Statika - 4. gyakorlat

Egyensúly

Elméleti áttekintés: Statika → egyensúly!

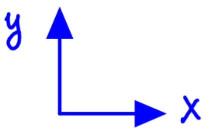
3D eset $\quad [\underline{F}\,;\underline{M}_A]_A = [\underline{0}\,;\underline{0}]_A \quad$ térben 6 db egyenlet

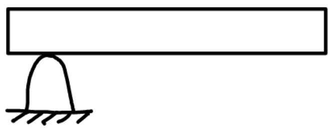
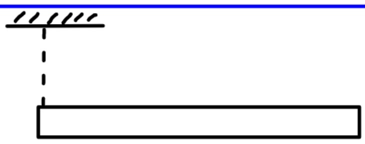
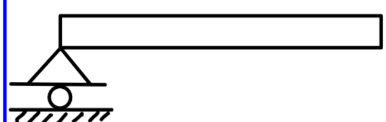
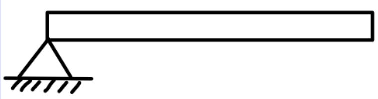
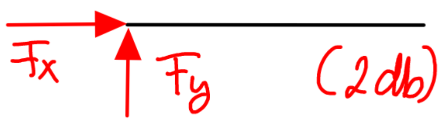
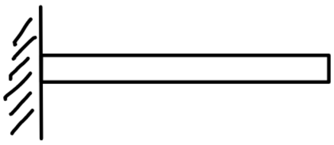
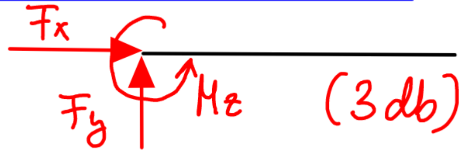
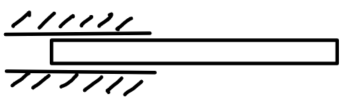
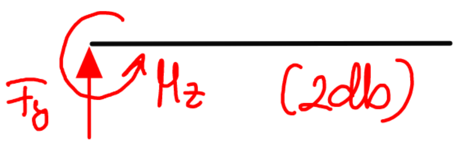
2D eset $\quad$ (x és y tengely jelöli ki a síkot!)

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= 0 \\ M_{0z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ 3db skalár egyenlet!}$$

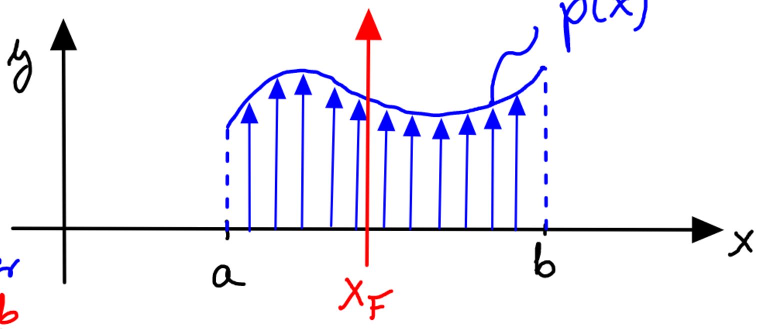
ahol: $\quad F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\,; \quad F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\,; \quad M_{0z} = \sum_{j=1}^{m} M_{jz} + \sum_{i=1}^{n} (r_i \times F_i)_z$

Kényszerek:



Típus	Rajzi jel	Gátolt mozgáslehetőség	Reakció
Támasz		$u_y = 0$ (1 db)	 F_y (1 db)
Kötél		$u_y = 0$ (1 db)	 F_y (1 db)
Görgős támasz		$u_y = 0$ (1 db)	 F_y (1 db)
Csuklós támasz		$u_x = 0$, $u_y = 0$ (2 db)	 F_x F_y (2 db)
Befogás		$u_x = 0$, $u_y = 0$, $\varphi_z = 0$ (3 db)	 F_x F_y M_z (3 db)
Csúszka		$u_y = 0$, $\varphi_z = 0$ (2 db)	 F_y M_z (2 db)

Megoszló erőrendszer:

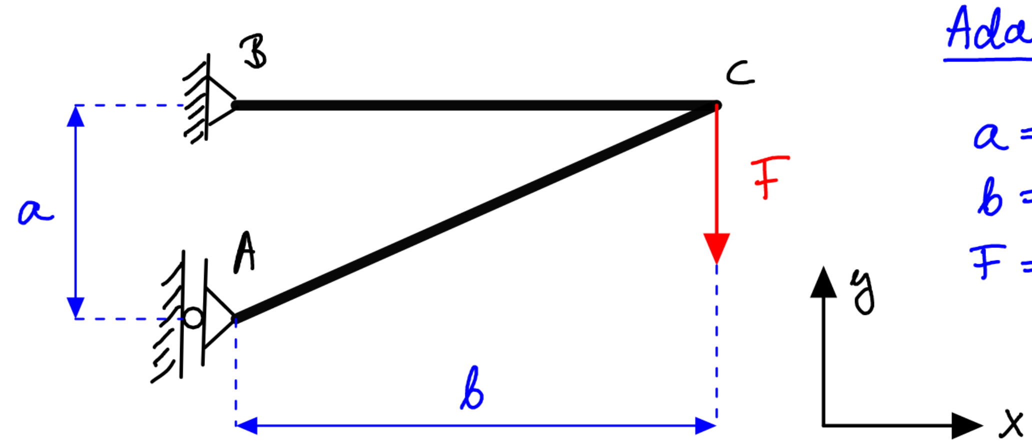


$p(x)$ - val adott megoszló erőrendszer

Eredője: $F = \int_a^b p(x)\,dx$ → geometriailag a megoszló erőrendszer TERÜLETE

az eredő helye: $x_F = \dfrac{\int_a^b x\,p(x)\,dx}{F}$ → geometriailag a megoszló terhelés súlypontja

1. feladat Határozzuk meg a reakcióerőket számítással és szerkesztéssel!



Adatok:

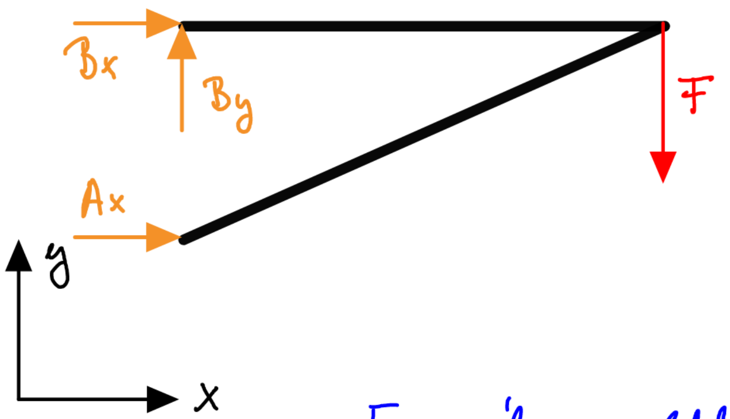
$a = 1{,}25\ m$

$b = 2{,}75\ m$

$F = 350\ N$

Számítással:

Szabadtest ábra (SZTÁ) → Kényszereket reakciókkal helyettesítjük!



Az ismeretlen reakciókat mindig a pozitív koordináta irányoknak megfelelően vesszük fel!

Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0: \quad A_x + B_x = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = 0: \quad B_y - F = 0 \quad (2)$

$\circlearrowleft \sum M_B = 0: \quad A_x \cdot a - F \cdot b = 0 \quad (3)$

↳ A nyomatéki egyenletet bárhová felírhatjuk. Célszerű úgy választani, hogy a lehető legtöbb ismeretlen reakció kiessen!

(2): $B_y = F = \underline{\underline{350\ N}}\ (\uparrow)$

(3): $A_x \cdot a = F \cdot b$

$A_x = \frac{F \cdot b}{a} = \underline{\underline{770\ N}}\ (\rightarrow)$

(1): $B_x = -A_x = \underline{\underline{-770\ N}}\ (\leftarrow)$ Ellentétes a felvett iránnyal!

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 770 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N \ ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -770 \\ 350 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

Lehet persze további nyomatéki egyenleteket felírni:

$$\overset{\curvearrowleft}{\sum} M_B = 0 \rightarrow A_x \cdot a - F b = 0$$
$$\overset{\curvearrowleft}{\sum} M_A = 0 \rightarrow -B_x \cdot a - F b = 0$$
$$\overset{\curvearrowleft}{\sum} M_C = 0 \rightarrow -B_y \cdot b + A_x \cdot a = 0$$

} ezek nem mind függetlenek a $\sum F_x = 0$ és $\sum F_y = 0$ egyenletektől

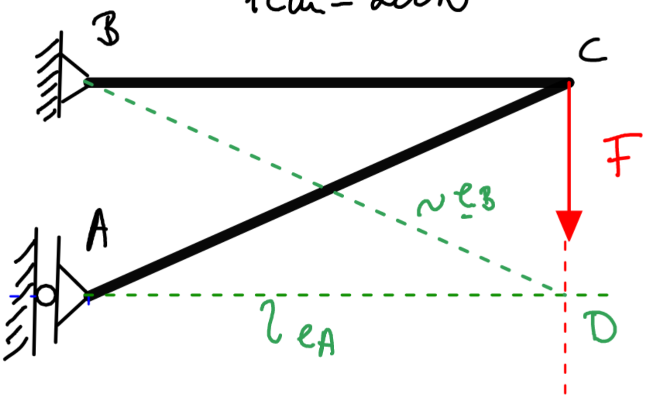
Mindig 3 db független egyenlet van!

Szerkesztéssel:

Méretarányos ábra kell!

