

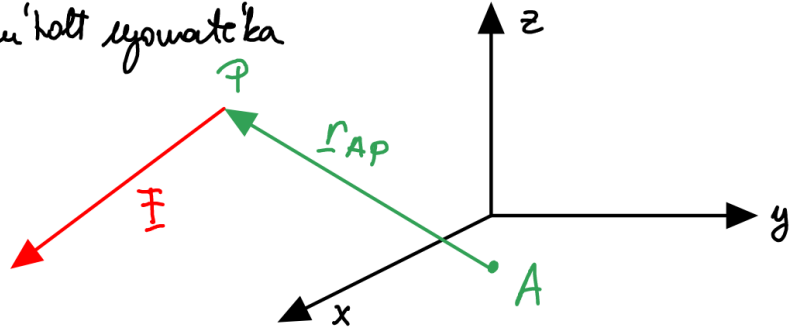
Statika - 3. gyakorlat

Erőrendszer redukáltja

Eleveleti áttekintés:

↳ Erő párra származott egyenletek

$$\underline{M}_A = \underline{r}_{AP} \times \underline{F}$$



↳ Erőrendszer redukáltja A → B pontok között

Ismeret: \underline{M}_A és \underline{F}

$$[\underline{F}; \underline{M}_A]_A$$

statikai vektorkettős

$$\underline{M}_B = \underline{M}_A + \underline{r}_{BA} \times \underline{F}$$

$$[\underline{F}; \underline{M}_B]_B$$

↳ Több erő esetén:

$$\underline{M}_A = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i + \sum_{j=1}^m \underline{M}_j$$

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i$$

n db erő
m db koncentrált
moment

↳ Egyenértékűség $[\underline{F}'; \underline{M}_A']_A = [\underline{F}''; \underline{M}_A'']_A$

Kérdés: de ez egy ponton belátni?

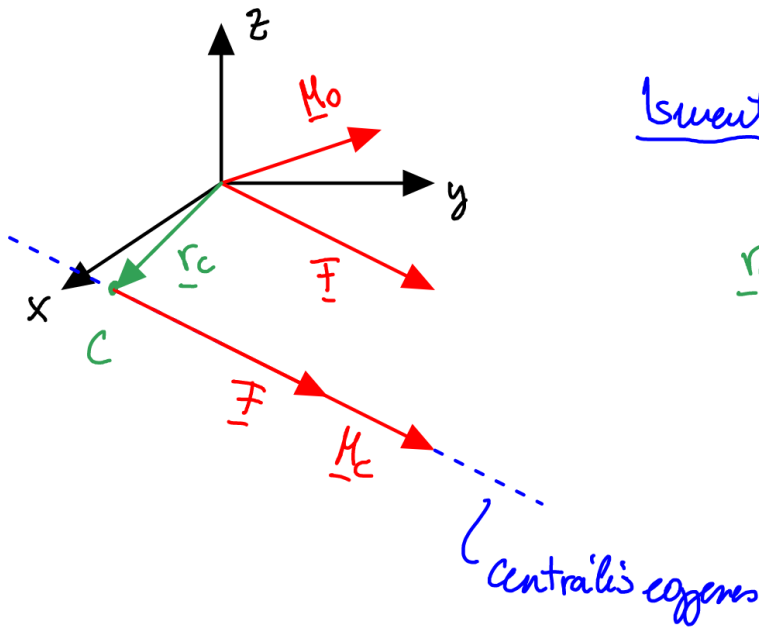
↳ Skalár invariancia: $\underline{F} \cdot \underline{M}_A = \underline{F} \cdot \underline{M}_B \in \mathbb{R}$

független a
ponttól!

↳ Centrális egyenes:

~ olyan egyenes, ahol $\underline{F} \parallel \underline{M}_C$

C a centrális egyenes egy pontja!



