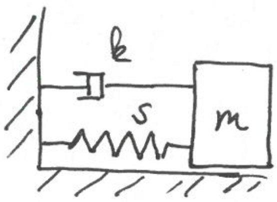
Rezgéstan 4. hét

Csillapított lengőrendszerek

Elméleti összefoglaló

1 DoF, csillapított



$s\left[\frac{N}{m}\right]$ - rugómerevség

$k\left[\frac{Ns}{m}\right]$ - csillapítási tényező

$$m\ddot{x}+k\dot{x}+sx=0$$

$$\boxed{\ddot{x}+2D\alpha\dot{x}+\alpha^2x=0}$$ + kezdeti feltételek!

Karakterisztikus egyenlet: $\lambda^2+2D\alpha\lambda+\alpha^2=0$

$$\Downarrow$$

$$x(t)=C_1\cdot e^{-D\alpha t}\cos(\gamma t)+C_2e^{-D\alpha t}\sin(\gamma t)$$

$\gamma=\alpha\sqrt{1-D^2}$ - A csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája

Csillapítás jellemzése

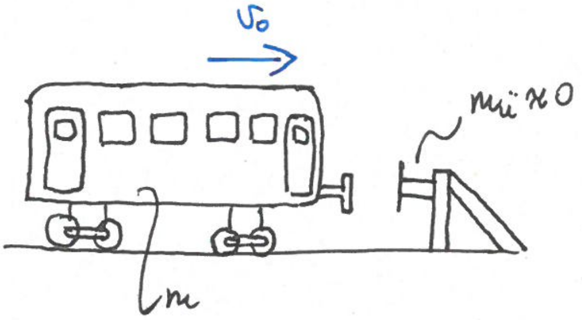
- $k\left[\frac{Ns}{m}\right]$ csillapítási tényező
- D (1) - Lehr-féle (relatív) csillapítási tényező

  $0<D<1$ alul csill.
  $D=1$ krit. csill
  $D>1$ Túlcsill
- Λ (1) - Logaritmikus dekrementum

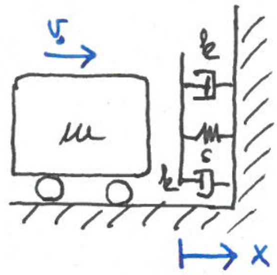
$$\Lambda=\ln\frac{A_0}{A_1}=D\alpha T$$

$$\Lambda=\frac{1}{n}\ln\frac{A_0}{A_n}$$

Feladat: Vasúti szerelvény ütköző



mechanikai modell



Adatok:

$m = 5 \cdot 10^4\ [kg]$

$s = 10^6\ [N/m]$

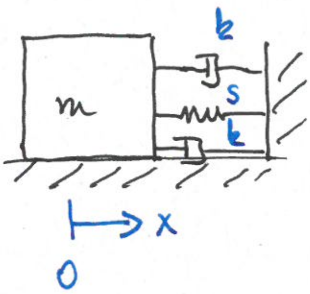
$k = 10^5\ [Ns/m]$

$v_0 = 1\ [m/s]$

Feladat:

1) $F_{r\,max}$ és x_{max} meghatározása
2) A disszipált energia az érintés és az elválás között

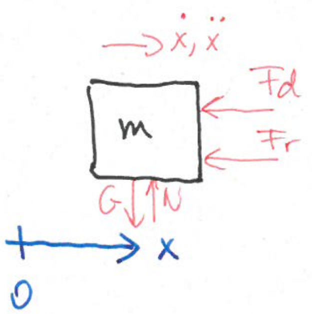
További egyszerűsítés:



+ **kezdeti feltételek:**

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{aligned}\right\}$$ ütközéssel indultunk!

