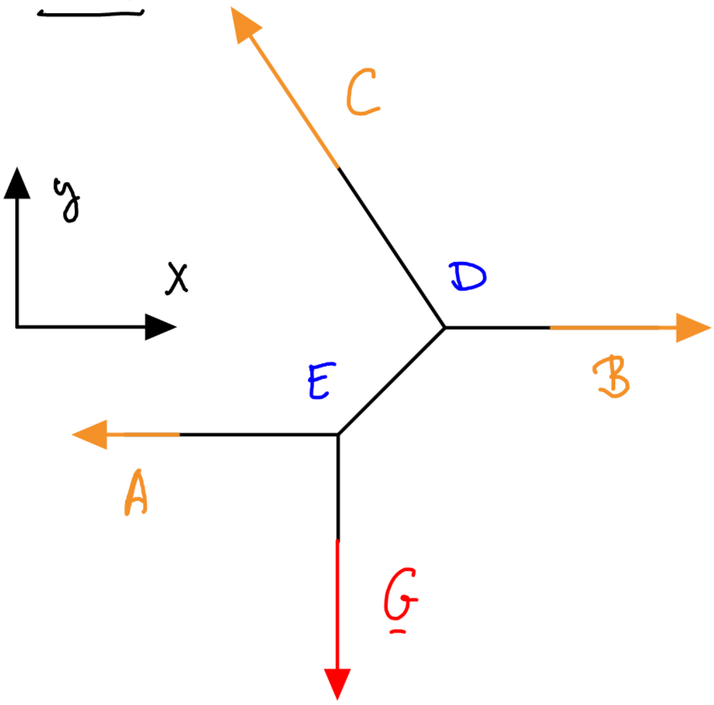
Visszaírva:

$C = \frac{k_3 \cdot B}{t_3} = \underline{\underline{120{,}31 N}}$

Másik út → Rácsos szerkezet

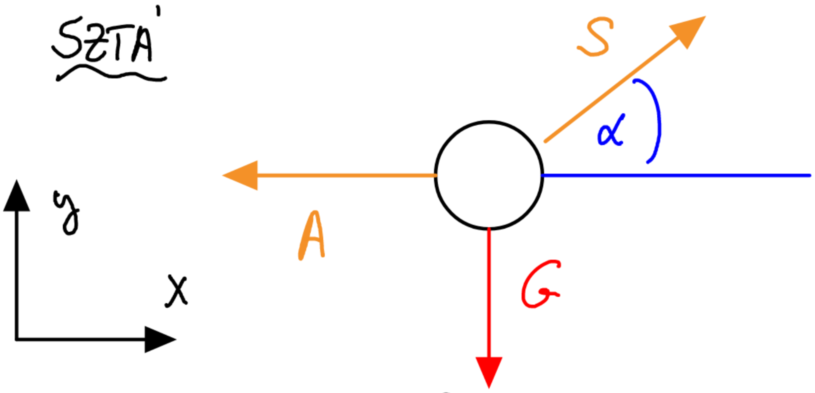
SZTÁ

A reakciók biztosan kötélirányúak



E-csukló

SZTÁ



$\alpha = 45°$

Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0: \quad -A + S\cos\alpha = 0$

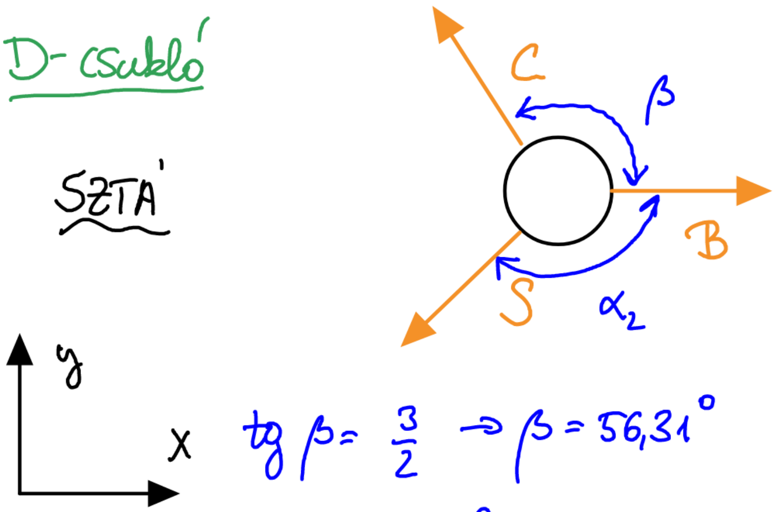
$\Sigma F_y = 0: \quad -G + S\sin\alpha = 0$

