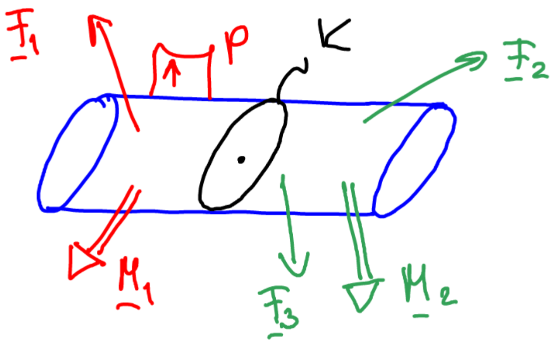
Statika – 7. hét

Igénybevételek I.

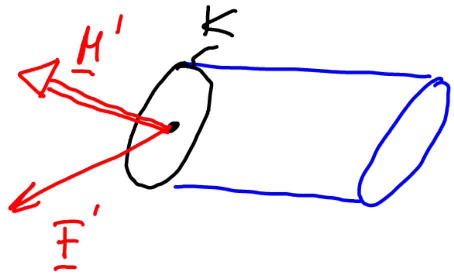
Elméleti összefoglaló:

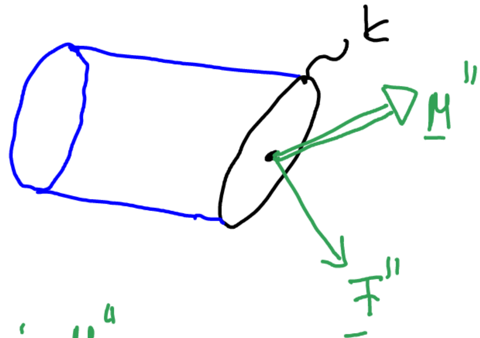
- mechanikai modell: rúdmodell (egyenes v. görbe)
- Igénybevétel: egy rúd adott keresztmetszetét érő erőhatás



A K keresztmetszetben

balról — jobbról





$\underline{M}'$ és $\underline{F}'$ az elhagyott bal rész hatása
↳ $\underline{F}'$ koncentrált erő
↳ $\underline{M}'$ koncentrált erőpár

$\underline{F}''$ és $\underline{M}''$ az elhagyott jobb rész hatása
↳ $\underline{F}''$ konc. erő
↳ $\underline{M}''$ konc. erőpár

Mindig a keresztmetszet súlypontjába!!

Az igénybevétel tehát a km. egyik oldalán lévő erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjára számított nyomatéka

- erő $\longrightarrow$ $\underline{F} = \underline{N} + \underline{V}$

$\underline{N}$ - normálerő (rúdirányú)

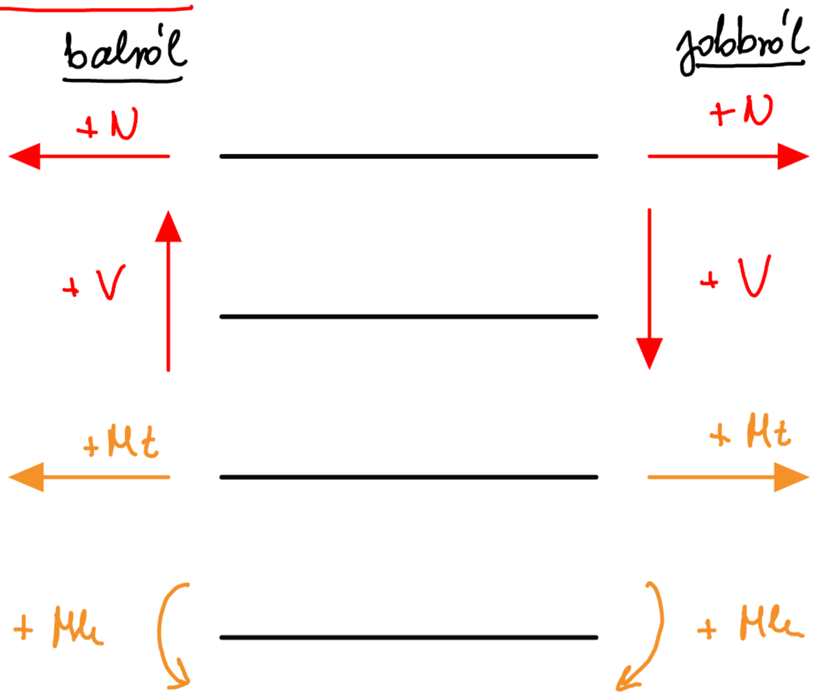
$\underline{V}$ - nyíróerő (a rúdra merőleges azaz a km. síkjába esik)

• nyomaték : → $\underline{M} = \underline{M}_t + \underline{M}_h$

$\underline{M}_t$ - csavarónyomaték (rúdirányú)

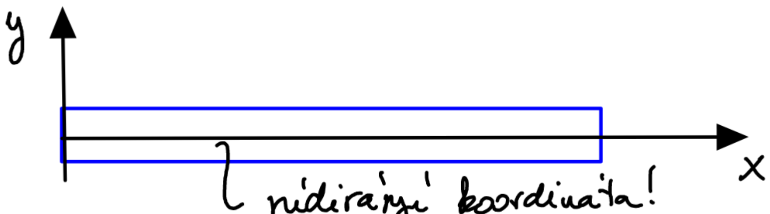
M_h - hajlítónyomaték (rúdra merőleges)

Előjelkonvenció :



Igénybevételi fgvek : Ha minden km-re kiszámoljuk

↳ x - koordináta fgve!