1 cm ≅ 0,2 m

1 cm ≅ 200 N

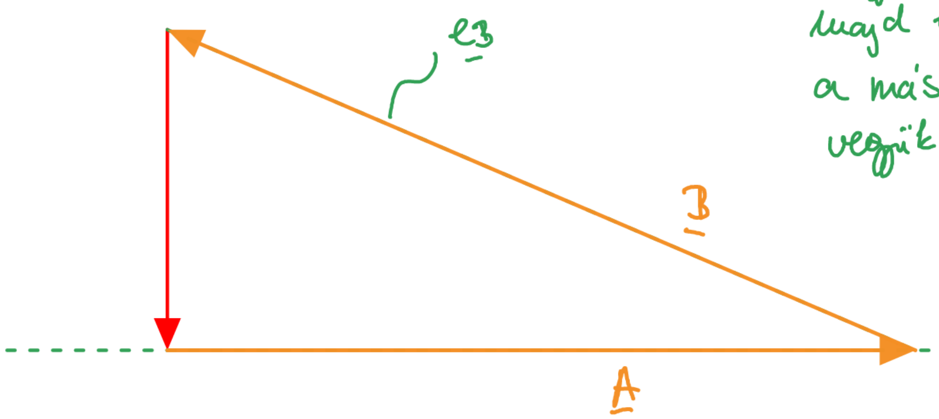


A szerkesztés lépései:

1) Méretarányos ábra + aktív erő felvétele
2) Az A reakció hatásvonala ismert (e_A)
   Az F erő hatásvonalával D pontban metsződik
3) 3 erő egyensúlya miatt e_B is átmegy D-n
   ↳ berajzoljuk e_B-t
4) Minden erő hatásvonala ismert → erőábra
5) Vegyük fel az ismert erőt ($\underline{F}$) majd egyik végpontba az A a másikba a B erő hatásvonalát vegyük fel
6) Hatásvonalak metszéspontja
   ↳ leolvasni

3 erő egyensúlya:
- egy pontban metsződő hatásvonalak
- záródó vektor△

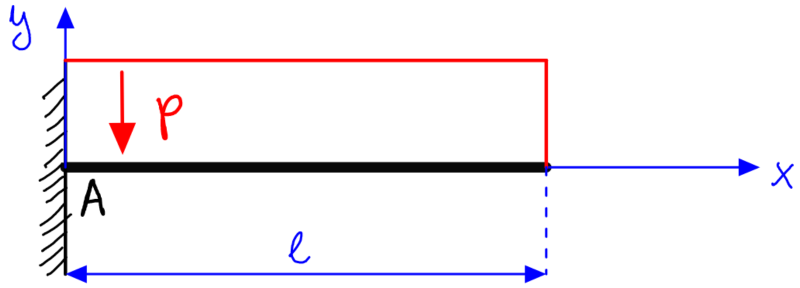
Erőábra: 1 cm ≅ 100 N



~e_A

2. feladat

Számítsuk ki a reakciókat!



Adatok:

$\ell = 2\,m$

$p = 600\,N/m$

Helyettesítsük a megoszló erőrendszert!

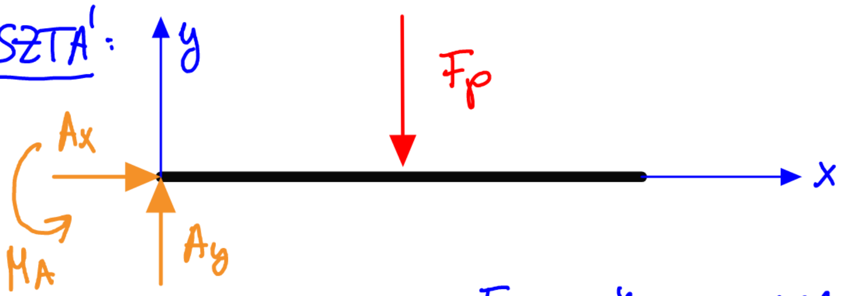
Síkidom területe

$$F_p = \int_0^{\ell} p\,dx = p\cdot\ell = 1200\,N$$

$$x_p = \frac{\int_0^{\ell} x\,p\,dx}{F_p} = \frac{p\ell^2/2}{p\ell} = \frac{\ell}{2}$$

a síkidom súlypontjának a helye!

SZTÁ:



Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0 \qquad \underline{\underline{A_x = 0}}$

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - F_p = 0 \rightarrow A_y = F_p = \underline{\underline{1200\,N}}$

$\curvearrowleft \Sigma M_A = 0 \qquad M_A + F_p \cdot \frac{\ell}{2} = 0$

$\hookrightarrow M_A = -F_p\frac{\ell}{2} = \underline{\underline{-1200\,Nm}}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1200 \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad \underline{M_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1200 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

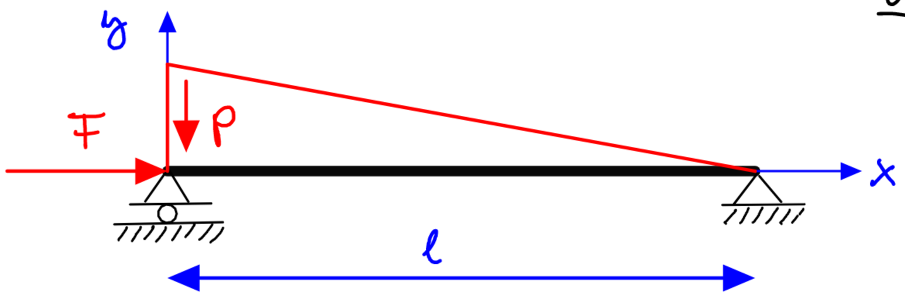
3. feladat

Szerkesszük meg a reakcióerőket!

