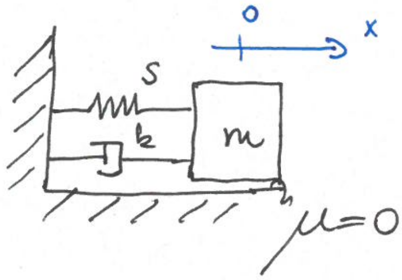
Rezgéstan 5. hét

1 DoF, csillapított rezgőrendszer

Elmélet



Referencia DE:

$$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = 0$$

- ha $0 < D < 1$ alulcsill:

$$x(t) = e^{-D\alpha t}(C_1\cos(\gamma t) + C_2\sin(\gamma t))$$

- ha $D = 1$ kritikus csillapítás:

$$x(t) = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\alpha t}$$

leggyorsabb beállás

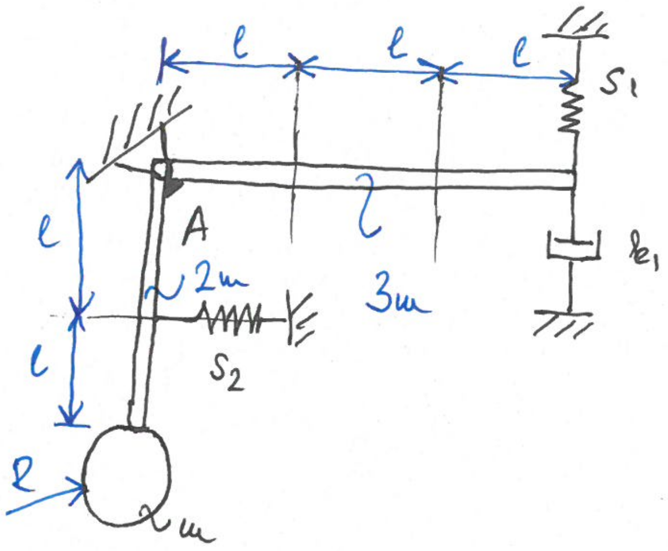
- ha $D > 1$ túlcsillapított

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2-1}$$

ezekben az esetekben NEM alakul ki rezgés!

Feladat



Adatok:

$l = 0{,}2$ [m]

$m = 0{,}12$ [kg]

$k_1 = 2$ [Ns/m]

$s_1 = 300$ [N/m]

$s_2 = 10$ [N/m]

$R = 0{,}1$ [m]

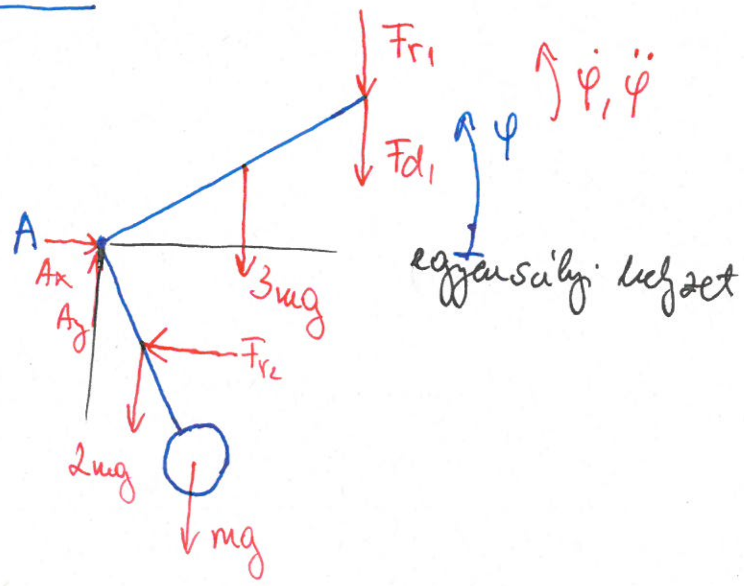
Csak az s_1 rugó előfeszített!

Feladat:

1) α, D, ν, mozgásegyenlet
2) $k_{1kr} = ?$ ha kritikus csillapítást szeretnénk
3) $F_{r_1 max} = ?$

ha $\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = 0{,}01 \text{ (rad)} \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{array}\right\}$ kezdeti feltétellel indul a rezgés

SZTÁ



φ - az egyensúlyi helyzettől mért szögelfordulás

a statikus deformáció miatt az s_1 rugó előfeszített

$\Downarrow$

Ez nem befolyásolja a rezgést csak a rugóerőnél lesz szerepe!

↳ Nemlineáris DE lesz! Linearizálhatjuk $\varphi=0$ körül, mivel $\varphi=0$ egyensúlyi helyzet!

~ a mgóE megoldása közelíthető az ívhosszakkal!

