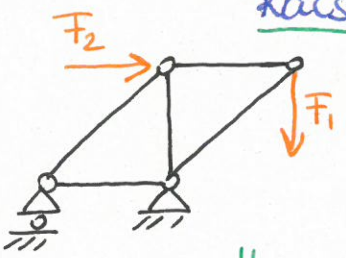
Statika – 6. hét

Rácsos szerkezetek

Elméleti összefoglaló:



Rácsos szerkezet → mechanikai modell

↳ végeiken csuklóval kapcsolódó merev rudak

↳ terhelés csak a csuklókban

↳ a kapcsolatok olyanok, hogy merev alakzatot alkot

⇓

a rudakban csak rúdirányú (normáligénybevétel) koncentrált erők

Jelölés: N

Előjelkonvenció: húzott rúd (+)
nyomott rúd (−)

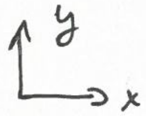
Megoldási módszerek:

1. Csomóponti módszer

↳ egyensúlyi egyenletek a csuklókra

2 db egyenlet $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$



Fontos, hogy olyan csuklóra alkalmazzuk, ahol max. 2 db ismeretlen rúderő szerepel!!

Csuklóról csuklóra haladva tudjuk kiszámolni a rúderőket!

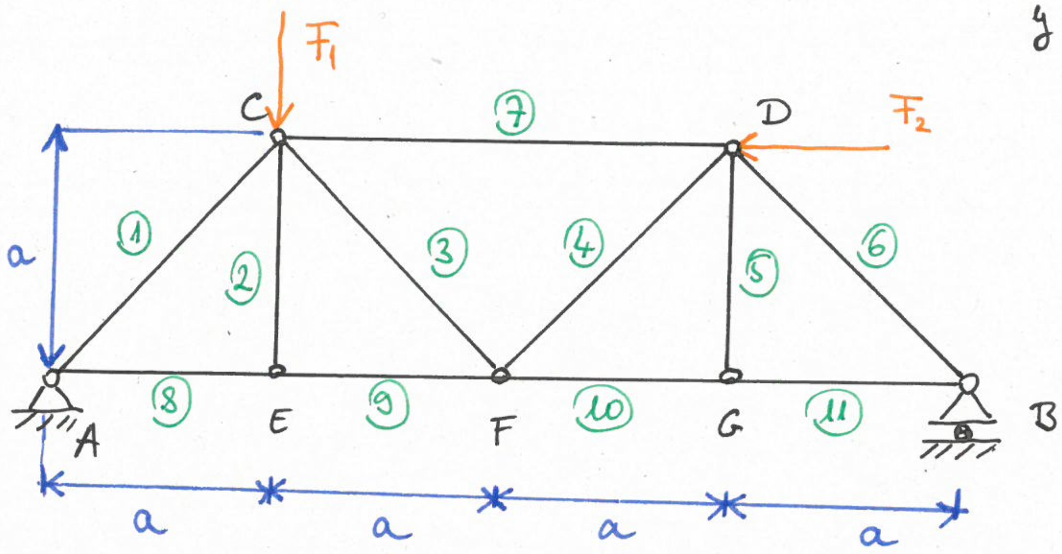
2. Átmetsző módszer

↳ két részre vágjuk a szerkezetet, az elhagyott rész helyett rúderők!

↳ Legfeljebb 3 rúd. Azok nem metszhetik egymást egy pontban

↳ Egyensúlyi egyenletek (3 db)

1. feladat Határozzuk meg csomóponti módszerrel a rudakban ébredő erőket!



Adatok

$a = 1m$

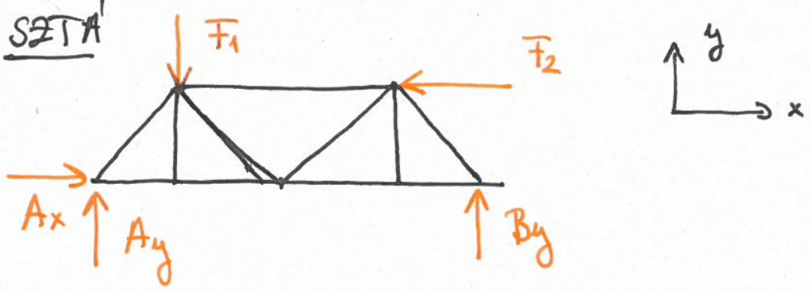
$F_1 = 400N$

$F_2 = 200N$

Fontos, hogy azonosítsuk a rudakat és a csomópontokat!