Ismeret: $(\underline{F}; \underline{M}_0)_0$

$$\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{F^2}$$

az egyenes egyenlete:

$$\underline{r} = \underline{r}_C + \lambda \cdot \underline{e}_F \quad \leftarrow \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|}$$

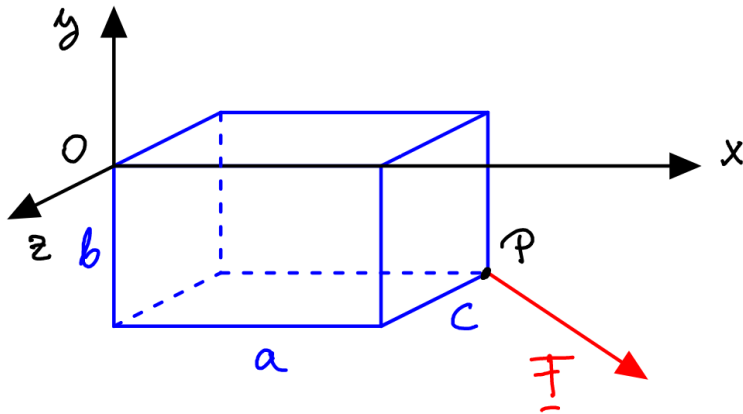
Hekkora itt a nyomaték?

$$\underline{M}_C = \underline{M}_0 - \underline{r}_C \times \underline{F} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_0}{|\underline{F}|^2} \cdot \underline{F}$$

1. feladat

Az a, b, c 'elhosszúságu' merev testet a P pontban az $\underline{F} = 6\underline{i} - 2\underline{j} + 8\underline{k}$ kN koncentrált erő terheli.

Számítsuk ki az erő nyomatékát az O pontra!



Adatok

$$a = 5 \text{ m}$$

$$b = 3 \text{ m}$$

$$c = 4 \text{ m}$$

- Az erővektor: $\underline{F} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ kN}$
- A vizsgált pont és az erő támaszpontját összekötő vektor $\rightarrow \underline{r}_{OP} = \begin{bmatrix} a \\ -b \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ m}$

Az \underline{F} erő nyomatéka O pontra:

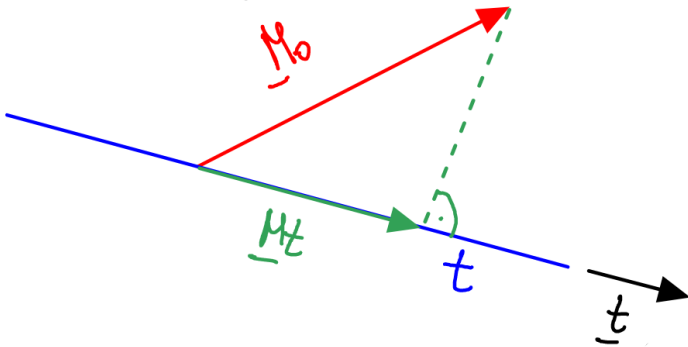
$$\underline{M}_O = \underline{r}_{OP} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a & -b & -c \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -3 & -4 \\ 6 & -2 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \cdot 8 - (-4)(-2) \\ 6 \cdot (-4) - 5 \cdot 8 \\ 5 \cdot (-2) - (-3) \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 - 8 \\ -24 - 40 \\ -10 + 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 \\ -64 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

$$M_O = |\underline{M}_O| = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{\underline{M}_O \cdot \underline{M}_O} = \sqrt{32^2 + 64^2 + 8^2} = \underline{\underline{72 \text{ kNm}}}$$

2. feladat Egy ismeretlen kőbe ható külső erők hatáselektora az O pontban: $\underline{M}_O = 21\underline{i} - 7\underline{j} + 14\underline{k}$ Nm.

Jelölje ki a $\underline{t} = 2\underline{i} + 3\underline{j} + 6\underline{k}$ vektor egy tengelyét az O pontban keresztül. Mekkora az erre a tengelyre vetett nyomaték?



Írjuk fel a vektorokat!

$$\underline{M}_O = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Tengelyre számított nyomaték:

$$\underline{M}_t = \underline{M}_O \cdot \underline{e}_t$$

egységvektor!

$$\underline{e}_t = \frac{\underline{t}}{|\underline{t}|} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{t}| = \sqrt{\underline{t} \cdot \underline{t}} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$$

