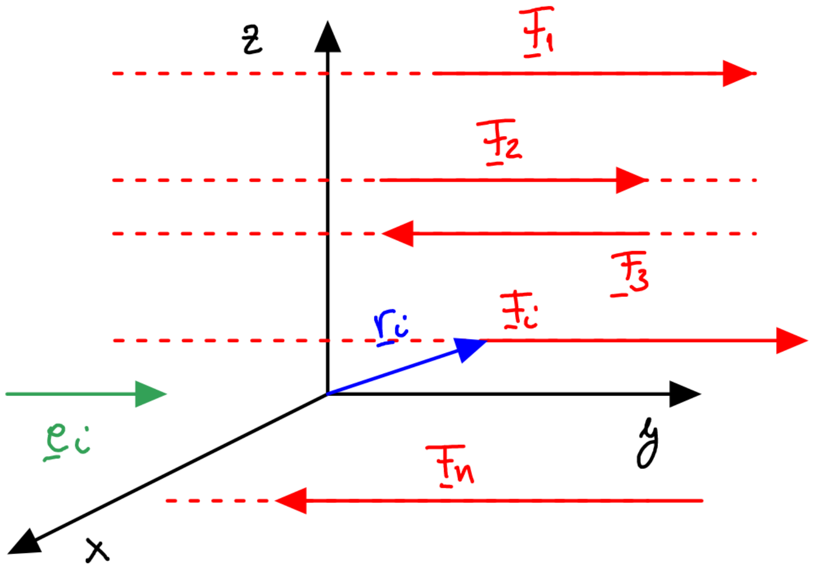
Statika – 7. gyakorlat

Megoszló terhelés, igénybevételi függvények

Véges sok párhuzamos erő eredője:

A feladat: Hol helyezkedik el az az egyetlen erő, amely helyettesíti az alábbi erőrendszert?



Valamennyi erő felírható, mint

$$\underline{F}_i = F_i \cdot \underline{e}$$

Redukáljuk ezt az origóba:

$[\underline{F}; \underline{M}_O]_O$, akkor

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\underline{e}$$

$$\underline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times F_i \underline{e} = \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i F_i\right) \times \underline{e}$$

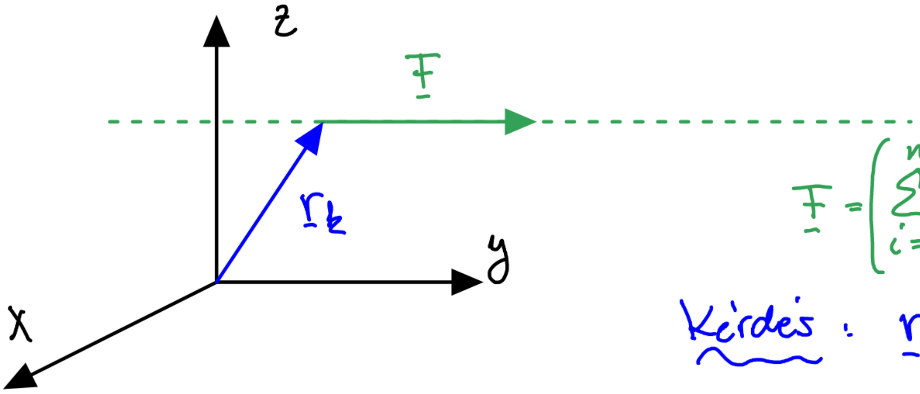
Mivel párhuzamos erőkből áll

↳ $\underline{M}_O \perp \underline{F}$

Emiatt: $\boxed{\underline{M}_O \cdot \underline{F} = 0}$

$$\underbrace{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i F_i\right) \times \underline{e}\right]}_{\text{merőleges } \underline{e}\text{-re}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\underline{e}}_{\text{párhuzamos } \underline{e}\text{-vel}} = 0$$

Ilyenkor az erőrendszer helyettesíthető egy $\underline{F}$ erővel (az eredőerővel)



$$\underline{F} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\underline{e}$$

Kérdés: $\underline{r}_k = ?$

Nyomatékok egyensúlya:

$$\underline{M}_O = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \underline{F}_i\right)}_{\text{az eredeti erőrendszer}} \times \underline{e} = \underbrace{\underline{r}_k \times \underline{F}}_{\text{az egyetlen eredő erő}}$$