1. lépés: Reakcióerők kiszámítása

SZTA



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow A_x - F_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow A_y + B_y - F_1 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow -F_1 \cdot a + F_2 \cdot a + B_y \cdot 4a = 0 \qquad (3)$$

$$(1): \quad A_x = F_2 = \underline{\underline{200N}}$$

$$(3): \quad B_y = \frac{F_1 \cdot a - F_2 \cdot a}{4a} = \frac{F_1 - F_2}{4} = \underline{\underline{50N}}$$

$$(2): \quad A_y = F_1 - B_y = \underline{\underline{350N}}$$

Tehát a reakciók:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 200 \\ 350 \end{bmatrix} N \quad \text{és} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} N$$

↓

Ebből a reakciók nagysága

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{200^2 + 350^2} = 403{,}1\ N$$

$$B = |\underline{B}| = 50 N$$

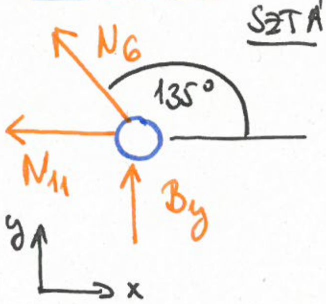
Rúderők számítása → csomóponti módszer

↓

egyesével valamennyi ~~rúd~~ csomópontra fel kell írni az egyensúlyi egyenleteket!

↳ olyan csomópont kell, ahol 2 ismeretlen van!

• B-csukló



SZTA: Mindig feltételezzük, hogy húzott a rúd!

↳ pozitív irányú rúderőket vegyünk fel!

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N_{6x} - N_{11} = 0$$

$$N_6 \cdot \cos 135° - N_{11} = 0 \quad (1)$$

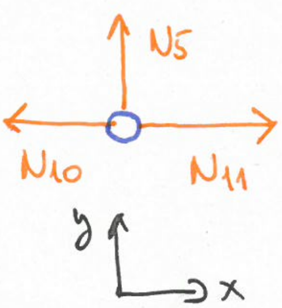
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_{6y} + B_y = 0$$

$$N_6 \cdot \sin 135° + B_y = 0 \quad (2)$$

$$(2):\ N_6 = \frac{-B_y}{\sin 135°} = -\frac{50 \cdot 2}{\sqrt{2}} = -70{,}71\ N \quad (\text{nyomott})$$

$$(1):\ N_{11} = N_6 \cdot \cos 135° = N_6 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{50 \cdot 2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = 50 N \quad (\text{húzott})$$

• G-csukló



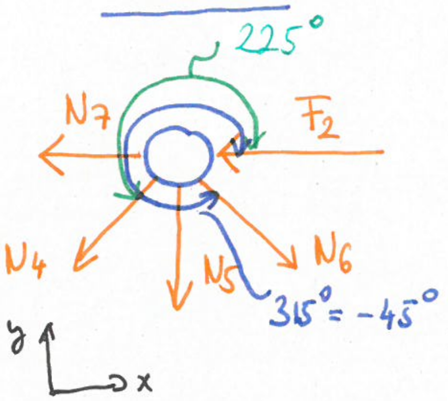
Egyensúlyi egyenletek

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow -N_{10} + N_{11} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \boxed{N_5 = 0} \quad (\text{vakrúd})$$

$$(1):\ N_{10} = N_{11} = 50 N \quad (\text{húzott})$$

D-csukló



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_7 - N_{4x} + N_{6x} - F_2 = 0$$

$$-N_7 + N_4 \cdot \cos(225°) + N_6 \cos(-45°) - F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -N_{4y} - N_5 - N_{6y} = 0$$

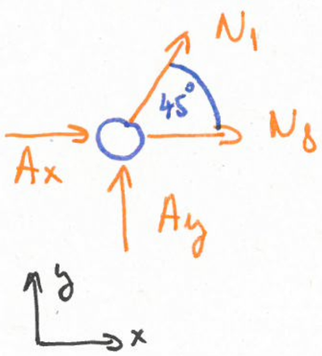
$$N_4 \sin(225°) - N_5 + N_6 \sin(-45°) = 0 \quad (2)$$

(2): $N_4 = \dfrac{N_5 + N_6 \sin(-45°)}{\sin(225°)} = \underline{\underline{70{,}71\ N}}$ (húzott)

(1): $N_7 = -F_2 + N_6 \cos(-45°) + N_4 \cos(225°) = \underline{\underline{-300\ N}}$ (nyomott)

Induljunk el a másik oldalról is!