$N(x)$
$V(x)$
$M_h(x)$
$M_t(x)$

Grafikusan felrajzolva

↓

igénybevételi fgv

Valamint $p(x)$

↓

megoszló terhelés a rúd mentén

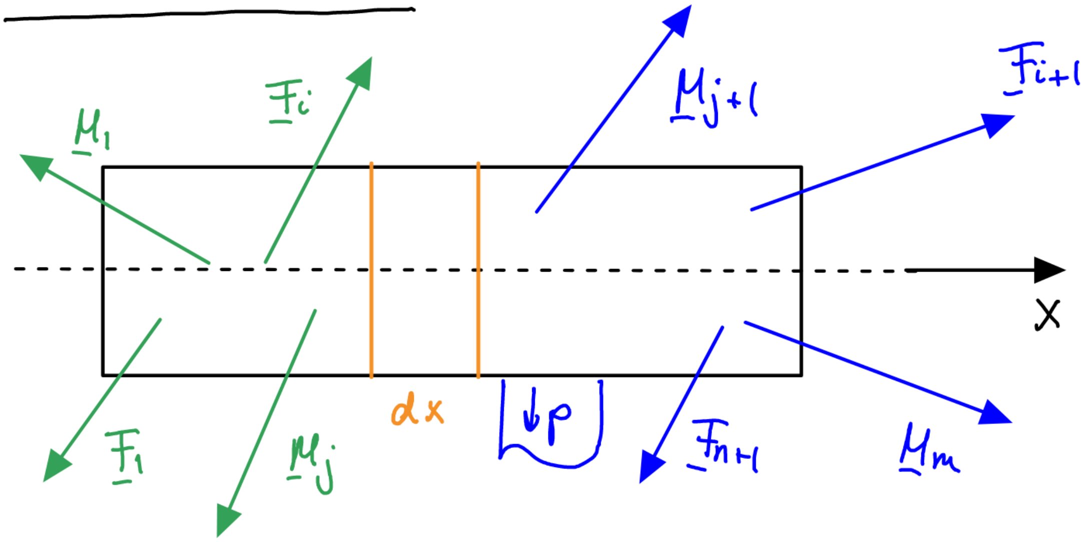
$p(x)$	zérus	konstans	lineáris
$V(x)$	konstans	lineáris	másodfokú
$M_h(x)$	lineáris	másodfokú	harmadfokú

Kapcsolat az igénybevételi függvények között:

↳ Rúdszerkezet: 4db fgv: $N(x)$, $V(x)$, $Mh(x)$, $Mt(x)$ – igénybevételek

plusszban $p(x)$ – megoszló erőrendszer

Általános rúdszakasz:



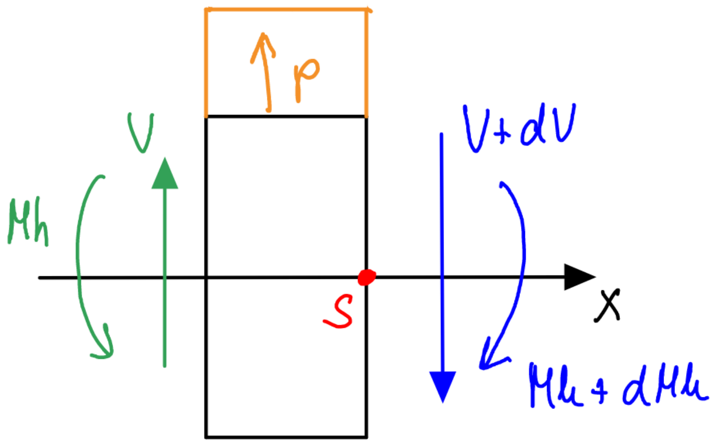
n db konc. erő

m db konc. erőpár

Vizsgáljuk egy dx hosszú ún. „elemi rúddarab" egyensúlyát!

↳ dx kicsi → $p(x)$ konstans!

Rajzoljuk be az elhagyott részekből származó igénybevételeket!



Most csak $p(x)$ - $V(x)$ - $Mh(x)$ kapcsolatát vizsgáljuk!

Fontos, hogy úgy válasszuk ki a dx elemi rúdszakaszt, hogy koncentrált erő / erőpár ne ébredjen

Erőegyensúly: $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad V - (V + dV) + p\,dx = 0$

↳ $\dfrac{dV}{dx} = V'(x) = p(x)$

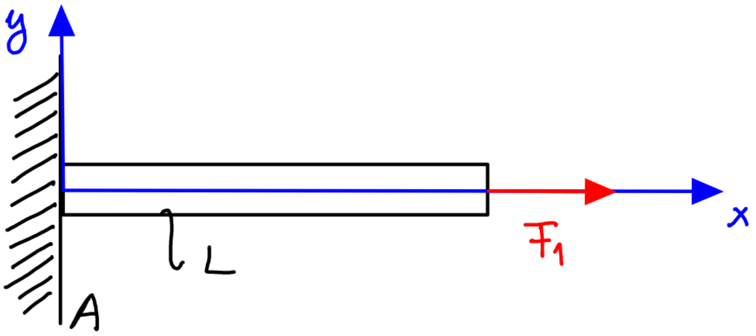
$\Sigma M_S = 0: \quad Mh - V\,dx - p\,dx \cdot \dfrac{dx}{2} - (Mh + dMh) = 0$

$dMh = -V\,dx - \dfrac{p\,dx^2}{2}$ ≈ 0 elhanyagoljuk

$\longrightarrow \dfrac{dMh}{dx} = Mh'(x) = -V(x)$

1. feladat

Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és rajzoljuk fel az igénybevételi ábrákat!