Behelyettesítve:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \underline{F}_i\right) \times \underline{e} = \underline{r}_k \times \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i\right) \cdot \underline{e}$$

Ennek a feladatnak végtelen sok megoldása van

↳ nekünk 1db jó kell

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \underline{F}_i\right) \times \underline{e} = \underline{r}_k \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i\right) \times \underline{e}$$

Egy oldalra írva:

$$\underbrace{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \underline{F}_i\right) - \underline{r}_k \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i\right)\right]}_{\substack{\text{Mivel most csak 1db jó megoldás kell} \\ =\underline{0}}} \times \underline{e} = \underline{0}$$

↳ ez biztos nem nullvektor

- Az eredő erő eltolható a hatásvonala mentén!

A fenti összefüggésből $\underline{r}_k$ kifejezhető:

$$\boxed{\underline{r}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \underline{F}_i}{\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i}}$$

Látjuk, hogy $\underline{r}_k$ független $\underline{e}$ iránytól → Ha más $\underline{e}$ irányba mutatnak de ugyanott vannak

↳ $\underline{r}_k$ ugyanott lesz!

Az $\underline{r}_k$ vektor által kijelölt K pont a párhuzamos erőrendszer középpontja

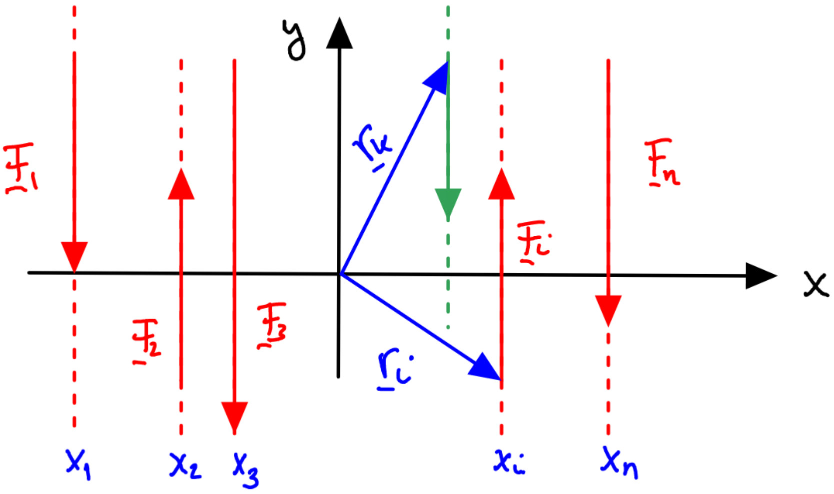
Fontos, hogy csak $\sum_{i=1}^{n} F_i \neq 0$ esetén jó!

- Síkbeli eset

Az erők: $\underline{F}_i = F_i \, \underline{j}$

A támadáspontok:

$$\underline{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = x_i \, \underline{i} + y_i \, \underline{j}$$



↳ Most csak az eredőerő x_k koordinátája érdekes, mivel a hatásvonala mentén ($\underline{j}$ irányában eltolható)

$$\underline{F} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \underline{j}$$

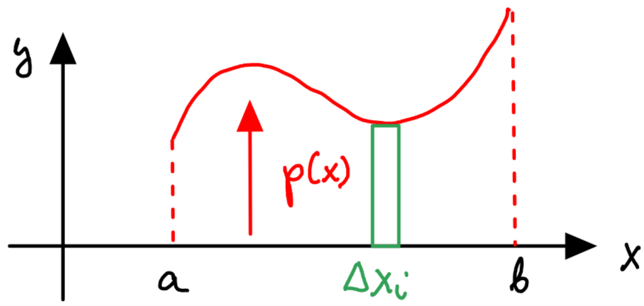
Használva a fenti képletet:

$$\boxed{x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}}$$

- Vonal mentén megoszló erőrendszer:

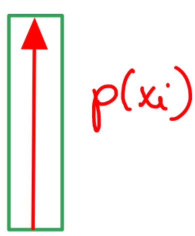
$p(x) \rightarrow$ intenzitás

$[N/m]$



Egy Δx_i szakaszon: $\Delta F_i = p(x_i) \, \Delta x_i$

Kinagyítva:



Az eredőerő: $\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \underline{F} = \int_a^b p(x)\,dx$

→ A függvény alatti terület!!