A-csukló



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + N_8 + N_{1x} = 0$$

$$A_x + N_8 + N_1 \cos(45°) = 0 \quad (1)$$

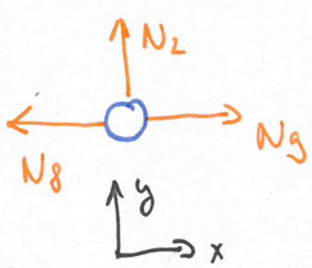
$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + N_{1y} = 0$$

$$A_y + N_1 \sin(45°) = 0 \quad (2)$$

(2): $N_1 = \dfrac{-A_y}{\sin(45°)} = \underline{\underline{-494{,}98\ N}}$ (nyomott)

(1): $N_8 = -A_x - N_1 \cos(45°) = \underline{\underline{150\ N}}$ (húzott)

E-csukló



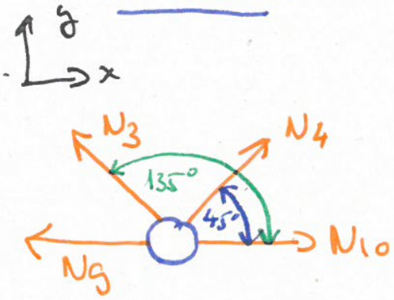
Egyensúlyi egyenletek

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_8 + N_9 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{N_2 = 0} \quad \text{(vakrúd)} \quad (2)$$

(1): $N_9 = N_8 = \underline{\underline{150\ N}}$ (húzott)

F csukló



Csak egy ismeretlen

Egyensúlyi egyenlet

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_9 - N_{3x} + N_{4x} + N_{10} = 0$$

$$-N_9 + N_3 \cos(135°) + N_4 \cos(45°) + N_{10} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{3y} + N_{4y} = 0$$

$$N_3 \sin(135°) + N_4 \sin(45°) = 0 \quad (2)$$

(2): ↳ $N_3 = \dfrac{-N_4 \sin(45°)}{\sin(135°)} = \underline{\underline{-70{,}71\,N}}$ (nyomott)

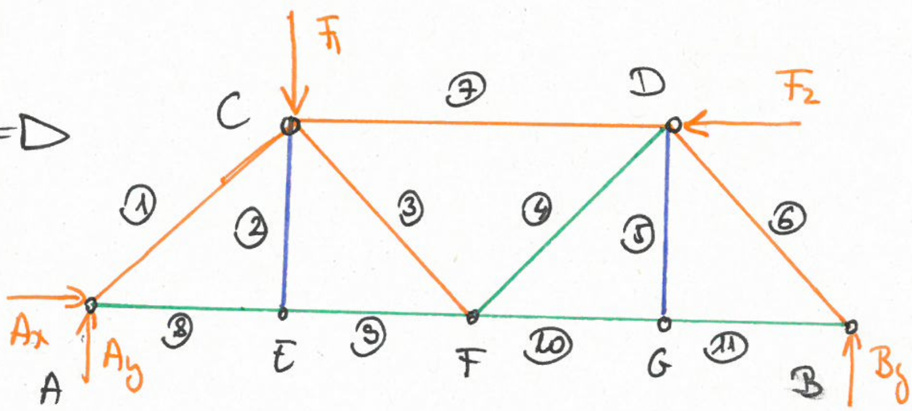
↳ Minden rúderő ismert

↳ C csuklót fel sem írtuk ⟹ ellenőrzés!

