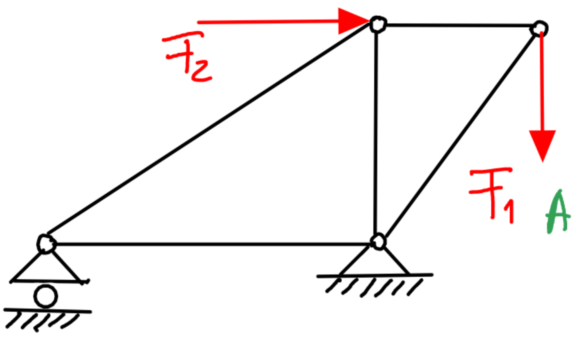
Statika - 5. gyakorlat

Rácsos szerkezetek

→ mechanikai modell



↳ végeiken mereven kapcsolódó merev rudak

↳ terhelés $\boxed{\text{csak}}$ a csuklókban

↳ a kapcsolatok olyanok, hogy merev marad a szerkezet!

A rudakban csak rúdirányú erő!

↳ ún. normáligénybevétel!

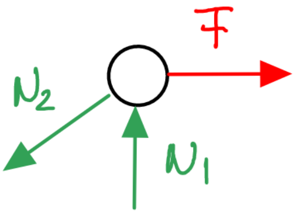
Jelölés: N

Előjelkonvenció: húzott rúd (+)
nyomott rúd (−)

Megoldási módszerek:

1) Csomóponti módszer

↳ egyensúlyi egyenlet a csuklóra

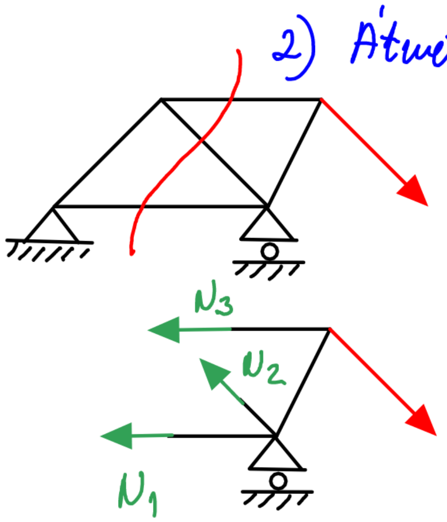


2 db egyenlet $\sum F_x = 0$
$\sum F_y = 0$

Fontos! Csak olyan csuklóra alkalmazzuk, ahol max. 2 db ismeretlen rúderő szerepel!

Csuklóról csuklóra kell haladni!

2) Átmetsző módszer



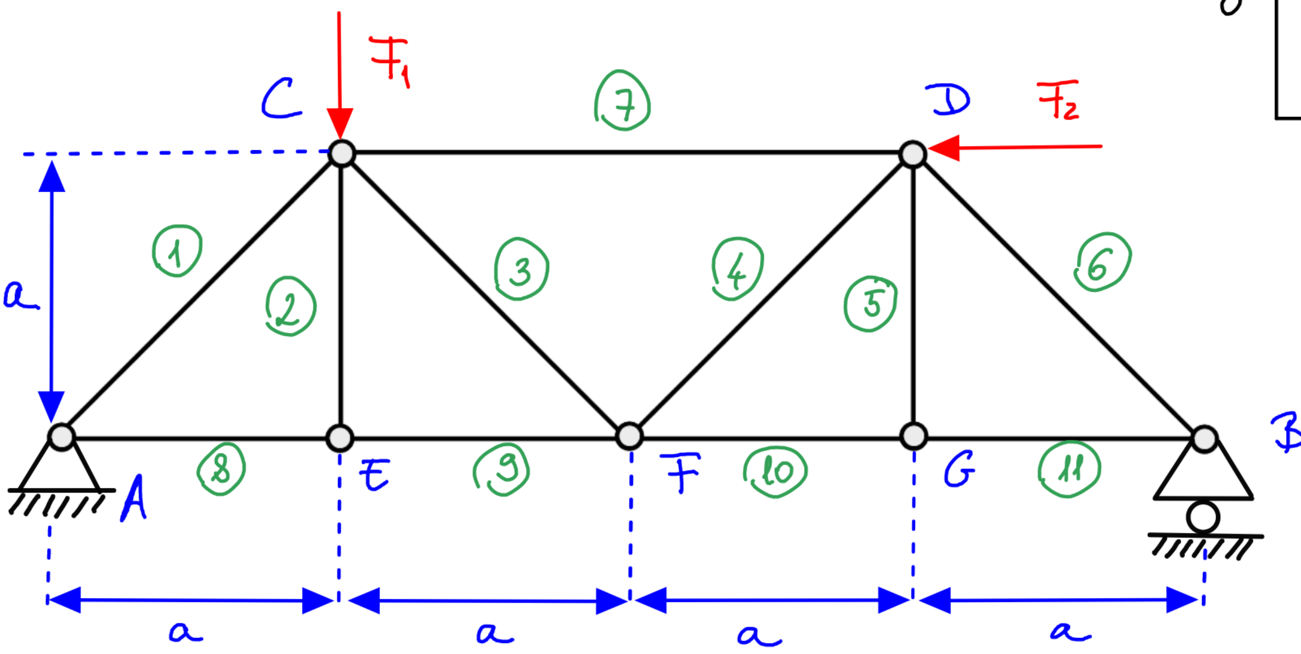
↳ két részre vágjuk a szerkezetet

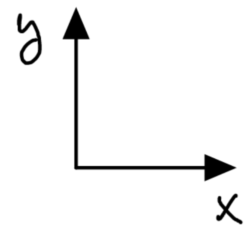
↳ elhagyott rész helyett rúderők!

↳ legfeljebb 3 rúd amelyek $\boxed{\text{NEM}}$ egy pontban metsződnek!

↳ 3 db egyensúlyi egyenlet!

1. feladat Határozzuk meg csomóponti módszerrel a rudakban ébredő erőket!