Fontos!
A teljes erőrendszert ismerni kell azon az oldalon, ahol elhagyjuk a rudat!

jobbról: F_1 ismert

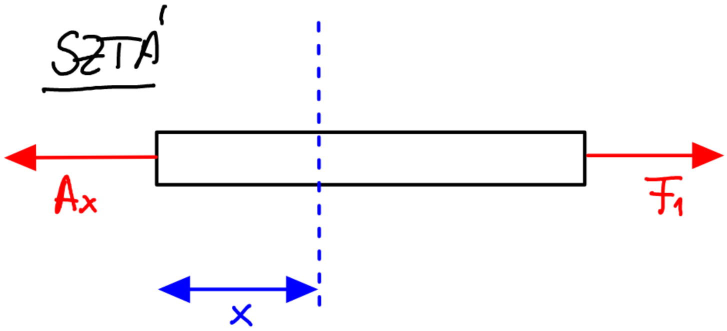
balról: reakció erő ismeretlen
⇓ számolni kell

$A_x = F_1$ (⟵)

$A_y = 0$

$M_A = 0$

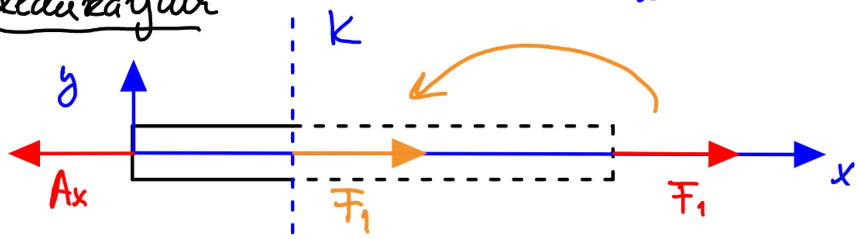
SZTÁ



Válasszunk egy tetszőleges keresztmetszetet → K

↳ Ennek a távolsága a rúd elejétől legyen x

Redukáljunk



Függvények

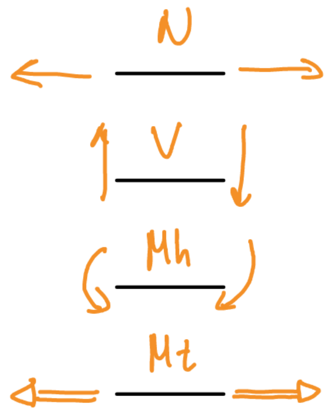
ha balról

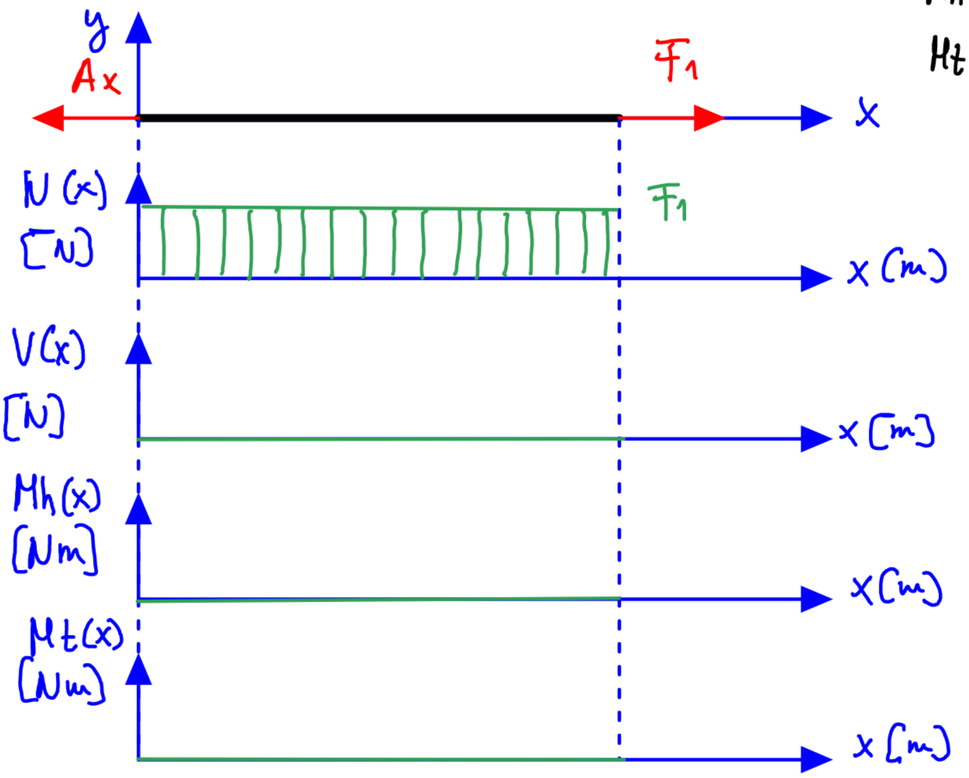
$N(x) = F_1 = A_x$

$V(x) = 0$

$M_h(x) = 0$

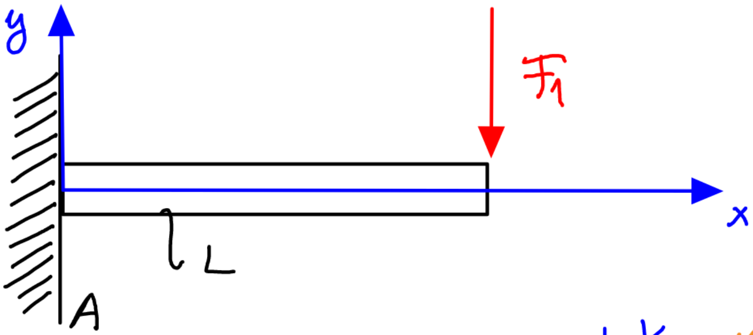
$M_t(x) = 0$





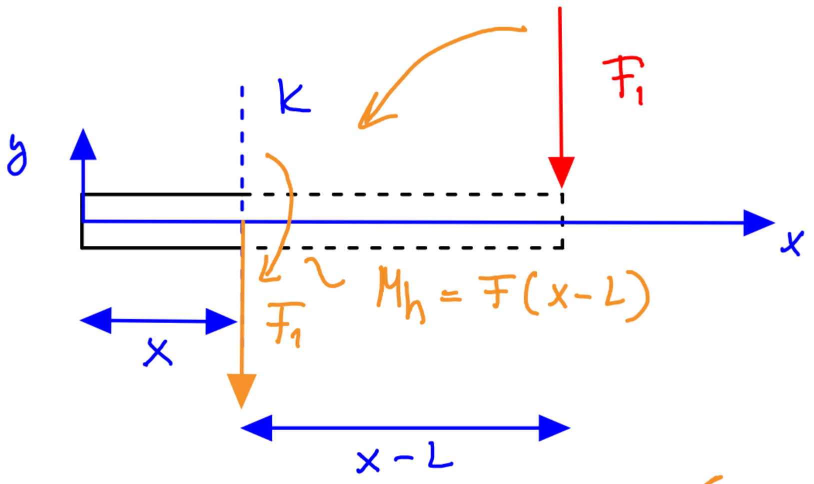