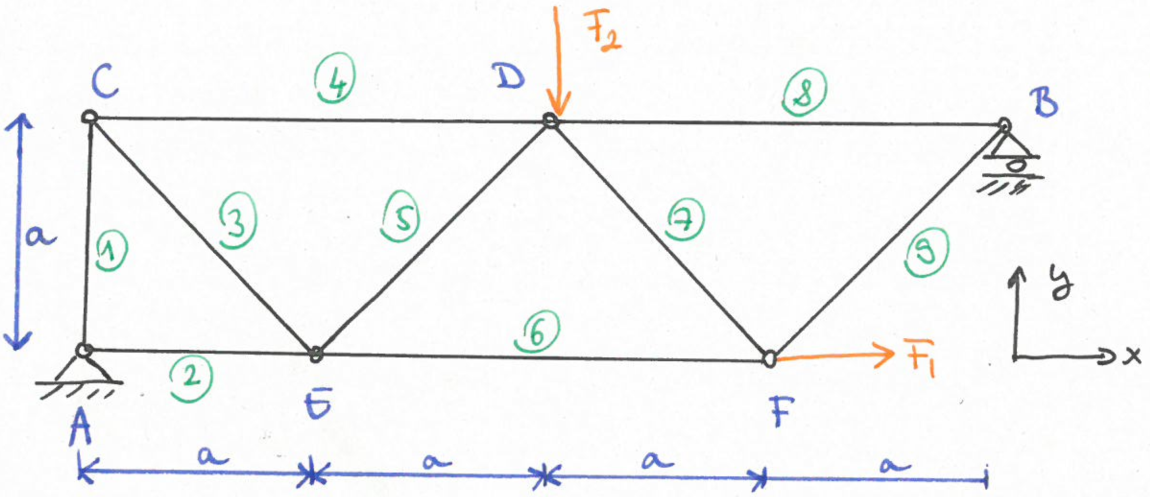
Eredmények összefoglalása.

$N_1 = -494{,}98\,N$
$N_2 = 0\,N$
$N_3 = -70{,}71\,N$
$N_4 = 70{,}71\,N$
$N_5 = 0\,N$
$N_6 = -70{,}71\,N$
$N_7 = -300\,N$
$N_8 = 150\,N$
$N_9 = 150\,N$
$N_{10} = 50\,N$
$N_{11} = 50\,N$

⟹



$\boxed{\text{2. feladat}}$ Határozzuk meg átmetsző módszerrel a 6-os és a 7-es rúderőket!



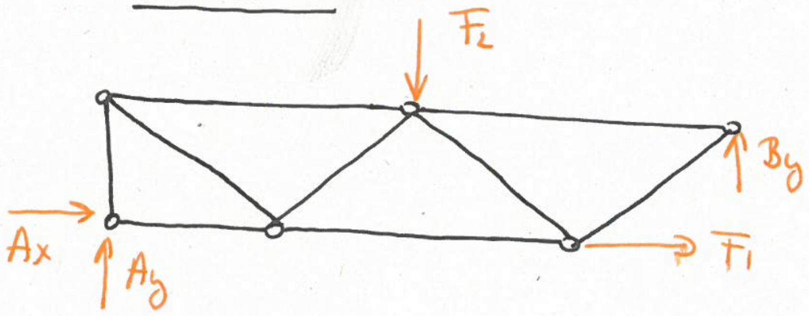
Adatok

$a = 1\,m$

$F_1 = 100\,N$

$F_2 = 200\,N$

Reakcióerők:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + F_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - F_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow -F_2 \cdot 2a + B_y \cdot 4a = 0 \quad (3)$$

(1): $A_x = -F_1 = \underline{\underline{-100\,N}}$

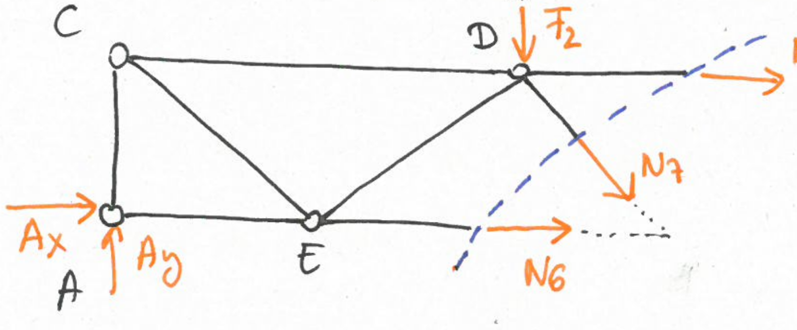
(3): $B_y = \dfrac{F_2 \cdot 2a}{4a} = \dfrac{1}{2} F_2 = \underline{\underline{100\,N}}$