Adatok: $a = 1\,m$

$F_1 = 400\,N$

$F_2 = 200\,N$

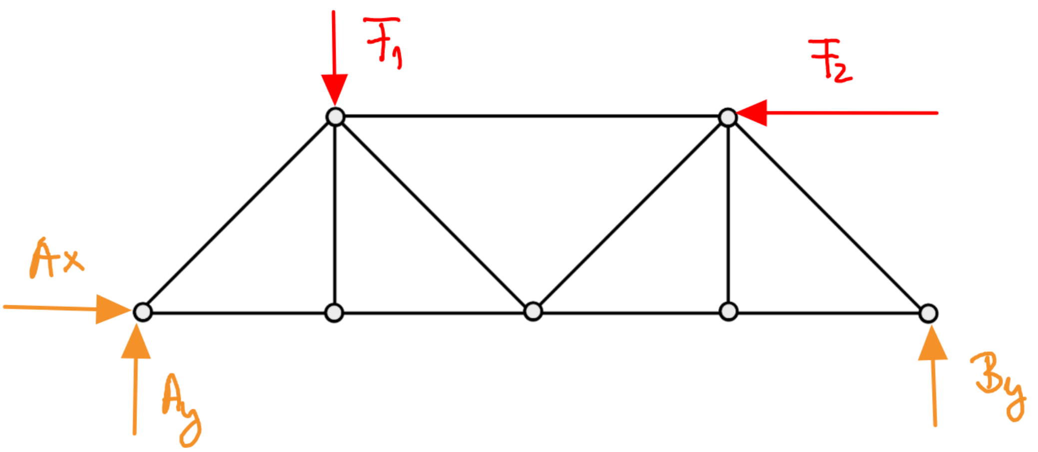
Fontos, hogy minden rudat azonosítsunk! (általában számozással)

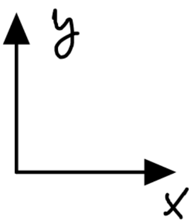
Hasonlóképpen a csomópontokat betűvel!

① Reakcióerők kiszámítása

Kényszerek → Reakcióerők!

Szabadtest ábra $\boxed{\text{SZTÁ}}$





Mindig kell koordináta-rendszer!

Egyensúlyi egyenletek:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x - F_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - F_1 = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -F_1 \cdot a + F_2 \cdot a + B_y \cdot 4a = 0 \qquad (3)$$

(1)-ből $\rightarrow$ $A_x = F_2 = \underline{\underline{200N}}$

(3)-ből $\rightarrow$ $B_y = \dfrac{F_1 a - F_2 \cdot a}{4a} = \dfrac{F_1 - F_2}{4} = \underline{\underline{50N}}$

(2)-ből $\rightarrow$ $A_y = F_1 - B_y = \underline{\underline{350N}}$

Vektorosan: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \end{bmatrix} N$; $\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} N$

A reakciók nagysága:

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{200^2 + 350^2} = \underline{\underline{403,1\ N}}$$

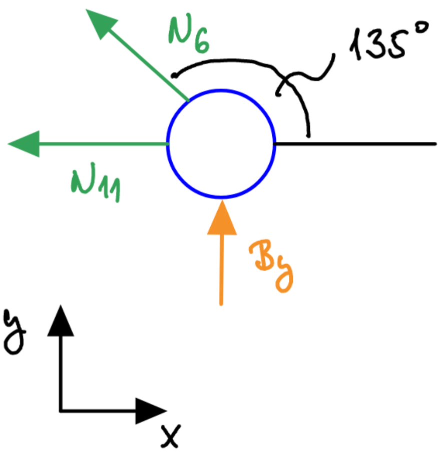
$$B = |\underline{B}| = \underline{\underline{50N}}$$

Rúderők kiszámítása: Csomóponti módszer (csomópontról csomópontra halad)

mindig olyan csomópont kell, ahol 2db rúderő ismeretlen!

B-csukló (Az ismeretlen rúderőket úgy vegyük fel, mintha húzott rúd lenne)

SZTA



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{6x} - N_{11} = 0$

$N_6 \cos 135° - N_{11} = 0$ (1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{6y} + B_y = 0$

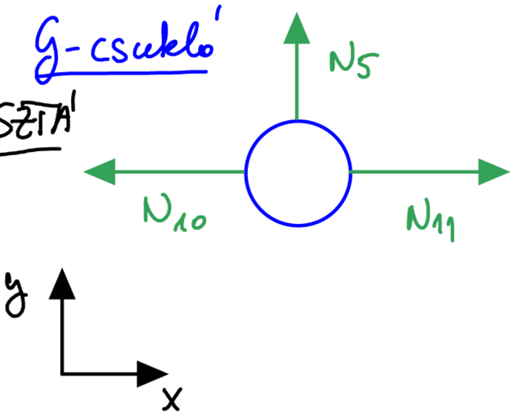
$N_6 \sin 135° + B_y = 0$ (2)

(2): $N_6 = \dfrac{-B_y}{\sin 135°} = -50\sqrt{2} = \underline{\underline{-70,71\,N}}$ (nyomott)

(1) $N_{11} = N_6 \cos 135° = -50\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\underline{50N}}$ (húzott)

G-csukló

SZTA



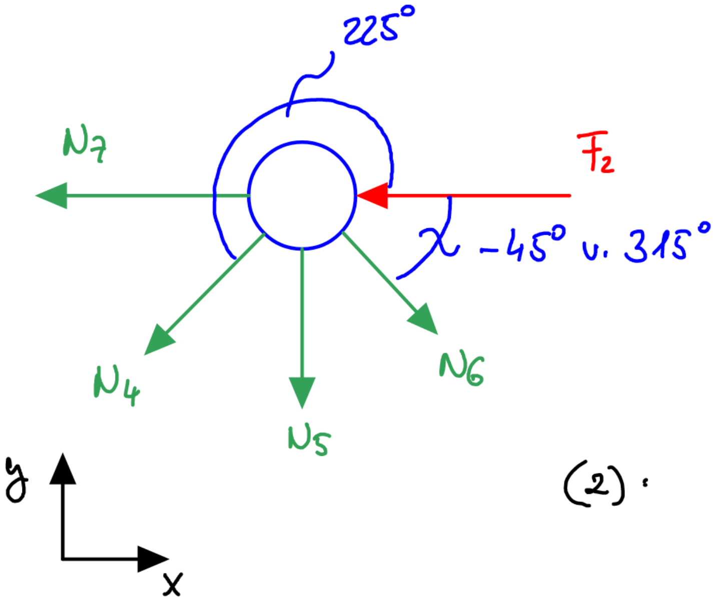
Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_{10} + N_{11} = 0$ (1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{N_5 = 0}$ (vakrúd)

(1): $N_{10} = N_{11} = \underline{\underline{50N}}$ (húzott)

D-csukló SZTÁ



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_7 + N_{4x} + N_{6x} - F_2 = 0$$

$$-N_7 + N_4 \cos 225° + N_6 \cos(-45°) - F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{4y} - N_5 - N_{6y} = 0$$