2. feladat

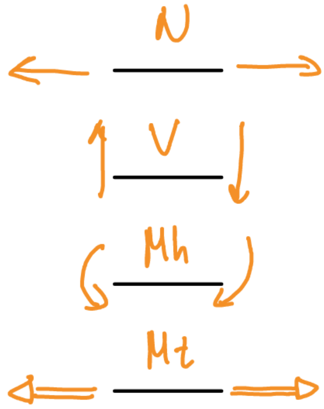
Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és rajzoljuk fel az igénybevételi ábrákat!



Most is az egyszerűség kedvéért menjünk jobbról!

Redukáljuk!

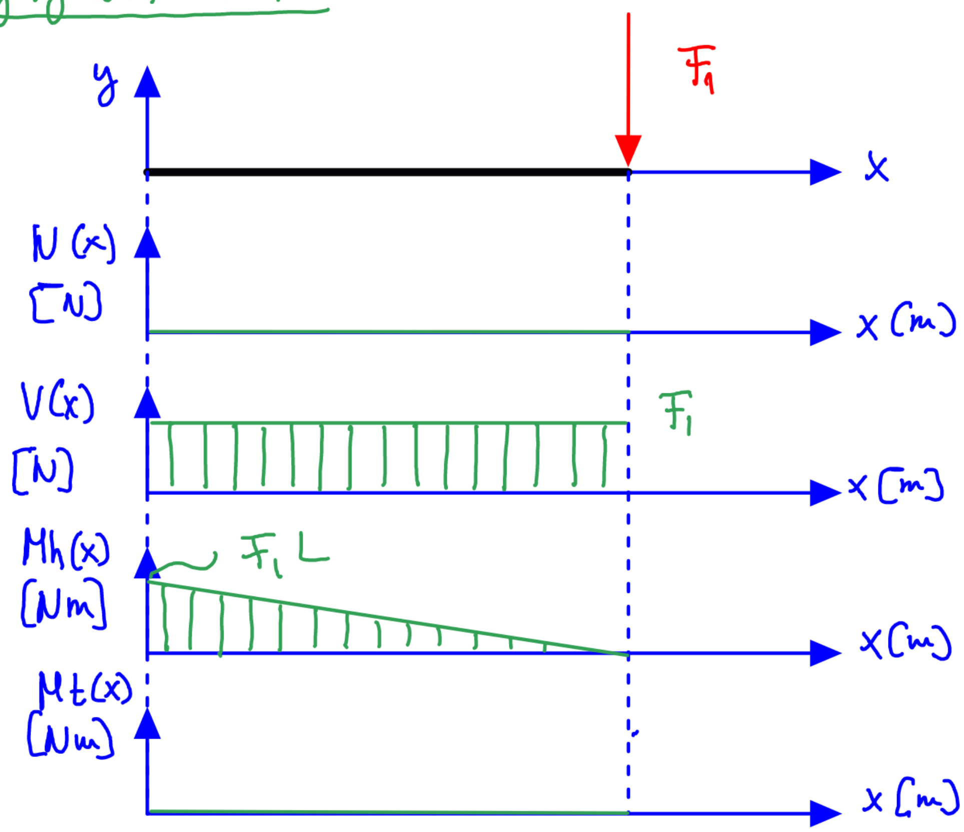




A függvények:

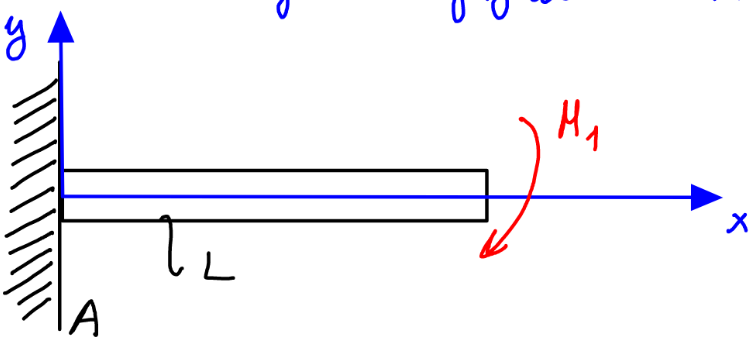
$$N(x) = 0$$
$$V(x) = +F_1$$
$$M_h(x) = F_1(L-x)$$
$$M_t(x) = 0$$

Igénybevételi ábrák



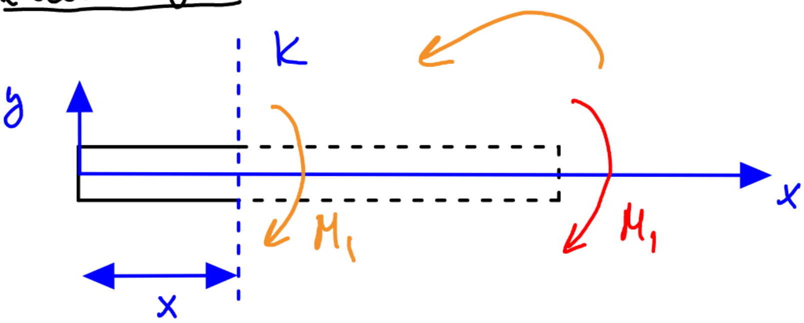
$$M_h(0) = F_1 L$$
$$M_h(L) = 0$$
$$M_h'(x) = -F_1 = -V(x)$$

3. feladat Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és rajzoljuk fel az igénybevételi ábrákat!