$$S = \frac{G}{\sin\alpha} = G\cdot\sqrt{2} = \underline{\underline{141{,}42\,N}}$$

$$A = S\cos\alpha = \underline{\underline{100N}}$$

D-csukló

SZTÁ



$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{3}{2} \rightarrow \beta = 56{,}31°$

$\alpha_2 = -135°$

Egyensúlyi egyenletek:

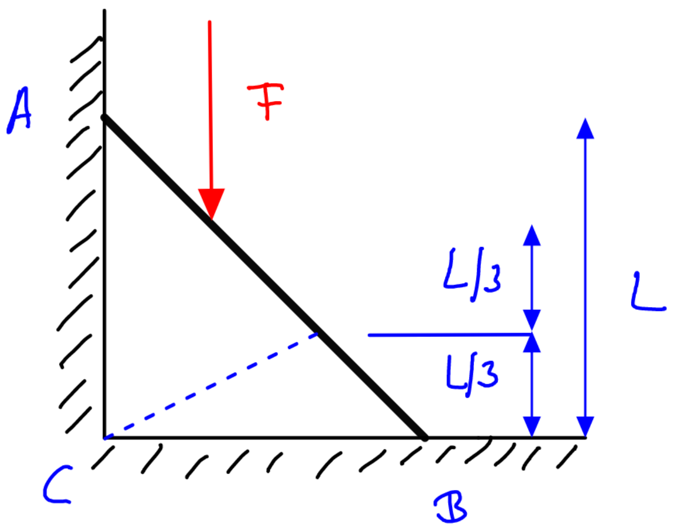
$\Sigma F_x = 0 \quad B + S\cos\alpha_2 + C\cos\beta = 0$

$\Sigma F_y = 0: \quad C\sin\beta + S\sin\alpha_2 = 0$

$\hookrightarrow C = -\frac{S\sin\alpha_2}{\sin\beta} = \underline{\underline{120{,}18\,N}}$

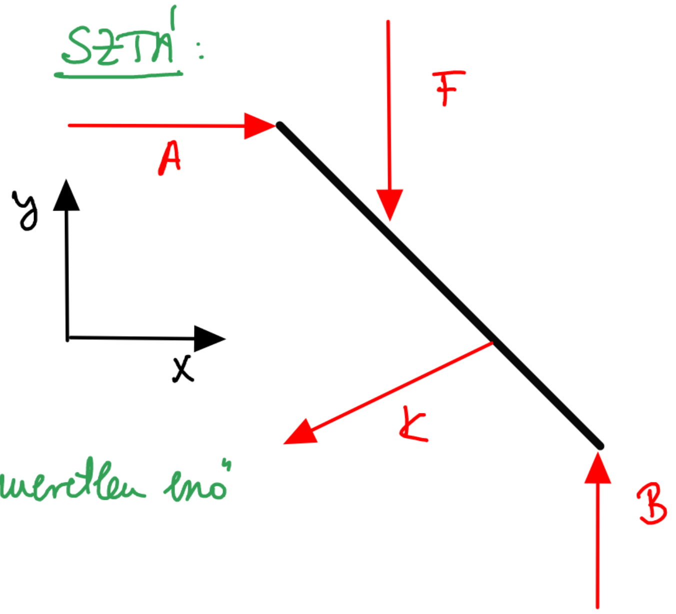
$\hookrightarrow B = -C\cos\beta - S\cos\alpha_2 = \underline{\underline{166{,}67\,N}}$

3. feladat Az AB súlytalannak tekintett rúd a tökéletesen sima vízszintes és függőleges falhoz támaszkodik. A rudat a függőlegesen berajzolt F erő terheli. A megcsúszás megakadályozása érdekében a rudat kötéllel a C sarokhoz rögzítjük.
Határozzuk meg a falakat támasztó $\underline{A}$ és $\underline{B}$ erőket és a K kötélerőt!