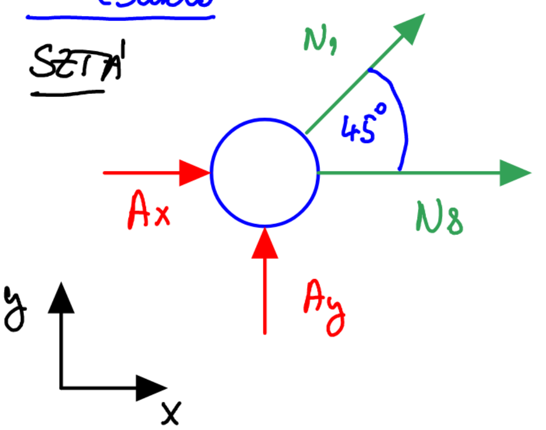
$$N_4 \sin 225° - N_5 + N_6 \sin(-45°) = 0 \quad (2)$$

(2): $$N_4 = \frac{\overset{=0}{N_5} - N_6 \sin(-45°)}{\sin 225°} = 50\sqrt{2} = \underline{70{,}71\,N}$$ (húzott)

(1): $$N_7 = -F_2 + N_6 \cos(-45°) + N_4 \cos 225° = \underline{-300\,N}$$ (nyomott)

Induljunk el a másik irányból is!

A-csukló SZTÁ



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + N_8 + N_{1x} = 0$$

$$A_x + N_8 + N_1 \cos 45° = 0 \quad (1)$$

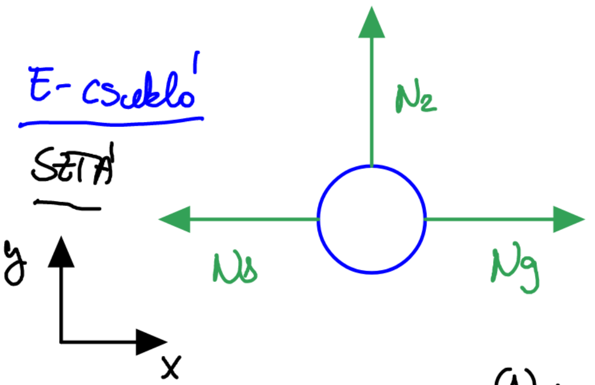
$$\sum F_y = 0 \quad A_y + N_{1y} = 0$$

$$A_y + N_1 \sin 45° = 0 \quad (2)$$

(2): $$N_1 = \frac{-A_y}{\sin 45°} = -350\sqrt{2} = \underline{-494{,}98\,N}$$ (nyomott)

(1): $$N_8 = -A_y - N_1 \cos 45° = \underline{150\,N}$$ (húzott)

E-csukló SZTÁ



Egyensúlyi egyenletek

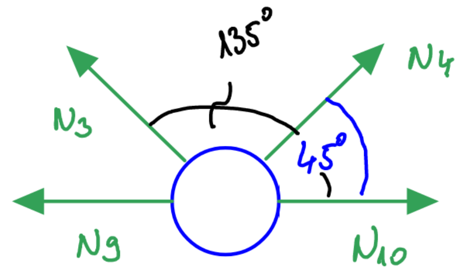
$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_8 + N_9 = 0 \quad (1)$$

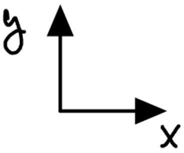
$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{N_2 = 0}$$ (vakrúd)

(1): $$N_9 = N_8 = \underline{150\,N}$$ (húzott)

F-csukló:

SZTÁ





Csak egy ismeretlen!

Egyensúlyi egyenletek:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{10} - N_9 + N_{4x} + N_{3x} = 0$$

$$N_{10} - N_9 + N_4 \cos 45° + N_3 \cos 135° = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{4y} + N_{3y} = 0$$

$$N_4 \sin 45° + N_3 \sin 135° = 0 \quad (2)$$

$$\hookrightarrow N_3 = \frac{-N_4 \sin 45°}{\sin 135°} = -50\sqrt{2} = \underline{70,71\,N}$$

(húzott)

Minden erő ismert → van plusz egyenlet
és C pontot nem is vizsgáltuk } ellenőrzés!

Az eredmények:

$N_1 = -494,98\,N$

$N_2 = 0\,N$

$N_3 = -70,71\,N$

$N_4 = 70,71\,N$

$N_5 = 0\,N$

$N_6 = -70,71\,N$

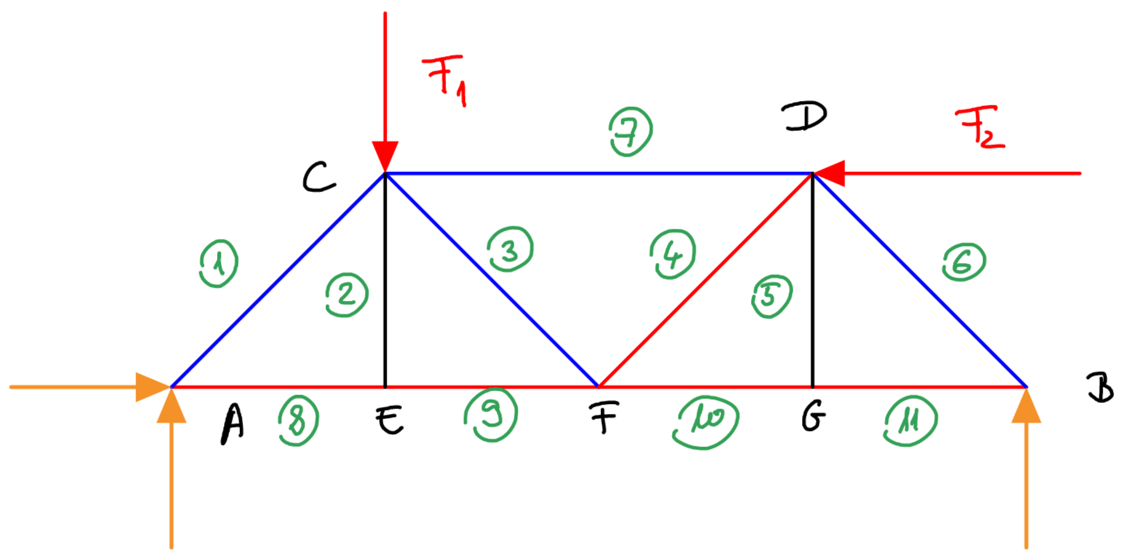
$N_7 = -300\,N$

$N_8 = 150\,N$

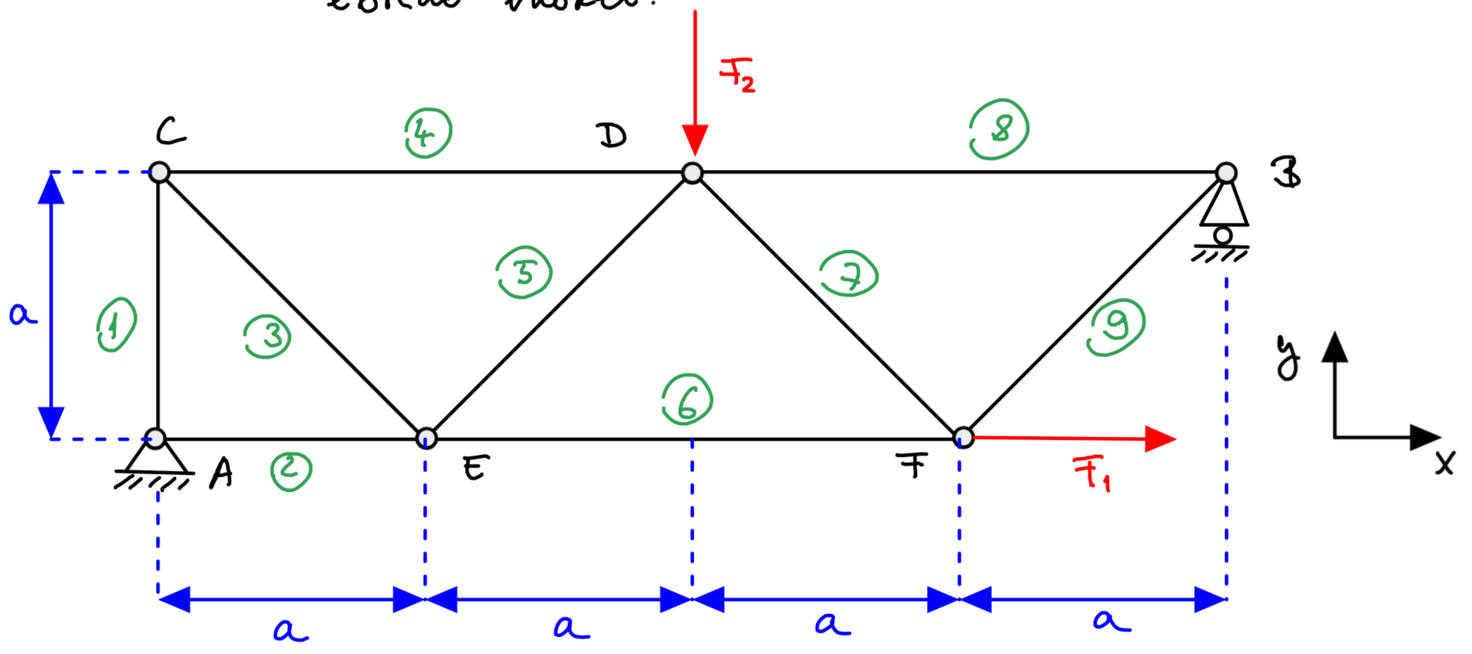
$N_9 = 150\,N$

$N_{10} = 50\,N$

$N_{11} = 50\,N$



2. feladat Határozzuk meg átmetsző módszerrel a 6. és 7. rudakban ébredő erőket!



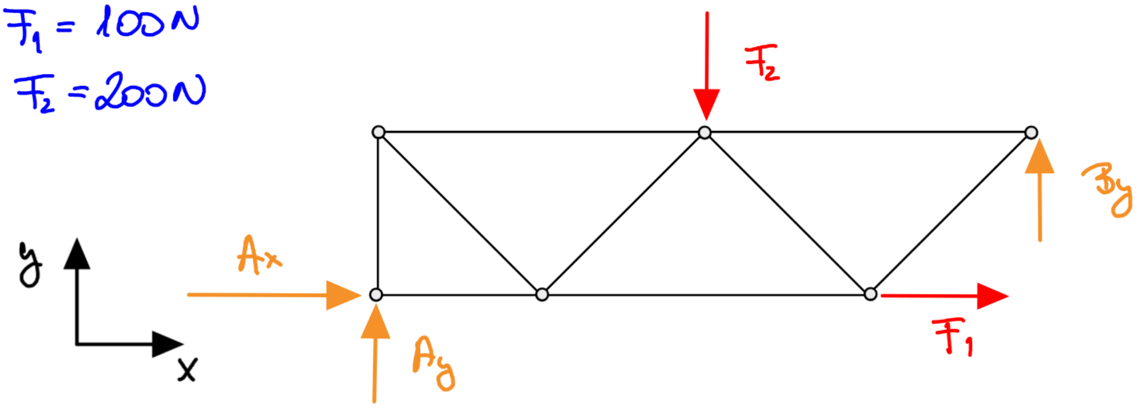
Adatok:

$a = 1\,m$

$F_1 = 100\,N$

$F_2 = 200\,N$

Reakcióerők $\rightarrow$ SZTÁ



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + F_1 = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - F_2 = 0 \quad (2)$

$\sum M_A = 0 \rightarrow -F_2 \cdot 2a + B_y\, 4a = 0 \quad (3)$

(1): $A_x = -F_1 = \underline{\underline{-100\,N}}$

(3): $B_y = \dfrac{F_2 \cdot 2a}{4a} = \dfrac{1}{2} F_2 = \underline{\underline{100\,N}}$

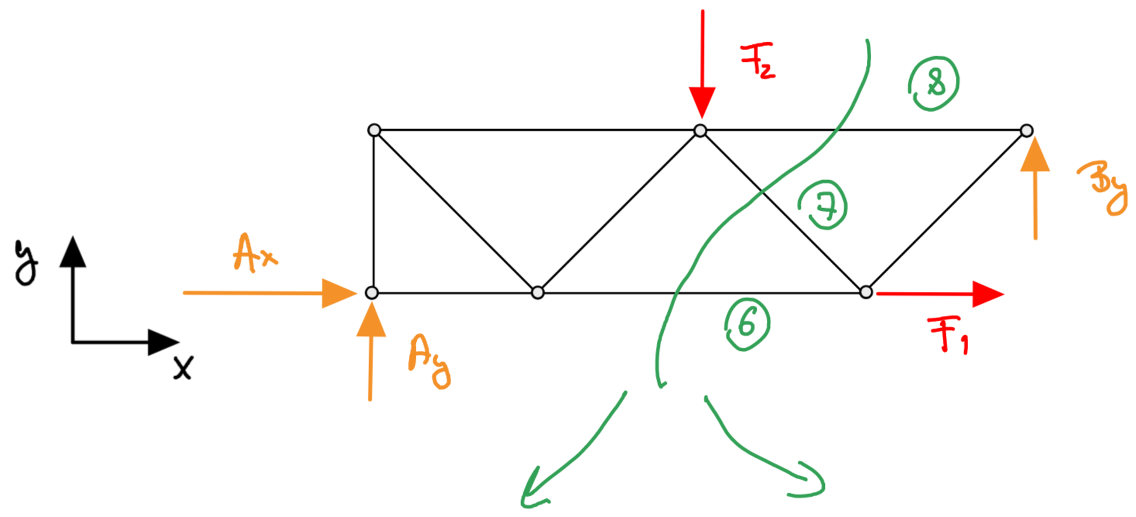
(2): $A_y = F_2 - B_y = \underline{\underline{100\,N}}$

