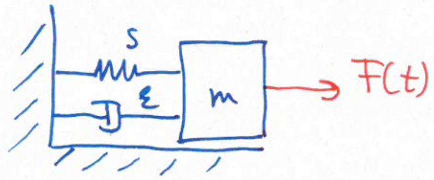
Rezgéstan – 6. hét

1DoF, csillapított, gerjesztett rezgőrendszer

Elméleti összefoglaló:

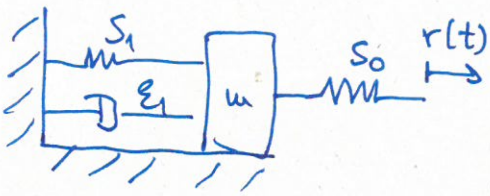


$m\ddot{x} + k\dot{x} + sx = F(t)$

Tfh harmonikus a gerjesztés:

$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ – erőgerjesztés

vagy



$r(t) = r_0 \cos(\omega t)$ – útgerjesztés (rugón keresztül)

$\Downarrow$ referencia DE

$$\boxed{\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = f_0 \alpha^2 \cos(\omega t)}$$

A megoldás:

$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

homogén   inhomogén/partikuláris

$x_H(t) = e^{-D\alpha t}\left(C_1\cos(\gamma t) + C_2 \sin(\gamma t)\right)$

$x_p(t) = A \cdot \cos(\omega t - \vartheta)$ – állandósult állapotban ehhez tart a mo!

$$\boxed{\frac{A}{f_0} = N}$$

N – nagyítási tényező

$N = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}}$ → rezonanciagörbe

$\lambda = \dfrac{\omega}{\alpha}$ [-]

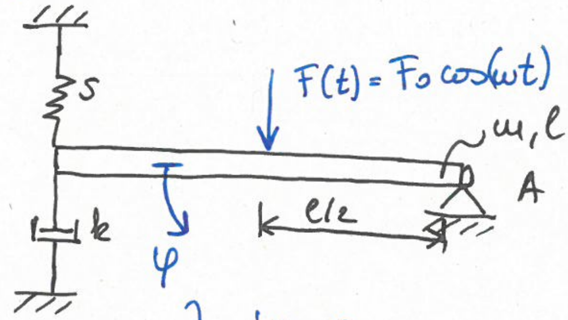
$\mathrm{tg}\,\vartheta = \dfrac{2D\lambda}{1-\lambda^2}$

↳ fázistolásgörbe

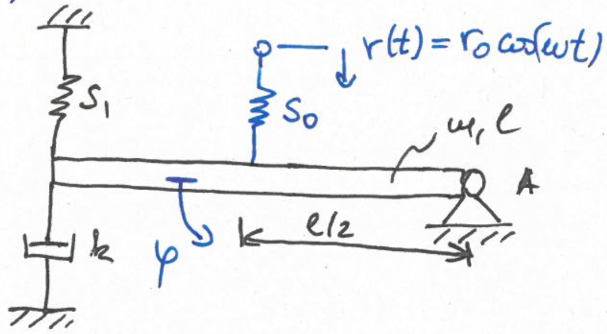
FELADAT 1 DoF, csillapított gerjesztett

Vízszintes síkban!

a)



b)



általános koordináta

Adatok

$m = 3\,[kg]$

$s = 400\,\left[\frac{N}{m}\right]$

$k = 2{,}8\,\left[\frac{Ns}{m}\right]$

$l = 1\,[m]$

$F_0 = 60\,[N]$

$\omega = 30\,\left[\frac{rad}{s}\right]$

$s_0 = 1000\,\left[\frac{N}{m}\right]$

$r_0 = 0{,}01\,[m]$

$s_1 = 150\,\left[\frac{N}{m}\right]$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = \varphi_0 = 0{,}015\,[rad] \\ \dot{\varphi}(0) = 0\,[rad/s] \end{array}\right\}\ \text{kezdeti feltételek}$$

Feladatok

1) A mozgásegyenlet a)-ra és b)-re is!
   (α, D, γ, f_0)

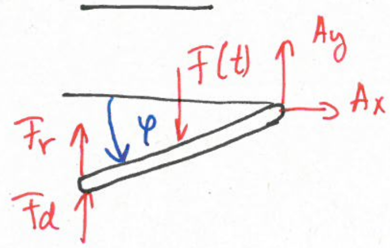
2) Nagyítási görbe + fáziskésés diagram

3) $\varphi(t)$ mozgástörvény

a) eset

SZTÁ

$\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}$



Nemlineáris DE!

