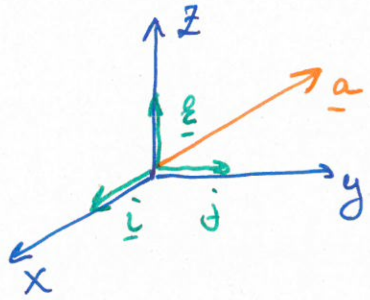
Statika - 2. gyakorlat

Vektoralgebra, Erők, erőrendszerek

Ismétlés a múlt hétről:



$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

$(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$

fogalmak: koordináta, bázis

$$\underline{a} = \underbrace{|\underline{a}|}_{\text{vektor hossza}} \underline{e}_a = a\, \underline{e}_a$$

$\underline{e}_a \rightarrow$ irány

Műveletek:

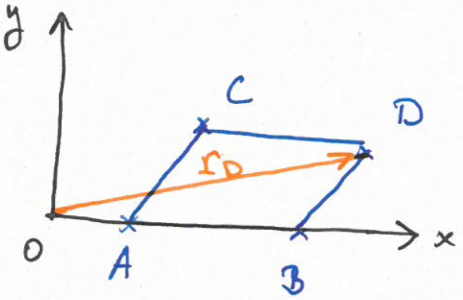
- összeadás
- kivonás
- szorzás
  - $\nearrow$ skaláris $\quad \underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos\alpha$
  - $\searrow$ vektoriális $\quad |\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin\alpha$

geometriai összefüggés $\downarrow$

1. feladat Adott az ABCD paralelogramma 3 csúcspontja

A (1,0,0); B(5,0,0); C(2,2,0)

Határozzuk meg a negyedik D csúcs helyét!



$\underline{r}_D$ - a D-be mutató helyvektor

Paralelogramma: szemközti oldalak párhuzamosak

$$\underline{r}_{AB} = \underline{r}_{CD}.$$

$$\underline{r}_{AB} = \underline{r}_B - \underline{r}_A = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \underline{r}_D = \underline{r}_C + \underline{r}_{CD} = \underline{r}_C + \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. feladat Milyen t érték mellett lesz merőleges egymásra az alábbi két vektor?

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} t \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ t \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \text{ha } \underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Longleftrightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$$

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = -3t + 20 + t = 20 - 2t = 0$$

$$\underline{\underline{t = 10}}$$

3. feladat Számítsuk ki az alábbi két vektor által bezárt szög koszinuszát!

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

<u>geometriai azonosság</u>: $\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}| \cos\alpha$

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = -6 - 8 + 24 = 10$$

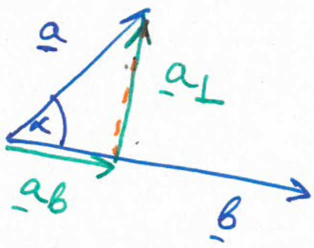
$$|\underline{a}| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6 \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|} = \frac{10}{6\cdot 7}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{3^2+2^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\underline{\underline{\cos\alpha = 0{,}238}}$$

4. feladat Határozzuk meg az $\underline{a}$ vektor $\underline{b}$-be eső vetületét, valamint a $\underline{b}$-re merőleges vetületét!

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$|\underline{a}_b| = |\underline{a}| \cos\alpha$$

$$\underline{a}_b = |\underline{a}_b| \cdot \underline{e}_b \leftarrow \text{b irányú egységvektor} : \underline{e}_b = \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$$

$$\underline{a}_b = (\underline{a}\cdot\underline{e}_b)\cdot\underline{e}_b = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|^2}\cdot\underline{b} = \frac{18}{3^2}\cdot\underline{b} = 2\cdot\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

A $\underline{b}$-re merőleges vetület:

$$\underline{a} = \underline{a}_b + \underline{a}_\perp \quad \rightarrow \quad \underline{a}_\perp = \underline{a} - \underline{a}_b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Ellenőrzés:

$$\underline{a}_b \cdot \underline{a}_\perp = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 - 8 + 4 = 0 \ \checkmark$$

