Rezgéstan 7. hét

1

Gerjesztett, 1DoF lengőrendszer!

Emlékeztető

↳ gerjesztett rendszer általános alakja: $\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = f_0\alpha^2\cos(\omega t)$

vagy

$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = f_0\alpha^2\sin(\omega t)$

$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

$x_p(t)$ olyan, mint a gerjesztés:

ha $\cos(\omega t) \longrightarrow x(t) = A\cdot\cos(\omega t - \vartheta)$

ha $\sin(\omega t) \longrightarrow x(t) = A\sin(\omega t - \vartheta)$

Az amplitúdót és a fázistolást ugyanúgy tudjuk számítani

↳ $A = N\cdot f_0 \rightarrow N = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}}$

↓

nagyítás (a nagyítási görbéből)

↳ $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{2D\lambda}{1-\lambda^2}$ (a fázistolás görbéből)

Mi van akkor, ha több gerjesztés van egyszerre?

⇓

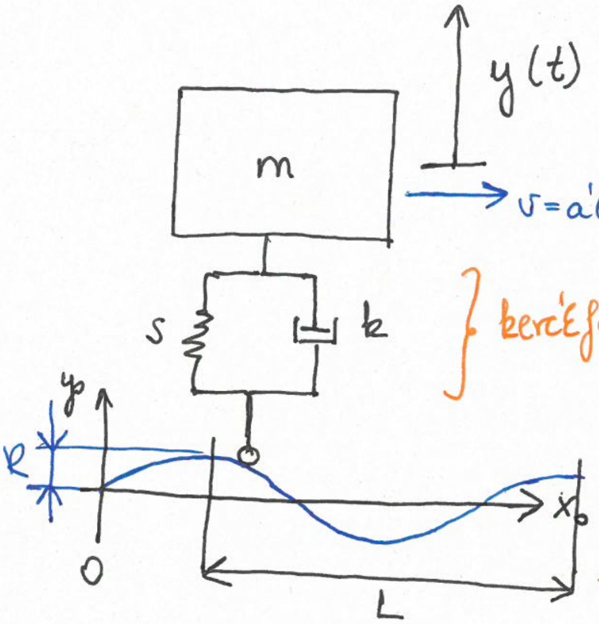
Lineáris rendszer (mert lineáris DE írja le!)

⇓

Szuperpozíció alkalmazható!

Feladat

Jármű negyedmodell



negyed jármű tömeg

kerékfelfüggesztés

egyenetlen úttest.

Adatok:

$m = 300\ [kg]$

$s = 2 \cdot 10^5\ [N/m]$

$k = 9300\ [Ns/m]$

$v = 36\ [km/h] = 10\ [\frac{m}{s}]$

$R = 0{,}04$

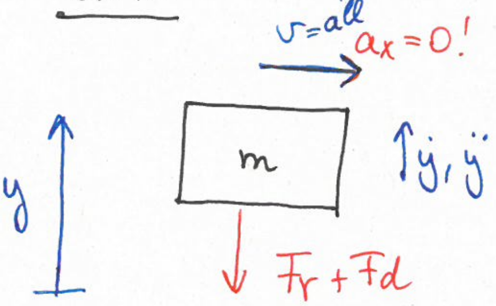
$L = 1{,}2\ m$

Tfh harmonikus az úthiba!