Ismét jobbról megyünk!

Redukáljuk:

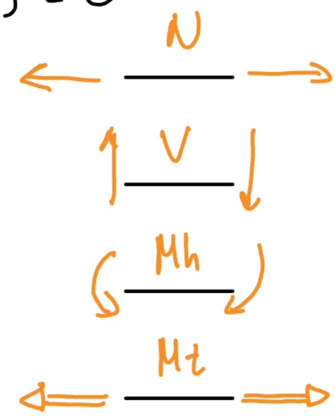


$N(x) = 0$

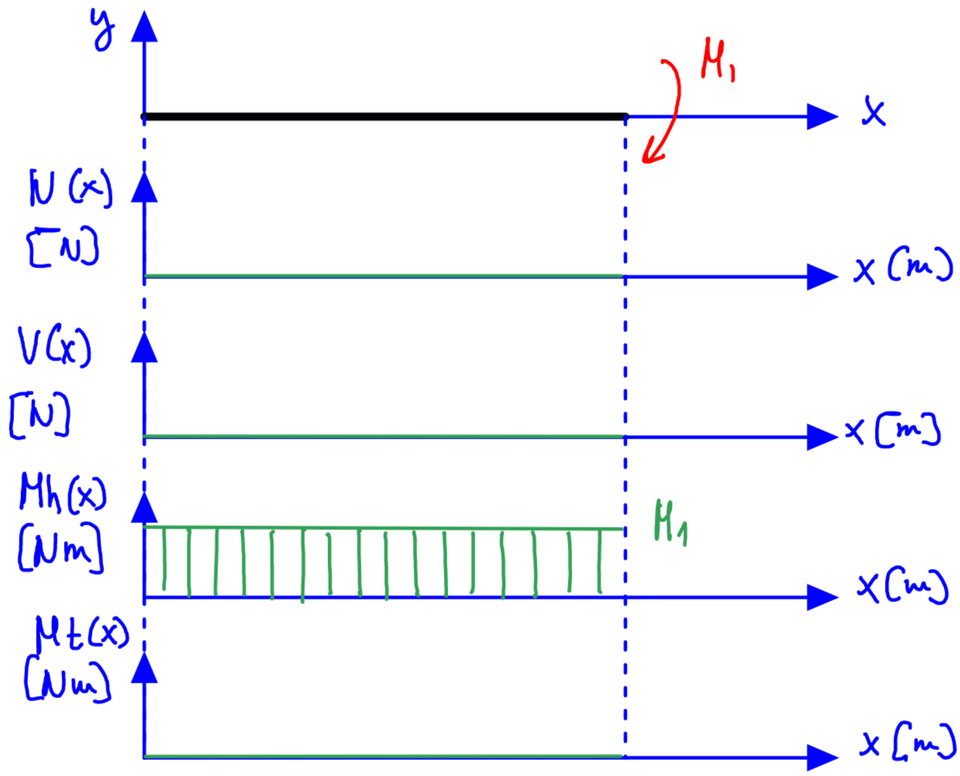
$V(x) = 0$

$M_h(x) = M_1$

$M_t(x) = 0$

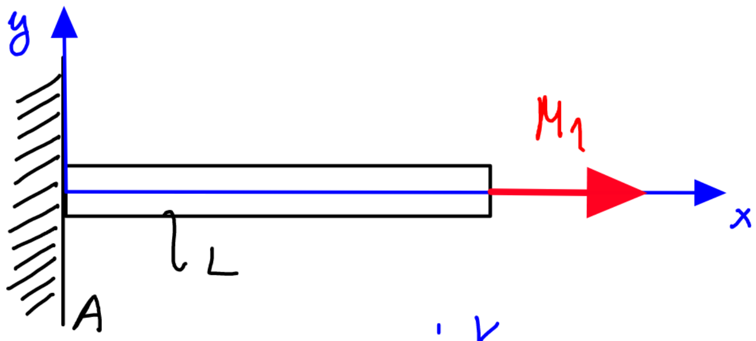


Igénybevételi ábrák

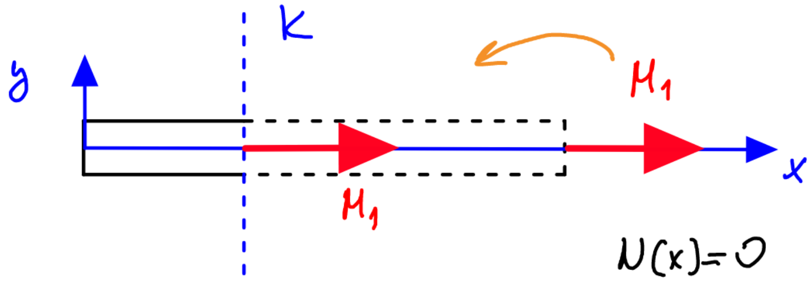


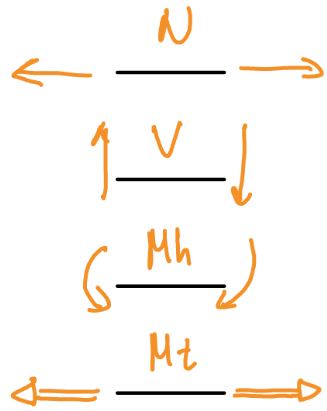
4. feladat

Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és rajzoljuk fel az igénybevételi ábrákat!



Redukáljuk!





