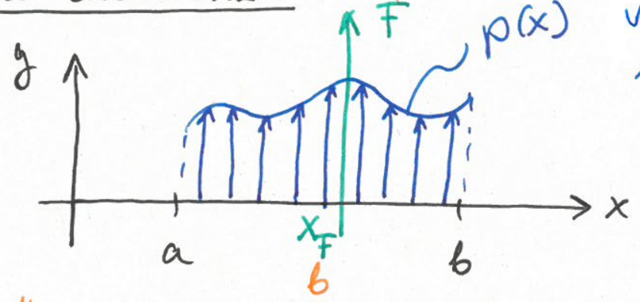
# Statika – 5. gyakorlat

## Síkbeli tartók

### Elméleti összefoglaló

Megoszló erőrendszer:




vonal mentén megoszló erőrendszer

Eredője • $F = \int_a^b p(x)\,dx$

– geometriailag a megoszló erőrendszer TERÜLETE

az eredő helye • $x_F = \dfrac{\int_a^b x\,p(x)\,dx}{F}$

– geometriailag a megoszló terhelés, mint felület súlypontja

### Síkbeli erőrendszer

3D eset: $[\underline{F}, \underline{M}_O]_O = [\underline{0}, \underline{0}]_O$ térben 6 db egyenlet

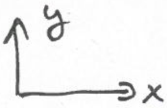
2D eset (a síkot jelölje ki x és y tengely)

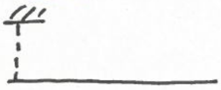
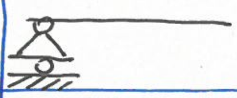
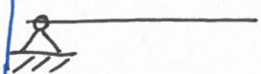
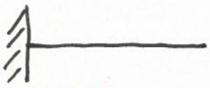
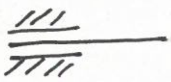
$$\left.\begin{aligned} F_x &= 0; \\ F_y &= 0; \\ M_{Oz} &= 0; \end{aligned}\right\} \text{3 skalár egyenlet}$$

ahol $F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$ ; $F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$ ; $M_{Oz} = \sum_{j=1}^{m} M_{jz} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(r_i \times F_i)_z}_{r_{ix} F_{iy} - r_{iy} F_{ix}}$

Közös ponton átmenő síkbeli erők akkor vannak egyensúlyban, ha az erők folytonos nyílfolyammal rajzolt vektor sokszöge záródik.

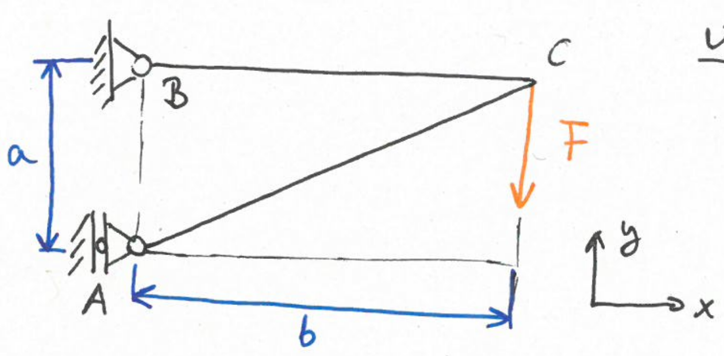
## Kényszerek




| Típus | Rajzi jel | Gátolt mozgáslehetőség | Reakció |
|---|---|---|---|
| Támasz |  | $u_y = 0$ (1db) | $F_y$; (1db) |
| Kötél |  | $u_y = 0$ (1db) | $F_y$; (1db) |
| Görgős támasz |  | $u_y = 0$ (1db) | $F_y$; (1db) |
| Csuklós támasz |  | $u_y = 0$<br>$u_x = 0$ (2db) | $F_x, F_y$; (2db) |
| Befogás |  | $u_x = 0$<br>$u_y = 0$<br>$\varphi_z = 0$ (3db) | $F_x, F_y$<br>$M_z$; (3db) |
| Csúszka |  | $u_y = 0$<br>$\varphi_z = 0$ (2db) | $F_y, M_z$ (2db) |

## 1. feladat

Határozzuk meg a reakcióerőket számítással és szerkesztéssel!



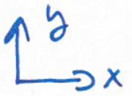

**Adatok**

$a = 1{,}25\,m$

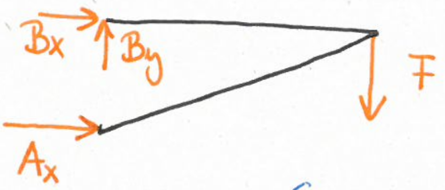
$b = 2{,}75\,m$

$F = 350\,N$

### Számítással:




**Szabadtest ábra** (SZTÁ) → Kényszereket reakciókkal helyettesítjük!




Az ismeretlen reakciókat mindig a pozitív koordináta irányoknak megfelelően vegyük fel!