$\boxed{\text{5. feladat}}$ Számítsuk ki $\underline{a} \cdot \underline{b}$ értékét, ha $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{b}| = 26$ és $|\underline{a} \times \underline{b}| = 72$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \cdot \sin\alpha \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{|\underline{a}||\underline{b}|} = 0{,}923$$

$$\alpha_1 = 112{,}62° + k \cdot 360°$$
$$\alpha_2 = 67{,}38° + k \cdot 360° \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\alpha = \pm 0{,}3846$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cdot \cos\alpha = \underline{\underline{\pm 30}}$$

$\boxed{\text{6. feladat}}$ Számítsuk ki az $|(\underline{a}+\underline{b}) \times (\underline{a}-\underline{b})|$ és $|(3\underline{a}-\underline{b}) \times (\underline{a}-2\underline{b})|$ kifejezések értékét, ha $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{b}| = 4$ és $\underline{\underline{\alpha = 90°}}$ ($\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőleges!)

- $$|(\underline{a}+\underline{b}) \times (\underline{a}-\underline{b})| = |\underline{a} \times \underline{a} - \underline{a} \times \underline{b} + \underbrace{\underline{b} \times \underline{a}}_{-\underline{a} \times \underline{b}} - \underline{b} \times \underline{b}| = |-2\, \underline{a} \times \underline{b}|$$

$$= 2|\underline{a} \times \underline{b}| = 2|\underline{a}||\underline{b}| \sin\alpha = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = \underline{\underline{24}}$$

- $$|(3\underline{a}-\underline{b}) \times (\underline{a}-2\underline{b})| = |3\underline{a} \times \underline{a} - 6\underline{a} \times \underline{b} \underbrace{- \underline{b} \times \underline{a}}_{\underline{a} \times \underline{b}} + 2\underline{b} \times \underline{b}| = 5|\underline{a} \times \underline{b}|$$

$$= 5|\underline{a}||\underline{b}| \sin\alpha = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = \underline{\underline{60}}$$

7. feladat Számítsuk ki $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által bezárt szög szinuszát! Adjunk meg egy olyan $\underline{c}$ vektort az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ síkjában amely merőleges $\underline{a}$-ra!

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -12-3 \\ 2-12 \\ 6+4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -15 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}}}$$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{15^2 + 10^2 + 10^2} = \sqrt{425} = 20,616$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{4+9+36} = 7$$

$$\sin\alpha = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|} = \frac{20,616}{3 \cdot 7}$$

$$\sin\alpha = \underline{\underline{0,982}}$$

Ha $\underline{c}$ vektor $\underline{a}$ és $\underline{b}$ síkjában van

$$\underline{c} = \alpha\,\underline{a} + \beta \cdot \underline{b} \quad \text{(nekünk elég egy ilyet megadni)}$$

$$\alpha = 1$$

$$\boxed{\underline{c} = \underline{a} + t \cdot \underline{b}}$$

ha $\underline{c} \perp \underline{a}$

↳ $\underline{c} \cdot \underline{a} = 0$!

$$\underline{a} \cdot (\underline{a} + t \cdot \underline{b}) = \underline{a} \cdot \underline{a} + t \cdot \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$

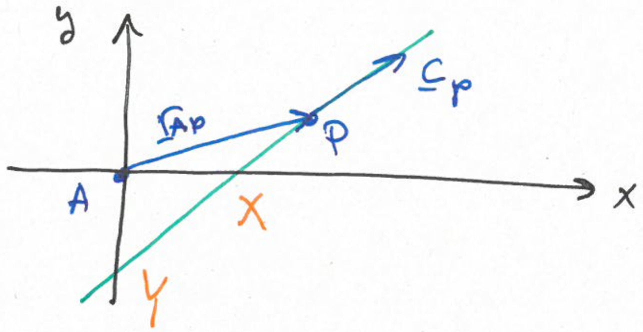
$$t = -\frac{\underline{a} \cdot \underline{a}}{\underline{a} \cdot \underline{b}} = -\frac{4+4+1}{4-6+6} = \underline{\underline{-\frac{9}{4}}}$$

$$\underline{c} = \underline{a} - \frac{9}{4}\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{9}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5/2 \\ -35/4 \\ -25/2 \end{bmatrix}}}$$