Din. alaptétele $\underline{\dot{\Pi}}_A = \underline{M}_A$

$$\underline{k}: \quad \Theta_A \cdot \ddot{\varphi} = -F_{r1}\cdot 3l \underbrace{\cos\varphi}_{1} - F_d\, 3l \underbrace{\cos\varphi}_{1} - 3mg\cdot\frac{3}{2} l \underbrace{\cos\varphi}_{1} -$$

$$- F_{r2}\, l \underbrace{\cos\varphi}_{1} - 2mg\, l \underbrace{\sin\varphi}_{\varphi} - mg\,(2l+k)\underbrace{\sin\varphi}_{\varphi}$$

$$F_{r1} \approx s_1 \cdot 3l\,\varphi - F_{r1st}$$

$$F_{r2} \approx s_2 \cdot l\varphi$$

$$F_{d1} \approx k_1 \cdot 3l \cdot \dot{\varphi}$$

$$\Theta_A = \frac{1}{3}(3m)(3l)^2 + \frac{1}{3}(2m)(2l)^2 + \frac{1}{2} m k^2 + m(l+k)^2 = \underline{\underline{0{,}0866\ [kg\,m^2]}}$$

$$\Theta_A \cdot \ddot{\varphi} = -9l^2 s_1 \varphi + 3l F_{r1st} - 9l^2 k_1 \dot{\varphi} - \frac{9}{2} mgl - l^2 s_2 \varphi - 2mgl\varphi$$

$$- mg(2l+k)\varphi$$

$$\Theta_A \ddot{\varphi} + 9l^2 k_1 \dot{\varphi} + \left(9l^2 s_1 + l^2 s_2 + 2mgl + mg(2l+k)\right)\varphi = \underbrace{+3l F_{r1st} - \frac{9}{2} mgl}_{\text{kiadják egymást!}}$$

mivel $\varphi \equiv 0$ egyensúlyi helyzet

A DE referencia alakban:

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{9l^2 k_1}{\Theta_A}}_{2D\alpha}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{\left(9l^2 s_1 + l^2 s_2 + 4mgl + mgk\right)}{\Theta_A}}_{\alpha^2}\varphi = 0$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(9s_1+s_2)\ell^2 + mg(4\ell+R)}{\Theta_A}} = \underline{\underline{35{,}55\left[\frac{rad}{s}\right]}}$$

$$2D\alpha = \frac{9\ell^2 \cdot k_1}{\Theta_A}$$

$$D = \frac{9\ell^2 k_1}{2\alpha\,\Theta_A} = 0{,}117 \qquad (11{,}7\,\%)$$

Ebből a csillapított rendszer saját körfrekvenciája:

$$\gamma = \alpha\sqrt{1-D^2} = \underline{\underline{35{,}31\left[\frac{rad}{s}\right]}} \qquad f = \frac{\gamma}{2\pi} = \underline{\underline{5{,}62\,[Hz]}}$$

2) Kritikus csillapításhoz $D=1$-nek kell teljesülnie!

$$2D_{kr}\alpha = \frac{9\ell^2 k_{1kr}}{\Theta_A} \rightarrow k_{1kr} = \frac{2\overset{1}{D_{kr}}\alpha\Theta_A}{9\ell^2} = \underline{\underline{17{,}10\left[\frac{Ns}{m}\right]}}$$

3) Rugóerő

↳ ismerni kell a mozgástörvényt!

Ált. mo

$$\begin{cases}\varphi(t) = e^{-D\alpha t}\left(C_1\cos(\gamma t) + C_2\sin(\gamma t)\right) \\ \dot\varphi(t) = -D\alpha e^{-D\alpha t}\left(C_1\cos(\gamma t) + C_2\sin(\gamma t)\right) + e^{-D\alpha t}\left(-C_1\gamma\sin(\gamma t) + C_2\gamma\cos(\gamma t)\right)\end{cases}$$

+ Kezdeti feltételek:

$$\varphi(0) = \varphi_0 = 0{,}01\,(rad)$$

$$\dot\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(0) = \boxed{C_1 = \varphi_0} \qquad C_1 = \underline{\underline{0{,}01\,[rad]}}$$

$$\dot\varphi(0) = -D\alpha C_1 + C_2\gamma = 0$$

$$\hookrightarrow C_2 = \frac{D\alpha C_1}{\gamma} = \frac{D\alpha\varphi_0}{\gamma} = \underline{\underline{0{,}00117\,[rad]}}$$

A maximális rugóerőhöz $\varphi(t)$ maximuma kell

$\varphi(t^*) = \max$, ha $\dot{\varphi}(t^*) = 0$!

