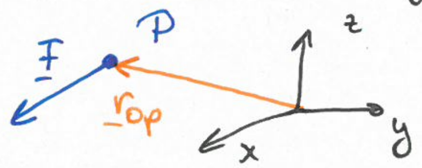
Statika - 3. gyakorlat

Térbeli erőrendszer eredője

Ismétlés az előadás anyag alapján:

- Erő pontra számított nyomatéka

$$\underline{M}_O = \underline{r}_{OP} \times \underline{F}$$



- A nyomatékot tetszőleges irány mentén felbonthatjuk
(lásd vetületszámítás 2. gyakorlat)

$\underline{e}_t$ - az adott egyenes (tengely) egységvektora

$$\underline{M}_t = (\underline{M}_O \cdot \underline{e}_t)\underline{e}_t$$

- Erőrendszer redukálása A-ból B-be

Ismert: $\underline{M}_A$ és $\underline{F}$ $\longrightarrow$ $\underline{M}_B = \underline{M}_A + \underline{r}_{BA} \times \underline{F}$

$[\underline{F}; \underline{M}_A]_A \longrightarrow [\underline{F}, \underline{M}_B]_B$

- Több erő esetén: Egy tetszőleges A pontra:

$$\underline{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \underline{M}_j$$

n db erő
m db koncentrált erőpár

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

- Erőrendszerek egyenértékűsége $[\underline{F}'; \underline{M}_A']_A = [\underline{F}'', \underline{M}_A'']_A$

A merev test bármely A pontjára

Kérdés: Elég, ha egy pontra ezt belátjuk?

Skalár invariáns: $\underline{F} \cdot \underline{M}_A = \underline{F} \cdot \underline{M}_B \in \mathbb{R}$ ← valós szám

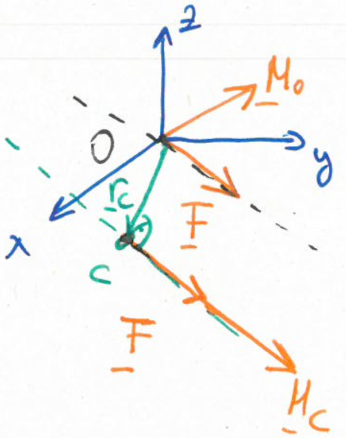
független, hogy melyik pontban vagyunk!

Centrális egyenes . Térbeli erőrendszer esetén

olyan egyenes ahol $\underline{F} \parallel \underline{M}_C$ ahol

C a centrális egyenes pontja → erőcsavar

Hol van ez az egyenes?



Ismert: $[\underline{F}, \underline{M}_O]_O$

$$\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{|\underline{F}|^2}$$

Centrális egyenes egyenlete: $\frac{\underline{F}}{|\underline{F}|}$

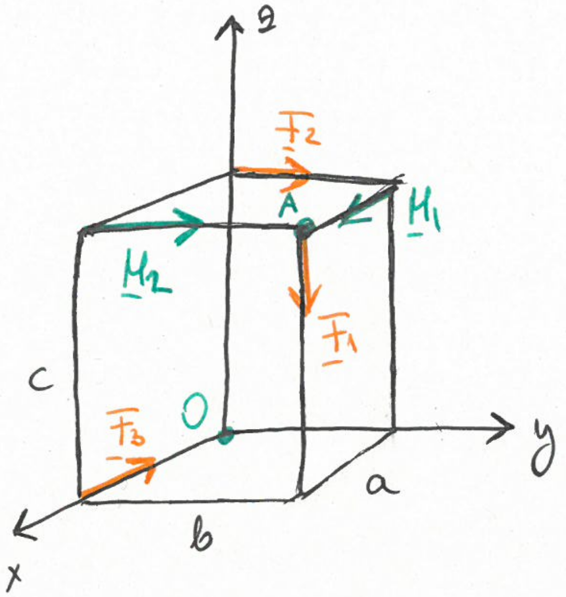
$$\underline{r} = \underline{r}_C + \lambda \cdot \underline{e}_F$$

Ezen egyenes mentén mekkora a nyomaték?

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O - \underline{r}_C \times \underline{F} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{|\underline{F}|^2} \underline{F}$$

1. feladat

Egy merev testre az $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ és $\underline{F}_3$ koncentrált erők és az $\underline{M}_1$ és $\underline{M}_2$ koncentrált erőpárok hatnak az ábrán feltüntetett módon.