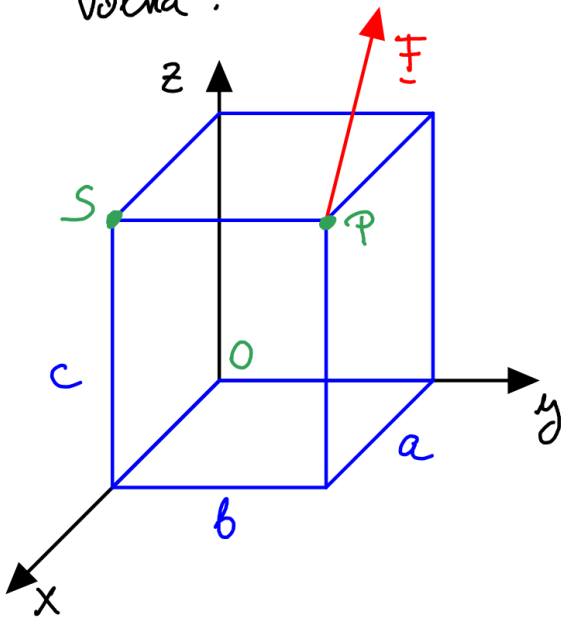
$$\begin{aligned} \underline{M}_t &= \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix} = \\ &= 21 \cdot \frac{2}{7} - 7 \cdot \frac{3}{7} + 14 \cdot \frac{6}{7} = \underline{\underline{15 \text{ Nm}}} \end{aligned}$$

Írjuk fel \underline{M}_t vektort!

$$\underline{M}_t = M_t \cdot \underline{e}_t = 15 \cdot \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30/7 \\ 45/7 \\ 90/7 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

3. feladat

Helyezzük át a merev karabot P pontban terhelő \underline{F} koncentrált \underline{F} erőt az S pontba! Milyen \underline{H}_S nyomatékvektort kell az S pontban működtetnünk ahhoz, hogy az eredeti \underline{F} erő hatásával egyenértékű hatás érje a testet? Redukáljuk az S pontban működő erőrendszert az O pontra! Írjuk fel \underline{H}_O -t is számítsuk ki mintha a P pontbeli erőt közvetlenül az O-ba redukáltuk volna!



Adatok:

$$a = 20 \text{ mm}$$

$$b = 40 \text{ mm}$$

$$c = 60 \text{ mm}$$

$$\underline{F} = 10\underline{i} + 50\underline{j} + 70\underline{k} \text{ N} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix} \text{ N}$$

Ha áthelyezzük \underline{F} erőt S-be \rightarrow a forgató' hatását az \underline{H}_S nyomatékkal tudjuk helyettesíteni \rightarrow Redukáljuk \underline{F} -t S-re!

$$\underline{r}_{SP} = \underline{P} - \underline{S} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$\underline{H}_S = \underline{r}_{SP} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 20 & 40 & 0 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} \text{ Nmm}$$

Tehát, ha áthelyezzük az erőt S-be akkor

$$\underline{H}_S = \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} \text{ Nmm} \text{ nagyságú koncentrált erőpárt kell alkalmazni!}$$

Redukáljuk: $S \rightarrow O$

$$\underline{r}_{os} = \underline{s} - \underline{o} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$\underline{M}_0 = \underline{M}_S + \underline{r}_{os} \times \underline{F} = \underline{M}_S + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 20 & 0 & 60 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 - 3000 \\ 600 - 1400 \\ 1000 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -800 \\ 600 \end{bmatrix} \text{ Nmm}$$

- Nézzük meg ha a P-ből vizsgáljuk:

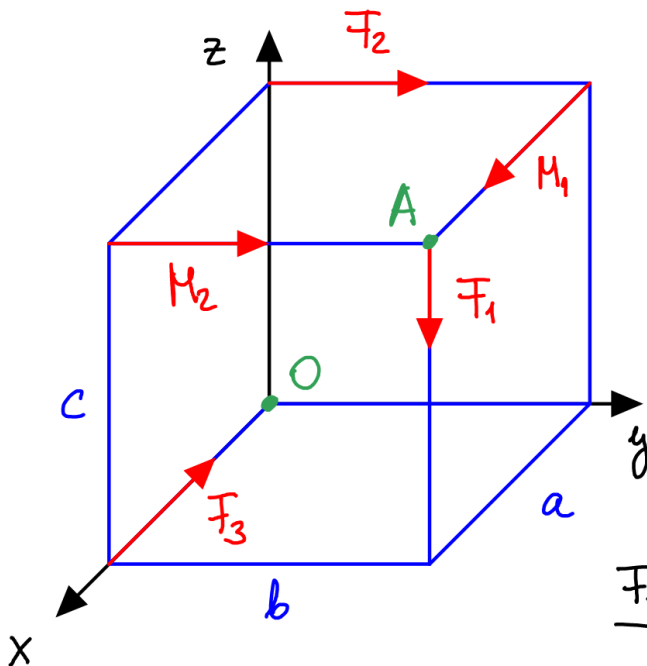
$$\underline{r}_{op} = \underline{p} - \underline{o} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

Hekkora nyomatékot kell O-ba tenni, hogy a forgatás ne változzon!

$$\underline{M}_0 = \underline{M}_P + \underline{r}_{op} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 20 & 40 & 60 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 - 3000 \\ 600 - 1400 \\ 1000 - 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -800 \\ 600 \end{bmatrix} \text{ Nmm}$$

Látjuk, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk!