Ellenőrzés:

$$\underline{a} \cdot \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5/2 \\ -35/4 \\ -25/2 \end{bmatrix} = -5 + \frac{35}{2} - \frac{25}{2} = \underline{\underline{0}} \checkmark$$

8. feladat Adott $\underline{r}_{AP}$ és $\underline{c}_P$. Határozzuk meg a P pontban támadó $\underline{c}_P$ vektor hatásvonalának a koordinátatengelyekkel vett metszéspontját!



$$\underline{r}_{AP} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{c}_P = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{AX} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{r}_{Ay} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{AX} = \underline{r}_{AP} + \lambda \cdot \underline{c}_P = \begin{bmatrix} 12 - 8\lambda \\ 5 + 4\lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow 5 + 4\lambda = 0$$

$$\underline{\underline{\lambda = -\frac{5}{4}}}$$

$$\underline{r}_{AX} = \begin{bmatrix} 12 - 8 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{r}_{Ay} = \underline{r}_{AP} + \eta \cdot \underline{c}_P = \begin{bmatrix} 12 - 8\eta \\ 5 + 4\eta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow 12 - 8\eta = 0$$

$$\underline{\underline{\eta = \frac{3}{2}}}$$

$$\underline{r}_{Ay} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 + 4 \cdot \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Erők, erőrendszerek

- $\underline{F}$ erő → támadáspont és vektor

↳ hatása → toló → merev test esetén a hatásvonal mentén eltolható

→ forgató: A pontra számítva

$$\boxed{\underline{M}_A = \underline{r}_{AP} \times \underline{F}}$$

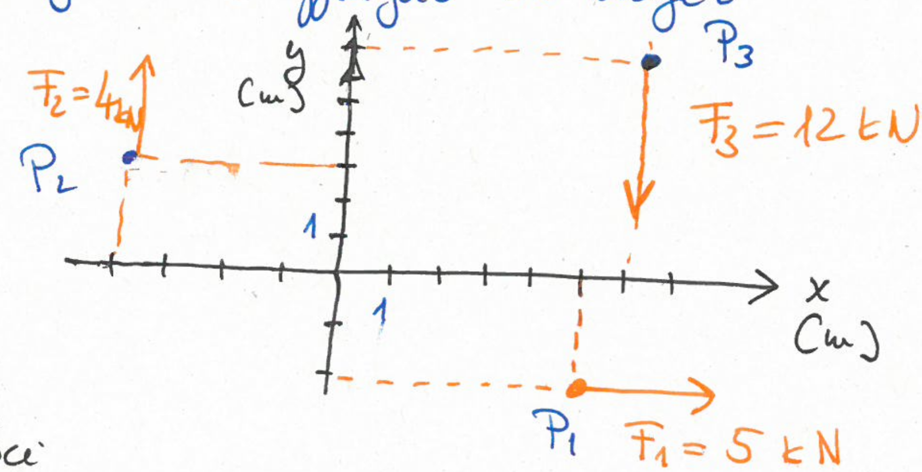
ez is vektormennyiség!

Statika axiómái → Erőösszeg:
két közös támadáspontú erőrendszer helyettesíthető egyetlen erővel, amely a két erő vektori eredője!