Adatok:

$F_1 = 25\,N$ $\quad a = 2\,m$

$F_2 = 70\,N$ $\quad b = 3\,m$

$F_3 = 60\,N$ $\quad c = 4\,m$

$M_1 = 90\,Nm$

$M_2 = 110\,Nm$

Feladatok

1) Számítsuk ki az erőrendszer redukáltját az O pontra
2) Redukáljuk az erőrendszert az A pontra
3) Igazoljuk, hogy az $\underline{F} \cdot \underline{M}_O$ tényleg invariáns!
4) Írjuk fel a centrális egyenes egyenletét! Redukáljuk az erőrendszert a centrális egyenes egy pontjára!
5) Milyen O pontban működő erővel és nyomatékkal kell kiegészíteni az erőrendszert, hogy egyensúly legyen!

Vektorok felírása!

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{F}_3 = \begin{bmatrix} -F_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Nm$$

$$\underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} Nm$$

A redukáláshoz kellenek az erők támadáspontjaiba mutató helyvektorok!

∼ mivel az O-ba kell redukálni ezért $\underline{r}_{0i}$-ket kell felírni!

$$\underline{r}_1 = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k} \longrightarrow \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{m}$$

$$\underline{r}_2 = c\,\underline{k} \longrightarrow \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{m}$$

$$\underline{r}_3 = a\,\underline{i} \longrightarrow \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m}$$

Az erőrendszer redukáltja:

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{3} \underline{F}_i = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \text{N}$$

$$\underline{M}_O = \sum_{i=1}^{3} \underline{r}_{0i} \times \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{2} \underline{M}_j = \underbrace{\underline{r}_1 \times \underline{F}_1}_{\underline{M}_{OF_1}} + \underbrace{\underline{r}_2 \times \underline{F}_2}_{\underline{M}_{OF_2}} + \underbrace{\underline{r}_3 \times \underline{F}_3}_{\underline{M}_{OF_3}} + \underline{M}_1 + \underline{M}_2$$

Kiírva:

$$\underline{M}_{OF_1} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

$$\underline{M}_{OF_2} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 70 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

vagy: $\underline{M}_{OF_2} = 4\cdot\underline{k} \times 70\,\underline{j} = 280\, \underbrace{\underline{k} \times \underline{j}}_{-\underline{i}} = -280\,\underline{i}$

$$\underline{M}_{OF_3} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -60 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

vagy: $\underline{M}_{OF_3} = 2\underline{i} \times (-60)\underline{i} = -120\, \underbrace{\underline{i} \times \underline{i}}_{=0} = \underline{0}$

Azaz:

$$\underline{M}_O = \begin{bmatrix} -75 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

Azaz

$$(\underline{F};\underline{M_0})_0 = \left[\begin{bmatrix}-60\\70\\-25\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-265\\160\\0\end{bmatrix}\right]_0$$

Redukáljuk az A pontba!

1. megoldás:

$$\left.\begin{aligned}\underline{M_A} &= \sum_{j=1}^{2}\underline{M_j} + \sum_{i=1}^{3}\underline{r_{Ai}}\times\underline{F_i}\\ \underline{F} &= \sum_{i=1}^{3}\underline{F_i}\end{aligned}\right\}\text{ hosszú!...}$$

2. megoldás:

$$\underline{M_A} = \underline{M_0} + \underline{r_{A0}}\times\underline{F} = \underline{M_0} - \underline{r_1}\times\underline{F}$$

$$\underline{r_{A0}} = -\underline{r_1}$$

$$(-\underline{r_1}\times\underline{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & -3 & -4\\ -60 & 70 & -25\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}75+280\\240-50\\-140-180\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}355\\190\\-320\end{bmatrix}\ \text{Nm}$$

$$\underline{F_A} = \sum_{i=1}^{3} = \underline{F_0} = \underline{F}$$

$$\underline{M_A} = \begin{bmatrix}-265\\160\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}355\\190\\-320\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}90\\350\\-320\end{bmatrix}\ \text{Nm}$$