4 feladat Egy merev testre az \underline{F}_1 , \underline{F}_2 és \underline{F}_3 koncentrált erők és az \underline{M}_1 és \underline{M}_2 koncentrált nyomatékok hatnak az ábrán látható módon.



Adatok:

$$F_1 = 25 \text{ N}$$

$$a = 2 \text{ m}$$

$$F_2 = 70 \text{ N}$$

$$b = 3 \text{ m}$$

$$F_3 = 60 \text{ N}$$

$$c = 4 \text{ m}$$

$$M_1 = 30 \text{ Nm}$$

$$M_2 = 110 \text{ Nm}$$

Feladatok

- 1) Számítsuk ki az erőrendszer redukáltját az O pontra!
- 2) Redukáljuk az erőrendszert az A pontra!
- 3) Igazoljuk, hogy $\underline{F} \cdot \underline{r}_O$ tényleg invariáns!
- 4) Írjuk fel a centrális egyenes egyenletét! Redukáljuk az erőrendszert a centrális egyenes egy pontjára!
- 5) Milyen O pontbeli erőrendszernel kell kiegészíteni az erőrendszert, hogy egyensúly legyen!

Mielőtt bármit számolunk \rightarrow írjuk fel az erőrendszer vektorait!

$$\underline{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix} \text{ N}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N}$$

$$\underline{F}_3 = \begin{pmatrix} -F_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N}$$

$$\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

$$\underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ H_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

A redukáláshoz kell az enőke támaszpontjaiban munkát helyvektorokat!

Az origóba redukálunk: \underline{r}_{op} vektor kell!

$$\underline{r}_1 = a \underline{i} + b \underline{j} + c \underline{k} \rightarrow \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$\underline{r}_2 = c \underline{k} \rightarrow \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$\underline{r}_3 = a \underline{i} \rightarrow \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}$$

Az enőrendszert redukáljuk:

$$\bullet \underline{F} = \sum_{i=1}^3 \underline{F}_i = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$\bullet \underline{M}_O = \sum_{i=1}^3 \underline{r}_i \times \underline{F}_i + \sum_{j=1}^2 \underline{M}_j = \underbrace{\underline{r}_1 \times \underline{F}_1}_{\underline{M}_{OF_1}} + \underbrace{\underline{r}_2 \times \underline{F}_2}_{\underline{M}_{OF_2}} + \underbrace{\underline{r}_3 \times \underline{F}_3}_{\underline{M}_{OF_3}} + \underline{M}_1 + \underline{M}_2$$

Kiírva:

$$\underline{M}_{OF_1} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -75 - 0 \\ 0 + 50 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

$$\underline{M}_{OF_2} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 70 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 280 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

$$\underline{M}_{OF_3} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -60 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}$$

Vagy másképp:

$$\underline{M}_{OF_2} = (4 \cdot \underline{e}) \times (70 \underline{j}) = 280 \underbrace{\underline{e} \times \underline{j}}_{-\underline{i}} = -280 \underline{i}$$

$$\underline{M}_{OF_3} = (2 \underline{i}) \times (-60 \underline{i}) = -120 \underbrace{\underline{i} \times \underline{i}}_0 = 0$$

Összeírva:

$$\underline{M}_O = \begin{bmatrix} -75 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Nm}}}$$

Telát az erőrendszer redukáltja:

$$[\underline{F}; \underline{M}_O]_O = \left[\begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} \right]_O$$

• Redukáljuk az A pontba:

1. megoldás: $\underline{F} = \sum_{i=1}^3 \underline{F}_i$
 $\underline{M}_A = \sum_{i=1}^3 \underline{r}_{Ai} \times \underline{F}_i + \sum_{j=1}^2 \underline{M}_j$ } hosszú...