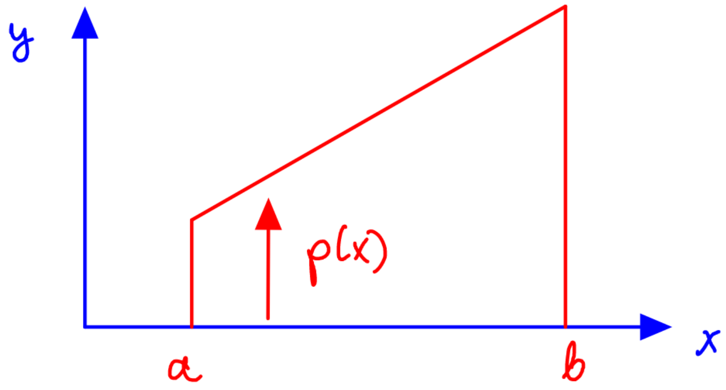
Hol lesz az eredőerő?

$$x_F = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta F_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta F_i} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{\int_a^b x \, p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}$$

→ A hatásvonal a $p(x)$ által megadott síkidom súlypontja!

1. feladat

Számítsuk ki az alábbi megoszló erőrendszer eredőjét és hatásvonalának helyét!



$a = 1\,m$

$b = 6\,m$

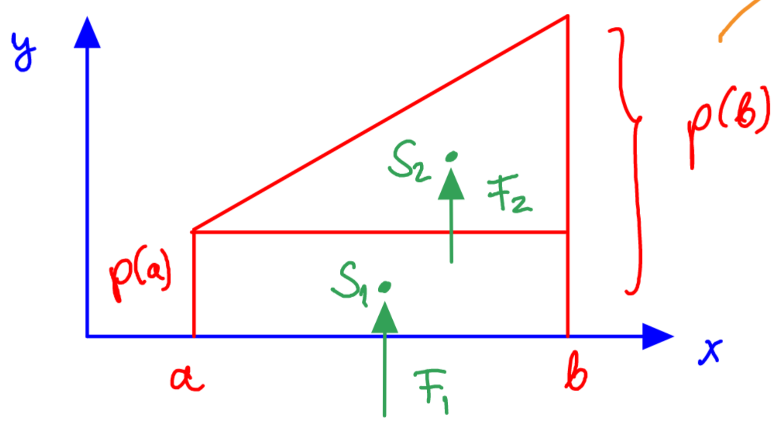
$p(a) = 2\,kN/m$

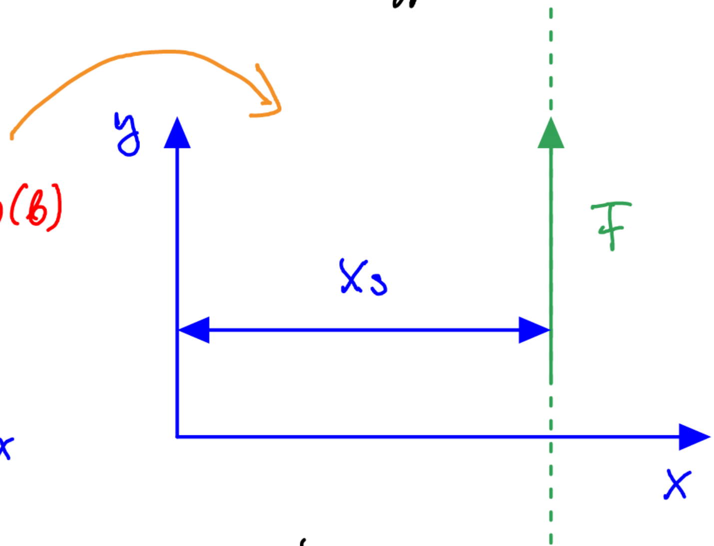
$p(b) = 8\,kN/m$

Eredőerő: Trapéz területe

Hatásvonal: Súlypont

Bontsuk ketté a szerkezetet:





I. rész: Téglalap

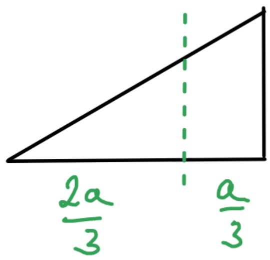
$$F_1 = p(a)\cdot(b-a) = 10\,kN$$

$$x_{S_1} = \frac{a+b}{2} = 3{,}5\,m$$

II. rész: Háromszög

$$F_2 = \frac{\left[p(b)-p(a)\right](b-a)}{2} = 15\,kN$$

$$x_{S_2} = b - \frac{b-a}{3} = \frac{13}{3} \approx 4{,}33\,m$$



Derékszögű Δ-nél:

Az oldal $\frac{1}{3}$-ánál az alaphoz közelebb

Tehát a teljes megoszló

$$F = F_1 + F_2 = 25\,kN$$

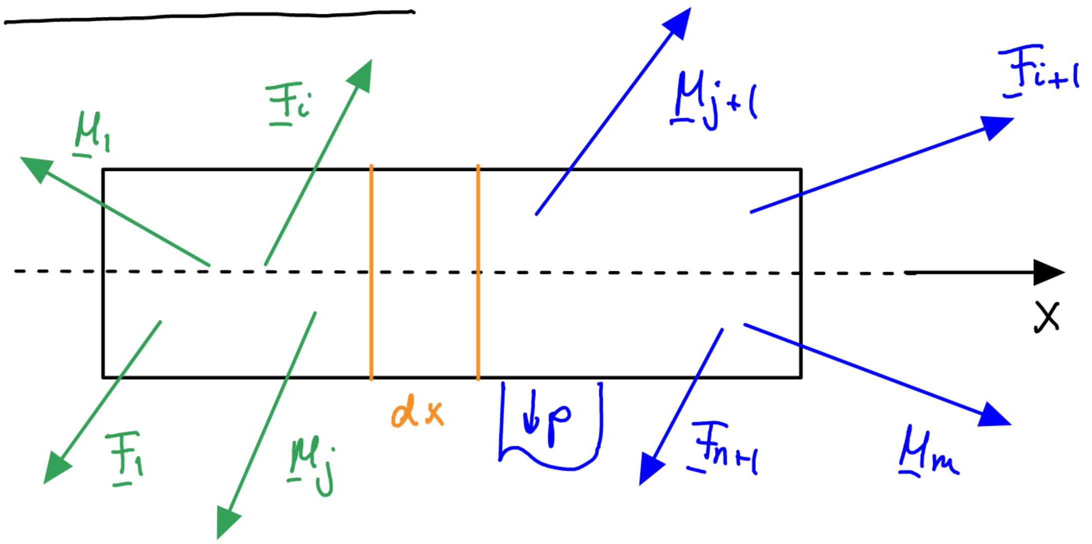
$$x_S = \frac{x_{S_1}F_1 + x_{S_2}F_2}{F_1+F_2} = 4\,m$$

Kapcsolat az igénybevételi függvények között:

↳ Rúdszerkezet: 4db fgv.: $N(x)$, $V(x)$, $M_h(x)$, $M_t(x)$ – igénybevételek

pluszban $p(x)$ – megoszló erőrendszer

Általános rúdszakasz:



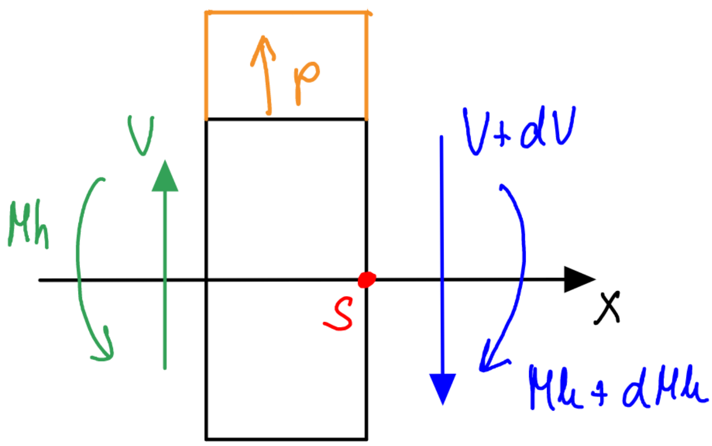
n db konc. erő

m db konc. erőpár

Vizsgáljuk egy dx hosszú ún. „elemi rúddarab" egyensúlyát!

↳ dx kicsi → $p(x)$ konstans!

Rajzoljuk be az elhagyott részekből származó igénybevételeket!