$\boxed{\text{9. feladat}}$ Határozzuk meg az alábbi síkbeli erőrendszer $\underline{F}_e$ eredőjének nagyságát és helyét

a) szerkesztéssel

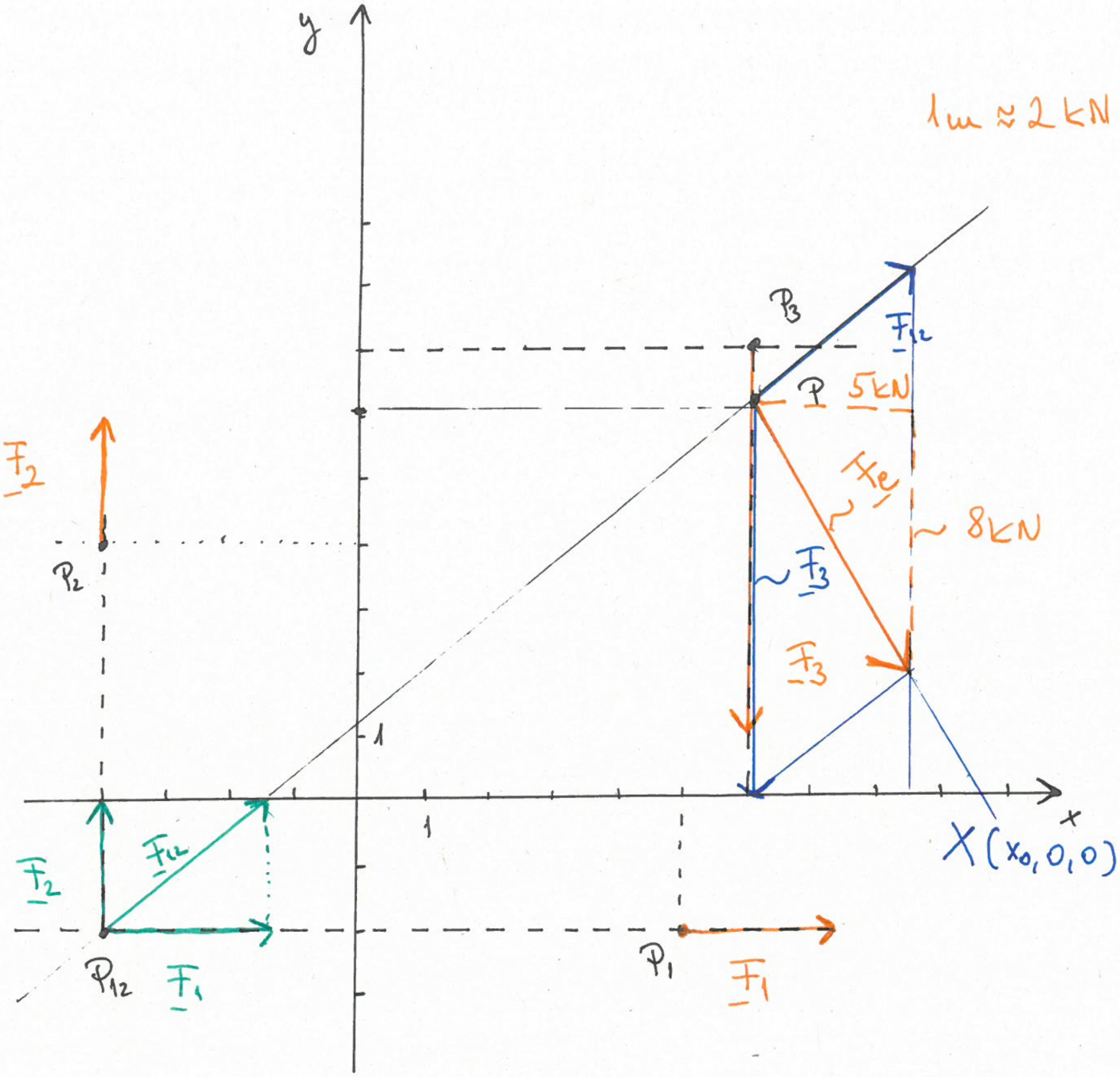
b) számítással



A szerkesztés lépései

① $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ eredőjének szerkesztése

② Ennek az eredőnek és $\underline{F}_3$-nak az eredője



A lépések

① Közös pontba toljuk $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ vektorokat (P_{12})

