Másodfajú Lagrange egyenlet

Emlékeztető

$$\boxed{\text{Mechanikai modell}} \xrightarrow[\text{Lagrange}]{\text{SZTA + Newton}} \boxed{\text{Matematikai modell, 2 rendű, köz. DE}}$$

Másodfajú Lagrange egyenlet

↳ Teljesítménytételből

↳ 1 DoF v. n DoF esetben is

↳ közvetlenül DE-t ad (vagy n DoF esetben DE rendszert)

↳ Nem kell relatív dinamika (csak kinematika)

↳ Nem kell figyelni az előjelekre!

↳ Nem kell kényszererőt számolni!

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^*}$$

Ahol:

T - kinetikus energia

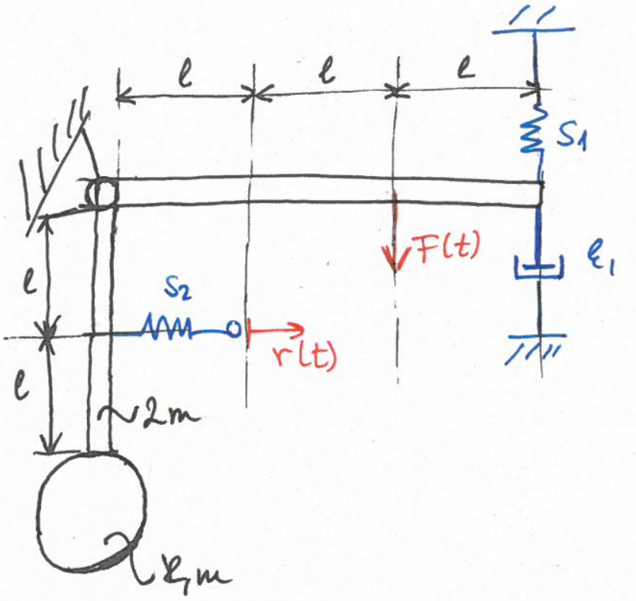
$\mathcal{D}$ - disszipatív potenciál

U - aktív erők potenciálfgv

Q_k^* - általános erők (amelynek nincs pot. fgv-e). (egyéb erők)

Fontos, hogy a feladat megoldása elején kell választani általános koordinátákat: q_k. Kellő számút, amely még pontosan leírja a rendszert!

Feladat (lásd 5. gyakorlat)



Adatok

$l = 0{,}2$ [m]

$m = 0{,}12$ [kg]

$k_1 = 2 \left[\frac{Ns}{m}\right]$

$s_1 = 300 \left[\frac{N}{m}\right]$

$s_2 = 10 \left[\frac{N}{m}\right]$

$R = 0{,}1$ [m]

$r(t) = r_0 \sin(\omega t)$

$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

$\omega = 20 \left[\frac{rad}{s}\right]$

$r_0 = 0{,}01$ [m]

$F_0 = 2$ [N]

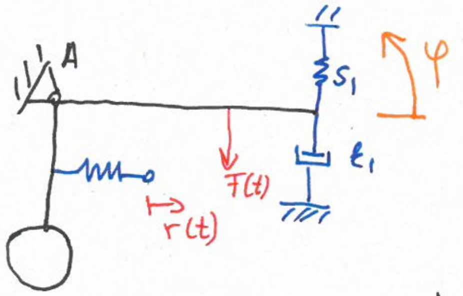
Csak s_1 előfeszített az ábrázolt egyensúlyi helyzetben!

Feladat:

1) Linearizált mozgásegyenlet a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével
2) Állandósult állapotbeli megoldás!

---

(1)



Hány DoF kell, hogy egyértelműen le tudjuk írni a rendszert?

$n = 1$ DoF

Az általános koordináta $\boxed{q = \varphi}$

↳ Az egyensúlyi helyzettől van mérve!

$\varphi \equiv 0$ egyensúlyi helyzet ⇒ lehet linearizálni $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$

A másodfajú Lagrange egyenlet (1 DoF-re!)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^*$$

- Kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2}\Theta_A \dot{\varphi}^2 \xrightarrow{\text{Ebből}} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{\cancel{2}}\Theta_A \cdot \cancel{2}\dot{\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta_A \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad \left[\varphi \text{ és } \dot{\varphi} \text{ azaz } \dot{\varphi} \text{ és } \varphi \text{ fgetlen}\right]!$$

- Disszipatív potenciál (Rayleigh-féle disszipációs fgvény)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} k_1 \cdot \underbrace{(3l\dot{\varphi})}^2$$

ez már linearizált alak!
de belátható, hogy itt is lehet linearizálni! (φ nem játszik szerepet a deriválásnál!)

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} k_1 (3l)^2 2\cdot\dot{\varphi} = 9k_1 l^2 \dot{\varphi}$$

- Potenciálfgv.