Tehát az erőrendszer redukáltja az A pontba

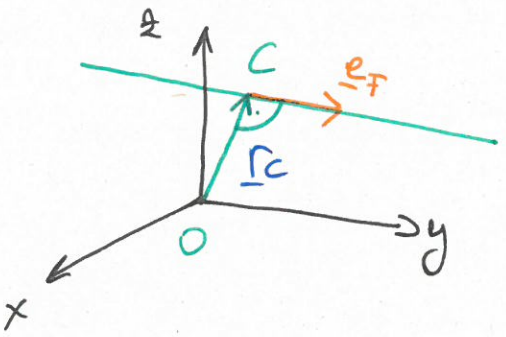
$$(\underline{F};\underline{M_A})_A = \left[\begin{bmatrix}-60\\70\\-25\end{bmatrix};\begin{bmatrix}90\\350\\-320\end{bmatrix}\right]_A$$

Ellenőrizzük, hogy invariáns!

$$\underline{F}\cdot\underline{M_0} = (-60)(-265) + 70\cdot 160 + (-25)\cdot 0 = 27\,100\ \text{N}^2\text{m}$$

$$\underline{F}\cdot\underline{M_A} = (-60)\,90 + 70\cdot 350 + (-25)(-320) = 27\,100\ \text{N}^2\text{m}$$

Centrális egyenes:



Tudjuk, hogy az O ponthoz (ahol ismerjük $[F, M_O]_O$ vektorkettős) a legközelebbi pontja a centrális egyenesnek a C pont

$$r_C = \frac{F \times M_O}{F^2}$$

$$F^2 = F \cdot F = |F|^2 = (-60)^2 + 70^2 + (-25)^2 = 9125\ N^2$$

$|F| = 95{,}525\ N$ → ez a vektor hossza

$$|F| = \sqrt{F \cdot F}$$

$$F \times M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -60 & 70 & -25 \\ -265 & 160 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 6625 \\ 8950 \end{bmatrix} N^2 m$$

Visszahelyettesítve: $r_C = \frac{1}{9125} \cdot \begin{bmatrix} 4000 \\ 6625 \\ 8950 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32/73 \\ 53/73 \\ 358/365 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4384 \\ 0{,}726 \\ 0{,}9808 \end{bmatrix} m$

Az egyenes egy pontja ismert → kell egy irány:

$$e_F = \frac{F}{|F|} = \frac{1}{95{,}525} \cdot \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6281 \\ 0{,}7328 \\ -0{,}2617 \end{bmatrix} [-]$$ dimenziótlan!

Az egyenes egyenlete $r(\lambda) = r_C + \lambda e_F$

$$r(\lambda) = \begin{bmatrix} 0{,}4384 - 0{,}6281\lambda \\ 0{,}726 + 0{,}7328\lambda \\ 0{,}9808 - 0{,}2617\lambda \end{bmatrix} m$$

Erőrendszer eredője a C pontban

1. út: $\underline{M}_C = \underline{M}_A + \underline{r}_{CA} \times \underline{F} = \underline{M}_O + \underline{r}_{CO} \times \underline{F}$

ismert

2. út $\underline{M}_C = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{F^2} \cdot \underline{F} = \frac{27100}{9125} \cdot \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -178,192 \\ 207,89 \\ -74,247 \end{bmatrix}$ Nm

skalár invariáns

Ellenőrizzük: $\underline{M}_C \parallel \underline{F} = ?$

$\underline{M}_C \times \underline{F} = \underline{0}$ ✓ Teljesülni fog!

$$\left(\frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{F^2} \cdot \underline{F} \right) \times \underline{F} = \alpha \cdot \underline{F} \times \underline{F} = \underline{0} \ ✓$$

skalár

Mekkora erőrendszer kell, hogy egyensúlyi legyen?

Adjunk hozzá egy $[\underline{F}^*; \underline{M}_O^*]_O$ erőrendszert az O pontban

↓ Az új redukált vektorkettős: $(\underline{\tilde{F}}, \underline{\tilde{M}}_O)_O = [\underline{0}; \underline{0}]_O$

kell legyen!