Adatok: $l = 2\ m$

$p = 1{,}2\ kN/m$

$F = 600\ N$



Helyettesítsük a megoszló erőrendszert: $F_p = \frac{pl}{2} = 1{,}2\ kN$ (háromszög terület

$x_p = \frac{l}{3} = \frac{2}{3}\ m$ és súlypont)

Szerkesztéssel: $1\ cm \triangleq 200\ N$

1) 4 erő szerepel ($\underline{F}, \underline{F}_p, \underline{A}, \underline{B}$) vegyük a két aktív terhelés eredőjét!

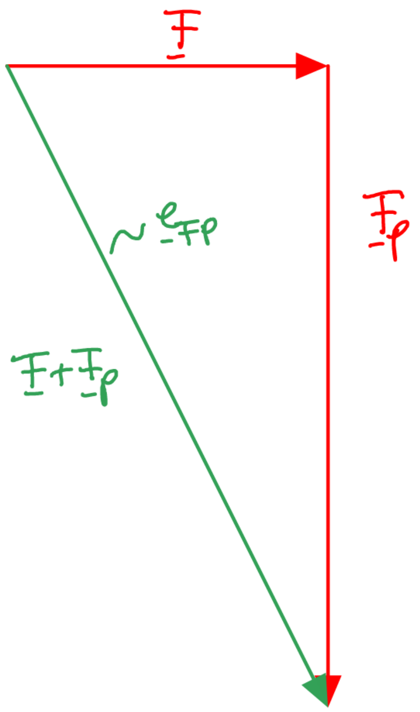
   $\underline{F}$ és $\underline{F}_p$ hatásvonala a C pontban metsződik

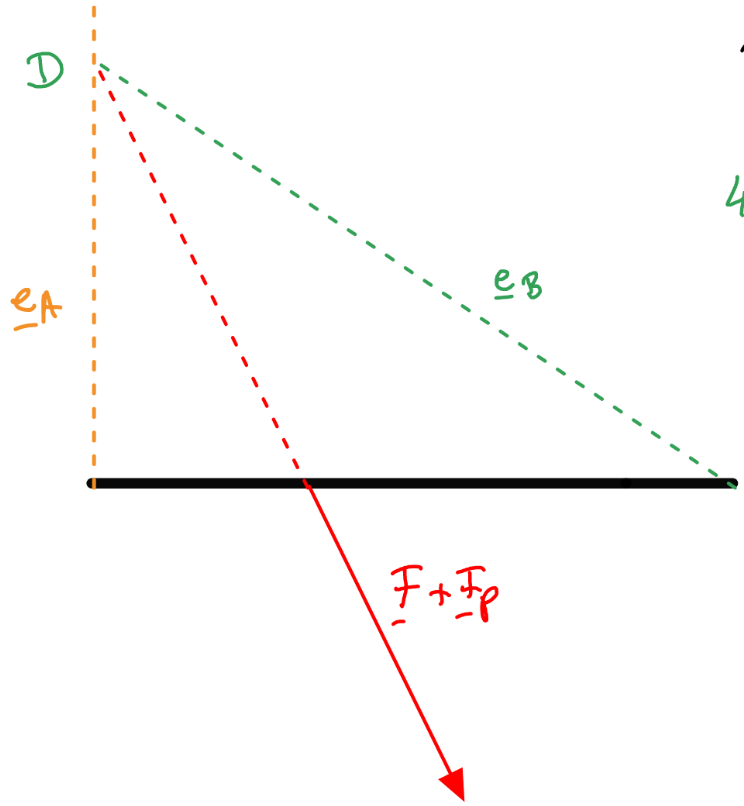
2) Szerkesszük ki $\underline{F}$ és $\underline{F}_p$ eredőjét a paralelogramma szabály segítségével

3) Rajzoljuk szerkezeti ábrát

   ↓

   $\underline{F} + \underline{F}_p$ erők eredőjét vegyük fel a C pontba!





$1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 0{,}2\,\text{m}$

$1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 400\,\text{N}$

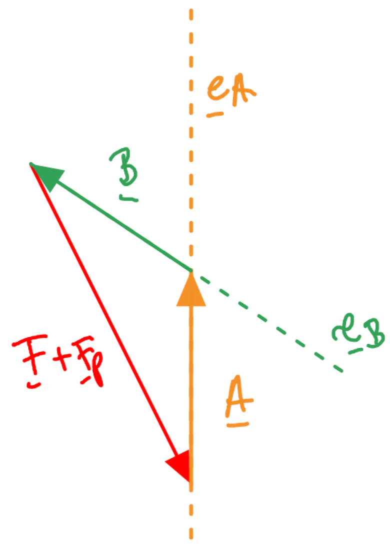
4) Szerkezeti ábra
   - ↳ aktív erő hatásvonala
   - ↳ reakciók hatásvonala
     - ↳ D pont

5) 3 erő egyensúlya miatt B reakció hatásvonala is át kell, hogy menjen D-n!
   - ↳ e_B hatásvonala!