↳ hatásvonalaik metszéspontja

② Eredőjük megszerkesztése $\underline{F}_{12}$

③ $\underline{F}_{12}$ és $\underline{F}_3$ közös pontba toljuk → hatásvonalak metszéspontja (P)

④ $\underline{F}e$ eredőnő szerkesztése $\quad \underline{r}_P = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

⑤ Eredmények leolvasása

$$\underline{F}e \approx \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \text{kN} \qquad \underline{r}_X = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 9{,}75 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m}$$

b) számítással

Írjuk fel a koncentrált erők helyvektorait és az erővektorokat!

- $\underline{r}_1 = \underline{r}_{OP_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ m $\qquad \underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kN
- $\underline{r}_2 = \underline{r}_{OP_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ m $\qquad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ kN
- $\underline{r}_3 = \underline{r}_{OP_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ m $\qquad \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$ kN

Számítsuk ki az erőrendszer eredőjét az $\underline{O}$-ra!

↳ erők eredője: $\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$ kN

De fontos, hogy lesz nyomaték is $\underline{O}$-ra!

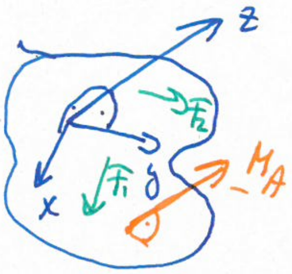
$$\underline{M}_O = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \times \underline{F}_3$$

$$\underline{M}_O = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 7 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

Vegyük észre, hogy síkfeladat esetén (amikor a koncentrált erők egy síkban helyezkednek el) az erőkből adott A pontra számított nyomatékvektor a síkra merőleges

↳ Másképp: Síkbeli erőrendszernél a redukált nyomatéknak nincs síkba eső komponense!



$\underline{F}_e$ hatásvonalának és az x-tengely metszéspontjának meghatározása:

↳ $\underline{F}_e$ szabadon eltolható a hatásvonala mentén.

Toljuk el az $X(x_0, 0, 0)$ pontba

↓ itt metszi az x-tengelyt

Ekkor az $\underline{M}_O$ ($\underline{O}$-ra számított nyomatéknak ugyanakkorának kell lennie)

azaz
$$\underline{M}_O = \underline{r}_{OX} \times \underline{F}_e = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_0 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8x_0 \end{bmatrix}$$

Vagyis
$$\underline{M}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} \text{kNm} \quad \text{és} \quad \underline{M}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8x_0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \frac{-78}{-8} = \underline{\underline{9{,}75\,\text{m}}}$$

Vagy vektorosan

$$\underline{M}_0 = (x_0\,\underline{i}) \times (5\,\underline{i} - 8\,\underline{j}) = 5x_0\,\underbrace{\underline{i}\times\underline{i}}_{\underline{0}} - 8x_0\,\underbrace{\underline{i}\times\underline{j}}_{\underline{k}}$$

$$\underline{M}_0 = -8x_0\,\underline{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\-8x_0\end{bmatrix}$$

Skalár egyenletekkel:

Síkfeladat esetén a nyomaték a síkra merőleges! ⇒ skalár egyenletekkel számítható

$$M_A = F \cdot k$$

nyomaték nagyság

erő nagyság

az erő hatásvonalának és az A pont távolsága

Fontos: Az előjelre nekünk kell figyelni! Jobbkéz-szabály!

Esetünkben:

$$M_0 = +F_1\cdot k_1 - F_2\cdot k_2 - F_3\cdot k_3$$

$$M_0 = +5\cdot 2 - 4\cdot 4 - 12\cdot 6 = \underline{\underline{-78\ \mathrm{kNm}}}$$