SZTA:



Din. alaptétele

$$\dot{\underline{I}} = \underline{F}$$

$$F_d = 2k\dot{x}$$

$$F_r = sx$$

$$m\ddot{x} = -F_d - F_r$$

$$\Downarrow$$

$$m\ddot{x} + 2k\dot{x} + sx = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{m}\dot{x} + \frac{s}{m}x = 0}$$

$2D\alpha = \frac{2 \cdot k}{m}$ $\quad$ $\alpha^2 = \frac{s}{m}$

+ kezd. felt.:

$x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = v_0$

- $\alpha = \sqrt{\frac{s}{m}} = 4{,}47 \left[\frac{rad}{s}\right]$ (a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája)
- $D = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{2k}{m} = \frac{k}{\alpha m} = \underline{\underline{0{,}45\ [-]}}$ (alulcsill $0 < D < 1$)
- $\gamma = \alpha \cdot \sqrt{1 - D^2} = 4 \left[\frac{rad}{s}\right]$ (a csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája)

$\boxed{\gamma < \alpha}$!

Lengésidő:
$$T = \frac{2\pi}{\gamma} = \underline{\underline{1{,}57\ [s]}}$$
$$f = \frac{\gamma}{2\pi} = 0{,}64\ [Hz]$$
csillapított!!

Általános megoldás:

$$x(t) = C_1 e^{-D\alpha t} \cos(\gamma t) + C_2 e^{-D\alpha t} \sin(\gamma t) = e^{-D\alpha t}(C_1 \cos(\gamma t) + C_2 \sin(\gamma t))$$
$$\dot{x}(t) = -D\alpha e^{-D\alpha t}(C_1 \cos(\gamma t) + C_2 \sin(\gamma t)) + \gamma e^{-D\alpha t}(-C_1 \sin(\gamma t) + C_2 \cos(\gamma t))$$

↓ kezdeti feltételekből

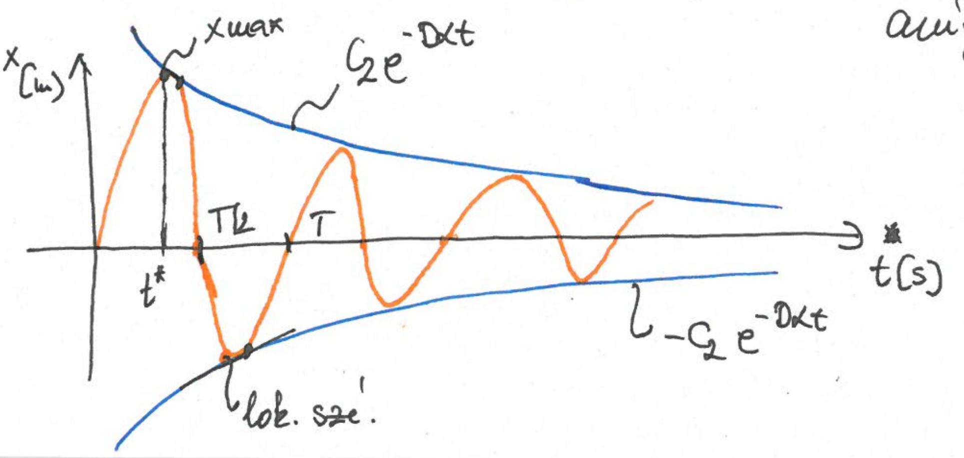
$$x(0) = C_1 + \cancel{C_2 0} = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$
$$\dot{x}(0) = -D\alpha(C_1 + \cancel{C_2 \cdot 0}) + \gamma(\cancel{-C_1 \cdot 0} + C_2) = C_2 \cdot \gamma = v_0$$
$$C_2 = \frac{v_0}{\gamma} = \underline{\underline{0{,}25\ (m)}}$$

Speciális megoldás:

$D\alpha \approx 2$

$$x(t) = 0{,}25 \cdot e^{-2t} \sin(4t)\ [m]$$

Ez a mozgástörvény, amíg a kocsi el nem válik!



$F_{r\,max} = s \cdot x(t)_{max}$

$x(t)_{max} = x(t^*)$ → lokális szé! $\boxed{\dot{x}(t^*) = 0\,!}$

$$\dot{x}(t^*) = -D\alpha\, \cancel{e^{-D\alpha t^*}}\, C_2 \sin(\gamma t^*) + \gamma\, \cancel{e^{-D\alpha t^*}}\, C_2 \cos(\gamma t^*) = 0$$

↳ $$\frac{\gamma}{D\alpha} = \frac{\sin(\gamma t^*)}{\cos(\gamma t^*)} = tg(\gamma t^*)$$

$$t^* = \frac{arctg\left(\frac{\gamma}{D\alpha}\right)}{\gamma} = 0{,}277\,[s] < \frac{T}{4}$$

tudjuk, hogy ilyen megoldás kell!

tg(x) π-n kent periodikus!

