Rezgéstan 14. gyakorlat

Rudak hajlító lengései

Emlékeztető:
$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}}\,\underline{q} = \underline{Q} \quad \text{mátrix DE helyett}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{q} = \underline{\underline{C}}\,\underline{Q}}$$ mátrix DE-t oldjuk meg!

$\underline{\underline{C}}$ - rugóállandó mátrix $\left[\frac{m}{N}\right]$

Oka: rudak esetében könnyebb megadni az egységnyi erő hatására történő elmozdulást

↳ Castigliano / Betti tétel

mint a rugómerevséget (egységnyi elmozdulásokat tartó erő)

↓ frekvenciaegyenlet:

$$\det\left(-\alpha^2 \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{I}}\right) = 0$$

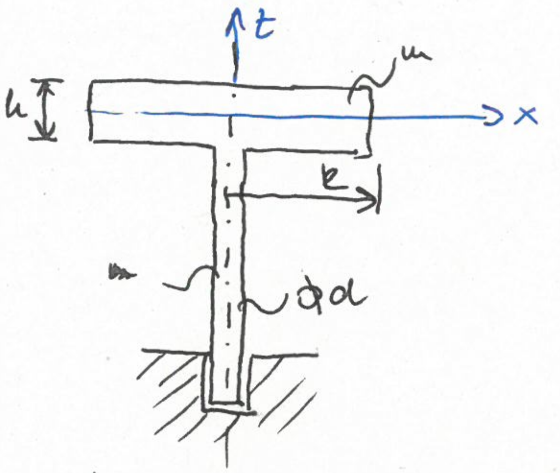
↳ α_i sajátkörfrekvenciák

majd visszahelyettesítés után:

$$\left(-\alpha_i^2 \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{I}}\right)\underline{A}^i = \underline{0} \quad \rightarrow \text{lengésképek!}$$

Rudak esetében → „n" db koncentrált tömeg elhelyezésével modellezhetjük az amúgy <u>végtelen DoF</u> mozgást!

Feladat



Adatok:

$d = 20\,[mm]$

$k = 0{,}2\,[m]$

$h = 10\,[mm]$

$m = 10\,[kg]$

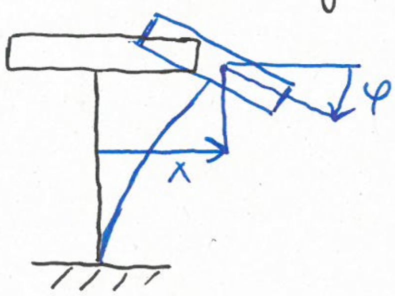
$E = 200\,G[Pa]$

$l = 1\,[m]$

Feladat

α_i, $\underline{A}_i$

↓ „deformált" alak leírható helyzet



$n = 2$ DoF

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}$$

x - a súlypont vízszintes elmozdulása

φ - a szögelfordulás

Lagrange-egyenlet: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \dfrac{\partial T}{\partial q_k} + \dfrac{\partial U}{\partial q} = 0$

nincs gerjesztés

↓ mx. DE.: $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}}\,\underline{q} = \underline{0}$

helyett:

$$\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{q} = \underline{\underline{C}}\,\underline{0} = \underline{0}$$

Kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{Sy}\dot{\varphi}^2$$

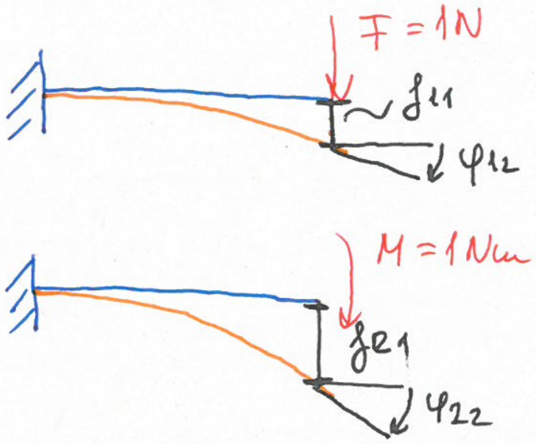
$$\Theta_{Sy} = \frac{1}{4} m k^2 + \frac{1}{12} m h^2 = 0{,}100083\,[kgm^2]$$

$\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ → $\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} = m$, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}\partial \dot{x}} = 0$

$\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta_{Sy}\dot{\varphi}$ → $\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}\partial \dot{x}} = 0$, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}^2} = \Theta_{Sy}$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_{Sy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix} \text{(SI)}$$