2. megoldás: $\underline{M}_A = \underline{M}_O + \underline{r}_{AO} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_1 \times \underline{F}$

$$\underline{r}_{AO} = -\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$\underline{F}_A = \underline{F}_O = \underline{F} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \text{ N}}}$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & -3 & -4 \\ -60 & 70 & -25 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75 + 280 \\ 240 - 50 \\ -140 - 180 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 90 \\ 350 \\ -320 \end{bmatrix} \text{ Nm}}}$$

Telát az erőrendszer
redukáltja az A pontban:

$$[\underline{F}; \underline{M}_A]_A = \left[\begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 90 \\ 350 \\ -320 \end{bmatrix} \right]_A$$

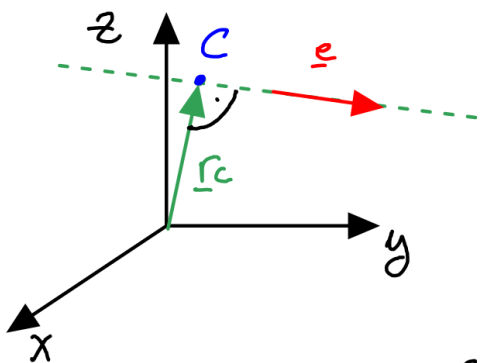
Ellenőrizze a skalar invariáns:

$$\begin{aligned} \bullet \underline{F} \cdot \underline{M}_0 &= (-60)(-265) + 70 \cdot 160 + (-25) \cdot 0 = 27100 \text{ Nm} \\ \bullet \underline{F} \cdot \underline{M}_A &= (-60) \cdot 90 + 70 \cdot 350 + (-25)(-320) = 27100 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Centrális egyenes:

Tudjuk, hogy O -hoz (ahol ismerjük az $(\underline{F}, \underline{M}_0)_0$ skaláris vektorkettőt) a centrális egyenes legközelebbi pontja C pont

$$\underline{r}_c = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{|\underline{F}|^2}$$



$$|\underline{F}|^2 = (\sqrt{\underline{F} \cdot \underline{F}})^2 = |\underline{F} \cdot \underline{F}| = (-60)^2 + 70^2 + (-25)^2 = \underline{\underline{9125 \text{ N}^2}}$$

$$|\underline{F}| = \underline{\underline{95,525 \text{ N}}} \quad (\text{ez a hossza!})$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -60 & 70 & -25 \\ -265 & 160 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 6625 \\ 8950 \end{bmatrix} \text{ Nm}^2$$

Teljes:

$$\underline{r}_c = \frac{1}{9125} \begin{bmatrix} 4000 \\ 6625 \\ 8950 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32/73 \\ 33/73 \\ 358/365 \end{bmatrix} \text{ m} = \begin{bmatrix} 0,4384 \\ 0,726 \\ 0,9808 \end{bmatrix} \text{ m}$$

Az egyenes egyenlete: egy pontja ismert (\underline{r}_c)

kell egy irány: $\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|} = \frac{1}{95,525} \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6281 \\ 0,7328 \\ -0,2617 \end{bmatrix} \quad (-)$

Az egyenlet: $\underline{r}(\lambda) = \underline{r}_c + \lambda \cdot \underline{e}_F$

$$\underline{r}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0,4384 - 0,6281 \cdot \lambda \\ 0,726 + 0,7328 \lambda \\ 0,9808 - 0,2617 \lambda \end{bmatrix} \text{ m}$$

Az enőrendszert redukáltja a C pontban:

1. megoldás: $\underline{M}_C = \underline{M}_A + \underline{r}_{CA} \times \underline{F} = \underline{M}_0 + \underline{r}_{C0} \times \underline{F}$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
ismert

2. megoldás

$\underline{M}_C = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_0}{|\underline{F}|^2} \cdot \underline{F} = \frac{27100}{9125} \cdot \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -178,192 \\ 207,89 \\ -74,247 \end{bmatrix} \text{ Nm}$

skalár invariáns!

Ellenőrzés: $\underline{M}_C \parallel \underline{F} = ?$

• 1. út $\underline{M}_C \times \underline{F} = \underline{0} \quad \checkmark$ Teljesülmi fog!

• 2. út $\left(\frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_0}{|\underline{F}|^2} \cdot \underline{F} \right) \cdot \underline{F} = (\alpha \underline{F}) \times \underline{F} = \alpha (\underline{F} \times \underline{F}) = \underline{0} \quad \checkmark$

Mekkora enőrendszert kell, hogy egyensúly legyen?