$x_{max} = x(t^*) = \underline{0{,}129\,[m]}$

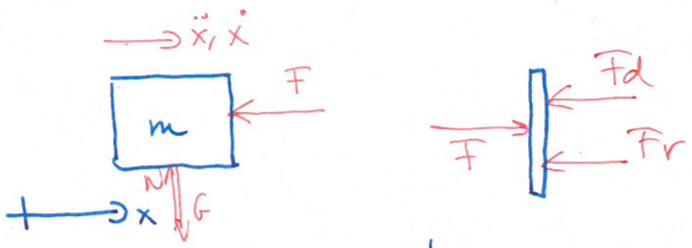
$F_{r\,max} = s \cdot x_{max} = \underline{\underline{128{,}55\,[kN]}}$

2) <u>Mikor fog elválni?</u> → a kontakt az ütköző között nem lehet negatív

⇓

akkor válik el, amikor a kontakterő zérus!

<u>SZTÁ</u>



<u>Din. alaptétele</u>

$m\ddot{x} = -F$

$0 = F - F_d - F_r$ → $F = F_d + F_r$

$F(t) = 2k\dot{x}(t) + s\,x(t)$

vagy

$F(t) = -m\ddot{x}(t)$

Amikor előjelet vált $F(t)$ akkor van az elválás: <u>$\hat{t}$ legyen!</u>

$$\cancel{C_2} S \cdot \cancel{e^{-D\alpha \hat{t}}} \sin(\gamma \cdot \hat{t}) + 2k\, \cancel{e^{-D\alpha \hat{t}}} \left(-\cancel{C_2} D\alpha \sin(\gamma \hat{t}) + \cancel{C_2} \gamma \cos(\gamma \hat{t})\right) = 0$$

$$S \cdot \sin(\gamma \hat{t}) + 2k\gamma \cos(\gamma \hat{t}) - 2k D\alpha \sin(\gamma \hat{t}) = 0$$

$$\frac{2k\gamma}{2kD\alpha - S} = \mathrm{tg}(\gamma \hat{t})$$

$$\frac{\frac{2k}{m}\gamma}{\frac{2k}{m}D\alpha - \frac{S}{m}} = \frac{2D\alpha\gamma}{2D^2\alpha^2 - \alpha^2} = \underline{\underline{\frac{2D\gamma}{(2D^2-1)\alpha} = \mathrm{tg}(\gamma \hat{t})}}$$

$$\Rightarrow \hat{t} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg}\left(\frac{2D\gamma}{(2D^2-1)\alpha}\right) = -0{,}232\,[s]$$

de π-n kelet periodikus

$$\hat{t} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg}\left(\frac{2D\gamma}{(2D^2-1)\alpha} + \pi\right) = \underline{\underline{0{,}553\,[s]}}$$

(vagy $\frac{T}{2}$-t hozzáadni)

$$\boxed{0 < \hat{t} < \frac{T}{2}}$$

A sebesség $\hat{t}$ pillanatban (amikor elválnak)

$$v_1 = \dot{x}(\hat{t}) = -D\alpha e^{-D\alpha \hat{t}} C_2 \sin(\gamma \hat{t}) + C_2 \gamma e^{-D\alpha \hat{t}} \cos(\gamma \hat{t}) = \underline{\underline{-0{,}33 \left[\frac{m}{s}\right]}}$$

$\Rightarrow$ A végzett munka $\to$ A kinetikus Energia megváltozása

$$W^d = T(\hat{t}) - T(t_0) = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \approx \underline{\underline{-22{,}27\,(kJ)}}$$

$$E^d = -W^d = \underline{\underline{22{,}27\,(kJ)}}$$