$$-D\alpha\, \cancel{e^{-D\alpha t^*}}\left(C_1\cos(\gamma t^*) + C_2\sin(\gamma t^*)\right) + \gamma\, \cancel{e^{-D\alpha t^*}}\left(-C_1\sin(\gamma t^*) + C_2\cos(\gamma t^*)\right) = 0$$

$$\left[-D\alpha C_2 - \gamma C_1\right]\sin(\gamma t^*) + \left[-D\alpha C_1 + \gamma C_2\right]\cos(\gamma t^*) = 0$$

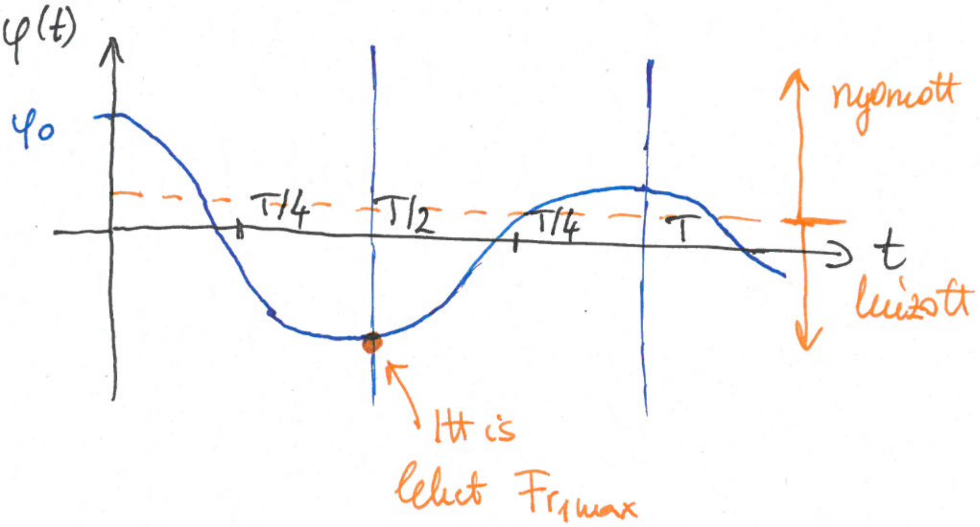
$$\mathrm{tg}(\gamma t^*) = \frac{-D\alpha C_1 + \gamma C_2}{D\alpha C_2 + \gamma C_1} = 0$$

mivel $C_2 = \frac{D\alpha}{\gamma} C_1$

$$\Downarrow$$

$$t^* = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{arctg}(0) = 0 + k\cdot\frac{T}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad 0, 1, 2 \dots$$

A mozgástörvény:



A rugóerőben a statikus deformáció is megjelenik

2 lehetséges hely van: $t = 0$ vagy $t = T/2$!

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\gamma} = \underline{\underline{0{,}089\ [s]}}$$

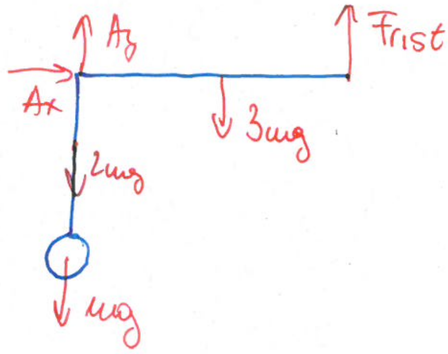
$$\varphi(t^*) = \varphi(0) = 0{,}01\ [\mathrm{rad}]$$

$$\varphi(t^* + T/2) = \varphi(T/2) = -0{,}007\ [\mathrm{rad}]$$

Kell még F_{r1stat} :

$\varphi = 0$ egyensúlyból / vagy az egyensúlyi egyenletből)

$\Sigma M_A = 0$ (vagy a DE-ből kiesett részből)



$$-3\ell F_{r1st} - \frac{9}{2} mg\ell = 0$$

$$\Downarrow \quad F_{r1st} = \frac{3}{2} mg = \underline{\underline{1,7658\,(N)}}$$

Tehát a maximális rugóerő

- $F_{r1}(t^*) = F_{r1st} - 3\ell s_1 \varphi(t^*) = F_{r1st} - s_1 \varphi_0 = \underline{\underline{-0,034\,[N]}}$
- $F_{r1}(t^* + T/2) = F_{r1st} - 3\ell s_1 \varphi(t^* + T/2) = \underline{\underline{3,009\,[N]}}$

Tehát $F_{rmax} = F_{r1}(T/2) = \underline{\underline{3,009\,(N)}}$

Az s_2 rugó $\varphi = 0$-ban feszítetlen!

$$\Downarrow$$

$$F_{r2max} = s_2 \cdot \varphi(t^*)\ell = s_2 \cdot \ell \cdot \varphi_0 = \underline{\underline{0,02\,[N]}}$$