Adjunk hozzá egy $[\underline{F}^*; \underline{M}_0^*]_0$ enőrendszert az 0 pontba

↳ új eredő vektorkelzés $\begin{bmatrix} \tilde{\underline{F}} \\ \tilde{\underline{M}}_0 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}_0$

egyensúly miatt!

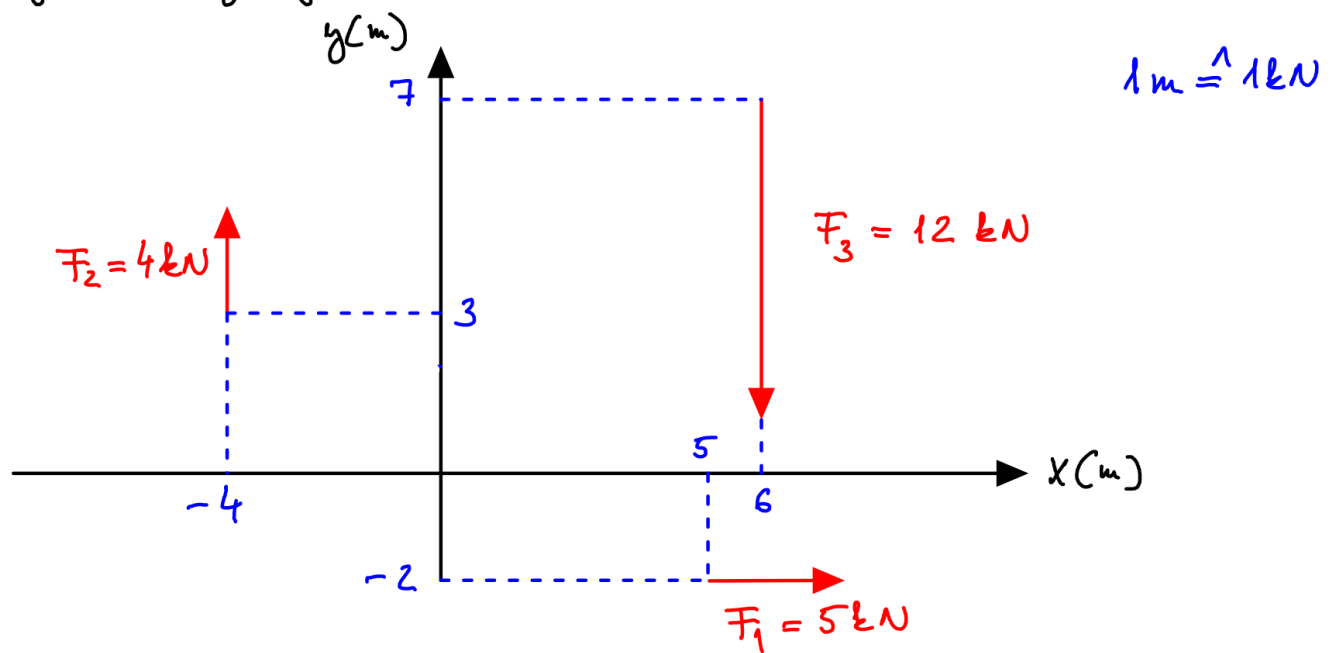
$\tilde{\underline{F}} = \underline{F}^* + \underline{F} = \underline{0} \rightarrow \underline{F}^* = -\underline{F}$

$\tilde{\underline{M}}_0 = \underline{M}_0^* + \underline{M}_0 = \underline{0} \rightarrow \underline{M}_0^* = -\underline{M}_0$

↳ mivel az 0-ban
vagyunk \rightarrow minden x enőkar
zérus!