6) Erőábra:
   - $F + F_p$ vektort felvenni

egyik végén A, a másikon B hatásvonalával párhuzamost húzni!

$1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 400\,\text{N}$

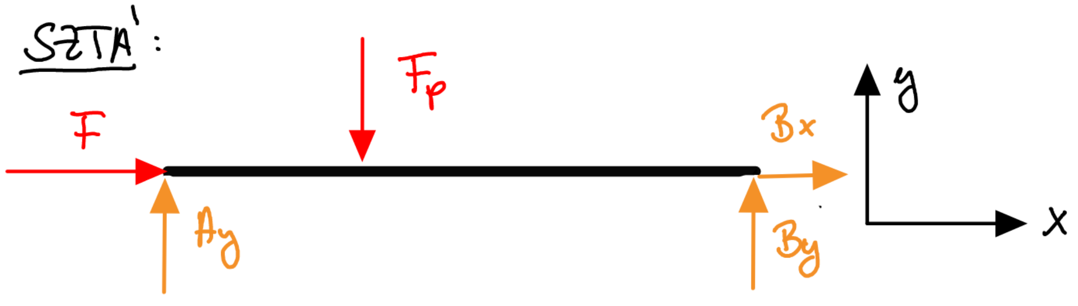


7) Reakciók leolvasása!

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 800 \end{bmatrix} \text{N} \quad ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -600 \\ 400 \end{bmatrix} \text{N}$$

<u>SZÁMÍTÁSSAL</u>:

<u>SZTÁ</u>:

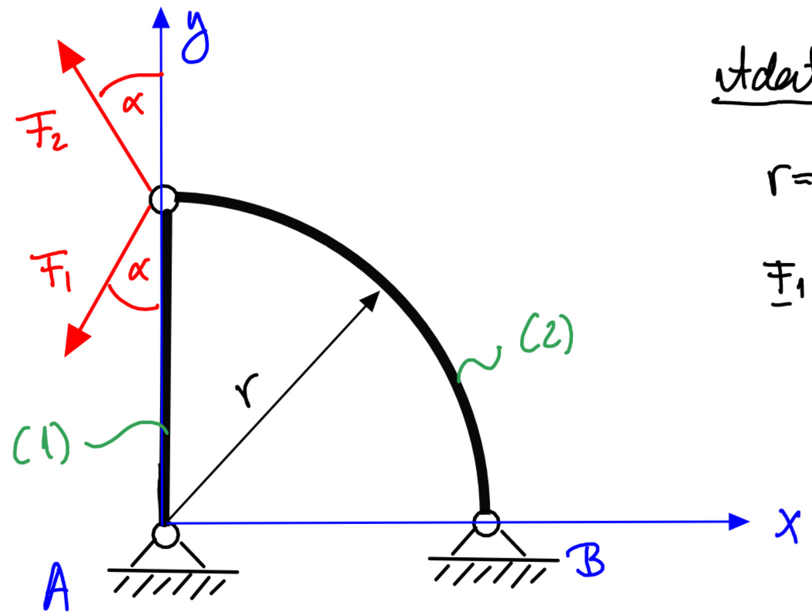


$$\Sigma F_x = 0: \quad F + B_x = 0 \longrightarrow B_x = -F = -600\,\text{N}$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + B_y - F_p = 0 \longrightarrow B_y = F_p - A_y = 400\,\text{N}$$

$$\Sigma M_B = 0: \quad -A_y \cdot l + F_p \cdot \tfrac{2}{3} l = 0 \rightarrow A_y = \frac{F_p \frac{2}{3} l}{l} = \frac{\frac{pl}{2} \cdot \frac{2}{3} l}{l} = \frac{pl}{3} = 800\,\text{N}$$

4. feladat Az ábrán látható szerkezet egy egyenes és egy negyedkör alakú görbe rúdból áll, melyek a C pontban csuklóval kapcsolódnak egymáshoz. Határozzuk meg a reakcióerőket!



