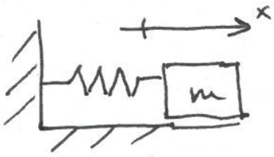
Rezgéstan - 2. hét

1 DoF lengőrendszerek

Elméleti összefoglalás



legegyszerűbb mechanikai modell : gerjesztetlen, csillapítatlan

Matematikai modell:

$$m\ddot{x} + sx = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

megoldás

$$x(t) = C_1 \cos\alpha t + C_2 \sin\alpha t$$

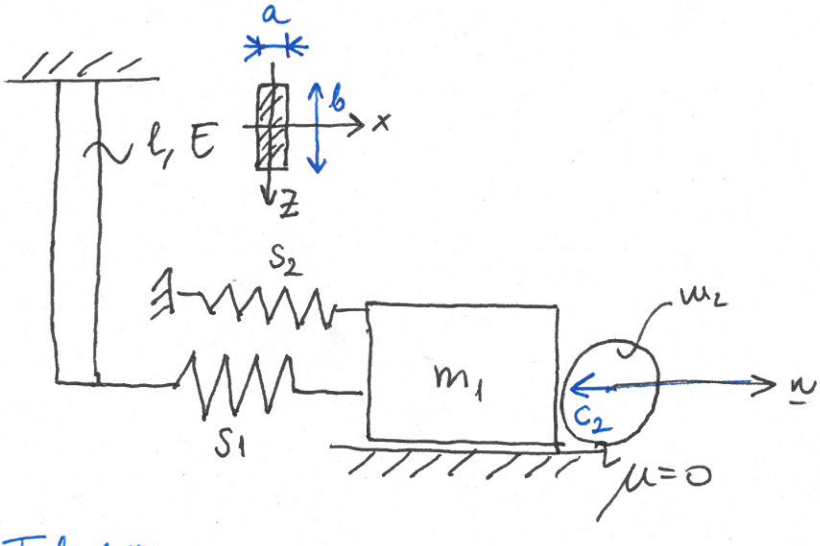
A kezdeti feltételből „speciális mo"

$\alpha = \sqrt{\frac{s}{m}}$ - sajátkörfrekvencia $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$f = \frac{\alpha}{2\pi}$ - sajátfrekvencia $[Hz]$

$T = \frac{2\pi}{\alpha}$ - periódusidő $[s]$

Feladat



Adatok:

$a = 6\,[mm]$

$b = 25\,[mm]$

$l = 0{,}5\,[m]$

$s_1 = 100\,\left[\frac{N}{m}\right]$

$s_2 = 50\,\left[\frac{N}{m}\right]$

$m_1 = 5\,[kg]$

$m_2 = 1\,[kg]$

$E = 210\,[GPa]$

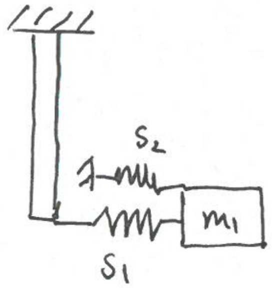
$c_2 = 0{,}6\,\left[\frac{m}{s}\right]$

$k = 0{,}5$

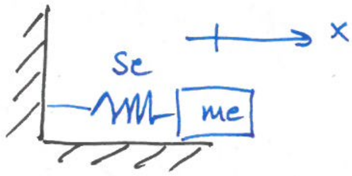
Feladat:

1) Határozza meg a rendszer sajátkörfrekvenciáját!

2) Az ütközési feladat megoldásával kapott feltételek mellett határozzuk meg a maximális sebességet (v_{max}) és a maximális gyorsulást (a_{max}). Rajzoljuk fel a foronómiai görbéket!



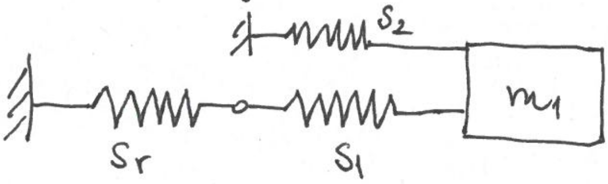
helyettesítő ⟹ mechanikai modell



$\underbrace{s_e, m_e}$ – egyenértékű

cél, ezek meghatározása

- a rúd tömege elhanyagolható
  ~ rugóként modellezhető



- $\underline{s_r}$ – Szilárdságtanból mutatottal!