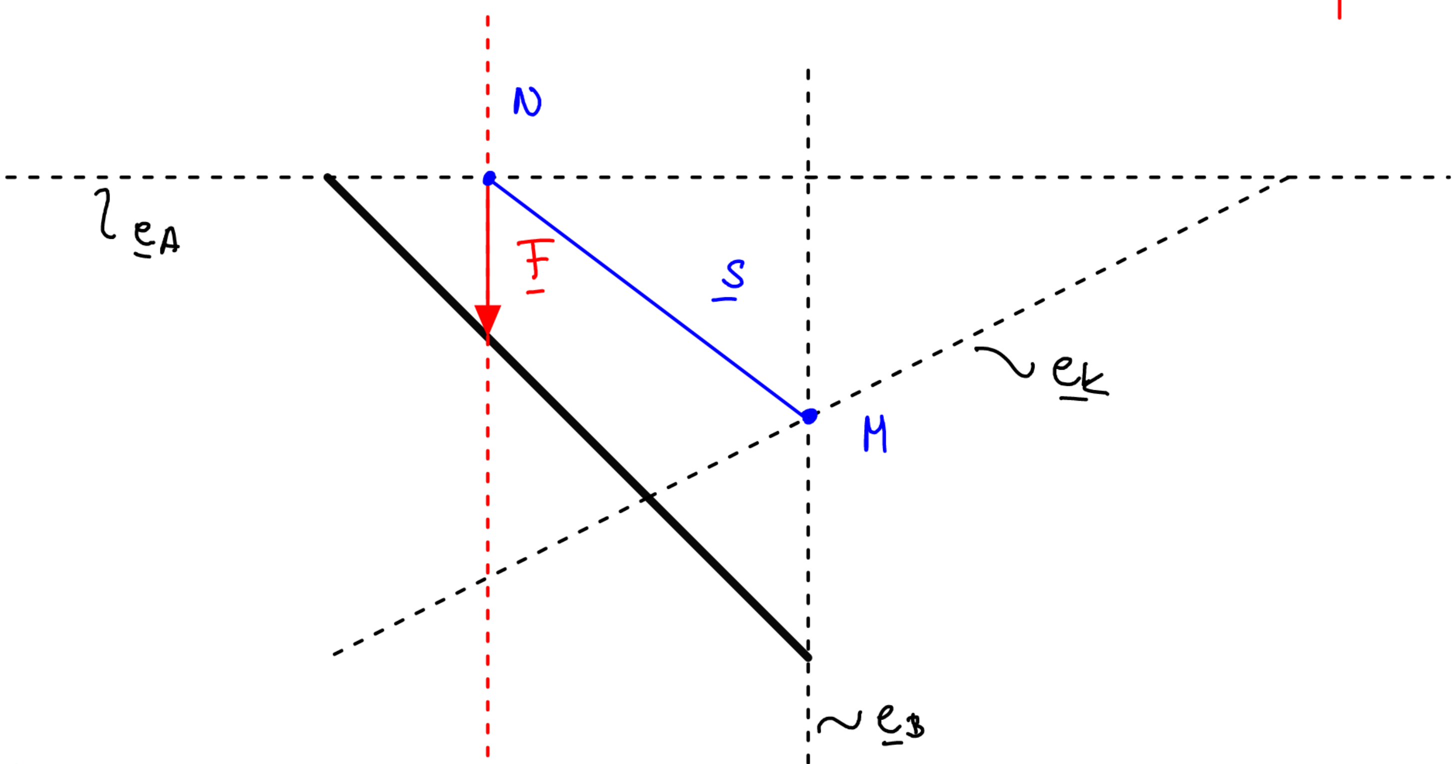
$F = 60\ kN$

SZTÁ:



3 ismeretlen erő

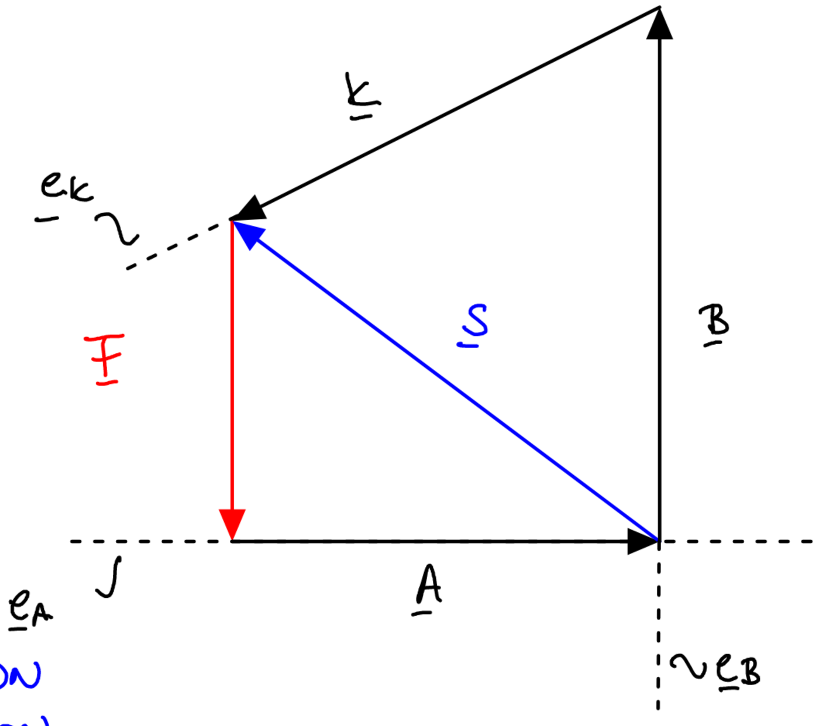
SZERKESZTÉSSEL:



1) 2-2 erő hatásvonalának metszéspontja (N és M)
2) $\overline{NM}$ → $\underline{S}$ segéderő hatásvonal
3) Ahol $\underline{F}$ ismert vektorháromszög → $\underline{A}$ és $\underline{S}$ → másik pont
↳ $\underline{B}$ és $\underline{C}$