**Egyensúlyi egyenletek:**

$\sum F_x = 0 \longrightarrow A_x + B_x = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = 0 \longrightarrow B_y - F = 0 \quad (2)$

$\sum M_B = 0 \longrightarrow A_x \cdot a - F \cdot b = 0 \quad (3)$

A nyomatéki egyenletet bárhova felírhatjuk. Célszerű úgy választani pontot, hogy a lehető legtöbb ismeretlen reakció kiessen

(2): $B_y = F$

$\underline{\underline{B_y = 350\,N}}$

(3): $A_x \cdot a - F \cdot b = 0$

$A_x = \dfrac{F \cdot b}{a} = 770\,N$

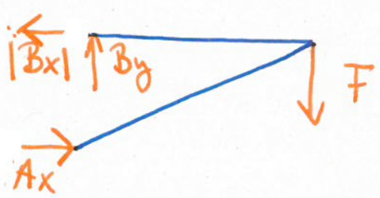
(1): $A_x + B_x = 0$

$B_x = -A_x = \underline{\underline{-770\,N}}$

ellentétes az általunk felvett iránnyal

$\underline{A} = \begin{bmatrix} 770 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -770 \\ 350 \\ 0 \end{bmatrix} N$

Tehát:



Lehet persze további nyomatéki egyenleteket felírni:

$\circlearrowleft \sum M_B = 0 \longrightarrow A_x \cdot a - F \cdot b = 0$ (ezt használtuk)

$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \longrightarrow -B_x \cdot a - F \cdot b = 0$

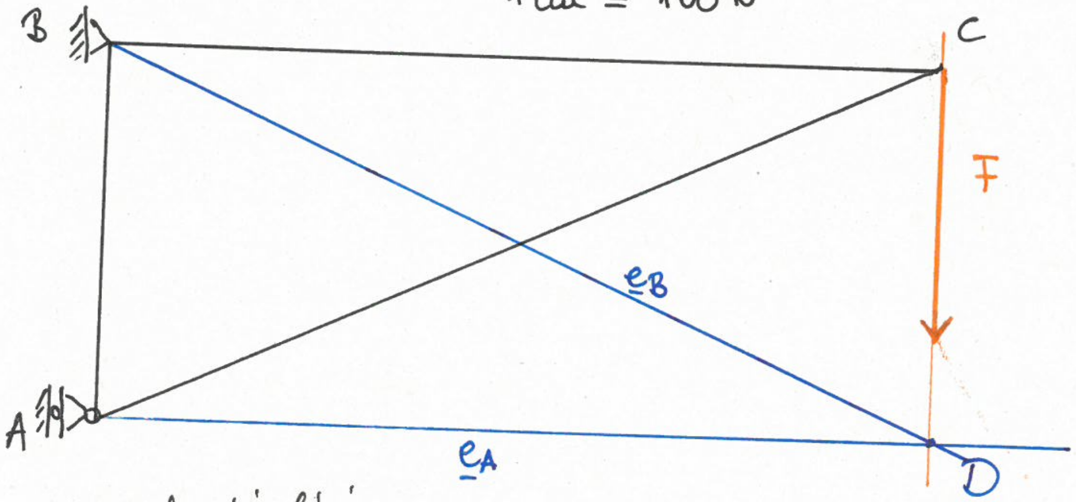
$\circlearrowleft \sum M_C = 0 \longrightarrow -B_y \cdot b + A_x \cdot a = 0$

De ezeket ha a $\sum F_x = 0$; és $\sum F_y = 0$ mellett ezek nem mind lesznek függetlenek pl.: $\sum M_B = 0$ és $\sum M_A = 0$

De van amikor elég csak nyomatéki egyenletet felírni: lásd a fenti három nyomatéki egyenlet $\rightarrow$ $A_x$, $B_x$ és $B_y$ megadható

- Szerkesztéssel: Méretarányos ábra kell! (méretaránnyal!)