Feladat

1) Mozgásegyenlet
2) α, D, λ, f_0
3) Állandósult állapotbeli mozgás, $y_{max} = ?$
4) $F_{d\,max} = ?$

SZTÁ



$\boxed{\dot{\underline{I}} = \underline{F}}$ Dinamika alaptétele

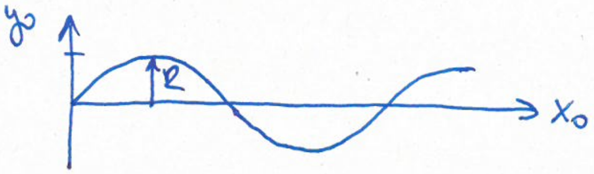
$m\ddot{y} = -F_r - F_d$

ahol

$F_r = s(y - r(t))$

$F_d = k(\dot{y} - \dot{r}(t))$

Az útgerjesztés:



$r(t) = R\sin(\omega t)$

ω-t pedig $\rightarrow$ $T_{gerj} = \frac{L}{v}$

$$T_{gerj} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{L}{v} \rightarrow \omega = \frac{2\pi \cdot v}{L} = \underline{\underline{52{,}36 \left[\frac{rad}{s}\right]}}$$

Tehát a gerjesztés: $r(t) = R \cdot \sin(\omega t) = 0{,}04 \cdot \sin(52{,}36\, t)$

A csillapításnál $\dot{r}(t)$ jelenik meg $\dot{r}(t) = R\omega\cos(\omega t)$

- Visszaírva a mozgásegyenletbe!

$$m\ddot{y} = -sy + sR\sin(\omega t) - k\dot{y} + kR\omega\cos(\omega t)$$

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + sy = \underbrace{sR\sin(\omega t) + kR\omega\cos(\omega t)}_{F(t)}$$

ezt lehet külön - vagy egyben is kezelni.

$$sR\sin(\omega t) + kR\omega\cos(\omega t) = F_0\sin(\omega t + \delta) \leftarrow$$ ilyen alakban keressük!

$$sR\sin(\omega t) + kR\omega\cos(\omega t) = F_0\sin(\omega t)\cos(\delta) + F_0\cos(\omega t)\sin(\delta)$$

↳ Trigonometrikus egyenlőség:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\omega t)&: \quad kR\omega = F_0\sin(\delta) \\ \sin(\omega t)&: \quad sR = F_0\cos(\delta) \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ négyzetre emelve és összeadva

- $k^2R^2\omega^2 + s^2R^2 = F_0^2 \Rightarrow F_0 = \sqrt{s^2R^2 + k^2R^2\omega^2} = 21{,}056{,}8\,(N)$

<u>elosztva</u>:

- $\frac{kR\omega}{sR} = \frac{F_0\sin\delta}{F_0\cos\delta} = tg\,\delta \Rightarrow \delta = arctg\left(\frac{k\omega}{s}\right) = \underline{\underline{1{,}181\,(rad)}}$

Tehát a gerjesztés: $F(t) = F_0\sin(\omega t + \delta) = \underline{21056{,}8\,\sin(52{,}36 \cdot t + 1{,}181)}$

↳ Visszaírjuk a mozgásegyenletbe $\Rightarrow$ kanonikus alak!

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} + \frac{s}{m}y = \frac{F_0}{m}\sin(\omega t + \delta)$$

Vagyis

$$\ddot{y} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{2D\alpha}\dot{y} + \underbrace{\frac{s}{m}}_{\alpha^2} y = \underbrace{\frac{\sqrt{s^2+k^2\omega^2}\cdot R}{m}}_{f_0\alpha^2}\sin(\omega t+\delta)$$

↳ Ebből:

$$\alpha = \sqrt{\frac{s}{m}} = 25{,}82 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$D = \frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{k}{m} = 0{,}6\ (-)\ (60\%)$$

$$f_0 = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\sqrt{s^2+k^2\omega^2}\,R}{m} = \frac{\cancel{m}}{s}\,\frac{\sqrt{s^2+k^2\omega^2}\cdot R}{\cancel{m}} = 0{,}105\ (m)$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\alpha} = 2{,}03\ (-)$$ (túl a rezonancián!)