$f = \frac{F\cdot l^3}{3IE}$

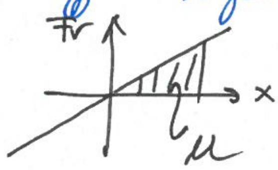
$I = I_z = \frac{b\cdot a^3}{12} = 4,5\cdot 10^{-10}\,[m^4]$

a hajlítás tengelyére!

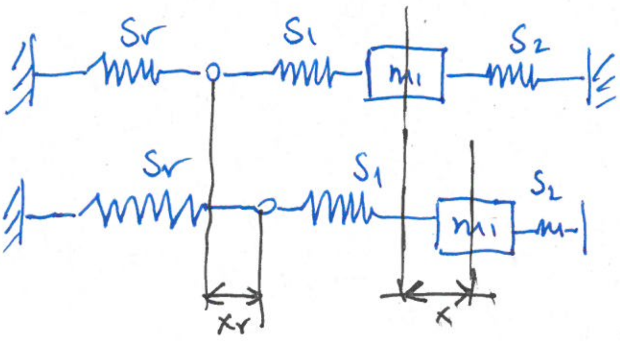
$$s_r = \frac{F}{f} = \frac{3IE}{l^3} = 2160\left[\frac{N}{m}\right]$$

↳ Egyenértékű rugómerevség: Potenciális energia egyenlősége

↳ Az egyenértékű modellben $U = \frac{1}{2} s_e x^2$



↳ A valós modell



↓ ha az m tömeg elmozdul

$$U = \frac{1}{2} s_r x_r^2 + \frac{1}{2} s_1 (x - x_r)^2 + \frac{1}{2} s_2 x^2 \implies \text{át kell alakítani}$$

$U = \frac{1}{2}(\cdot)\, x^2$

alakra!

Tudjuk $F_1 = F_r$ mert s_1 és s_r sorosan van kapcsolva

$$s_1(x-x_r) = s_r x_r$$

$$s_1 x = (s_1+s_r)x_r$$

↳ $\boxed{x_r = \frac{s_1}{s_1+s_r}x}$

$$U = \frac{1}{2}s_r\left(\frac{s_1}{s_1+s_r}\right)^2 x^2 + \frac{1}{2}s_1\left(x-\frac{s_1}{s_1+s_r}x\right)^2 + \frac{1}{2}s_2 x^2$$

$$U = \frac{1}{2}s_r\left(\frac{s_1}{s_1+s_r}\right)^2 x^2 + \frac{1}{2}s_1\left(1-\frac{s_1}{s_1+s_r}\right)^2 x^2 + \frac{1}{2}s_2 x^2$$

$$U = \frac{1}{2}\underbrace{\left[s_r\left(\frac{s_1}{s_1+s_r}\right)^2 + s_1\left(\frac{s_r}{s_1+s_r}\right)^2 + s_2^2\right]}_{s_e} x^2 = \frac{1}{2}s_e x^2$$

$$s_e = \frac{s_r s_1^2 + s_1 s_r^2}{(s_1+s_r)^2} + s_2 = \frac{s_1 s_r(s_1+s_r)}{(s_1+s_r)^2} + s_2 = \underline{\underline{\frac{s_1\cdot s_r}{s_1+s_r} + s_2}}$$

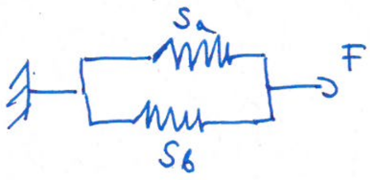
$$s_e = \underline{\underline{145{,}575\left[\frac{N}{m}\right]}}$$

Megjegyzés

↳ soros kapcsolás:

$s = \frac{s_a\cdot s_b}{s_a+s_b}$

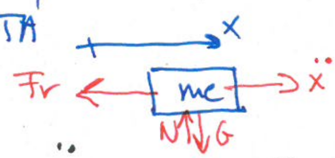
↳ párhuzamos kapcsolás



$s = s_a+s_b$

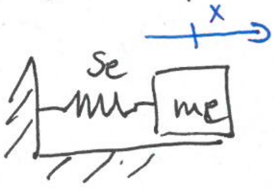
Egyenértékű modell

SZTÁ



$F_r = s_e\cdot x$

$m_e = m_1$



$$\Longrightarrow \quad m_e\ddot{x} + s_e x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{s_e}{m_e}x = 0$$

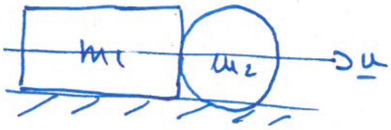
$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0 \longrightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{s_e}{m_e}} = \underline{\underline{5{,}39\left[\frac{rad}{s}\right]}}$$

$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0$ + Kezdeti értékek!