Most csak $p(x)$ - $V(x)$ - $M_h(x)$ kapcsolatát vizsgáljuk!

Fontos, hogy úgy válasszuk ki a dx elemi rúdszakaszt, hogy koncentrált erő / erőpár ne ébredjen

Erőegyensúly: $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad V - (V + dV) + p\,dx = 0$

↳ $\dfrac{dV}{dx} = \underline{\underline{V'(x) = p(x)}}$

$\overset{\curvearrowleft}{\Sigma M_S} = 0: \qquad M_h - V dx - p\,dx \cdot \dfrac{dx}{2} - (M_h + dM_h) = 0$

$dM_h = -V dx - \dfrac{p\,dx^2}{2} \approx 0$ elhanyagoljuk

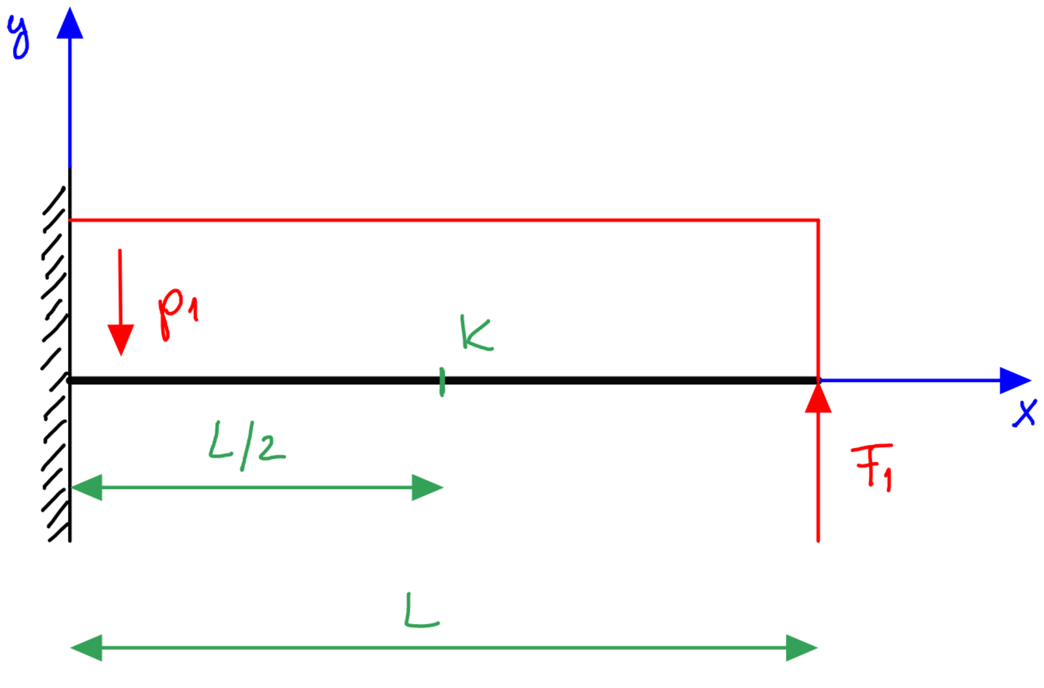
$\longrightarrow \dfrac{dM_h}{dx} = \underline{\underline{M_h'(x) = -V(x)}}$

Tehát:

$p(x)$	zérus	konstans	lineáris
$V(x)$	konstans	lineáris	másodfokú
$M_h(x)$	lineáris	másodfokú	harmadfokú

2. feladat

Írjuk fel az igénybevételi függvényeket és számítsuk ki a K keresztmetszetben az igénybevételek nagyságát!