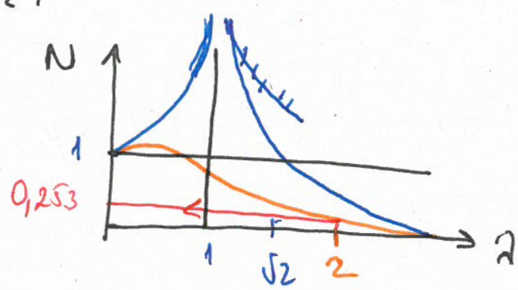
Állandósult állapotbeli megoldás:

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} y_p(t)$$

$$y_p(t) = A\cdot\sin(\omega t+\delta-\vartheta)$$

↳ $A = N\cdot f_0$ $\qquad N = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4D^2\lambda^2}} = 0{,}253\ (-)$

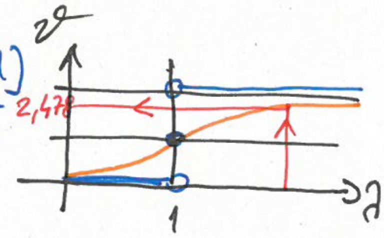
$A = 0{,}0266\ (m)$



$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{2D\lambda}{1-\lambda^2} \Longrightarrow \mathrm{arctg}\left(\frac{2D\lambda}{1-\lambda^2}\right) = -0{,}664$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta = \mathrm{arctg}\left(\frac{2D\lambda}{1-\lambda^2}\right) + \pi = 2{,}478\ (rad)$$



$$y_p(t) = 0{,}0266\,\sin(52{,}36t - \underbrace{1{,}297}_{})$$

ekkora a fáziskésés azaz az út egyenetlenségéhez képest a lemaradás.

$$\boxed{\alpha = \delta - \vartheta}$$

Maximális csillapítóerő

$$Fd(t) = \varepsilon\left[\dot{y}p(t) - \dot{r}(t)\right] = \varepsilon\omega\left[\underbrace{A\cos(\omega t + \delta - \vartheta) - R\cos(\omega t)}_{B\cos(\omega t + \varphi)}\right]$$

$$\dot{y}p(t) = A\omega\cos(\omega t + \delta - \vartheta)$$

$$A\cos(\omega t)\cos(\delta - \vartheta) - A\sin(\omega t)\sin(\delta - \vartheta) - R\cos(\omega t) =$$

$$= B\cos(\omega t)\cos\varphi - B\sin(\omega t)\sin\varphi$$

Trigonometrikus egyezés

$\cos(\omega t)$: $\quad A\cos(\delta - \vartheta) - R = B\cos\varphi$

$\sin(\omega t)$: $\quad -A\sin(\delta - \vartheta) = -B\sin\varphi$

$$B = \sqrt{A^2\cos^2(\delta - \vartheta) + A^2\sin^2(\delta - \vartheta) - 2AR\cos(\delta - \vartheta) + R^2}$$

$$B = \sqrt{A^2 - 2AR\cos(\delta - \vartheta) + R^2} = 0{,}0416\,[m]$$

$$Fd_{max} = \varepsilon\omega B = \underline{\underline{20257\,[N]}}$$

A maximális rugóerő:

$$Fr_{max} = s\cdot\left[yp(t) - r(t)\right] = s\left[\underbrace{A\sin(\omega t + \delta - \vartheta) - R\sin(\omega t)}_{C\sin(\omega t + \varphi_2)}\right]$$

$$A\sin(\omega t)\cos(\delta - \vartheta) + A\cos(\omega t)\sin(\delta - \vartheta) - R\sin(\omega t) = C\sin(\omega t)\cos\varphi_2 + C\cos(\omega t)\sin\varphi_2$$

$\cos(\omega t)$: $\quad A\sin(\delta - \vartheta) = C\sin\varphi_2$

$\sin(\omega t)$: $\quad A\cos(\delta - \vartheta) - R = C\cos\varphi_2$

$\Rightarrow$ ugyanaz, mint előbb

$\underline{\underline{C = B}} \Rightarrow Fr_{max} = s\cdot B = \underline{\underline{8320\,[N]}}$