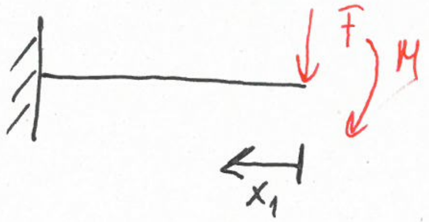
Rugóállandó mátrix



$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} f_{11} & \varphi_{12} \\ f_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}$$

Hogyan számolhatjuk? 1) Járulékképletek
2) Betti-tétel / Castigliano-tétel

<u>Castigliano</u>: $\dfrac{\partial U}{\partial F_i} = w_i$ ill. $\dfrac{\partial U}{\partial M_i} = \varphi_i$



$$M_h(x_1) = M + F x_1$$

$$U = \frac{1}{2IE} \int_l M_h^2(x_1)\, dl = ?$$

Sziltan $\rightarrow$ $w_i = \dfrac{\partial U}{\partial F_i} = \dfrac{1}{IE} \displaystyle\int_l M_h(x_1) \frac{\partial M_h}{\partial F_i}\, dl$

<u>Azaz</u>: $\dfrac{\partial M_h}{\partial F} = x_1$ illetve: $\dfrac{\partial M_h}{\partial M} = 1$

$$w_i = f_i = \frac{1}{IE} \int_0^l M x_1 + F x_1^2\, dx_1 = \frac{1}{IE}\left[M\frac{x_1^2}{2} + \frac{F x_1^3}{3}\right]_0^l = \frac{Ml^2}{2IE} + \frac{Fl^3}{3IE}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{IE} \int_0^l M + F x_1\, dx_1 = \frac{1}{IE}\left[M x_1 + \frac{F x_1^2}{2}\right]_0^l = \frac{Ml}{IE} + \frac{Fl^2}{2IE}$$

<u>Tehát</u>: ha csak $\underline{\underline{F = 1\,N}}$

$$f_{11} = \frac{Fl^3}{3IE} \rightarrow c_{11} = \frac{f_{11}}{F} = \frac{l^3}{3IE} \;;\; \varphi_{12} = \frac{Fl^2}{2IE} \rightarrow c_{12} = \frac{\varphi_{12}}{F} = \frac{l^2}{2IE}$$

Hasonlóan ha csak M nyomaték

$$f_{21} = \frac{Ml^2}{2IE} \Rightarrow c_{21} = \frac{f_{21}}{M} = \frac{l^2}{2IE}$$ (látjuk, hogy ugyanaz, mint c_{12})

$$\varphi_{22} = \frac{Ml}{IE} \Rightarrow c_{22} = \frac{l}{IE}$$

Tehát:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3IE} & \frac{l^2}{2IE} \\ \frac{l^2}{2IE} & \frac{l}{IE} \end{bmatrix} \text{ (SI)}$$

$$I = \frac{d^4 \pi}{64} \qquad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 2{,}122 & 3{,}183 \\ 3{,}183 & 6{,}366 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ (SI)}$$

Ha szeretnénk tudni a merevségi mátrixot:

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 18849{,}6 & -9424{,}78 \\ -9424{,}78 & 6283{,}19 \end{bmatrix} \text{ (SI)}$$

Frekvenciaegyenlet: $\det(-\alpha^2 \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{I}}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-21{,}22\left(\frac{\alpha}{100}\right)^2 & -0{,}3183\left(\frac{\alpha}{100}\right)^2 \\ -31{,}83\left(\frac{\alpha}{100}\right)^2 & 1-0{,}6366\left(\frac{\alpha}{100}\right)^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$3{,}378\left(\frac{\alpha}{100}\right)^4 - 21{,}857\left(\frac{\alpha}{100}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{100}\right)^2 \begin{cases} 0{,}04607 \Rightarrow \alpha_1 = 21{,}46 \left[\frac{rad}{s}\right] \\ 6{,}4245 \Rightarrow \alpha_2 = 253{,}5 \left[\frac{rad}{s}\right] \end{cases}$$

Lengéskép:

$$\left(-\alpha_i^2 \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{I}}\right)\underline{A}_i = \underline{0}$$

• α_1:

$$\left(1 - 21{,}22\left(\frac{\alpha_1}{100}\right)^2\right)\overset{1}{\overset{\shortparallel}{A_{11}}} - 0{,}3183\left(\frac{\alpha_1}{100}\right)^2 A_{12} = 0$$

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{12} = \frac{1 - 21{,}22\left(\frac{\alpha_1}{100}\right)^2}{0{,}3183\left(\frac{\alpha_1}{100}\right)^2} = \underline{\underline{1{,}51}}$$

• α_2: hasonlóan

$$A_{22} = \frac{1 - 21{,}22\left(\frac{\alpha_2}{100}\right)^2}{0{,}3183\left(\frac{\alpha_1}{100}\right)^2} = \underline{\underline{-66{,}1}}$$