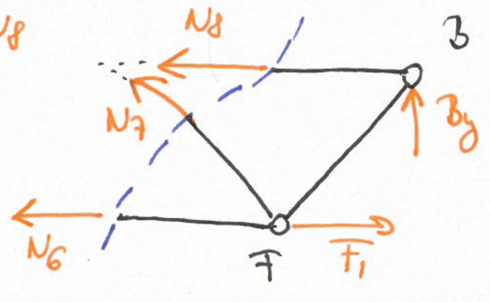
(2): $A_y = F_2 - B_y = \underline{\underline{100\,N}}$

Átmetsző módszer:

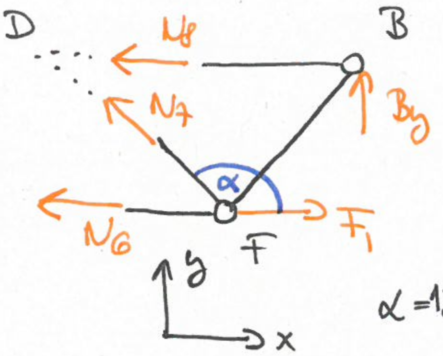
Úgy kell elvágni a szerkezetet, hogy a keresett erők megjelenjenek

Fontos, hogy ne egy csuklóba záródjanak! $\boxed{6-7-8}$





Válasszuk a jobboldali ábrát.



$\alpha = 135°$

Itt is egyensúly van!

$\Downarrow$

Egyensúlyi egyenletek!

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -N_6 - N_{7x} - N_8 + F_1 = 0$$

$$-N_6 + N_7 \cdot \cos\alpha - N_8 + F_1 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + N_{7y} = 0$$

$$B_y + N_7 \sin\alpha = 0 \quad (2)$$

Nekünk N_6 és N_7 kell!

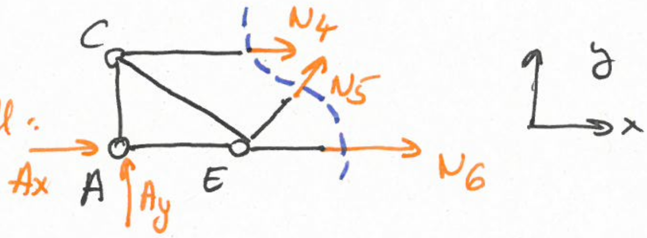
$$\sum M_D = 0 \rightarrow B_y \cdot 2a + F_1 \cdot a - N_6 \cdot a = 0 \quad (3)$$

$$(3): \quad N_6 = \frac{B_y \cdot 2a + F_1 \cdot a}{a} = 2B_y + F_1 = \underline{\underline{300\,N}} \text{ (húzott)}$$

$$(2): \quad N_7 = \frac{-B_y}{\sin\alpha} = \frac{-B_y}{\sin(135°)} = \underline{\underline{-141{,}42\,N}} \text{ (nyomott)}$$

Gyakorlás — N_4 rúderő

Most másmilyen átmetszés kell:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + N_4 + N_6 + N_{5x} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + N_{5y} = 0 \quad (2)$$