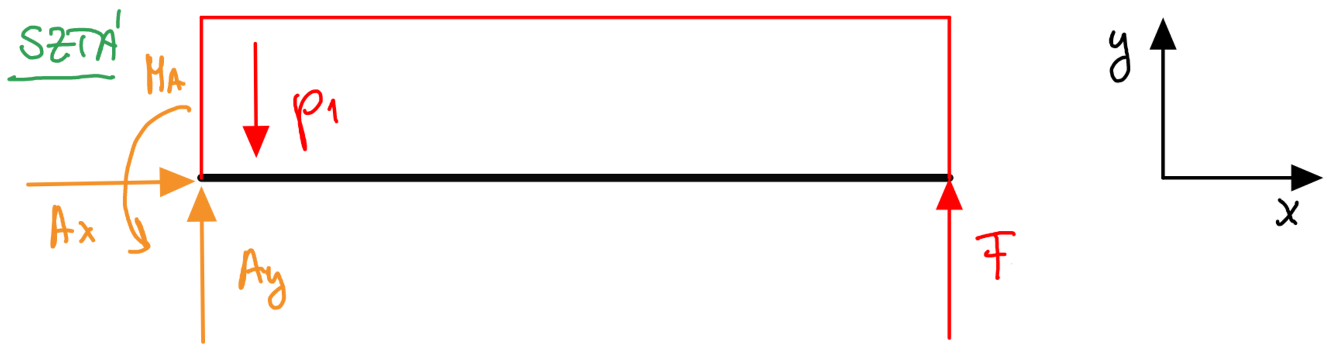
Adatok:

$L = 4\,m$

$p_1 = 3\,kN/m$

$F = 3\,kN$

Most mehetünk azonnal jobbról vagy kiszámoljuk a reakciókat és balról redukálunk!



Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0: \quad \boxed{A_x = 0}$

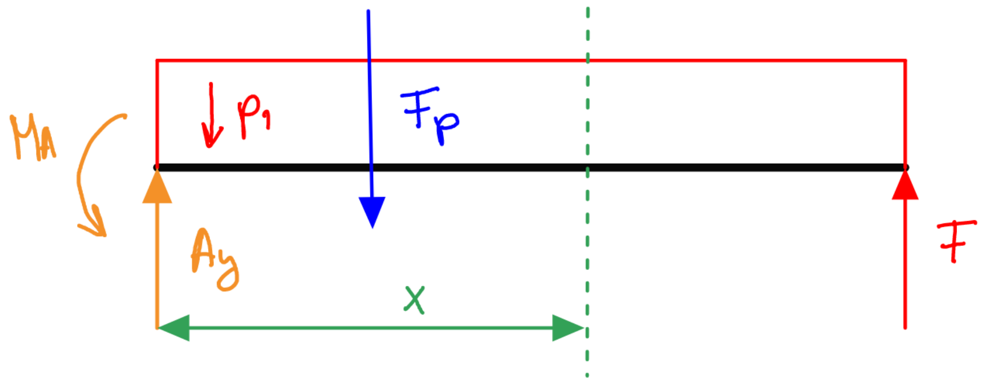
$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + F - p_1 L = 0$

$\hookrightarrow A_y = p_1 L - F = \underline{\underline{9\,kN}}\ (\uparrow)$

$\Sigma M_A = 0: \quad M_A + F \cdot L - p_1 L \cdot \frac{L}{2} = 0$

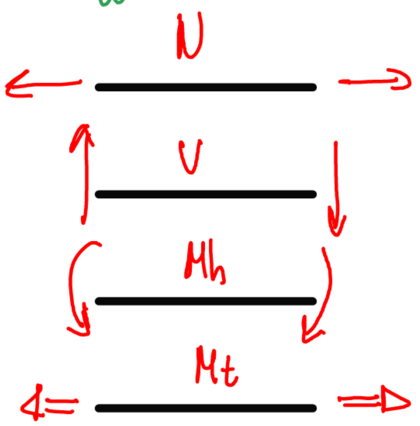
$\hookrightarrow M_A = \frac{p_1 L^2}{2} - F \cdot L = \underline{\underline{12\,kNm}}$

Érdemes felrajzolni a testre ható erőket!



Válasszunk ki egy keresztmetszetet!

Mivel a rúdszakaszon belül nincs koncentrált erő és erőpár
↳ egy szakasz elég!