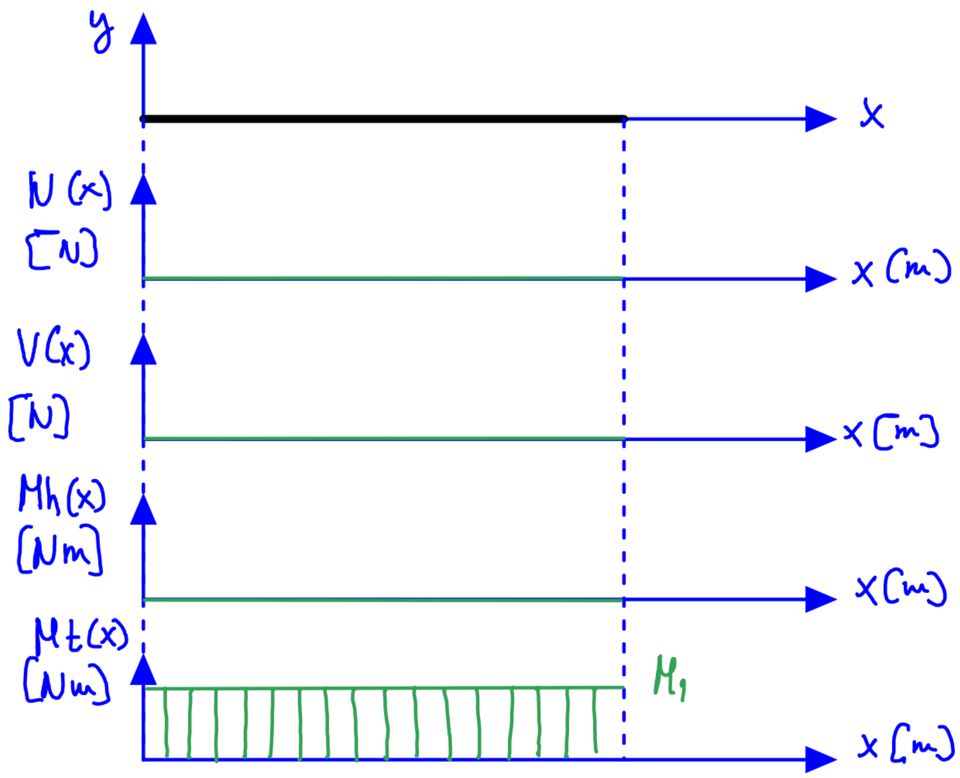
$N(x) = 0$

$V(x) = 0$

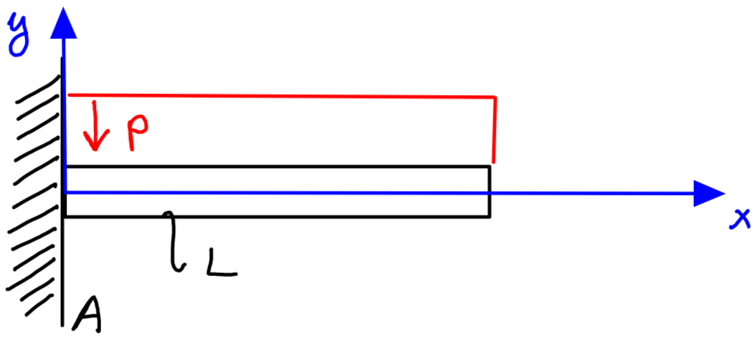
$Mh(x) = 0$

$Mt(x) = M_1$

Igénybevételi ábrák

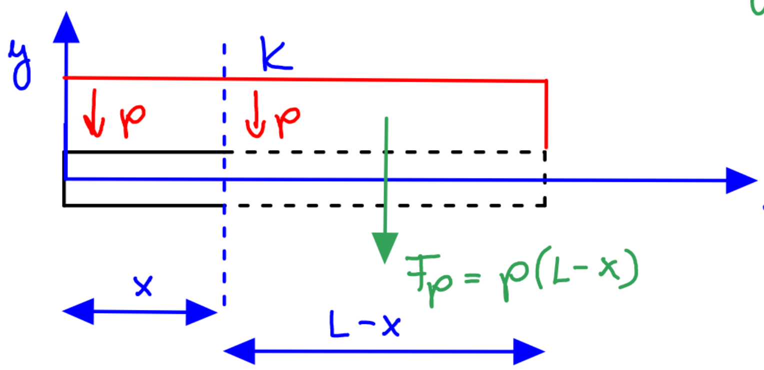


5. feladat Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és rajzoljuk fel az igénybevételi ábrákat!



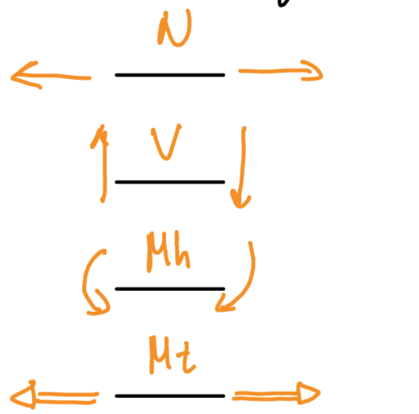
Ismét jobbról redukáljuk! Nem kell reakciót számolni!