↓ ütközésből!

Centrikus ütközés

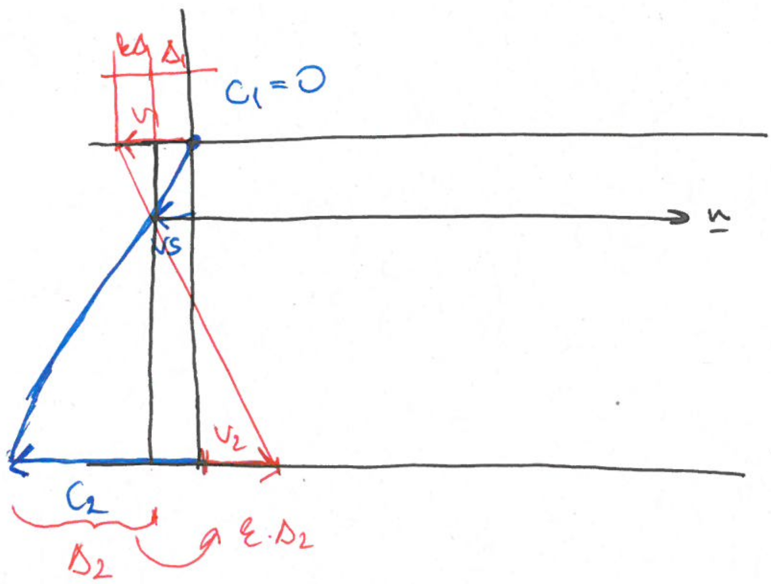
$c_1 = 0\ \left[\frac{m}{s}\right]$ $\qquad c_2 = -0,6\ \left[\frac{m}{s}\right]$



$m_1 = 5\ [kg]$ $\qquad m_2 = 1\ [kg]$

$$v_S = c_S = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2} = \underline{\underline{-0,1\ \left[\frac{m}{s}\right]}}$$

Maxwell-ábra



$\sim m_2$ $\qquad v_1 = v_S + k(v_S - c_1) = \underline{-0,15\left[\frac{m}{s}\right]}$

$\sim m_1$ $\qquad v_2 = v_S + k(v_S - c_2) = \underline{0,15\left[\frac{m}{s}\right]}$

Kezdeti feltételek $\quad x(0) = x_0 = 0\ ; \quad \dot{x}(0) = v_0 = -0,15\ \left[\frac{m}{s}\right]$

$$x(t) = C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t) = A \cdot \sin(\alpha t + \delta)$$

$$\dot{x}(t) = -C_1 \alpha \sin(\alpha t) + C_2 \alpha \cos(\alpha t) = A\alpha \cos(\alpha t + \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = -C_1 \alpha^2 \cos(\alpha t) - C_2 \alpha^2 \sin(\alpha t) = -A\alpha^2 \sin(\alpha t + \delta)$$

$x(0) = A \cdot \sin(\delta) = 0 \qquad A \neq 0 \Rightarrow \sin\delta = 0 \quad \delta = 0, \pi, \ldots$

$\dot{x}(0) = v_1 = A \cdot \alpha \cdot \cos\delta$

ha $\delta = 0 \rightarrow \quad A = \frac{v_1}{\alpha} = -0,0278\ (m)$

↳ ne legyen negatív

$\delta = \pi$

$\Rightarrow A = 0,0278\ (m)$

Tehát: $x(t) = 0{,}0278 \cdot \sin(5{,}39t + \pi)$

$\downarrow$ $v_{max} = A \cdot \alpha = -v_1 = 0{,}15 \left(\frac{m}{s}\right)$

$\hookrightarrow$ $a_{max} = A \cdot \alpha^2 = -v_1 \cdot \alpha = \underline{\underline{0{,}8085}} \left(\frac{m}{s^2}\right)$

Foronómiai görbék