$\underline{\tilde{F}} = \underline{F}^* + \underline{F} = \underline{0} \rightarrow \boxed{\underline{F}^* = -\underline{F}}$

$\underline{\tilde{M}}_O = \underbrace{\underline{M}_O^* + \underline{M}_O}_{\text{az O-ban vagyunk minden } \underline{r} \text{ erőkar zérus}} = \underline{0} \rightarrow \boxed{\underline{M}_O^* = -\underline{M}_O}$

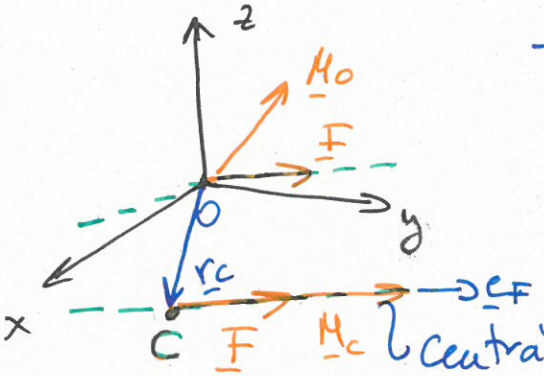
Tehát az O-ban redukált statikai vektorkettős ~~an~~ (-1) szeresét kell alkalmazni!

2. feladat

Centrális egyenes levezetésének bizonyítása

Az O-ban ismert: $[\underline{F}; \underline{M}_O]_O$

Tudjuk, hogy $\underline{M}_C \parallel \underline{F}$



$$\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|}$$ az egyenes irányába mutató egységvektor

Redukáljunk C-be

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \underline{r}_{CO} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_C \times \underline{F}$$

$$\underline{r}_{CO} = -\underline{r}_{OC} = \underline{r}_C$$

Átrendezve: $\underline{r}_C \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{M}_C \quad / \underline{F}\times$

$$\underline{F} \times (\underline{r}_C \times \underline{F}) = \underline{F} \times (\underline{M}_O - \underline{M}_C)$$

Matekból: ún. „kifejtési tétel"

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

Ezt alkalmazva:

$$\underline{r}_C \cdot (\underline{F} \cdot \underline{F}) - \underline{F} \cdot \underbrace{(\underline{F} \cdot \underline{r}_C)}_{\underline{F} \perp \underline{r}_C} = \underline{F} \times (\underline{M}_O - \underline{M}_C)$$

Ez garantálja, hogy C a legközelebbi pont!

$$\underline{r}_C \cdot \underline{F}^2 = \underline{F} \times \underline{M}_O - \underbrace{\underline{F} \times \underline{M}_C}_{0}$$

0 a centrális egyenesen $\underline{F} \parallel \underline{M}_C$

$$\boxed{\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{\underline{F}^2}}$$

A centrális egyenesen a koncentrált erőpár

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \underbrace{\underline{r}_{CO}}_{= -\underline{r}_{OC} = -\underline{r}_C} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_C \times \underline{F}$$

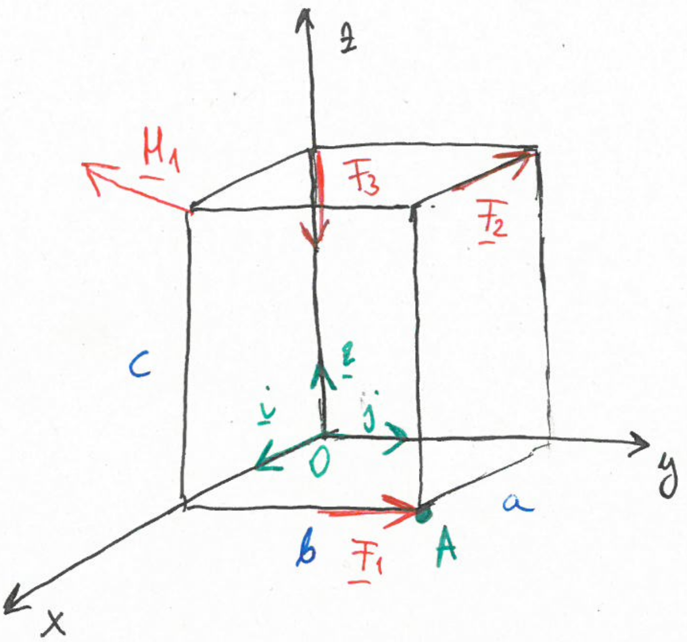
$$\underline{M}_C = \underline{M}_O - \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{\underline{F}^2} \times \underline{F} = \underline{M}_O + \underbrace{\underline{F} \times \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{\underline{F}^2}}_{\text{ismét kifejtési tétel!}}$$

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \frac{1}{\underline{F}^2}\left(\underline{F}\,(\underline{F} \cdot \underline{M}_O) - \underline{M}_O \underbrace{(\underline{F} \cdot \underline{F})}_{\underline{F}^2} \right)$$

$$\underline{M}_C = \cancel{\underline{M}_O} + \frac{1}{\underline{F}^2}(\underline{F} \cdot \underline{M}_O) \cdot \underline{F} - \cancel{\underline{M}_O} =$$

$$\boxed{\underline{M}_C = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F}}$$

3. feladat — Gyakorló feladat otthonra!