Fontos, hogy itt φ szerint kell deriválni
↳ NEM lehet előre linearizálni!

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} s_1 (\Delta l_{st} + 3l\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2} s_2 (r(t) - l\sin\varphi)^2 - 2mgl\cos\varphi -$$

$$- mg(2l+k)\cos\varphi - + 3mg\cdot\frac{3}{2}l\sin\varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = s_1(\Delta l_{st} + 3l\overset{\approx\varphi}{\sin\varphi})\,3l\overset{\approx 1}{\cos\varphi} - s_2(r(t) - l\overset{\approx\varphi}{\sin\varphi})\,l\overset{\approx 1}{\cos\varphi} + 2mgl\overset{\approx\varphi}{\sin\varphi} +$$

$$+ mg(2l+k)\overset{\approx\varphi}{\sin\varphi} + \frac{9}{2}mgl\overset{\approx 1}{\cos\varphi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = 3s_1 l\Delta l_{st} + 9l^2 s_1\varphi - s_2 r(t) l + s_2 l^2\varphi + mg(4l+k)\varphi + \frac{9}{2}mgl$$

A statikus deformáció tart egyensúlyt az 1es rúd nyomatékával a statikus egyensúlyi helyzetben!

$$\sum M_A = 0 : \quad s_1 \cdot 3l \cdot \Delta st = \frac{3}{2} l \cdot 3mg$$

$\downarrow$

<u>Következtetés</u>: Itt is meg lehet tenni, hogy elhagyjuk a rugó statikus deformációját és az őt létrehozó nehézségi erő potenciálfgvét.

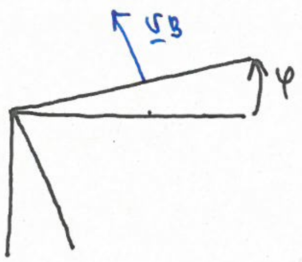
$$\tilde{U} = \frac{1}{2} s_1 (3l\varphi)^2 + \frac{1}{2} s_2 (r(t) - l\varphi)^2 - 2mgl\cos\varphi - mg(2l+k)\cos\varphi$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad \text{ugyanazt adja!}$$

<u>Egyéb erők teljesítménye</u>: (F(t) gerjesztés)

$$P = \underline{F} \cdot \underline{v}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -F(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2l\dot\varphi \sin\varphi \\ 2l\dot\varphi \cos\varphi \end{bmatrix} = -F(t) \cdot 2l\dot\varphi\cos\varphi = Q^* \cdot \dot\varphi$$

$$\Downarrow$$



$$\boxed{v_B = 2l\dot\varphi}$$

$$Q^* = -F(t)\,2l\cos\varphi \overset{\approx 1}{=} \underline{\underline{-F(t)2l}}$$

<u>Visszaírva</u>:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^*$$

$$\Theta_A \ddot\varphi + 9l^2 k_1 \dot\varphi + (9l^2 s_1 + s_2 l^2 + mg(4l+k))\varphi = s_2 l r(t) - F(t) \cdot 2l$$

$$\ddot\varphi + \frac{9l^2 k_1}{\Theta_A}\dot\varphi + \frac{(9s_1+s_2)l^2 + mg(4l+k)}{\Theta_A}\varphi = \frac{s_2 l r_0 - F_0 2l}{\Theta_A}\sin(\omega t)$$

2) A DE-ből a szdáisos mennyiségek

$\Theta_A = 0{,}0866\ [kgm^2]$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(9s_1+s_2)\ell^2 + mg(4\ell+k)}{\Theta_A}} = 35{,}55\ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$D = \frac{1}{2\alpha}\cdot\frac{9\ell^2 k_1}{\Theta_A} = 0{,}117$$

$$\nu = \alpha\sqrt{1-D^2} = 35{,}31\ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$f_0 = \frac{s_2\ell r_0 - F_0 2\ell}{\Theta_A}\cdot\frac{1}{\alpha^2} = -0{,}00713\ [rad]$$

↳ **Állandósult állapotbeli megoldás**

$$\varphi(t) = \varphi_H(t) + \varphi_p(t) \rightarrow \varphi_p(t) = \phi\sin(\omega t - \vartheta)$$

$$\phi = N\cdot f_0$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}} = 1{,}436 \rightarrow \phi = -0{,}0102\ [rad]$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\alpha} = 0{,}5625$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{2D\lambda}{1-\lambda^2} \rightarrow \vartheta = \mathrm{arctg}\frac{2D\lambda}{1-\lambda^2} = 0{,}19\ [rad]$$

$$\varphi_p(t) = \phi\sin(\omega t - \vartheta) = -0{,}0102\sin(20t - 0{,}19)$$