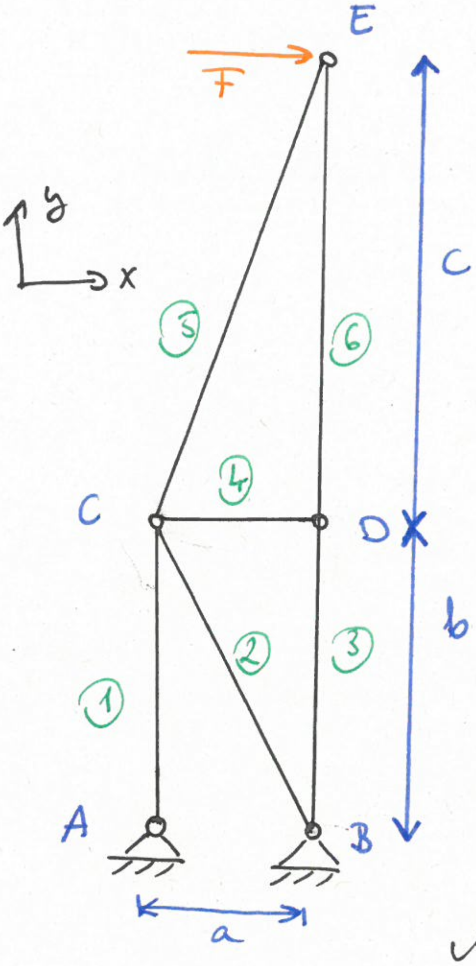
$$\sum M_E = 0 \rightarrow -A_y \cdot a - N_4 \cdot a = 0 \quad (3)$$

Most elég megoldani a (3)-as egyenletet

$$(3): \quad N_4 = \frac{-A_y \cdot \cancel{a}}{\cancel{a}} = -A_y = \underline{\underline{-100\,N}} \text{ (nyomott)}$$

3. feladat

Határozzuk meg a rudakban ébredő rúderőket és a reakciókat csomóponti módszerrel!



Adatok

$a = 1\,m$

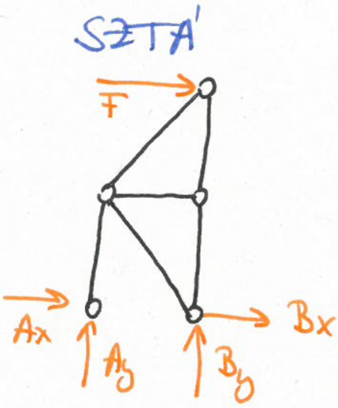
$b = 2\,m$

$c = 3\,m$

$F = 1000\,N$

Probléma!

SZTA



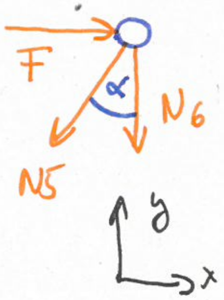
4 ismeretlen (A_x, A_y, B_x, B_y) de csak 3 db egyenlet!

⇓ Nem tudjuk a reakciókat előre számolni

Melyik csomóponttól indulhatunk?

↳ ahol max. 2 db ismeretlen van ⇒ E

E csukló



$$\alpha = \text{arctg}\,\frac{a}{c} = 18{,}435°$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow F - N_{5x} = 0$$

$$F + N_5 \cdot \cos(270° - \alpha) = 0 \quad (1)$$

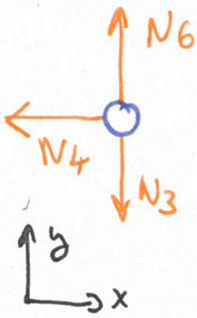
$$\sum F_y = 0 \longrightarrow -N_6 - N_{5y} = 0$$

$$-N_6 + N_5 \cdot \sin(270° - \alpha) = 0 \quad (2)$$

$$(1):\quad N_5 = \frac{-F}{\cos(270° - \alpha)} = \underline{\underline{3162{,}28\,N}} \quad \text{(húzott)}$$

$$(2):\quad N_6 = N_5 \cdot \sin(270° - \alpha) = \underline{\underline{-3000\,N}} \quad \text{(nyomott)}$$

D csukló



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0$ $\boxed{N_4 = 0}$ vakrúd (1)

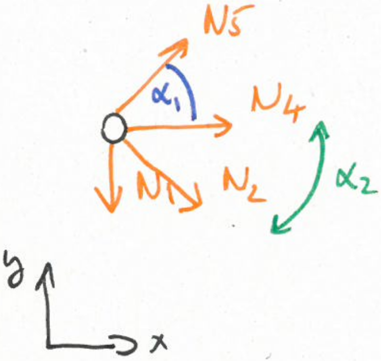
$\sum F_y = 0 \rightarrow -N_3 + N_6 = 0$ (2)

$N_3 = N_6 = \underline{\underline{-3000\ \mathrm{N}}}$ (nyomott)