	Balról	Jobbról
$N(x)$	0	0
$V(x)$	$A_y - px$ méterben $V(x) = \underline{\underline{9 - 3x}}$ kN	$-F + p(L-x)$ $V(x) = -3 + 12 - 3x = \underline{\underline{9-3x}}$
$M_h(x)$	$-A_y x + \frac{px^2}{2} + M_A$ $M_h(x) = -9x + \frac{3}{2}x^2 + 12$ kNm méterben	$-F(L-x) + \frac{p(L-x)^2}{2}$ $M_h(x) = -3(4-x) + \frac{3(16-8x+x^2)}{2}$ $= -12 + 3x + 24 - 12x + \frac{3}{2}x^2$ $= \frac{3}{2}x^2 - 9x + 12$ kNm méterben
$M_t(x)$	0	0

Tehát a függvények:

$$p(x) = -p$$

$$V(x) = A_y - px$$

$$M_h(x) = \frac{px^2}{2} - A_y x + M_A$$

Ellenőrizzük a derivált kapcsolatot!

$$V'(x) = -p = p(x) \checkmark$$

$$M_h'(x) = px - A_y = -V(x) \checkmark$$

K-keresztmetszet:

$N_K = 0$

$M_{tK} = 0$

$V_K = V(L/2) = 9 - 3 \cdot 2 = \underline{\underline{3\,kN}}$

$M_{hK} = M_h(L/2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 12 = \underline{\underline{0\,kNm}}$

Rúdvég: $(x = L)$

$V(L) = 9 - 3 \cdot 4 = -3\,kN$

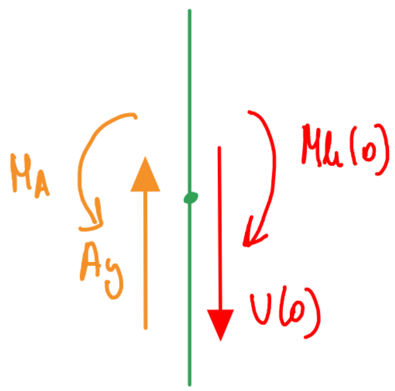
$M_h(L) = \frac{3}{2} 4^2 - 9 \cdot 4 + 12 = 0\,kNm$

} megfelel annak, amit a rúd jobb végén lévő terhelés ad

Befogás $(x=0)$

$V(0) = 9\,kN$

$M_h(0) = 12\,kNm$



Tényleg egyensúly!

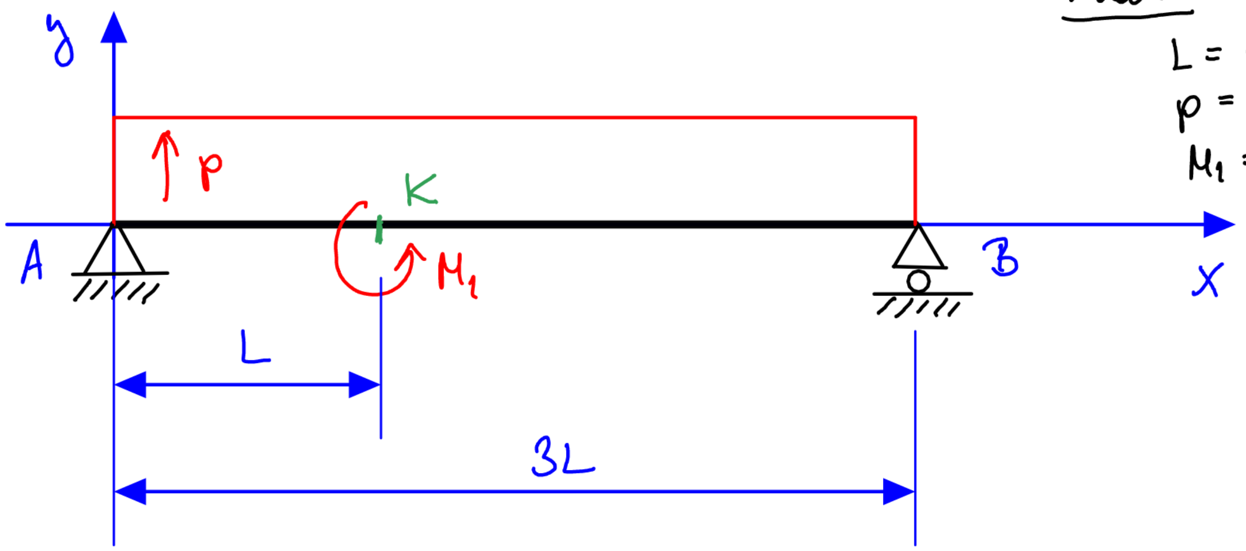
3. feladat Írjuk fel az igénybevételi függvényeket és számítsuk ki a K keresztmetszetben az igénybevételek nagyságát!

