Rezgéstan 9 gyakorlat

Másodfajú Lagrange egyenlet

Emlékeztető:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^k \qquad k = 1 \dots n$$

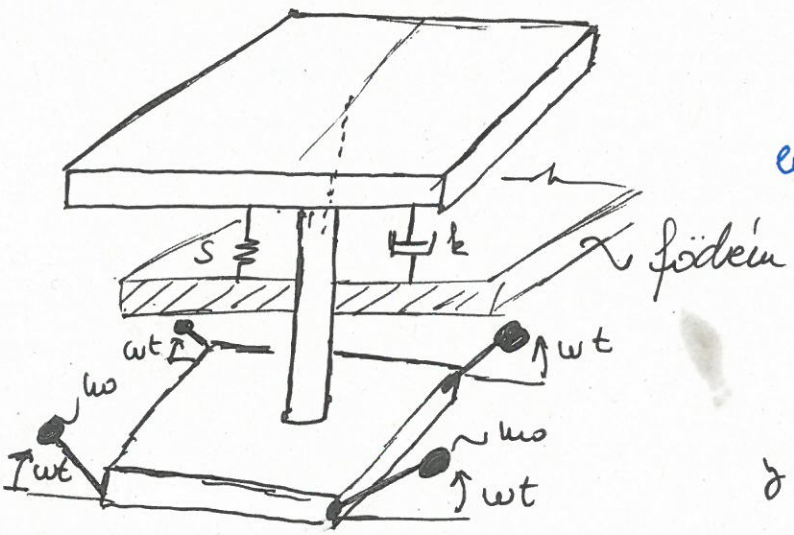
ahol n DoF a rendszer szabadsági fokainak száma.

Ha linearizálni kell

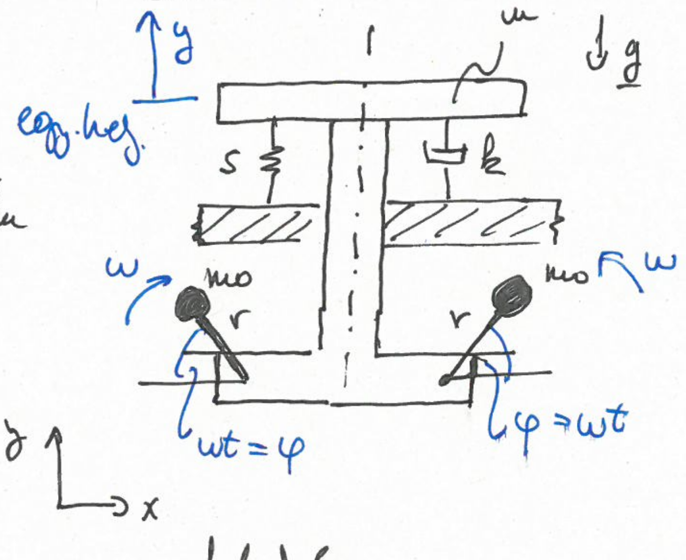
pl $q_k = \varphi \equiv 0$ e.h. körül

a linearizálást semmi szabad elvégezni a Lagrange egyenletben szereplő deriválás előtt!

Feladat | Rázóasztal



Modell:



Feladatok

1) $k = ?$ hogy $D = 0{,}05$ legyen

2) Stacionárius rezgés amplitúdója

3). A födémre átadódó erő maximuma $F_{f\,max} = ?$

Adatok

$m = 60\,[kg]$

$m_0 = 0{,}5\,[kg]$ 4 db

$r = 0{,}1\,[m]$

$s = 25 \cdot 10^3\,\left[\frac{N}{m}\right]$

$\omega = 75\left[\frac{rad}{s}\right] = \text{áll}$

Mozgásegyenlet

↳ Lagrange egyenlet $n = 1$ DoF

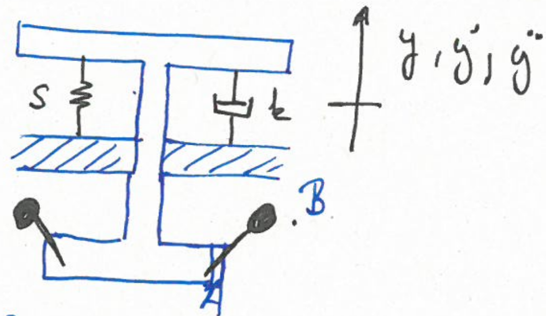
~ az anyagi pontok mozgástörvényét pontosan tudjuk → elő van írva milyen nekkora szögsebességgel forognak!