Szerkezeti ábra: 1 cm ≅ 0,25 m
1 cm ≅ 100 N



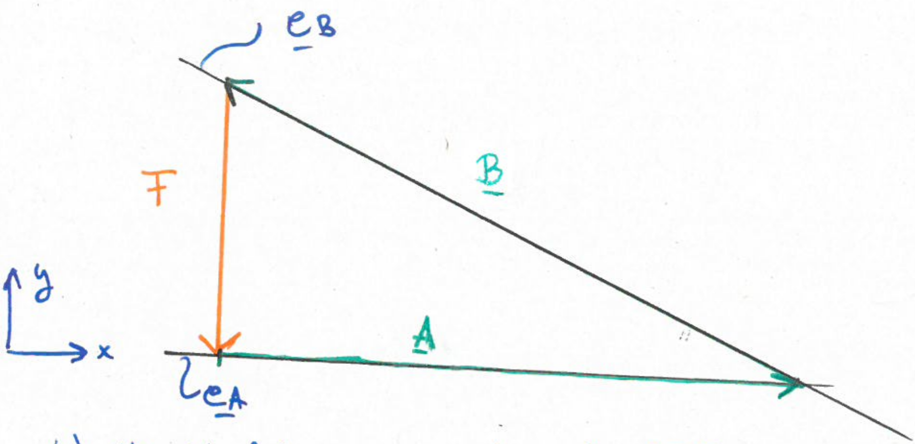

A szerkesztés lépései

1) Méretarányos szerkezeti ábrán vegyük fel az aktív erőt
2) Az ismert hatásvonalú reakcióerő (A) hatásvonalát rajzoljuk meg (D pont)
3) Három erő egyensúlya (közös ponton átmenő hatásvonal) ⇒ D ponton át kell mennie a B reakciónak $\rightarrow$ B hatásvonala $\overline{BD}$

↓ Most minden erő hatásvonala ismert.

Egyensúly $\rightarrow$ zárt vektorsokszög $\rightarrow$ erőábra!

Erőábra $\quad 1\,cm \cong 100\,N$



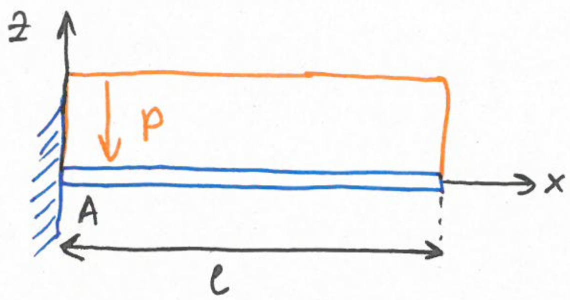

4) Vegyük fel az ismert erőt ($\underline{F}$), majd egyik végpontjába az egyik ($\underline{A}$) reakció hatásvonalát, a másik végébe a másik ($\underline{B}$) reakció hatásvonalát vegyük fel

5) A hatásvonalak metszéspontját szerkesszük ki. Folytonos vektorsokszög ⇒ olvassuk le a reakciókat

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 770 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N \; ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -770 \\ 350 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

# 2. Feladat

Számítsuk ki a reakciókat!




**Adatok:**

$l = 2m$

$p = 600\ N/m$

Hogyan helyettesíthetjük a megoszló erőrendszert? Geometriailag a síkidom területe

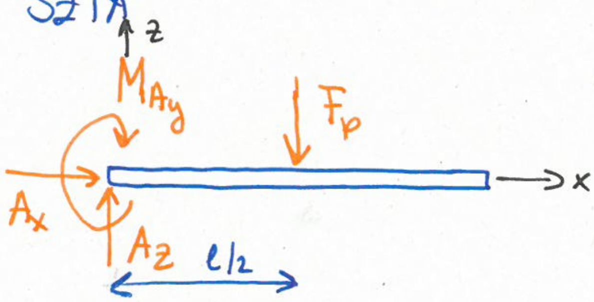
$$F_p = \int_0^l p\, dx = p \cdot l = 1200N$$

Hol van az eredőerő helye?

$$x_p = \frac{\int_0^l x\, p\, dx}{\int_0^l p\, dx} = \frac{l}{2}$$

Geometriailag a síkidom súlypontja

SZTÁ




y-tengely „befelé" mutat

↳ pozitív nyomaték iránya az óramutató szerinti

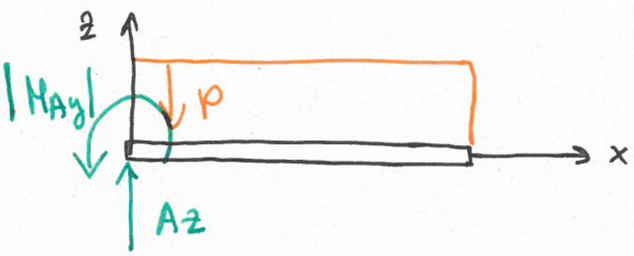
**Egyensúlyi egyenletek:**

$\sum F_x = 0 \longrightarrow \boxed{A_x = 0}$

$\sum F_z = 0 \longrightarrow A_z - F_p = 0$

$\overset{\curvearrowright}{\sum} M_A = 0 \longrightarrow M_{Ay} + F_p \cdot \frac{l}{2} = 0$

- $A_z = F_p = \underline{\underline{1200N}}$
- $M_{Ay} = -\frac{F_p \cdot l}{2} = \underline{\underline{-1200\ Nm}}$

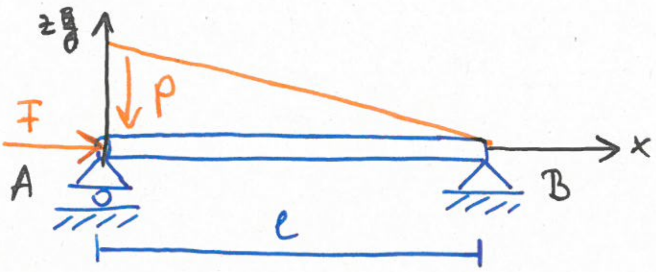



$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1200 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1200 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

# 3. feladat

Szerkesszük meg a reakciókat!