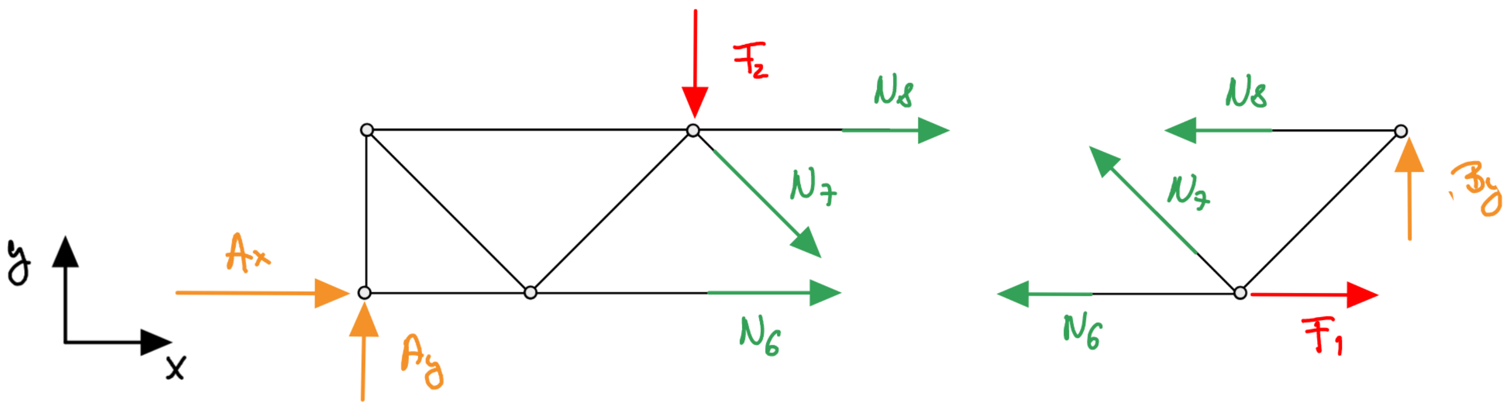
$\underline{A} = \begin{bmatrix} -100 \\ 100 \end{bmatrix} N \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} N$

Átmetsző módszer: úgy kell, hogy a keresett erők megjelenjenek!

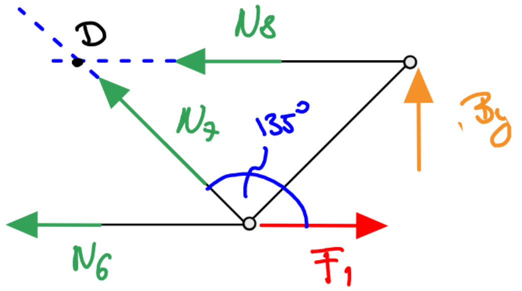
Fontos, hogy ne egy csuklóban záródjanak!

↳ $\boxed{6-7-8}$





Válasszuk ki az egyiket!



Ez a rész is egyensúlyban van

$\Downarrow$

Egyensúlyi egyenletek!

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_6 + N_{7x} - N_8 + F_1 = 0$$

$$-N_6 + N_7 \cos 135° - N_8 + F_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + N_{7y} = 0$$

$$B_y + N_7 \sin 135° = 0 \quad (2)$$

A nyomatéki egyenletet bárhová felírhatjuk.

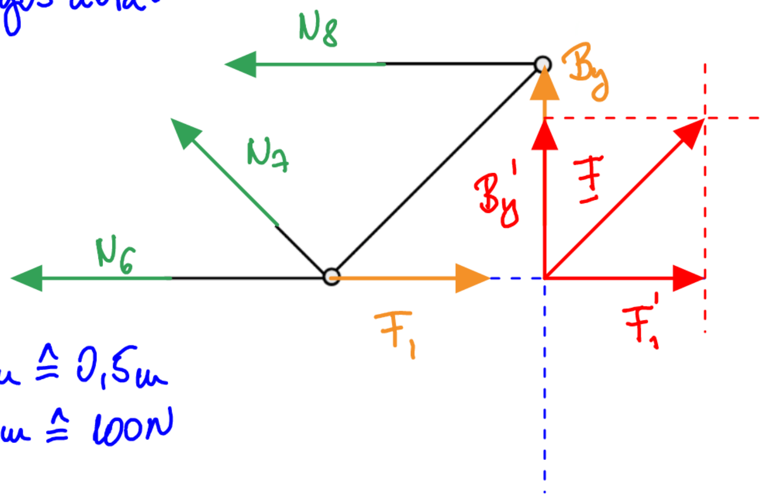
$$\curvearrowleft \sum M_D = 0 \rightarrow B_y \cdot 2a + F_1 \cdot a - N_6 \cdot a = 0 \quad (3)$$

$$(3): \quad N_6 = \frac{B_y 2a + F_1 a}{a} = 2B_y + F_1 = \underline{300\,N} \text{ (húzott)}$$

$$(2) \quad N_7 = \frac{-B_y}{\sin 135°} = \underline{-141{,}42\,N} \text{ (nyomott)}$$

Oldjuk meg szerkesztéssel is – Culmann-féle szerkesztés

Arányos ábra!