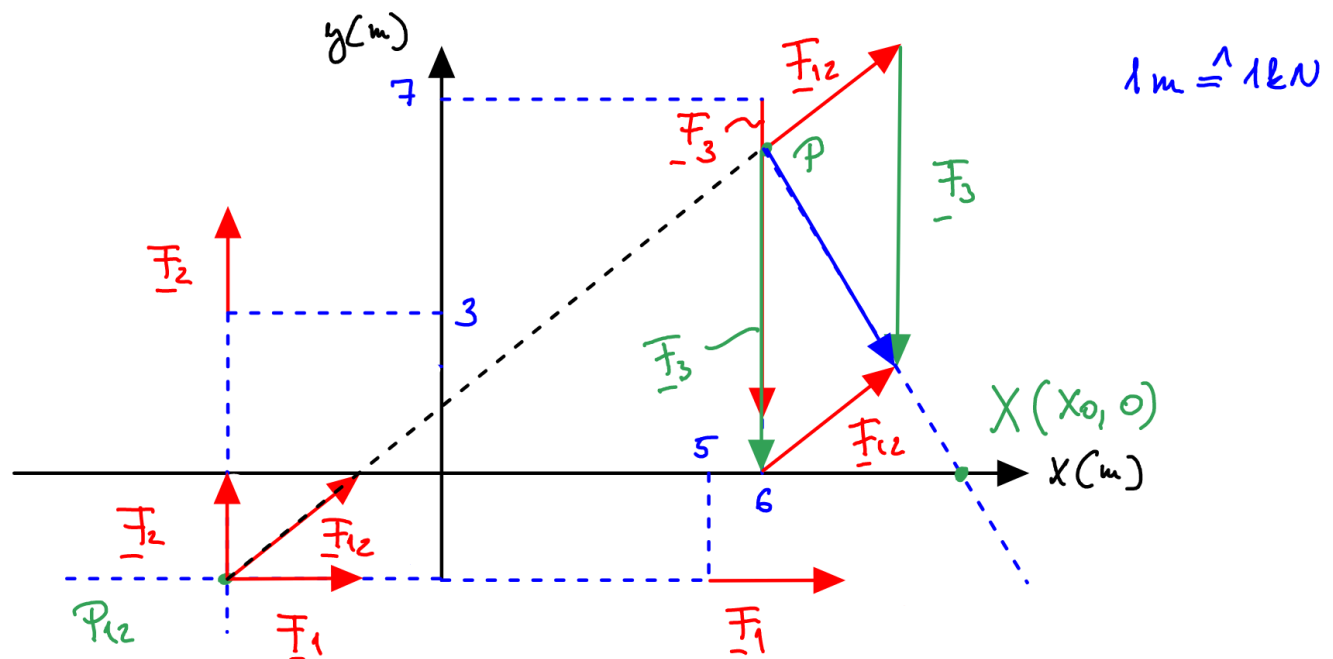
Teljes az 0-ba
redukált statikai
vektorkelzés (-1)-zeset
kell alkalmazni!

5. feladat Határozzuk meg az alábbi síkbeli erőrendszer \underline{F} eredőjének nagyságát és helyét!



Szerkesztéssel:

- \underline{F}_1 és \underline{F}_2 eredője
- Ennek az eredője \underline{F}_3 -mal



A lépések:

- Közös pontra toljuk \underline{F}_1 és \underline{F}_2 vektorokat (P_{12} pont)
↳ hatásvonal metszése
- Eredőjük \underline{F}_{12} szerkesztése
- \underline{F}_{12} és \underline{F}_3 közös pontra \rightarrow hatásvonal metszése (P)
- \underline{F}_c szerkesztése

Olvassuk le az erővektorokat!

$$\underline{F}_E \approx \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

$$\underline{r}_P = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$\underline{r}_x = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

SZÁMLÁLÁSSAL

Írjuk fel a koncentrált erők helyvektorait és az erővektorokat!

$$\bullet \underline{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$\underline{F}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

$$\bullet \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

$$\bullet \underline{r}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$\underline{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

Számítsuk ki az erők eredőjét az origóra (erőrendszer redukálása)

$$\underline{F}_E = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

$$\underline{M}_O = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \times \underline{F}_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 7 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0+10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -16-0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -72-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

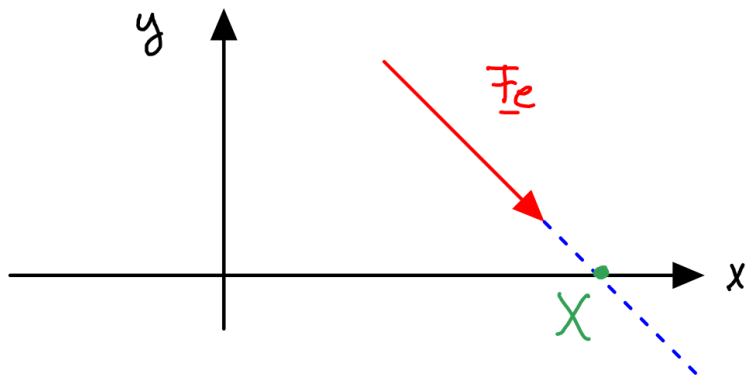
Végül észre, hogy síkfeladat esetén (amikor az erők egy síkban helyezkednek el) \Rightarrow egy A pontra számított nyomaték a síkra menőleges!