Erőábra

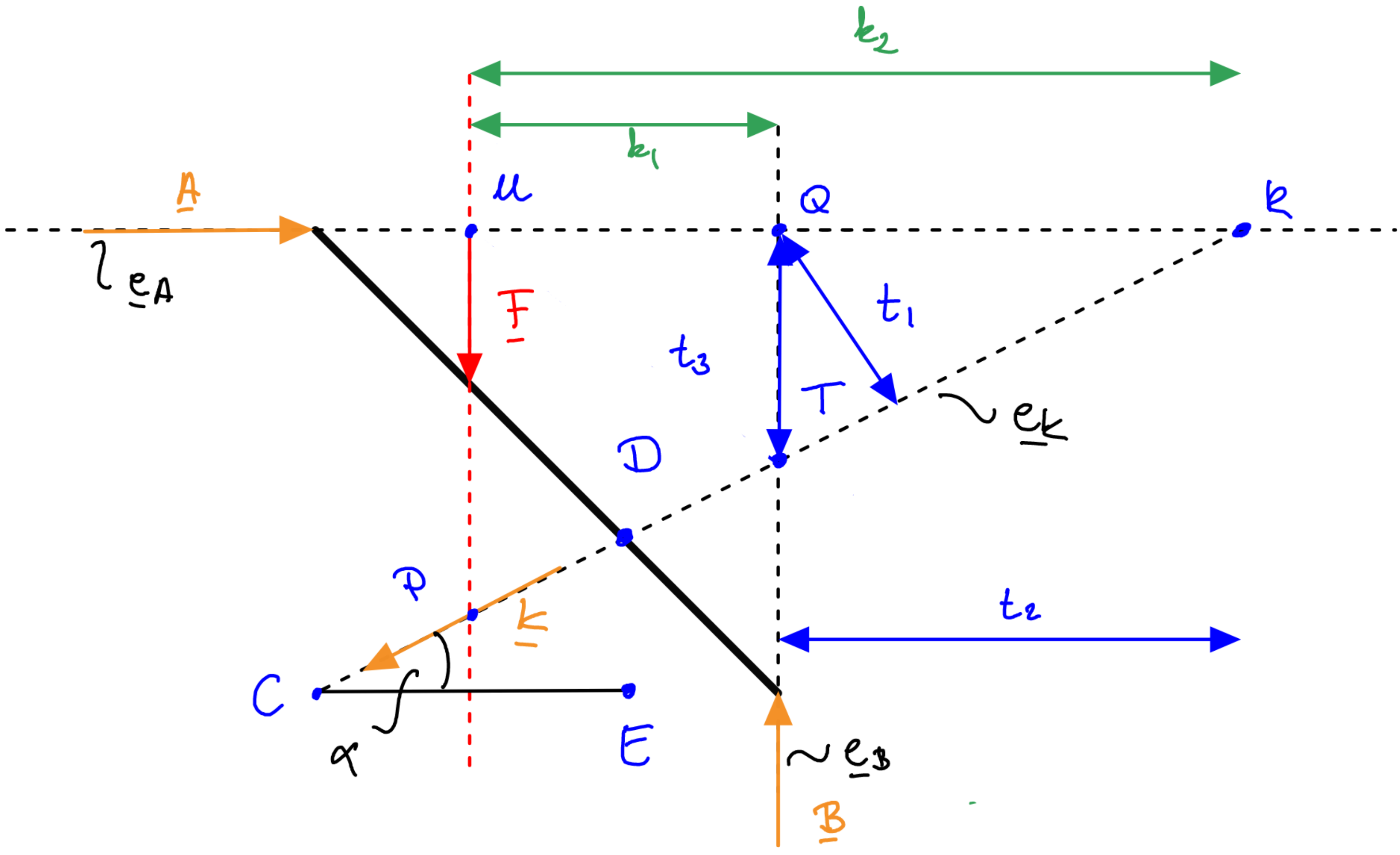
$1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{kN}$



Leolvasva: $A = 80\,N$
$B = 100\,N$
$K = 89\,N$

SZÁMOLÁSSAL:

Vegyük fel az erőket és hatásvonalaikat



Vegyük fel a 4 erő hatásvonalának metszéspontjait!

(P, Q, R, T, U) → Q, R, T -re írjuk fel!

Nyomatéki egyensúlyi egyenletek:

$\circlearrowleft \sum M_Q = 0: \qquad k_1 F - t_1 K = 0$

Hasonló háromszögek $\qquad CED\triangle \sim RAC\triangle$

$k_1 = \frac{2}{3} L$

$\overline{CE} = \frac{2}{3} L$

$\overline{ED} = \frac{1}{3} L$

$\overline{AC} = L$

$\frac{\overline{CE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{AC}}$

$\overline{RA} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{AC}}{\overline{ED}} = 2L$

$\hookrightarrow \overline{QR} = L \Rightarrow \overline{QT} = \frac{L}{2}$

$$\overline{TR} = \sqrt{\overline{QR}^2 + \overline{QT}^2} = \sqrt{L^2 + \frac{L^2}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}L}{2}}}$$

$$T_{QRT\triangle} = \frac{\overline{QR} \cdot \overline{QT}}{2} = \frac{\overline{TR} \cdot t_1}{2}$$

$$\hookrightarrow t_1 = \frac{\overline{QR} \cdot \overline{QT}}{\overline{TR}} = \frac{\frac{L^2}{2}}{\frac{\sqrt{5}L}{2}}$$

$$\underline{\underline{t_1 = \frac{L}{\sqrt{5}}}}$$

Visszaírva $\sum M_Q = 0$-ba:

$$K = \frac{k_1 F}{t_1} = \frac{2\sqrt{5}}{3} F = \underline{\underline{1,49 F}} = \underline{\underline{89,44 N}}$$