C csukló

$\alpha_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{c}{a} = 71,565°$

$\alpha_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{a}{b} = 63,435°$



Egyensúlyi egyenletek

$\sum F_x = 0 \rightarrow N_4 + N_{5x} + N_{2x} = 0$

$N_4 + N_5 \cdot \cos(\alpha_1) + N_2 \cos(-\alpha_2) = 0$ (1)

$\sum F_y = 0 \rightarrow -N_1 - N_{2y} + N_{5y} = 0$

$-N_1 + N_2 \cdot \sin(\alpha_2) + N_5 \sin(\alpha_1) = 0$ (2)

(1): $N_2 = \dfrac{-N_4 - N_5 \cdot \cos(\alpha_1)}{\cos(-\alpha_2)} = \underline{\underline{-2236,08\ \mathrm{N}}}$ (nyomott)

(2): $N_1 = N_2 \sin(\alpha_2) + N_5 \cdot \sin(\alpha_1) = \underline{\underline{5000\ \mathrm{N}}}$ (húzott)

Most minden rúderő ismert

$N_1 = 5000$ N

$N_2 = -2236,08$ N

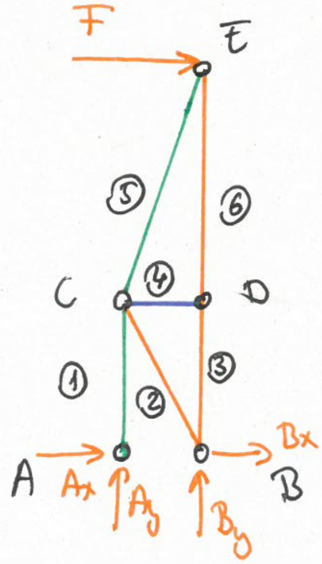
$N_3 = -3000$ N

$N_4 = 0$ N

$N_5 = 3162,28$ N

$N_6 = -3000$ N

$\Longrightarrow$

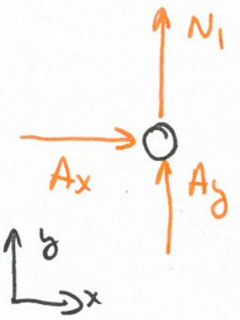


Reakciók?

$\Downarrow$

A és B csuklóknál!

A csukló



Egyensúlyi egyenletek:

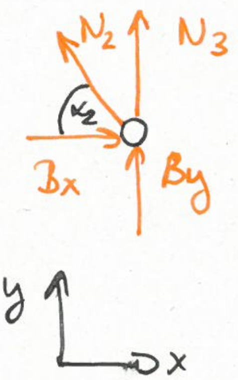
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + N_1 = 0$$

$$A_y = -N_1 = -5000\,N$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5000 \end{bmatrix} N$$

B csukló:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x - N_{2x} = 0$$

$$B_x + N_2 \cdot \cos(180° - \alpha_2) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + N_3 + N_{2y} = 0$$

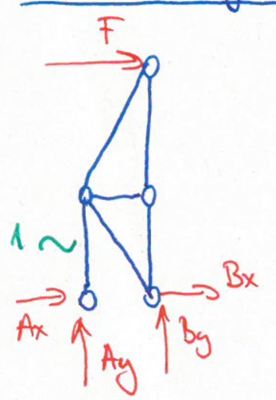
$$B_y + N_3 + N_2 \sin(180° - \alpha_2) = 0 \quad (2)$$

(1): $B_x = -N_2 \cos(180° - \alpha_2) = -1000\,N$

(2): $B_y = -N_3 - N_2 \sin(180° - \alpha_2) = 5000\,N$

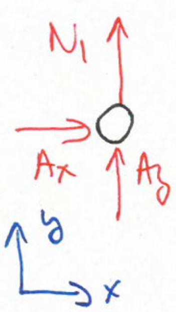
$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 5000 \end{bmatrix} N$$

- Másik megoldási módszer Reakciók kiszámítására



Az 1-es rúdban csak rúdirányú erő lehet

$\Downarrow$ A csomópont



$\rightarrow \sum F_x = 0 \quad \boxed{A_x = 0}$!

Tehát az ismeretlen rendszerű reakciók: $\boxed{A_y, B_y, B_x}$

3 egyensúlyi egyenletből megoldható