↳ Most az origóban \underline{F}_e és \underline{M}_0 az erőrendszer ereje!

Mi egyetlen erővel szeretnénk helyettesíteni!

↳ az erőhatás miatt ez \underline{F}_e kell legyen!

↳ Az a kérdés, hogy hol van?



$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Mivel hatásvonalát mentén eltolható \rightarrow Töljük el az $X(x_0, 0)$ pontba!

Ekkor ugyanakkora nyomatékra kell elegendő az \underline{O} -ra!

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{OX} \times \underline{F}_e = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_0 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

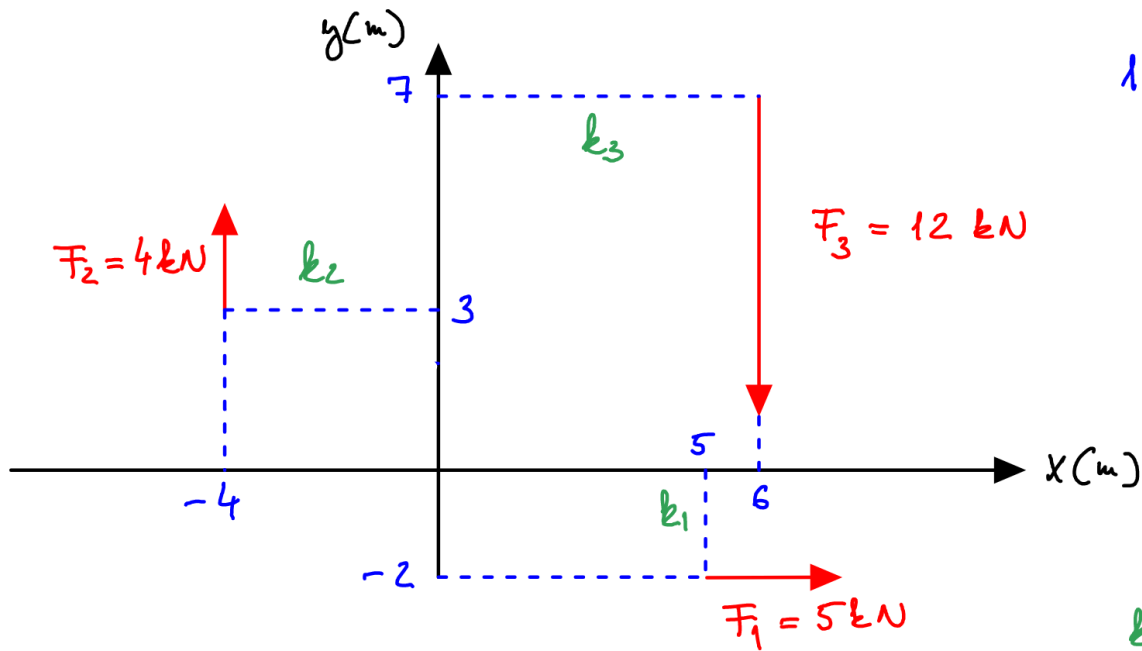
$$x_0 = \frac{78}{8} = \underline{\underline{9,75 \text{ m}}}$$

vektorosan kiszámolható:

$$\underline{M}_0 = (x_0 \underline{i}) \times (5\underline{i} - 8\underline{j}) = 5x_0 \underbrace{(\underline{i} \times \underline{i})}_0 - 8x_0 \underbrace{(\underline{i} \times \underline{j})}_{\underline{k}}$$

$$\underline{M}_0 = -8x_0 \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8x_0 \end{bmatrix}$$

Egyszerűsítés ha síkfeladat



$$1 \text{ m} \hat{=} 1 \text{ kN}$$

$$M_0 = F_1 \cdot k_1 - F_2 \cdot k_2 - F_3 \cdot k_3 = \underline{\underline{-78 \text{ kNm}}}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 \text{ m} \\ k_2 &= 4 \text{ m} \\ k_3 &= 6 \text{ m} \end{aligned}$$

előjelre figyelni kell!