$\varphi \equiv 0$ egyensúlyi helyzet

~ linearizálhatunk $\varphi \equiv 0$ körül

$\sin\varphi \approx \varphi$

$\cos\varphi \approx 1$

<u>Din. alaptétele</u> $\quad \dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{M}_A$

$\underline{k}$: $\quad \Theta_A \cdot \ddot{\varphi} = -F_r\, \ell \overset{1\varphi}{\cancel{\cos\varphi}} - F_d\, \ell \overset{1}{\cancel{\cos\varphi}} + F(t)\cdot \frac{\ell}{2} \overset{1}{\cancel{\cos\varphi}}$

$F_r = s \cdot \ell \overset{\varphi}{\cancel{\sin\varphi}} \approx s\ell\varphi$

$F_d = k \cdot \ell \cdot \dot{\varphi}$

$\Theta_A = \frac{1}{3} m \ell^2$

Tehát a mozgásegyenlet:

$$\frac{1}{3} m\ell^2 \ddot{\varphi} = -s\ell^2\varphi - k\cdot\ell^2\dot{\varphi} + F(t)\cdot\frac{\ell}{2}$$

$$\frac{1}{3} m\ell^2 \ddot{\varphi} + k\ell^2\dot{\varphi} + s\ell^2\varphi = F_0 \cdot \frac{\ell}{2}\cos(\omega t)$$

A ref. dE:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3k\cancel{\ell^2}}{m\cancel{\ell^2}}\dot{\varphi} + \frac{3s\cancel{\ell^2}}{m\cancel{\ell^2}}\varphi = \frac{3F_0\cdot\ell}{2m\ell^2}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{3k}{m}}_{2D\alpha}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{3s}{m}}_{\alpha^2}\varphi = \underbrace{\frac{3F_0}{2m\ell}}_{f_0\alpha^2}\cos(\omega t)$$

Ebből:

$\alpha = \sqrt{\frac{3s}{m}} = 20\left[\frac{rad}{s}\right]$ a csillapítatlan sajátkörfrek.

$2D\alpha = \frac{3k}{m} \rightarrow D = \frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{3k}{m} = 0{,}7\,[-]$ (70%) Lehr féle csill.

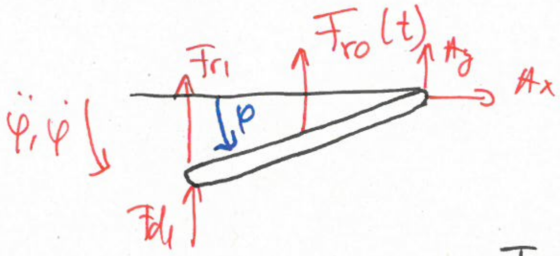
$f_0\alpha^2 = \frac{3F_0}{2m\ell} \rightarrow f_0 = \frac{1}{\alpha^2}\frac{3F_0}{2m\ell} = \frac{\cancel{m}}{\cancel{3}s}\cdot\frac{\cancel{3}F_0}{2\cancel{m}\ell} = \frac{F_0}{2s\ell} = \underline{\underline{0{,}0125\,[rad]}}$

$\nu = \alpha\sqrt{1-D^2} = 14{,}28\left[\frac{rad}{s}\right] \rightarrow$ csillapított sajátkörfrekv.

↳ A mozgásegyenletet (α, D, f_0) paraméterek egyértelműen meghat!

Most nézzük a másik esetet!

SZTÁ



ismét linearizálhatunk! $\varphi \equiv 0$ körül

$\underline{\dot{\Pi}_A} = \underline{M_A}$ a lin. után

$\underline{z}$: $\Theta_A \ddot\varphi = -F_{r}\cdot l - F_d \cdot l - F_{r0}(t)\cdot \frac{l}{2}$

$$F_{r0} = s_0\left(\frac{l}{2}\sin\varphi - r_0\cos(\omega t)\right) \approx s_0\left(\frac{l}{2}\varphi - r_0\cos(\omega t)\right)$$

$$F_{r1} = s_1 \cdot l\sin\varphi \approx s_1 l \varphi$$

$$F_d = \varepsilon l \dot\varphi$$

A DE:

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot\varphi = -s_1 l^2 \varphi - \varepsilon l \dot\varphi - s_0 \frac{l^2}{4}\varphi + s_0 r_0 \frac{l}{2}\cos(\omega t)$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot\varphi + \varepsilon \cdot l^2 \dot\varphi + \left(s_1 l^2 + s_0 \frac{l^2}{4}\right)\varphi = s_0 r_0 \frac{l}{2}\cos(\omega t)$$

ref. DE!

$$\ddot\varphi + \underbrace{\frac{3\varepsilon}{m}}_{2D\alpha}\dot\varphi + \underbrace{\frac{3s_1 + \frac{3s_0}{4}}{m}}_{\alpha^2}\varphi = \underbrace{\frac{3 s_0 r_0}{2ml}}_{f_0\alpha^2}\cos(\omega t)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{3s_1 + \frac{3s_0}{4}}{m}} = \underline{\underline{20\left[\frac{rad}{s}\right]}}$$ csillapítatlan sajátkörfrek.

$$D = \frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{3\varepsilon}{m} = \underline{\underline{0{,}7\,[-]\ (70\%)}}$$ Lehr-féle csill.

$$f_0 = \frac{1}{\alpha^2}\frac{3s_0 r_0}{2ml} = \underline{\underline{0{,}0125\,[rad]}}$$

A DE-t leíró paraméterek megegyeznek!

$$\nu = \alpha\sqrt{1-D^2} = 14{,}28\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Ugyanaz lesz a mo!
$\varphi(t)$ mozgástv.!