Adatok:

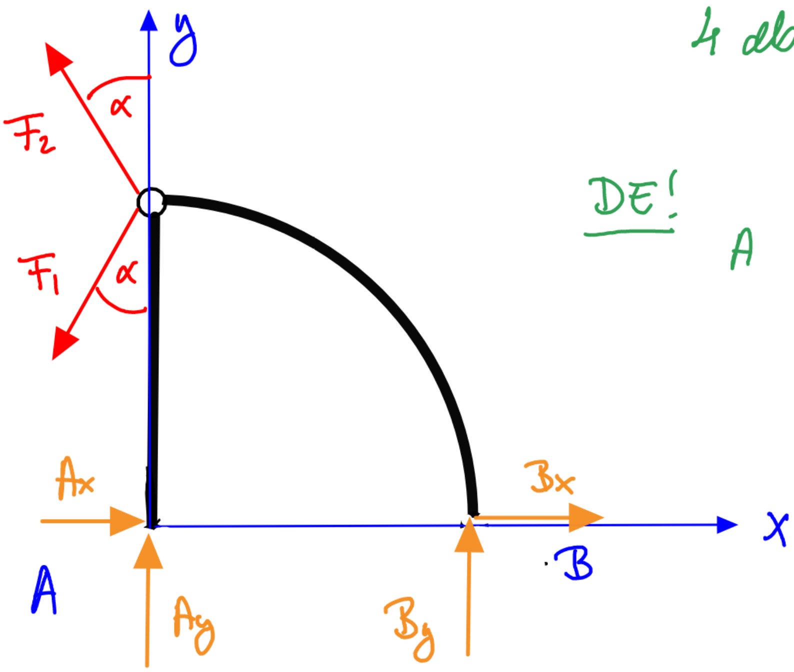
$r = 0{,}4\,m$

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -250 \\ -250\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -150 \\ 150\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} N$$

Írjuk fel a csuklók koordinátáit!

$$\underline{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m; \quad \underline{r}_B = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m; \quad \underline{r}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

SZTÁ



4 db ismeretlen reakció

⇓

3 db egyenlet!

DE!

A szerkezet valójában 3 db testből áll

(1)es-rúd; (2)es rúd + csukló

↓

A rudakra csak a végén hat erő

↳ egyensúlyban kell lennie!

2 erő egyensúlya → ↳ közös hatásvonal

Tehát: $\underline{A}$ erő az (1)-es rúd irányába mutat
$\underline{B}$ erő pedig a negyedkör két végpontját összekötő szakasz irányába!

$$\underline{A} = \lambda_A \underline{r}_{AC}, \quad \text{ahol} \quad \underline{r}_{AC} = \underline{r}_C - \underline{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{B} = \lambda_B \underline{r}_{BC}, \quad \text{ahol} \quad \underline{r}_{BC} = \underline{r}_C - \underline{r}_B = \begin{bmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0$: $\quad F_{1x} + F_{2x} + B_x = 0$

$$F_{1x} + F_{2x} - r\lambda_B = 0 \quad (1)$$

$\sum F_y = 0$: $\quad F_{1y} + F_{2y} + A_y + B_y = 0$

$$F_{1y} + F_{2y} + \lambda_A r + \lambda_B r = 0 \quad (2)$$

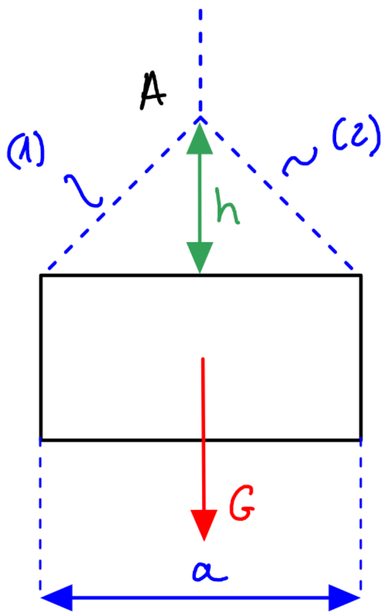
(1): $$\lambda_B = \frac{F_{1x} + F_{2x}}{r} = -1000 \frac{N}{m}$$

$$\hookrightarrow \underline{B} = \lambda_B \cdot \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} 400 \\ -400 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

(2): $$\lambda_A = \frac{-F_{1y} - F_{2y} - \lambda_B r}{r} = 1433 \frac{N}{m}$$

$$\hookrightarrow \underline{A} = \lambda_A \underline{r}_{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 573{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

5. feladat Az ábrán látható teher megemelésére szolgáló kötelet legfeljebb $K = 800N$ nagyságú húzóerő terheli. Mekkora legyen a kötés h magassága, hogy a 3 méter széles 1000N súlyú láda levegőben tartásakor ne szakadjon el a kötél?