Adatok:

$l = 2m$

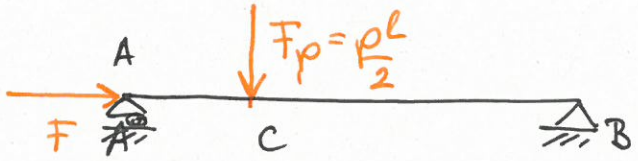
$p = 1{,}2$ kN/m

$F = 600N$

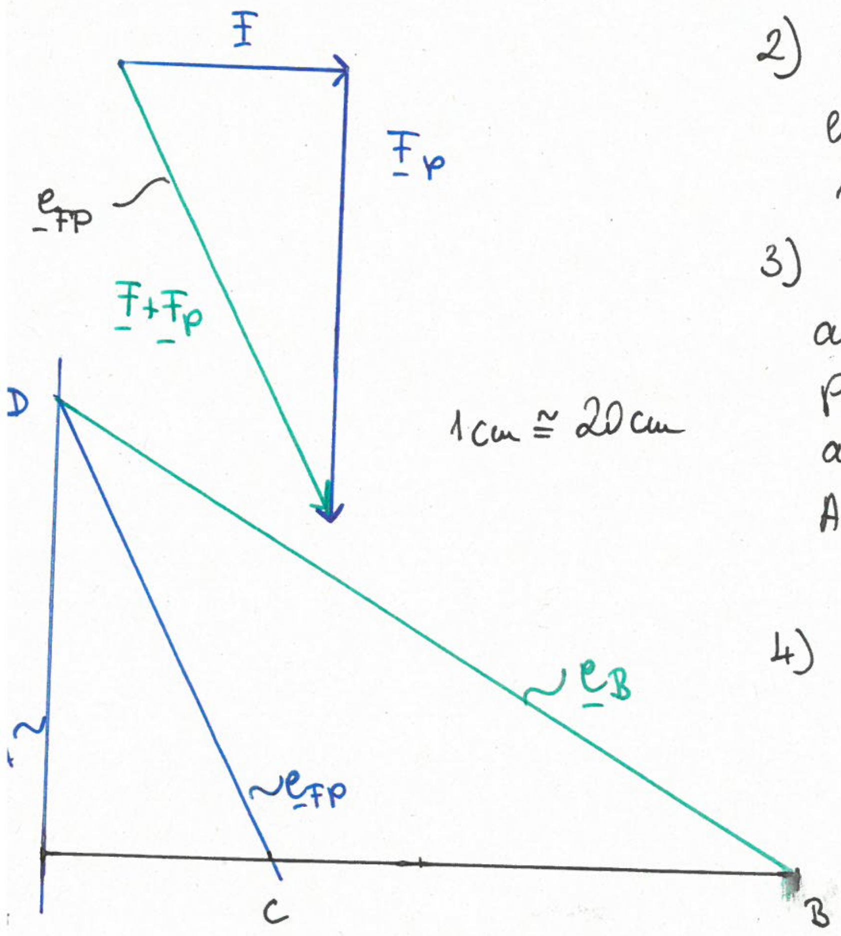
Először vegyük fel a megoszló erőrendszer eredőjét

$$F_p = \frac{p \cdot l}{2} = 1{,}2 \text{ kN} \quad \text{(a háromszög területe)}$$

$$x_p = \frac{l}{3} = \frac{2}{3} \text{ m} \quad \text{(a súlypontja a háromszögnek}$$