Redukálás



Helyettesítsük a megoszló terhelést a súlypontjába egy erővel

A K km-re erő + hajlító nyomaték

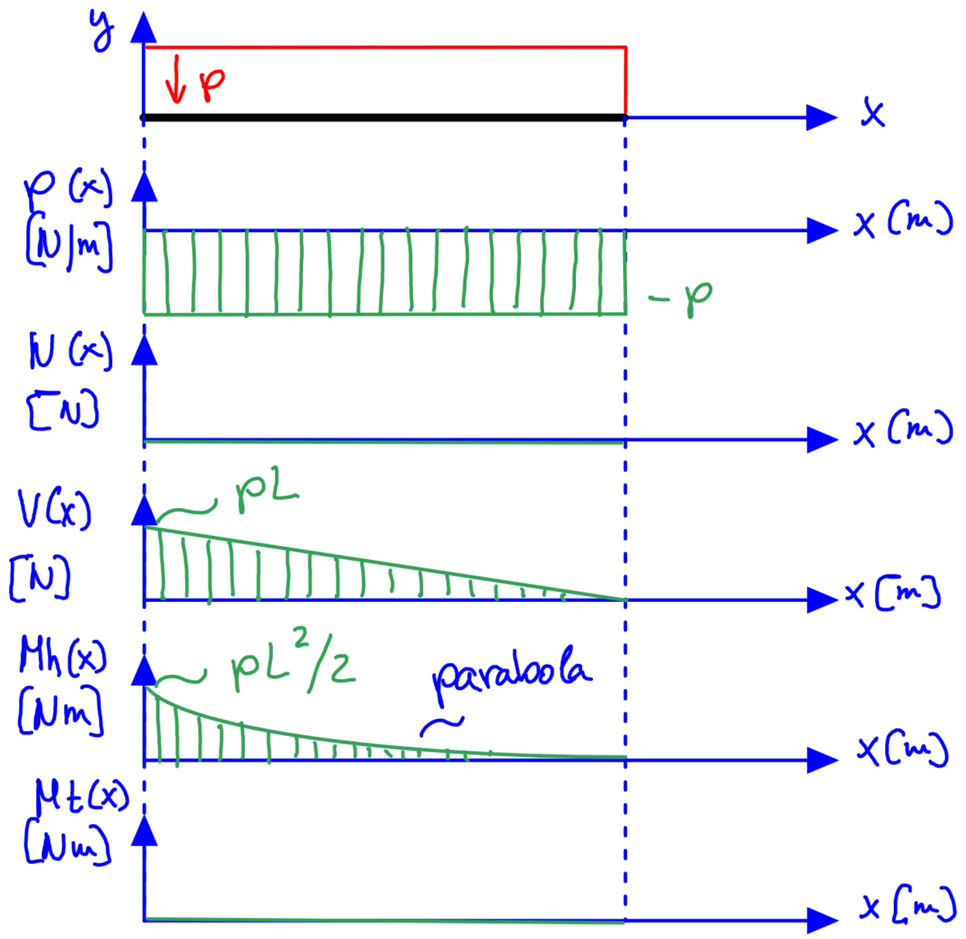


$N(x) = 0$

$V(x) = p(L-x)$

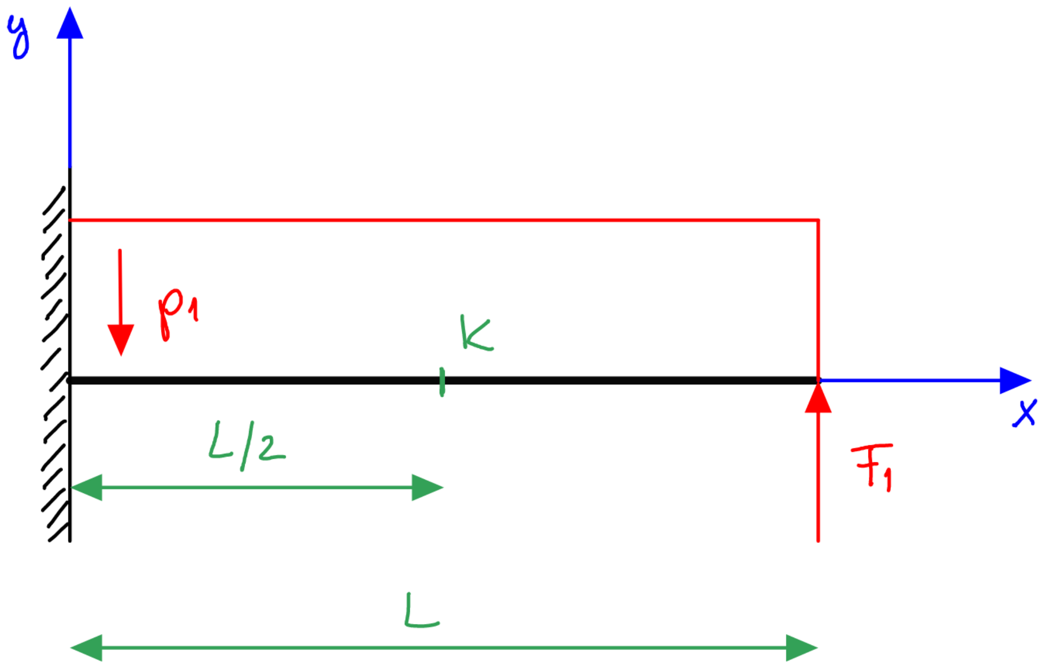
$M_h(x) = p(L-x)\cdot\frac{L-x}{2} = p\frac{(L-x)^2}{2}$

$M_t(x) = 0$



- $V(0) = pL$; $V(L) = 0$
- $V'(x) = -p = p(x)$
- $M_h(0) = \frac{pL^2}{2}$
- $M_h(L) = 0$
- $M_h'(x) = -p(L-x) = -V(x)$

6. feladat Írjuk fel az igénybevételi függvényeket és számítsuk ki a K keresztmetszetben az igénybevételek nagyságát!



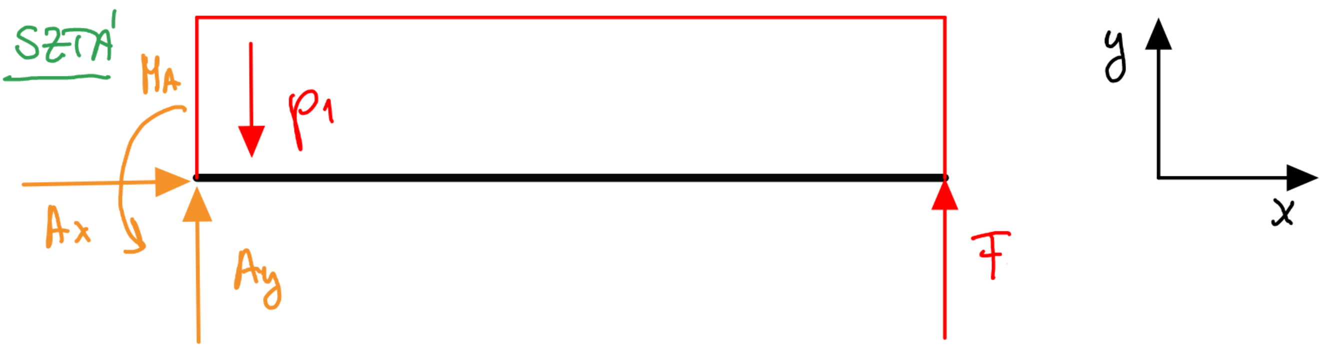
Adatok:

$L = 4\,m$

$p_1 = 3\,kN/m$

$F = 3\,kN$

Most mehetünk azonnal jobbról vagy kiszámoljuk a reakciókat és balról redukálunk!