Adatok:

$L = 1\,m$

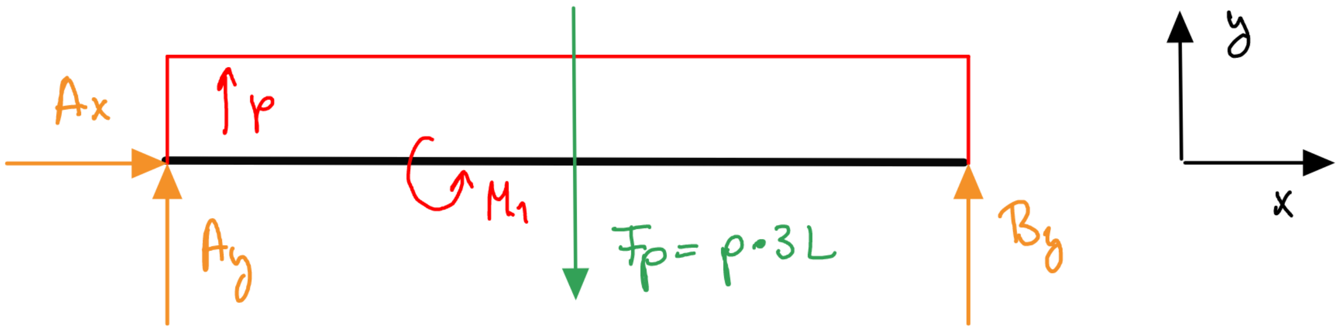
$p = 4\,kN/m$

$M_1 = 3\,kNm$



① Reakcióerők számítása

SZTÁ:



Egyensúlyi egyenletek:

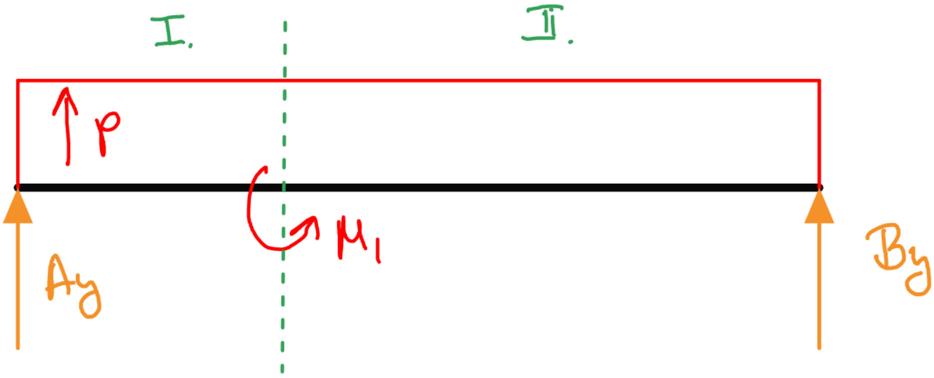
$\Sigma F_x = 0$: $\boxed{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0$: $A_y + B_y + p3L = 0$

$\overset{\curvearrowleft}{\Sigma} M_A = 0$: $M_1 + B_y 3L + p3L \cdot \frac{3}{2}L = 0$

$$\hookrightarrow B_y = \frac{-p\frac{3L^2}{2} - M_1}{3L} = \underline{\underline{-7\,kN}} \ (\downarrow)$$

$$\hookrightarrow A_y = -p3L - B_y = \underline{\underline{-5\,kN}} \ (\downarrow)$$



Mivel a rúdon van koncentrált terhelés (M_1) → két szakasz kell!
balról redukálunk

	I. szakasz $0 < x < L$	II. szakasz $L < x < 3L$
$N(x)$	0	0
$V(x)$	$A_y + px = -5+4x$	$A_y + px = -5+4x$
$M_h(x)$	$-A_y x - \frac{px^2}{2}$	$-A_y x - \frac{px^2}{2} + M_1 = -2x^2+5x+3$
$M_t(x)$	0	0

A K-keresztmetszet: → pont a határ → mindkét oldalt meg kell nézni

- $V(L_-) = V_1(L) = -1\,kN$
  $V(L_+) = V_2(L) = -1\,kN$
  } itt nincs különbség

- $M_h(L_-) = M_{h_1}(L) = 3\,kNm$
  $M_h(L_+) = M_{h_2}(L) = 6\,kNm$
  } itt van különbség
  ↳ ugrás van a fogjában!