1 cm ≅ 200N




1 cm ≅ 20 cm

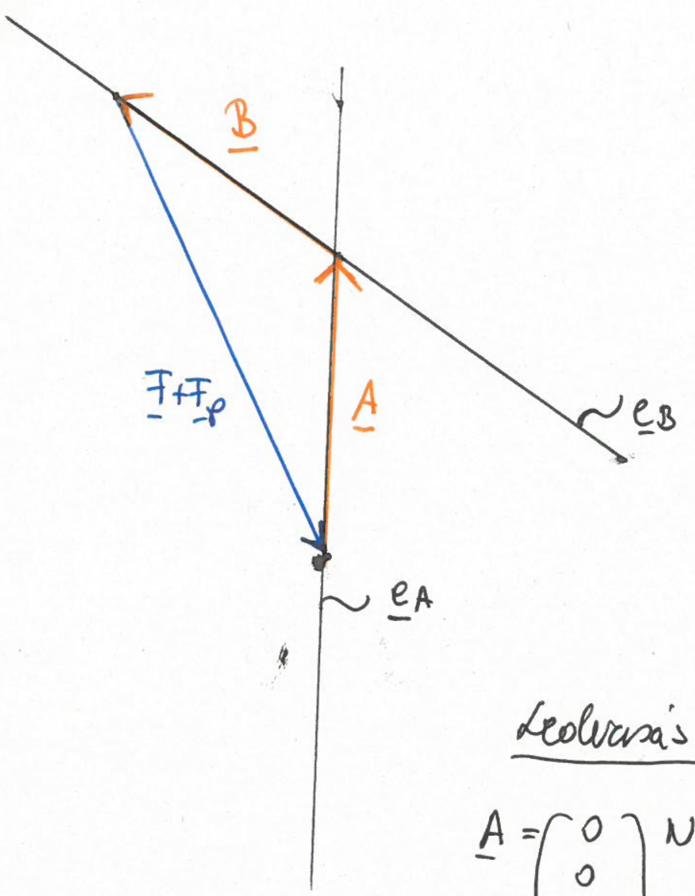
1) 4 erő szerepel ($F$, $F_p$, $A$, $B$)
vegyük először az aktív terhelések eredőjét:
$F$ és $F_p$ hatásvonala a C pontban metszi egymást

2) Szerkesszük ki az $F + F_p$ eredőerejét a paralelogramma szabály segítségével

3) Rajzoljuk szerkezeti ábrát, amelyre berajzoljuk A és C pontban a reakció és az aktív erő ismert hatásvonalát
A kettő a D pontban metszi egymást!

4) A $B$ reakció hatásvonala is át kell mennie D-n az egyensúly miatt!
↳ $e_B$ hatásvonal!

Erőábra: 1 cm ≅ 200




5) Minden erő hatásvonala ismert
↳ erőábra

Vegyük fel $\underline{F} + \underline{F_p}$ vektort. egyik végébe $\underline{A}$ hatásvonalával ($e_A$) a másik végébe $\underline{B}$ hatásvonalával ($e_B$) párhuzamosat

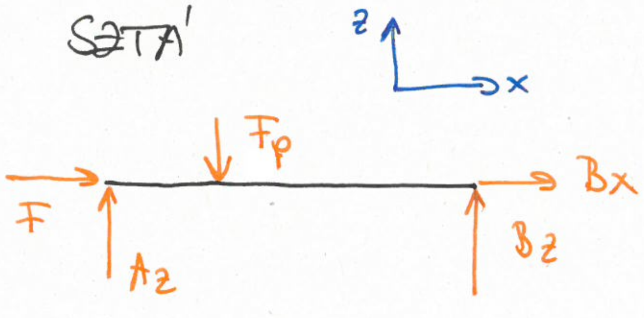
6) Olvassuk le a reakcióerőket, amely zárt vektorháromszöget kell, hogy alkossanak!

Leolvasás után:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \end{bmatrix} N \; ; \; \underline{B} = \begin{bmatrix} -600 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix} N$$

Ellenőrzés számítással

SZTA




Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F + B_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_z + B_z - F_p = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow A_z \cdot l - F_p \cdot \frac{2}{3} l = 0 \quad (3)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 800 \end{bmatrix} N \; ; \; \underline{B} = \begin{bmatrix} -600 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix} N$$

(1) • $B_x = -F = -600\,N$

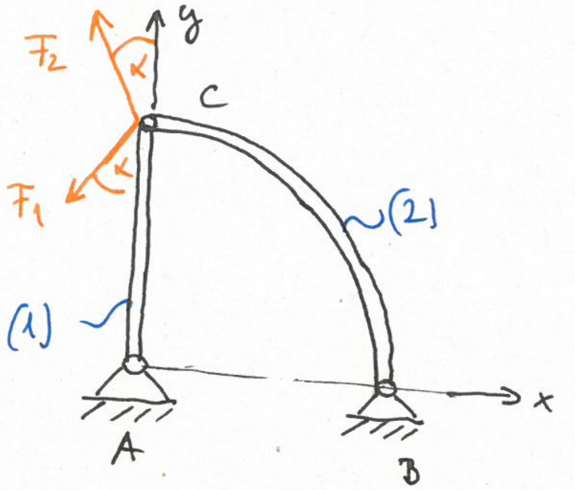
(3) • $A_z = \frac{F_p \cdot \frac{2}{3} l}{l} = \frac{2}{3} F_p = \frac{2}{3} \frac{pl}{2}$ *

$A_z = \frac{pl}{3} = 800\,N$

(2) $B_z = F_p - A_z = \frac{pl}{2} - \frac{pl}{3} = \frac{pl}{6} = 400\,N$

## 4. feladat

Az ábrán vázolt szerkezet egy egyenes és egy negyedkör alakú görbe rúdból áll, melyek a C pontban csuklóval kapcsolódnak egymáshoz. Határozzuk meg a reakcióerőket!