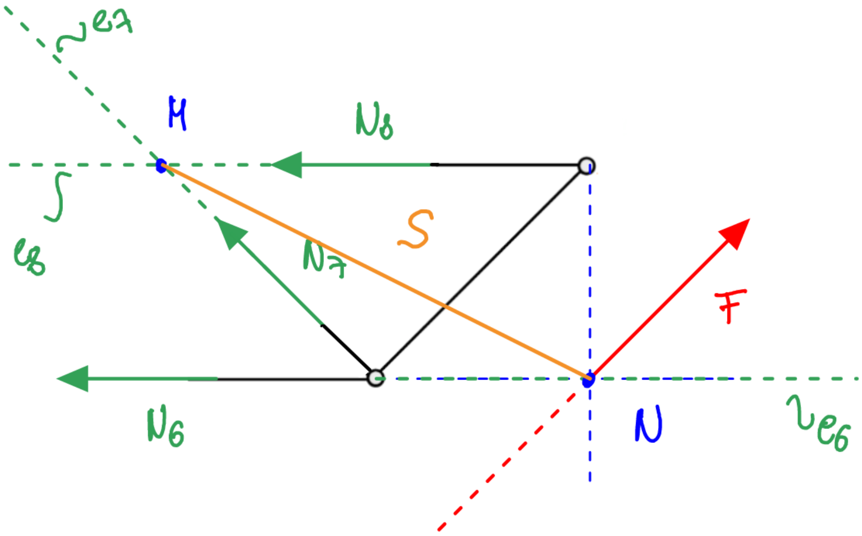


$1\ cm \hat{=} 0{,}5\ m$

$1{,}5\ cm \hat{=} 100\ N$

1) Szerkesszük ki az ismert erők eredőjét!
(Reakció + aktív erők)

$$\underline{F} = \underline{B}_y + \underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} N$$

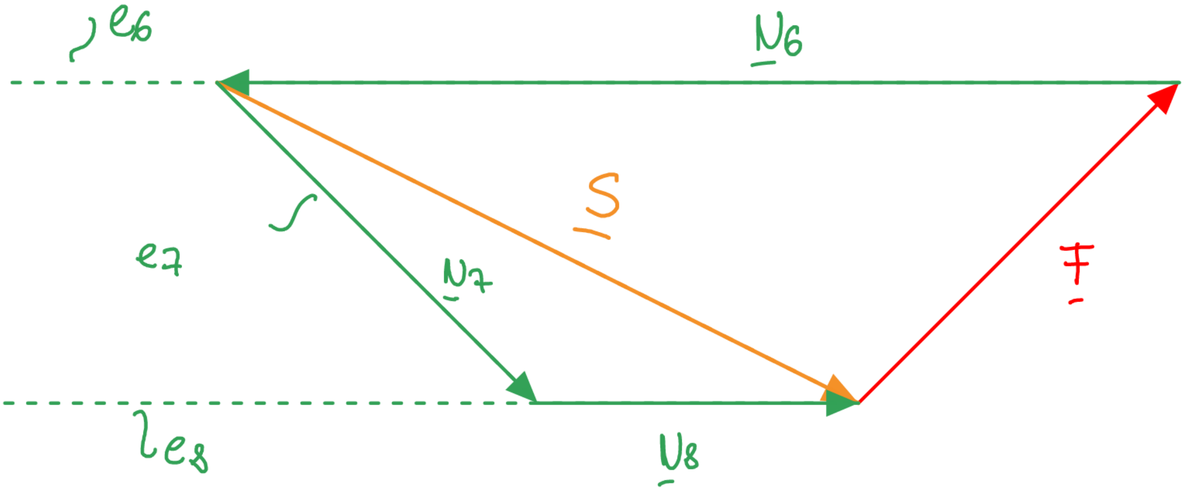


2) 2-2 db erő metszéspontja
M és N

3) M és N-et összekötő
S segédegyenes

4) erőábra!
↳ $\underline{F}$, $\underline{N}_6$ és $\underline{S}$ háromszöge
↳ $\underline{S}$ felbontása $\underline{N}_7$ és $\underline{N}_8$ komponensre

Erőábra $3\ cm \hat{=} 100\ N$



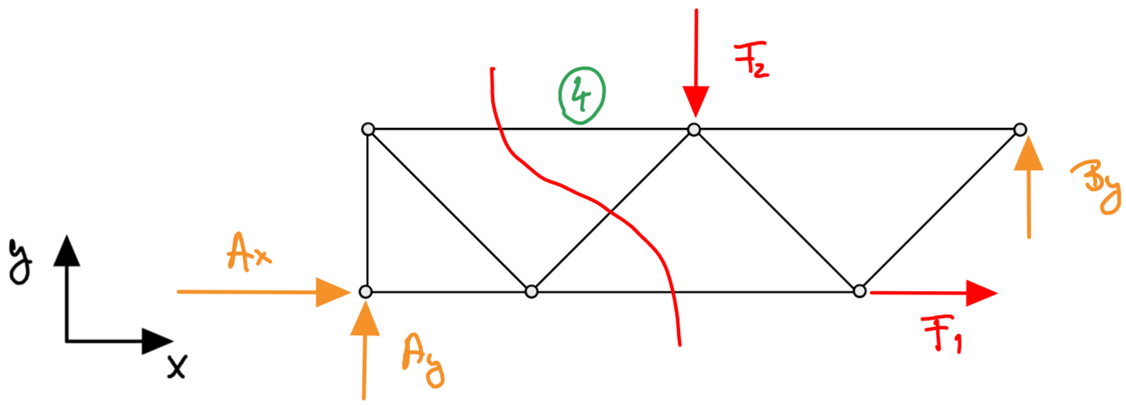
Leolvasva: $|N_6| = 300\ N$ húzott

$|N_7| = 150\ N$

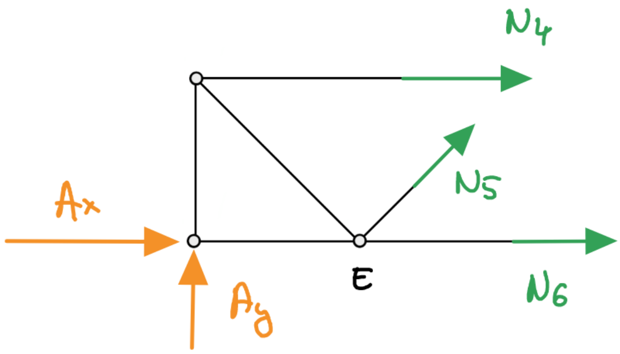
$|N_8| = 100\ N$

$\left.\begin{matrix} |N_7| \\ |N_8| \end{matrix}\right\}$ nyomott

Gyakorlás: SZÁMÍTSUK KI N_4 rúderőt!