↳ Általános koordináta választás

↳ $q = y$ (függőleges elmozdulás)

Lagrange-egyenlet:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^*$$
1 DoF esetre!

Kinetikus energia:



$$T = \frac{1}{2} m \dot y^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} m_0 v_0^2$$

az asztalhoz rögzített + forog } → meg kell határozni

a) helyvektor deriválásával (külső rögzített kk-ból nézve)

$$\underline{r}_0 = \begin{bmatrix} r_0\cos(\omega t) + R_x \\ y + r_0\sin(\omega t) + R_y \end{bmatrix}$$

$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix}$ a rögzített kk-ból az A pont koordinátája ha $y = 0$!

$$\underline{v}_0 = \dot{\underline{r}}_0 = \begin{bmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ \dot y + r\omega\cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

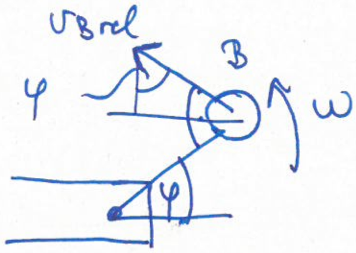
↳ Ebből

$$v_0^2 = r^2\omega^2\sin^2(\omega t) + \dot y^2 + 2\dot y r\omega\cos(\omega t) + r^2\omega^2\cos^2(\omega t)$$
$$v_0^2 = r^2\omega^2 + 2\dot y r\omega\cos(\omega t) + \dot y^2$$

b) Redukálással

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r\cos(\omega t) & r\sin\omega t & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ \dot y + r\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Relatív kinematika



$$\underline{v}_B = \underline{v}_{B\,száll} + \underline{v}_{B\,rel}$$

$$\underline{v}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ \dot{y} + r\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Mindháróm esetben ugyanazt kapjuk!
Fontos, hogy mindig több úton ellenőrizzük magunkat!

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + 2m_0 \dot{y}^2 + 2m_0\left(r^2\omega^2 + 2\dot{y} r\omega\cos(\omega t)\right)$$

Parciális deriváltak:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + 4m_0\dot{y} + 4m_0 r\omega\cos(\omega t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m + 4m_0)\ddot{y} - 4m_0 r\omega^2\sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

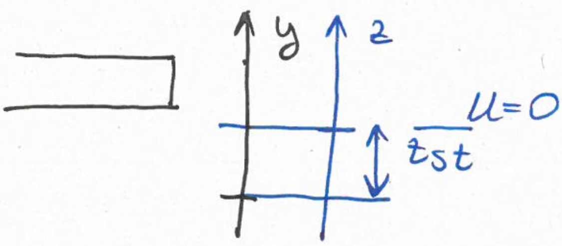
Disszipatív potenciál

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} k \dot{y}^2 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} = k\dot{y}$$

a csillapítás végein lévő sebesség különbség

Potenciálfgv

↳ A rugó van kinövéntes



y koordináta – egyensúlyi helyzet
z koordináta – kinövéntes helyzet
z_{st} – statikus kitérés

A rugó deformációja : $z = y - z_{st}$

$$U = \frac{1}{2} s \underbrace{(y - z_{st})}_{z}^2 + mg \underbrace{(y - z_{st})}_{z} + 4 m_0 g (z + r\sin(\omega t))$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = s \cdot z + mg + 4 m_0 g$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial z} = sy} \underbrace{- s z_{st} + mg + 4 m_0 g}_{=0 \text{ az egyensúlyi egyenletből}}$$

↳ Ha $U = \frac{1}{2} s y^2 + 4 m g r \sin(\omega t)$ ← egyszerűsített potenciálfgv.