Adatok

$r = 0{,}4\ m$

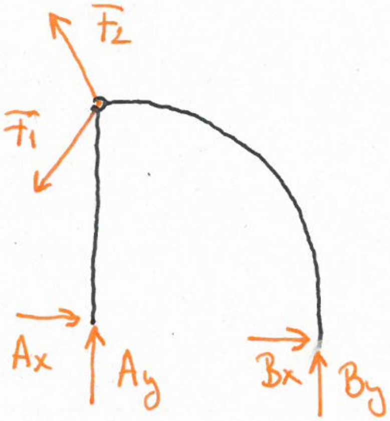
$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -250 \\ -250\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} N$

$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -150 \\ 150\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} N$

Írjuk fel a csuklók koordinátáit:

$\underline{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m\ ;\ \underline{r}_B = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m\ ;\ \underline{r}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} m$

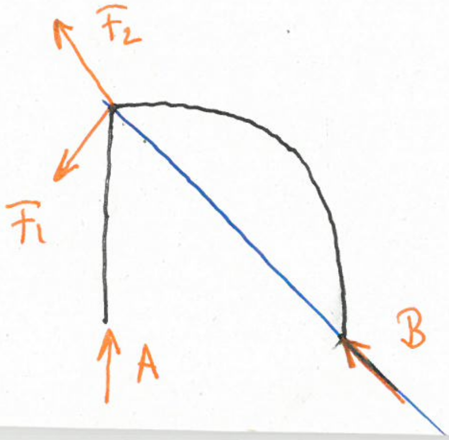
SZTÁ




4 db ismeretlen reakció $\Rightarrow$ 3 db egyensúlyi egyenlet!

A szerkezet valójában 3 testből áll
(1)es rúd ; (2)es rúd ; csukló

Az egyes rudakra csak a két végén hat erő $\Longrightarrow$ azoknak egyensúlyban kell lenniük
↳ közös hatásvonal (2 erő egyensúlya)




$\underline{A}$ erő az (1)es rúd irányába mutat

$\underline{B}$ erő pedig a negyedkör két végpontját összekötő egyenes irányába

$\underline{A} = \lambda_A \cdot \underline{r}_{AC}$ , ahol $\underline{r}_{AC} = \underline{r}_C - \underline{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix}$ m

$\underline{B} = \underbrace{\lambda_B}_{\left[\frac{N}{m}\right]} \cdot \underline{r}_{BC}$ , ahol $\underline{r}_{BC} = \underline{r}_C - \underline{r}_B = \begin{bmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0,4 \\ 0 \end{bmatrix}$ m

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{1x} + F_{2x} + B_x = 0$$

$$F_{1x} + F_{2x} - r\lambda_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{1y} + F_{2y} + A_y + B_y = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \lambda_A \cdot r + \lambda_B \cdot r = 0 \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow \lambda_B = \frac{F_{1x} + F_{2x}}{r} = \frac{-250-150}{0,4} = -1000 \ \frac{N}{m}$$

$$\Downarrow$$

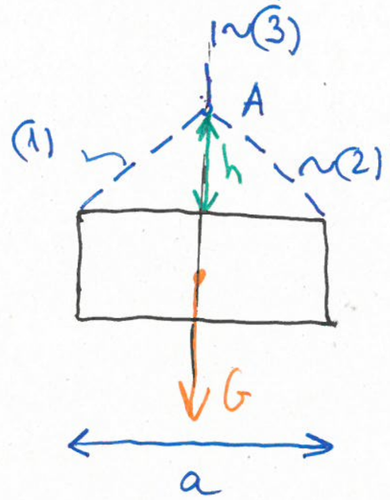
$$\underline{B} = \lambda_B \cdot \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} 400 \\ -400 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

$$(2) \rightarrow \lambda_A = \frac{-F_{1y} - F_{2y} - \lambda_B \cdot r}{r} = 1433 \ \frac{N}{m}$$

$$\underline{A} = \lambda_A \cdot \underline{r}_{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 573,2 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

## 5. feladat

Az ábrán látható teher megemelésére szolgáló kötelet legfeljebb $K = 800\ N$ nagyságú húzóerővel szabad megterhelni. Mekkora legyen a kötés $h$ magassága, hogy a 3 méter széles 1000 N súlyú láda levegőben tartásakor ne szakadjon el a kötél?