Adatok:

$a = 2\,m$

$b = 1\,m$

$c = 3\,m$

$F_1 = 10\,kN$

$F_2 = 5\,kN$

$F_3 = 2\,kN$

$\underline{M}_1 = 10\underline{i} + 10\underline{k}\ kNm$

Feladatok:

a) $[\underline{F}, \underline{M}_O]_O$

b) $[\underline{F}, \underline{M}_A]_A$

c) Igazoljuk, hogy tényleg skalárinvariáns!

d) Centrális egyenes és annak eredője!

e) Hogyan egészítsük ki az erőrendszert az O pontban, hogy egyensúlyi legyen?

Megoldás

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} m$$

a) A redukált az O pontra!

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{3} \underline{F_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$\underline{M_O} = \sum_{j=1}^{1} \underline{M_j} + \sum_{i=1}^{3} \underline{r_i} \times \underline{F_i} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 35 \end{bmatrix}}} \text{kNm}$$

$$\underline{r_1} \times \underline{F_1} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

$$\underline{r_2} \times \underline{F_2} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

$\underline{r_3} \times \underline{F_3} = \underline{0}$ mert $\underline{r_3} \parallel \underline{F_3} \parallel \underline{k}$

$[\underline{F}, \underline{M_O}]_O$ már ismert!

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$\underline{M_O} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 35 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

b) A redukált az A pontra:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} \text{kN}$$ (Az eredő erő nem változik!)

$$\underline{M_A} = \underline{M_O} + \underline{r_{AO}} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -25 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 12 \\ -19 \\ 10 \end{bmatrix}}} \text{kNm}$$

$$\underline{r_{AO}} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -20-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -25 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

$\underline{r_{AO}} = -\underline{r_1}$

Tehát ismert $[\underline{F}, \underline{M_O}]_O$ is!

c) Invariáns ellenőrzése

- $\underline{F} \cdot \underline{M_O} = (-5)10 + 10(-15) - 2 \cdot 35 = -270\,(\text{kN})^2\text{m}$
- $\underline{F} \cdot \underline{M_A} = (-5) \cdot 12 + 10(-19) - 2 \cdot 10 = -270\,(\text{kN})^2\text{m}$

✓ OK!

d) Centrális egyenes

a legközelebbi pontja

$$\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{\underline{F}^2}$$

$$\underline{F}^2 = \underline{F} \cdot \underline{F} = (-5)^2 + 10^2 + (-2)^2 = 129 (kN)^2$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_O = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -5 & 10 & -2 \\ 10 & -15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 350-30 \\ -20+175 \\ 75-100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 155 \\ -25 \end{bmatrix} (kN)(kNm)$$

Behelyettesítve:

$$\underline{r}_C = \frac{1}{129} \cdot \begin{bmatrix} 320 \\ 155 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}48 \\ 1{,}20 \\ -0{,}19 \end{bmatrix} m$$

A centrális egyenes egyenletéhez kell $\underline{e}_F$

$$\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|} = \frac{1}{\sqrt{129}} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}44 \\ 0{,}88 \\ -0{,}176 \end{bmatrix} (-)$$

$$\underline{r}(\lambda) = \underline{r}_C + \lambda \cdot \underline{e}_F = \begin{bmatrix} 2{,}48 - 0{,}44\lambda \\ 1{,}2 + 0{,}88\lambda \\ -0{,}19 - 0{,}176\lambda \end{bmatrix} m$$

Eredő a centrális egyenesen $[\underline{F}; \underline{M}_C]_C$

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \underline{r}_{CO} \times \underline{F}$$

vagy

$$\underline{M}_C = \frac{\underline{F} \cdot \underline{M}_O}{\underline{F}^2} \cdot \underline{F} = \frac{-270}{129} \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}46 \\ -20{,}93 \\ 4{,}18 \end{bmatrix} kNm$$

e) Ahhoz, hogy egyensúly legyen $-[\underline{F}, \underline{M}_O]_O$ erő rendszert kell elhelyezni