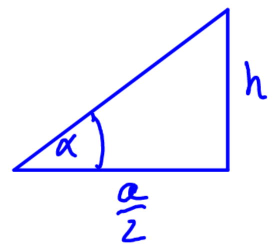


Adatok:

$G = 1000N$

$a = 3\,m$

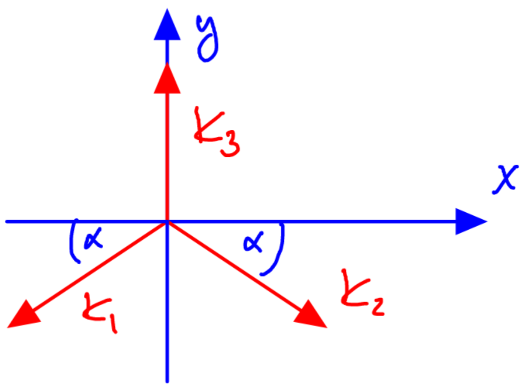
$K_{max} = 800N$



$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a}$$

A rendszer egyensúlyban van → A pontra egyensúlyi egyenletek

SZTA:



Mivel a teljes súlyt K_3 tartja

↓

$\underline{\underline{K_3}} = G = 1000N$

$\sum F_x = 0: \quad K_2 \cos\alpha - K_1 \cos\alpha = 0$

$\sum F_y = 0: \quad K_3 - K_2 \sin\alpha - K_2 \sin\alpha = 0$

(1) $K_1 = K_2$ → legnagyobb erő:

$K = K_1 = K_2 = \underline{\underline{800N}}$

(2) $K_3 - K\sin\alpha - K\sin\alpha = 0$

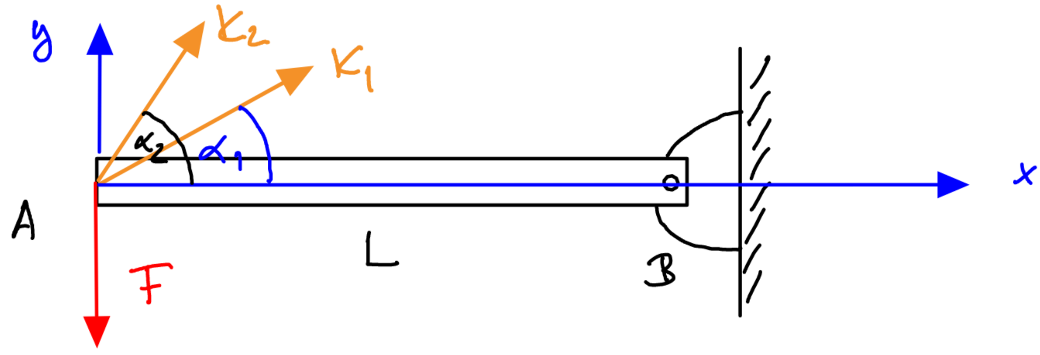
↳ $\sin\alpha = \frac{K_3}{2K} = 0{,}625$

↳ $\underline{\underline{\alpha = 38{,}66°}}$

A fenti egyenletből:

$h = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \underline{\underline{1{,}2\,m}}$

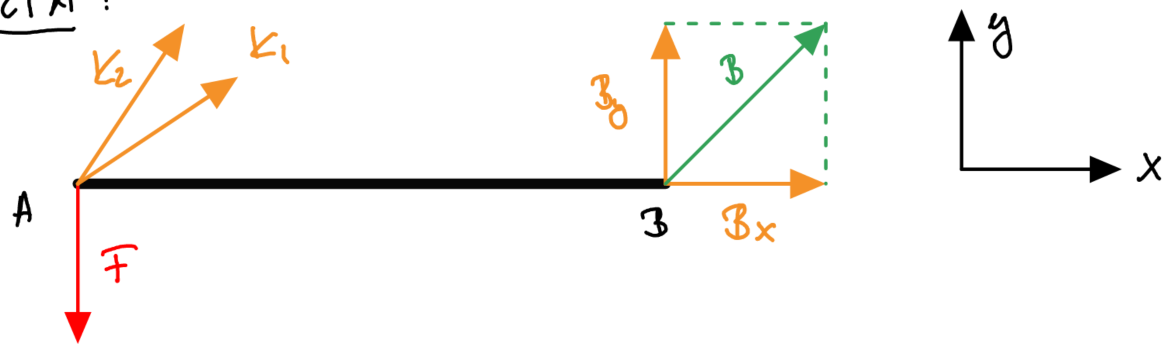
6. feladat Az AB rúd B vége csuklósan meg van támasztva. Az A végén két kötél húzóerőt fejt ki. Milyen nagyságú függőleges F erőt kell alkalmazni, hogy a rúd vízszintes helyzete egyensúlyi legyen?



Adatok:

$K_1 = 1000\,N$
$K_2 = 500\,N$
$\alpha_1 = 30°$
$\alpha_2 = 60°$
$L = 2\,m$

SZTÁ:



Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket:

$\Sigma F_x = 0$: $K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 + B_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$: $B_y + K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 - F = 0$

$\Sigma M_A = 0$: $B_y \cdot 2 = 0 \rightarrow \boxed{B_y = 0}$

↳ $B_x = -K_1\cos\alpha_1 - K_2\cos\alpha_2 = \underline{-1116\,N}$ (←)