**Adatok**

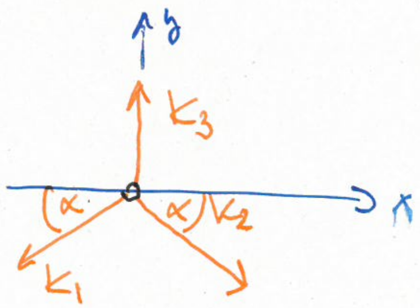
$G = 1000N$

$a = 3m$

$K_{max} = 800N$

A rendszer egyensúlyban van. Az A pontban lévő hanogra írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket

SZTÁ




mivel a teljes súlyt $K_3$ kötél tartja

$$\underline{\underline{K_3 = G}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow K_2 \cdot \cos\alpha - K_1 \cos\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow K_3 - K_1 \sin\alpha - K_2 \sin\alpha = 0 \quad (2)$$

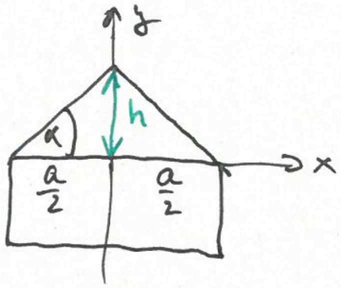

(1) $K_1 = K_2$ Most nézzük a legrosszabb esetet $K = K_1 = K_2 = \underline{\underline{800\ N}}$

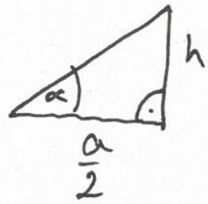
(2) $K_3 - K\sin\alpha - K\sin\alpha = 0$

$$\sin\alpha = \frac{K_3}{2K} = \frac{1000}{1600} = 0{,}625$$

$$\hookrightarrow \alpha = \underline{38{,}66}^\circ$$

Ezután meghatározzuk $\alpha$-t



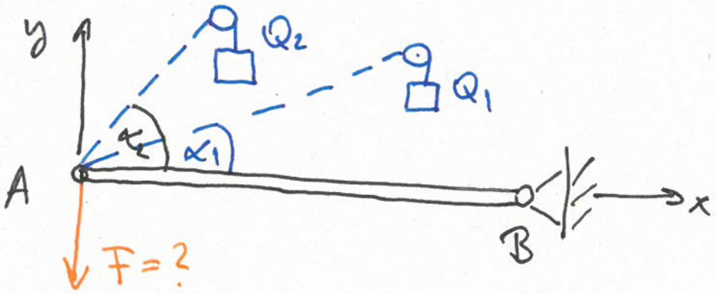




$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}}$$

$$h = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha = \underline{\underline{1{,}2\ m}}$$

# 6. feladat

Az AB rúd B vége csuklósan meg van támasztva. Az A végén két kötél húzóerőt fejt ki. Milyen nagyságú függőleges F erőt kell alkalmazni, hogy a rúd vízszintes helyzete egyensúlyi legyen?




**Adatok:**

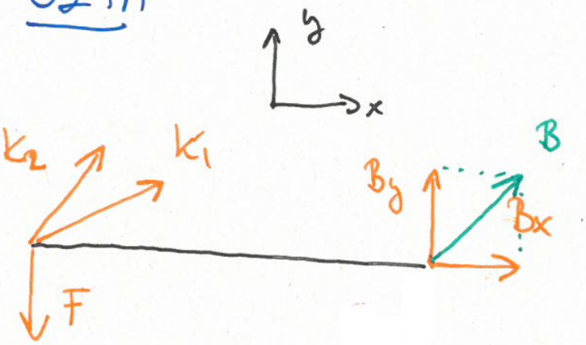
$Q_1 = 1000 N$

$Q_2 = 500 N$

$\alpha_1 = 30°$

$\alpha_2 = 60°$

## SZTÁ




A merev test akkor van egyensúlyban 4 erő esetén, ha hatásvonaluk közös ponton megy át és zárt vektorsokszöget alkotnak

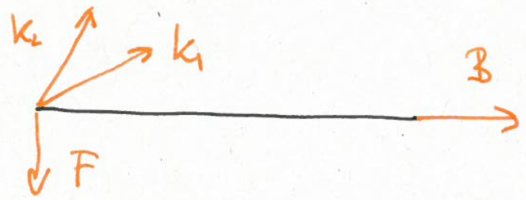
⇓

$K_1$, $K_2$ és $F$ metszéspontja az A pont

↳ B-nek is itt kell átmennie

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} !$$

## A helyes SZTÁ

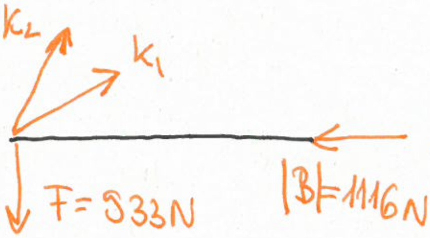



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow K_1 \cos\alpha_1 + K_2 \cos\alpha_2 + B = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 - F = 0 \quad (2)$$