Egyensúlyi egyenletek:

$$\Sigma F_x = 0: \quad \boxed{A_x = 0}$$

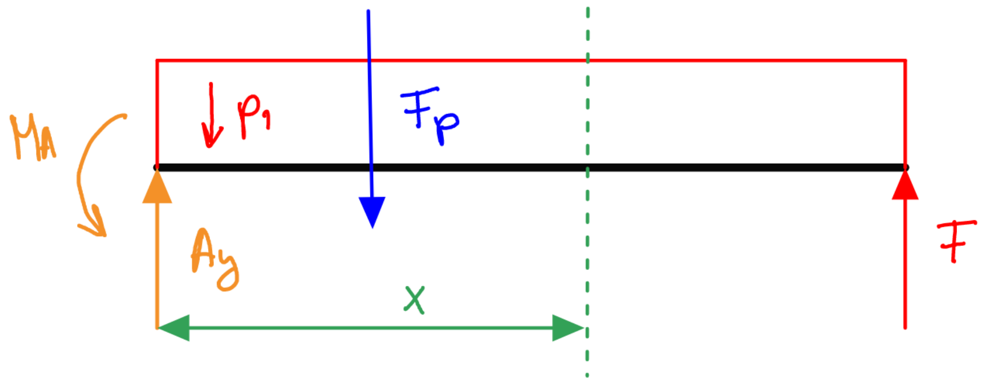
$$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + F - p_1 L = 0$$

$$\hookrightarrow A_y = p_1 L - F = \underline{\underline{9\,kN}}\ (\uparrow)$$

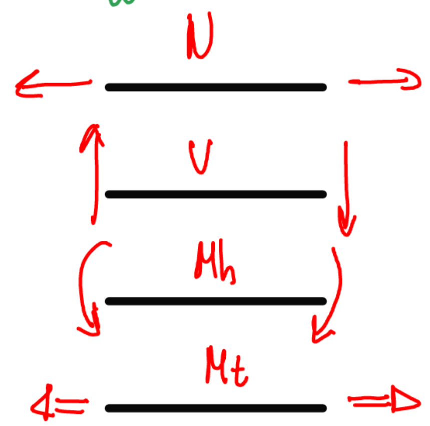
$$\Sigma M_A = 0: \quad M_A + F \cdot L - p_1 L \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\hookrightarrow M_A = \frac{p_1 L^2}{2} - F \cdot L = \underline{\underline{12\,kNm}}$$

Érdemes felrajzolni a testre ható erőket!



Válasszunk ki egy keresztmetszetet!



Mivel a rúdszakaszon belül nincs koncentrált erő és erőpár
↳ egy szakasz elég!

	Balról	Jobbról
$N(x)$	0	0
$V(x)$	$A_y - px$ $V(x) = \underline{\underline{9 - 3x}}$ kN méterben	$-F + p(L-x)$ $V(x) = -3 + 12 - 3x = \underline{\underline{9-3x}}$
$M_h(x)$	$-A_y x + \frac{px^2}{2} + M_A$ $M_h(x) = -9x + \frac{3}{2}x^2 + 12$ kNm méterben	$-F(L-x) + \frac{p(L-x)^2}{2}$ $M_h(x) = -3(4-x) + \frac{3(16-8x+x^2)}{2}$ $= -12 + 3x + 24 - 12x + \frac{3}{2}x^2$ $= \frac{3}{2}x^2 - 9x + 12$ kNm méterben
$M_t(x)$	0	0

Tehát a függvények:

$$p(x) = -p$$

$$V(x) = A_y - px$$

$$M_h(x) = \frac{px^2}{2} - A_y x + M_A$$

Ellenőrizzük a deriváló kapcsolatot!

$$V'(x) = -p = p(x) \checkmark$$

$$M_h'(x) = px - A_y = -V(x) \checkmark$$

K-keresztmetszet:

$$N_K = 0$$

$$M_{tK} = 0$$

$$V_K = V(L/2) = 9 - 3 \cdot 2 = \underline{3\ kN}$$

$$M_{hK} = M_h(L/2) = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 12 = \underline{\underline{0\ kNm}}$$

Rúdvég: $(x = L)$

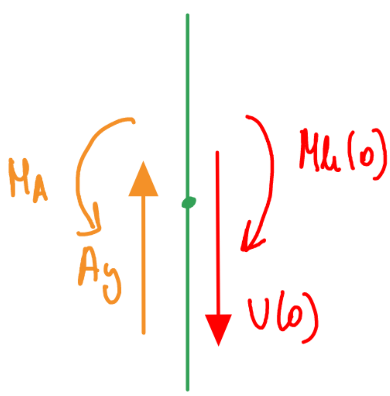
$$\left.\begin{aligned} V(L) &= 9 - 3 \cdot 4 = -3\ kN \\ M_h(L) &= \frac{3}{2} 4^2 - 9 \cdot 4 + 12 = 0\ kNm \end{aligned}\right\}$$

megfelel annak, amit a rúd jobb végén lévő" terhelés ad

Befogás $(x=0)$

$$V(0) = 9\ kN$$

$$M_h(0) = 12\ kNm$$



Tényleg egyensúly!