↳ A nehézségi erővel egyensúlyt tart a statikus rugódeformáció

A mozgásegyenlet.

$$(m + 4m_0)\ddot{y} - 4 m_0 r \omega^2 \sin(\omega t) + k\dot{y} + sy = 0$$

↳ Minden aktív erő szerepel a baloldalon!

Kanonikus alak:

$$\ddot{y} + \underbrace{\frac{k}{m + 4m_0}}_{2D\alpha} \dot{y} + \underbrace{\frac{s}{m + 4m_0}}_{\alpha^2} y = \underbrace{\frac{4 m_0 r \omega^2}{m + 4m_0}}_{f_0\alpha^2} \sin(\omega t)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{s}{m + 4m_0}} = 20{,}08 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$k = 2D\alpha \cdot (m + 4m_0) = 124{,}5 \left[\frac{Ns}{m}\right]$$

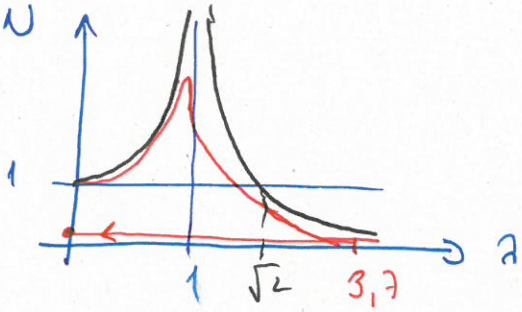
$$f_0 = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{4 m_0 r \omega^2}{m + 4m_0} = \frac{4 m_0 r \omega^2}{s} = 46{,}595 \cdot 10^{-3} \, (m)$$

Tehát, ha $D = 0{,}05$ kellene $k = 124{,}5 \left[\frac{Ns}{m}\right]$ csillapítást kell beállítani

2) Állandósult állapotbeli megoldás

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} y_p(t) = Y\sin(\omega t - \vartheta)$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\alpha} = \underline{\underline{3{,}735}}$$



$$N = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}} = 0{,}0772$$

$$Y = N \cdot f_0 = 3{,}46 \cdot 10^{-3}\ (m)$$

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{2D\lambda}{1-\lambda^2} = -28{,}83 \cdot 10^{-3} + \pi = \underline{\underline{3{,}1128\ (rad)}}$$

3) A födémre átadódó erő

$$F_f(t) = F_{fst} + F_{fd}(t)$$

$$\hookrightarrow F_{fst} = (m + 4m_0)g = \underline{\underline{607{,}6\ (N)}}$$

$$F_{fd}(t) = s\,y(t) + \varepsilon\,\dot{y}(t) = \underbrace{sY\sin(\omega t - \vartheta) + \varepsilon Y\omega\cos(\omega t - \vartheta)}_{F\cdot\cos(\omega t + \delta)}$$

$$sY(\sin(\omega t)\cos\vartheta - \sin\vartheta\cos(\omega t)) + \varepsilon Y\omega[\cos(\omega t)\cos\vartheta + \sin(\omega t)\cdot$$
$$\cdot\sin\vartheta] = F(\cos(\omega t)\cos\delta - \sin(\omega t)\sin\delta)$$

$\hookrightarrow$ Trigonometrikus egyezőség

$\cos(\omega t)$: $\quad -sY\sin\vartheta + \varepsilon Y\omega\cos\vartheta = F\cos\delta$

$\sin(\omega t)$: $\quad sY\cos\vartheta + \varepsilon Y\omega\sin\vartheta = -F\sin\delta$

$$\hookrightarrow F = \sqrt{s^2Y^2 + \varepsilon^2Y^2\omega^2} = \underline{\underline{92{,}937\ (N)}}$$

$$F_{f\,max} = F_{fst} + F_{d\,max} = F_{fst} + F = \underline{\underline{699{,}9\ (N)}}$$