$\circlearrowleft \sum M_T = 0 \qquad -t_3 A + k_1 F = 0$

$t_3 = \frac{L}{2}$

$$\hookrightarrow A = \frac{k_1 F}{t_3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} F = \underline{\underline{80 N}}$$

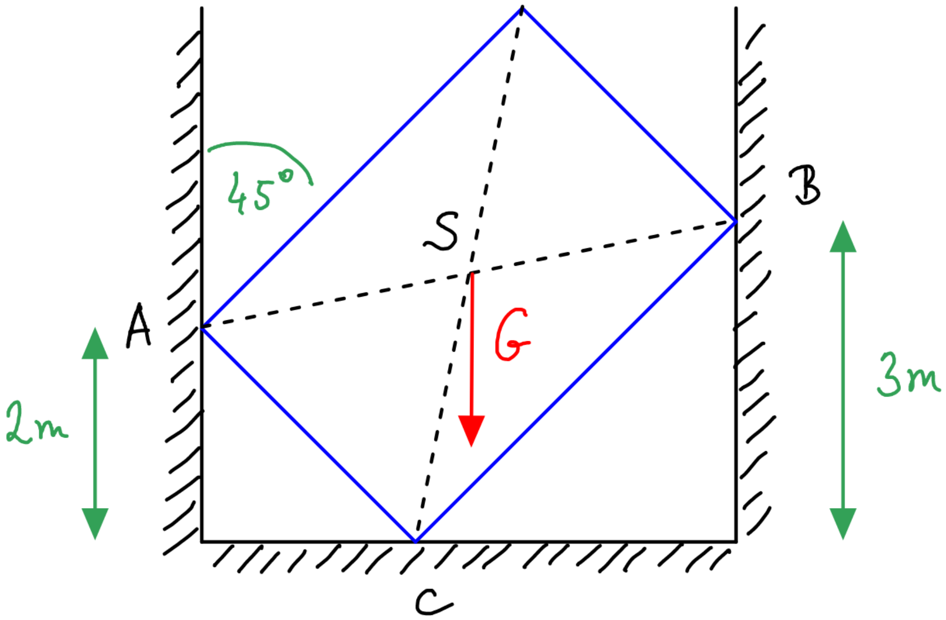
$\circlearrowleft \sum M_R = 0 \qquad F \cdot k_2 - B \cdot t_2 = 0$

$k_2 = L + \frac{2}{3} L = \frac{5}{3} L$

$t_2 = L$

$$\hookrightarrow B = \frac{F \cdot k_2}{t_2} = \frac{5}{3} F = \underline{\underline{100 N}}$$

4. feladat Egy téglalap alakú $G = 800N$ súlyú testet az alábbi verembe helyezzük. Határozzuk meg az A, B, C helyeken a falakról átadódó erőket!