Egyensúlyi egyenletek:



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x + N_4 + N_6 + N_{5x} = 0 \quad (1)$$

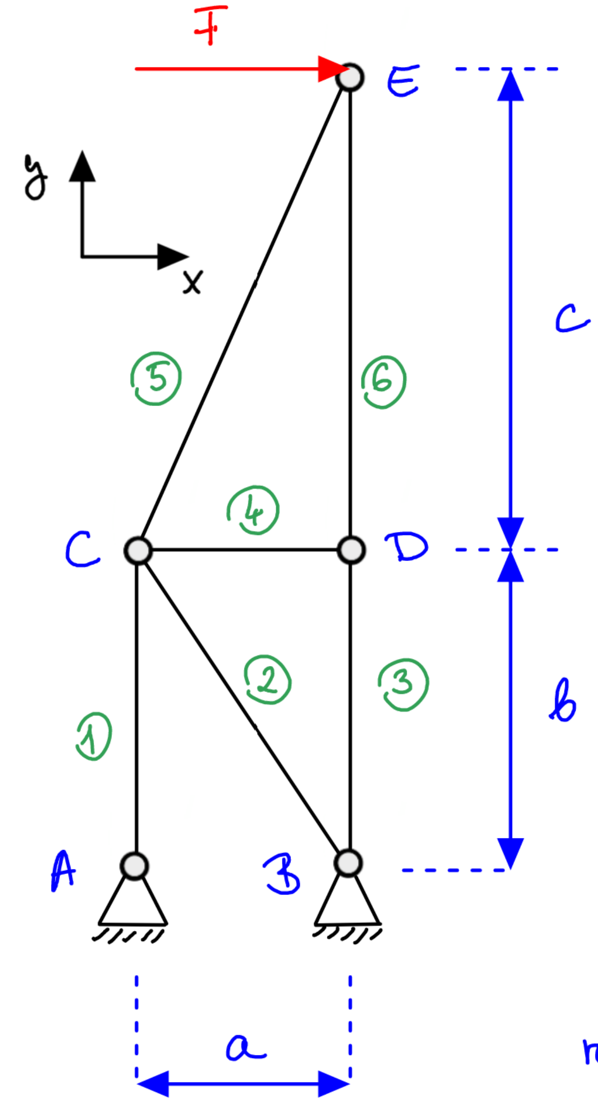
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + N_{5y} = 0 \quad (2)$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_E = 0 \rightarrow -A_y \cdot a - N_4 \cdot a = 0 \quad (3)$$

Most csak N_4 kell:

(3): $$N_4 = \frac{-A_y a}{a} = -A_y = \underline{\underline{-100N}}$$ nyomott!

3. feladat Határozzuk meg a rudakban ébredő rúderőket és reakciókat csomóponti módszerrel!



Adatok:

$a = 1\,m$

$b = 2\,m$

$c = 3\,m$

$F = 1000\,N$

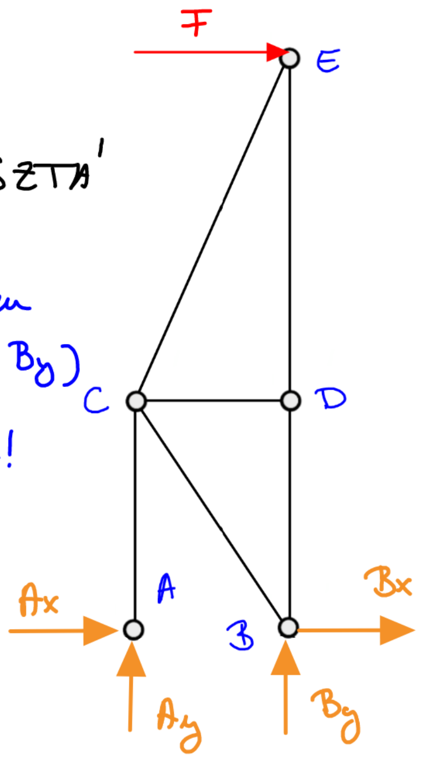
Probléma: SZTA'

4 db ismeretlen (A_x, A_y, B_x, B_y)

de 3 egyenlet!

↓

Nem tudunk reakciót számolni!

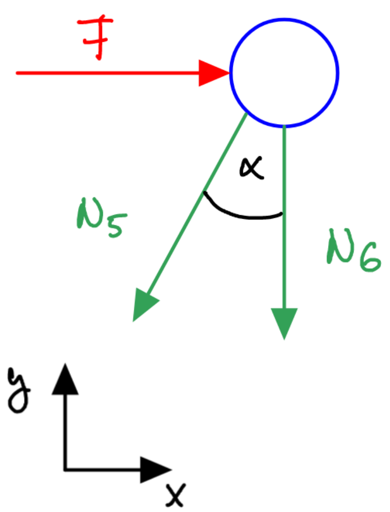


Csomóponti módszer:

Honnan indulhatunk?

↳ max 2 db ismeretlen ⇒ **E pont**

E csukló SZTÁ



$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{c}\right) = 18{,}435°$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F + N_{5x} = 0$$

$$F + N_5 \cos(270° - \alpha) = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -N_6 + N_{5y} = 0$$

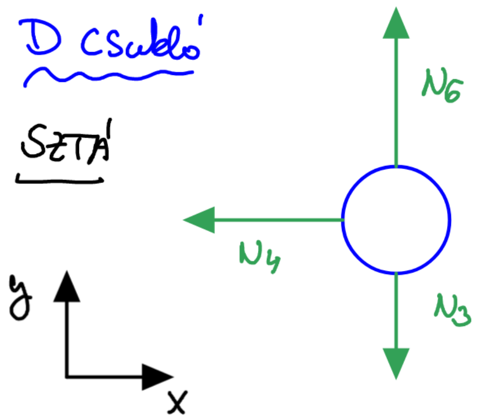
$$-N_6 + N_5 \sin(270° - \alpha) = 0 \quad (2)$$

(1): $N_5 = \dfrac{-F}{\cos(270° - \alpha)} = 3162{,}28\,N$ (húzott)

(2): $N_6 = N_5 \sin(270° - \alpha) = -3000\,N$ (nyomott)

D csukló

SZTA



Egyensúlyi egyenletek:

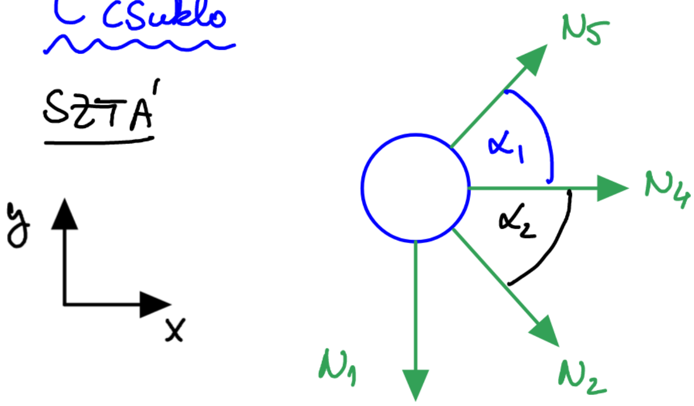
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \boxed{N_4 = 0}$ (vakrúd)