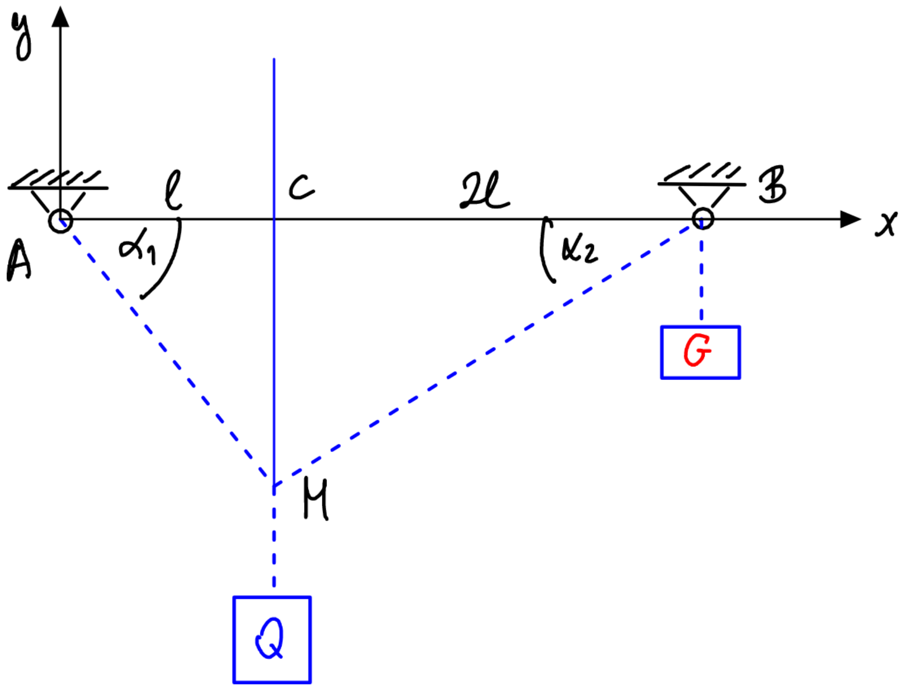
↳ $F = K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 = \underline{933\,N}$ (↓)

Másképp: Vegyük észre, hogy 3 erő hatásvonala (F, K_1, K_2) egy ponton megy át. → Ha a B erő hatásvonala nem itt menne át

↳ nem lehetne egyensúly → B hatásvonala átmegy A ponton

↳ $\underline{B_y = 0}$

7. feladat Egy teljesen vékony kötél végét az A csuklóhoz kötjük, másik végére, miután a B pontban a korongon átvezettük, G súlyt akasztunk. A kötélen $\overline{AM} = 2l$ távolságban $Q = 1000$ N teher lóg egy karikához kapcsolva. Határozzuk meg a G súly nagyságát, ha a szerkezet az ábra szerinti állapotban egyensúlyban van.



Adatok:

$Q = 1000N$

$\overline{AM} = 2l$

$\overline{AC} = l$

$\overline{CB} = 2l$

- $\overline{CM} \Rightarrow$ Pithagorasz-tételből: $\overline{CM} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{4l^2 - l^2} = \sqrt{3}\, l$
- $\overline{BM} \Rightarrow$ szintén Pithagorasszal: $\overline{BM} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{CM}^2} = \sqrt{4l^2 + 3l^2} = \sqrt{7}\, l$

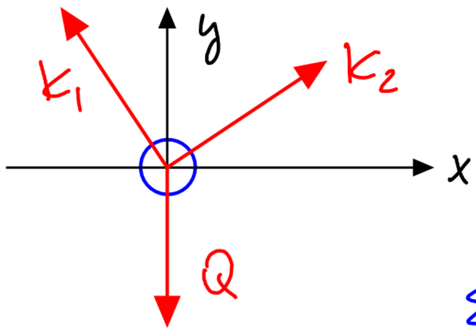
Ebből:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_2 &= \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} = \frac{\sqrt{3}l}{\sqrt{7}l} = \sqrt{\frac{3}{7}} = 0,655 \\ \cos\alpha_2 &= \frac{\overline{CB}}{\overline{BM}} = \frac{2l}{\sqrt{7}l} = \sqrt{\frac{4}{7}} = 0,756 \end{aligned}\right\} \quad \alpha_2 = 40,91^\circ$$

valamint:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_1 &= \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \frac{\sqrt{3}l}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha_1 &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{\alpha_1 = 60^\circ}}$$

Rajzoljuk fel a karika SZTÁ-ját!



Tudjuk, hogy $K_2 = G$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow K_2 \cos\alpha_2 - K_1 \cos\alpha_1 = 0$$

$$G \cos\alpha_2 - K_1 \cos\alpha_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 - Q = 0$$

$$K_1 \sin\alpha_1 + G \sin\alpha_2 - Q = 0 \quad (2)$$

(1): $G = \dfrac{K_1 \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \rightarrow (2)$

$$K_1 \sin\alpha_1 + \frac{K_1 \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \sin\alpha_2 - Q = 0$$

$$K_1 \left(\sin\alpha_1 + \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \sin\alpha_2 \right) - Q = 0$$

$$K_1 = \frac{Q}{\sin\alpha_1 + \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \sin\alpha_2} = \underline{\underline{770\,N}}$$

Ebből: $G = \dfrac{K_1 \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \underline{\underline{509{,}26\,N}}$