## A megoldás



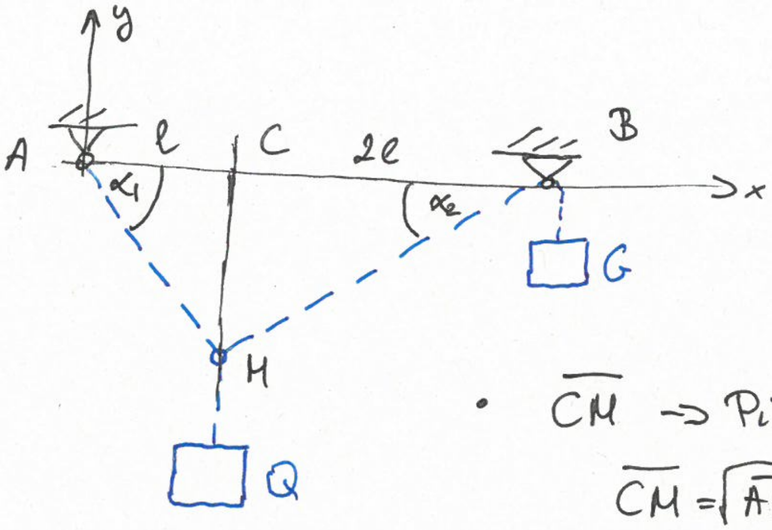

$$B = -K_1 \cos\alpha_1 - K_2 \cos\alpha_2 = \underline{\underline{-1116\ N}}$$

(fordított irányban, mint ahogy felvettük)

$$F = K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 = \underline{\underline{933\ N}}$$

# 7. feladat

Egy teljesen vékony kötél végét az A csuklóhoz kötjük, másik végére, miután a B ponton a borongon átvetettük, G súlyt alkalmazunk. A kötélen $\overline{AM} = 2\ell$ távolságban $Q = 1000\,N$ teher lóg egy karikához kapcsolva. Határozzuk meg a G súly nagyságát, ha a szerkezet az ábra szerinti állapotban egyensúlyban van.




Adatok

$Q = 1000\,N$

$\overline{AM} = 2\ell$

$\overline{AC} = \ell$

$\overline{CB} = 2\ell$

- $\overline{CM}$ → Pithagorasz-tételből

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{4\ell^2 - \ell^2} = \underline{\underline{\sqrt{3}\,\ell}}$$

- $\overline{BM}$ → szintén Pithagorasz-tétellel:

$$\overline{BM} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{CM}^2} = \sqrt{4\ell^2 + 3\ell^2} = \underline{\underline{\sqrt{7}\,\ell}}$$

Ebből:

$$\sin\alpha_2 = \frac{\overline{CM}}{\overline{BM}} = \frac{\sqrt{3}\,\ell}{\sqrt{7}\,\ell} = \sqrt{\frac{3}{7}} = 0{,}655$$

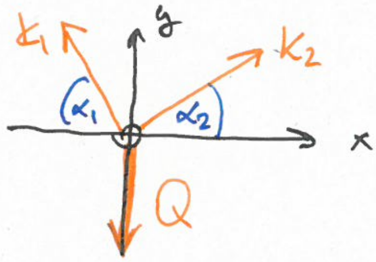
$$\cos\alpha_2 = \frac{\overline{CB}}{\overline{BM}} = \frac{2\ell}{\sqrt{7}\,\ell} = \sqrt{\frac{4}{7}} = 0{,}756$$

Valamint:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_1 &= \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \frac{\sqrt{3}\,\ell}{2\ell} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \\ \cos\alpha_1 &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = \frac{\ell}{2\ell} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \alpha_1 = \underline{\underline{60^\circ}}$$

Rajzoljuk fel a kanikára a szabadtest ábrát!

SZITÁ




ahol: $K_2 = G$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow K_2 \cos\alpha_2 - K_1 \cos\alpha_1 = 0$$

$$G \cos\alpha_2 - K_1 \cos\alpha_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow K_1 \sin\alpha_1 + K_2 \sin\alpha_2 - Q = 0$$

$$K_1 \sin\alpha_1 + G \sin\alpha_2 - Q = 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad G = \frac{K_1 \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \rightarrow (2)$$

$$K_1 \sin\alpha_1 + K_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2 - Q = 0$$

$$K_1 \left(\sin\alpha_1 + \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2\right) - Q = 0$$

$$K_1 = \frac{Q}{\sin\alpha_1 + \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2} = \underline{\underline{770\ N}}$$

Visszaírva:

$$G = \frac{K_1 \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \underline{\underline{509{,}26\ N}}$$