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_6 - N_3 = 0$

$\hookrightarrow N_3 = N_6 = -3000\,N$ (nyomott)

C csukló

SZTA



$\alpha_1 = \text{arctg}\left(\frac{c}{a}\right) = 71{,}565°$

$\alpha_2 = \text{arctg}\left(\frac{a}{b}\right) = 63{,}435°$

Egyensúlyi egyenletek:

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N_4 + N_{5x} + N_{2x} = 0$

$N_4 + N_5 \cos\alpha_1 + N_2 \cos(-\alpha_2) = 0 \quad (1)$

$\Sigma F_y = 0 \quad -N_1 + N_{2y} + N_{5y} = 0$

$-N_1 + N_2 \sin(-\alpha_2) + N_5 \sin(\alpha_1) = 0 \quad (2)$

(1): $N_2 = \dfrac{-N_4 - N_5 \cos(\alpha_1)}{\cos(-\alpha_2)} = -2236{,}08\,N$ (nyomott)

(2): $N_1 = N_2 \sin(-\alpha_2) + N_5 \sin(\alpha_1) = 5000\,N$ (húzott)

Minden rúderő ismert:

$N_1 = 5000\,N$

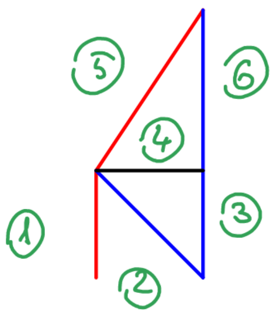
$N_2 = -2236{,}08\,N$

$N_3 = -3000\,N$

$N_4 = 0\,N$

$N_5 = 3162{,}28\,N$

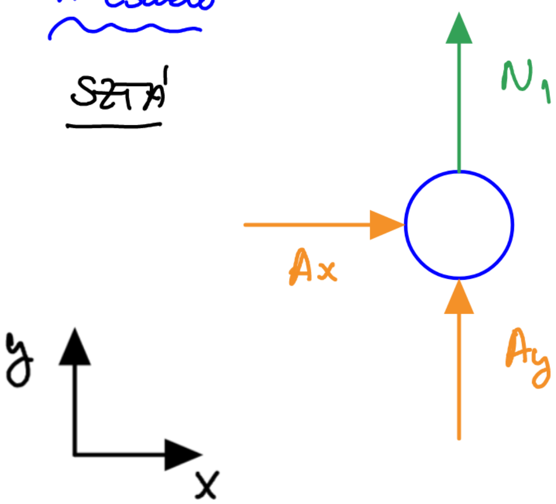
$N_6 = -3000\,N$



A és B reakciókat A és B csuklókból!

A csukló

SZTA



Egyensúlyi egyenletek:

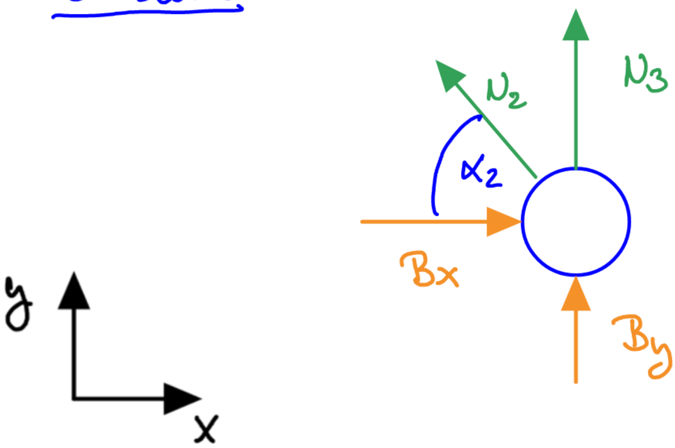
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 + A_y = 0$$

$$\hookrightarrow A_y = -N_1 = \underline{\underline{-5000\,N}}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5000 \end{bmatrix} N$$

B csukló



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x + N_{2x} = 0$$

$$B_x + N_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + N_3 + N_{2y} = 0$$

$$B_y + N_3 + N_2 \sin(180^\circ - \alpha_2) = 0 \quad (2)$$

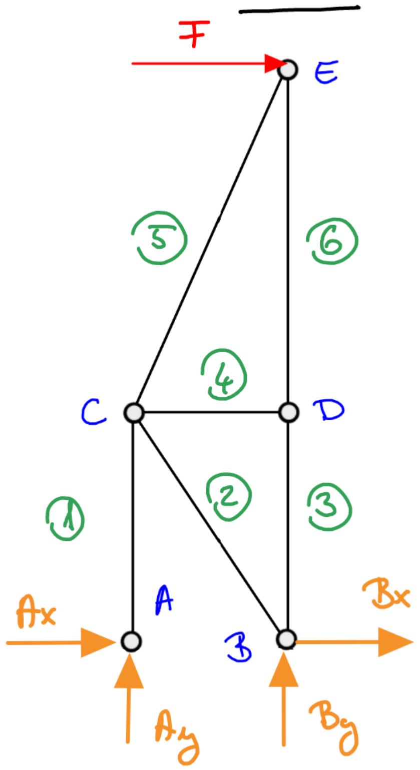
$$(1): \quad B_x = -N_2 \cos(180^\circ - \alpha_2) = \underline{\underline{-1000\,N}}$$

$$(2): \quad B_y = -N_3 - N_2 \sin(180^\circ - \alpha_2) = \underline{\underline{5000\,N}}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 5000 \end{bmatrix} N$$

Másik megoldás:

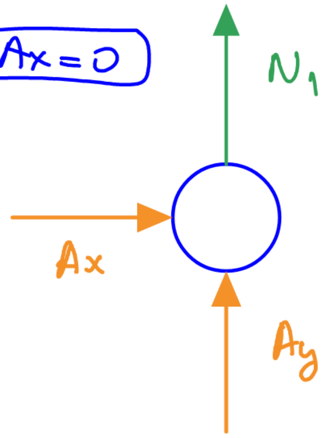
SZTÁ



Vegyük észre: Az 1-es rúdban rúdirányú erő → Függőleges

Az A csomópontban: (lásd fenn)

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$



Már csak 3db ismeretlen

$\boxed{A_y, B_x, B_y}$

$\Downarrow$

Megoldható az egyensúlyi egyenletekből

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow B_x + F = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = 0$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot a - F(b+c) = 0$$

$$\hookrightarrow B_y = \frac{F(b+c)}{a} = \underline{\underline{5000\,N}}$$

$$\hookrightarrow A_y = \underline{\underline{-5000\,N}}$$

$$\hookrightarrow B_x = -F = \underline{\underline{-1000\,N}}$$