Gerjesztett rendszer:

$$\varphi(t) = \varphi(t)_H + \underbrace{\varphi(t)_p}_{}$$

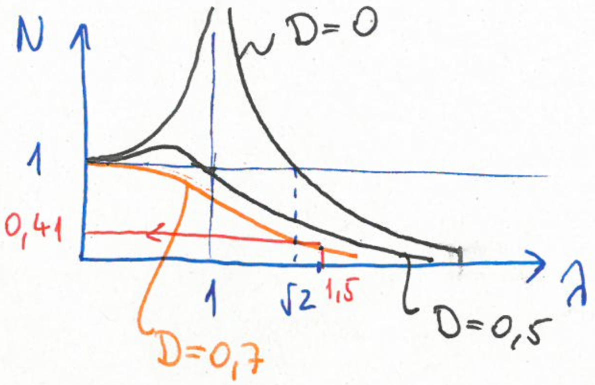
partikuláris (inhomogén partikuláris)

$$\varphi_p(t) = \phi \cos(\omega t - \vartheta) \quad \text{ahol} \quad \phi = f_0 \cdot N \text{ az amplitúdó}$$

ϑ a fáziskésés

↳ Ezek számíthatóak v.

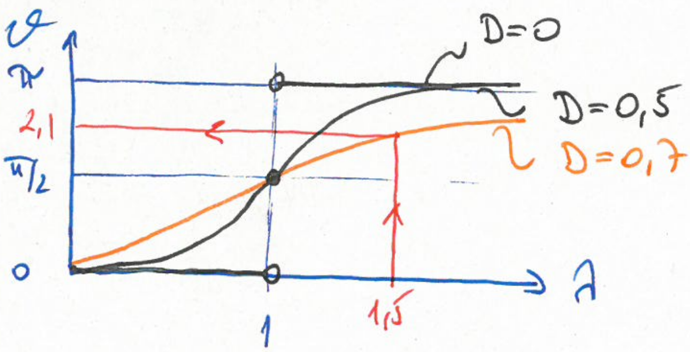
leolvashatóak a nagyítási görbéről / fáziskésés görbéről



λ - frekvenciaarány: $\lambda = \frac{\omega}{\alpha} = 1{,}5$ [-]

$$N = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}} = 0{,}4092 \text{ [-]}$$

$$\phi = N \cdot f_0 = \underline{\underline{0{,}005115 \text{ [rad]}}}$$



$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{2D\lambda}{1-\lambda^2} = \underline{\underline{-1{,}034 \text{ [rad]}}}$$

A számológép $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ közt ad vissza

de nekünk

$\vartheta \in [0; \pi]$

⇓ ha $\vartheta < 0 \Rightarrow \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{2D\lambda}{1-\lambda^2} + \pi = \underline{\underline{2{,}108 \text{ [rad]}}}$

Általános mo:

$$\varphi(t) = \varphi_H(t) + \varphi_p(t) = e^{-D\alpha t}\left(C_1 \cos(\gamma t) + C_2 \sin(\gamma t)\right) + \phi \cos(\omega t - \vartheta)$$

$$\dot\varphi(t) = -D\alpha e^{-D\alpha t}\left(C_1 \cos(\gamma t) + C_2 \sin(\gamma t)\right) + \gamma e^{-D\alpha t}\left(-C_1 \sin(\gamma t) + C_2 \cos(\gamma t)\right) - \phi \omega \sin(\omega t - \vartheta)$$

+ kezdeti feltételek:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0 \\ \dot\varphi(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

- $\varphi(0)=\varphi_0$: $\quad C_1 + \phi\cos(-\vartheta) = \varphi_0$

  $\hookrightarrow C_1 = \varphi_0 - \phi\cos(-\vartheta) = \underline{\underline{0{,}0176\ (\text{rad})}}$

- $\dot{\varphi}(0)=0$ $\quad -D\alpha C_1 + \gamma C_2 - \phi\omega\sin(-\vartheta) = 0$

  $\hookrightarrow C_2 = \dfrac{D\alpha C_1 + \phi\omega\sin(-\vartheta)}{\gamma} = \underline{\underline{0{,}00803\ (\text{rad})}}$

Tehát numerikusan a DE-ből számított mozgástörvény:

$$\underline{\underline{\varphi(t) = e^{-14t}\left(0{,}0176\cos(14{,}28t) + 0{,}00803\sin(14{,}28t)\right) + 0{,}005115\cos(30t-2{,}1)}}$$