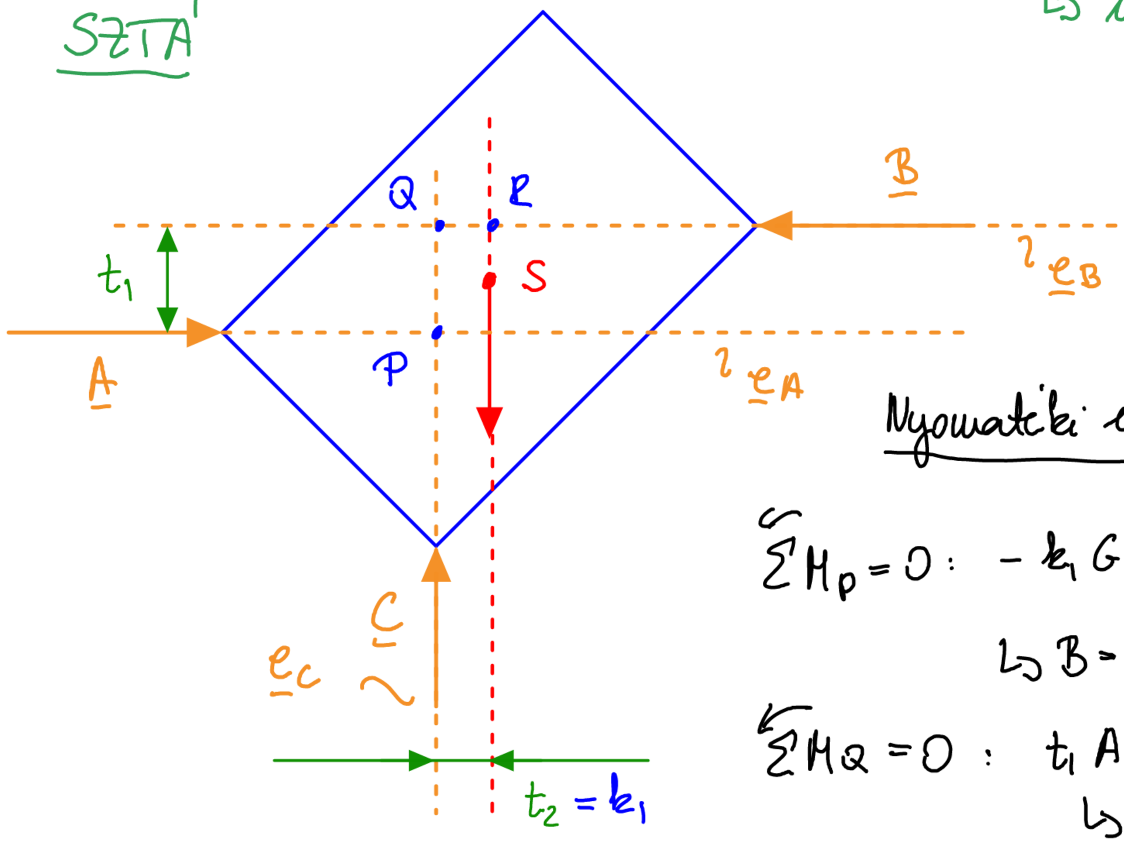


$G = 800N$

SZÁMÍTÁSSAL

SZTA

1) Erők hatásvonalai
↳ metszéspontok
P, Q, R



$t_1 = 1m$

$t_2 = 0,5m$

Nyomatéki egyensúly:

$\sum M_P = 0: \quad -k_1 G + t_1 B = 0$

↳ $B = \frac{k_1 G}{t_1} = \frac{1}{2} F = \underline{\underline{400N}}$

$\sum M_Q = 0: \quad t_1 A - k_1 G = 0$

↳ $A = \frac{k_1 G}{t_1} = \underline{\underline{400N}}$

$\sum M_R = 0: \quad t_1 A - t_2 C = 0$

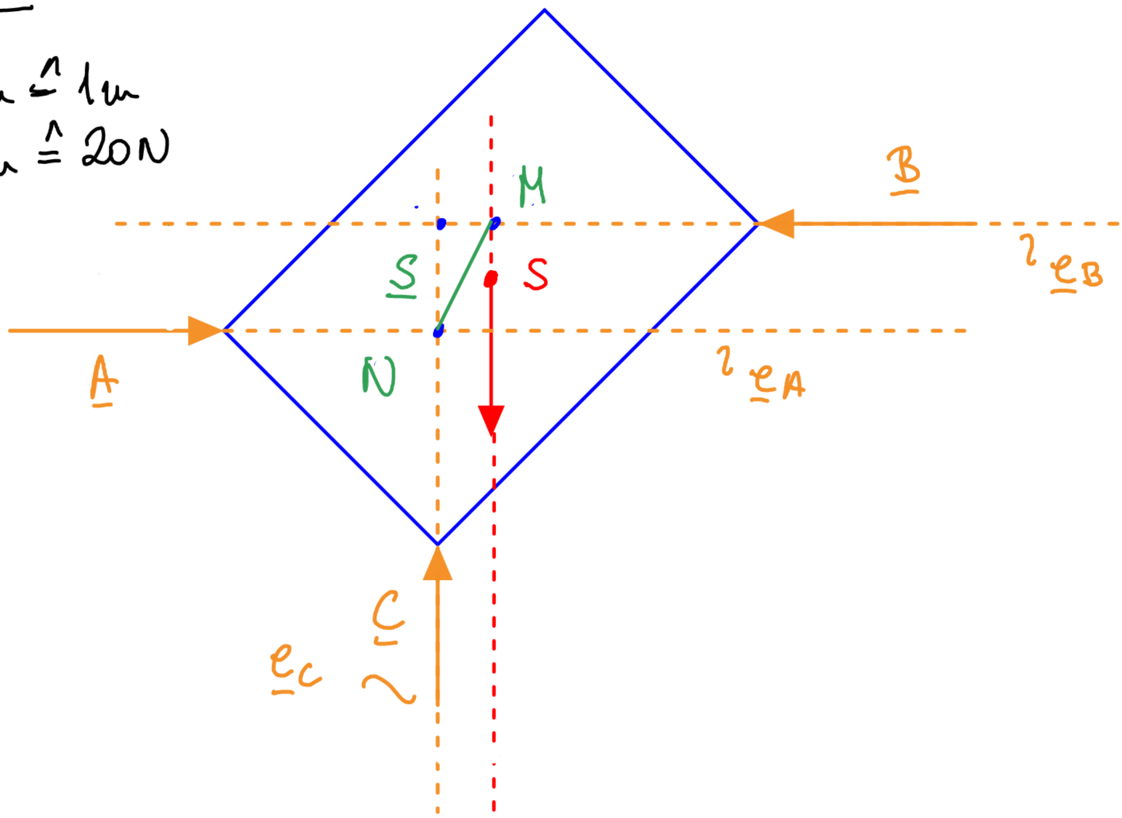
↳ $C = \frac{t_1 A}{t_2} = \underline{\underline{800N}}$

SZERKESZTÉSSEL:

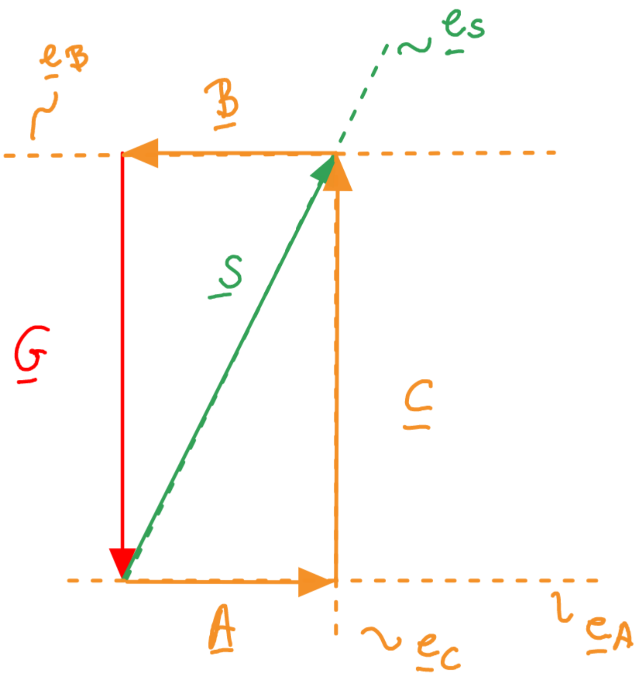
1) 2-2 erő hatásvonalának metszéspontja (N és M)
2) $\overline{NM}$ → $\underline{S}$ segéderő hatásvonal
3) Ahol $\underline{F}$ ismert vektorháromszög → $\underline{B}$ és $\underline{S}$ → másik pont
   ↳ $\underline{A}$ és $\underline{C}$

Lépték:

1 cm ≙ 1 m
1 cm ≙ 20 N



Erőábra:



Leolvasva:

A = 400 N
B = 400 N
C = 800 N