Rezgéstan 12. gyakorlat

Többszabadságfokú, gerjesztett lengőrendszer

Elméleti összefoglaló:

mozgásegyenlet: $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\,\dot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}}\,\underline{q} = \underline{Q}_s \sin(\omega t) + \underline{Q}_c \cos(\omega t)$

mivel van csillapítás:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_H(t) + \underline{q}_P(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \underline{q}_P(t) = \underline{L}\cos(\omega t) + \underline{N}\sin(\omega t)$$

A $\underline{q}_P(t)$ megoldást vissza lehet helyettesíteni a mx. DE-be:

↳ Hipermátrix:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} & \omega\underline{\underline{K}} \\ -\omega\underline{\underline{K}} & -\omega^2\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{L} \\ \underline{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_c \\ \underline{Q}_s \end{bmatrix}$$

⟹ lineáris egyenletrendszer

$\underline{L}, \underline{N}$ meghatározható

A mozgásegyenlet felírása.

↳ Másodfajú Lagrange egyenlet alapján

↳ linearizálás

↳ időfüggetlen helyzetek $\Big\}$ $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{S}}, \underline{\underline{K}}$

• Ha időfüggő helyzet van ↳ erő és nyomatékgerjesztés → P-teljesítmény-tétellel!

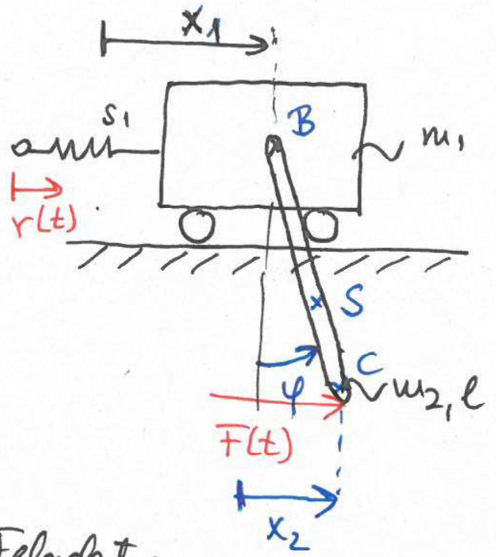
↳ útgerjesztés rugón keresztül

↳ kiegyensúlyozatlan forgórésszel

$\underline{\underline{S}}\,\underline{q}$ illetve $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}$ az általános erőt kell, hogy adja a merevségi ill. a tömegmátrixal figyelembe vehetné!

$\underline{\underline{S}}\,\underline{q} \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial q_j}$ illetve $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$ összehasonlításból $\underline{Q}_c, \underline{Q}_s$!

Feladat



Adatok:

$m_1 = 2$ [kg]

$m_2 = 1$ [kg]

$l = 0{,}5$ [m]

$s_1 = 100 \left[\frac{N}{m}\right]$

$r(t) = r_0 \cos(\omega t)$

$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varepsilon)$

$r_0 = 0{,}01$ [m]

$F_0 = 5$ [N]

$\varepsilon = \pi/3$ $(=60°)$

$\omega = 20 \left[\frac{rad}{s}\right]$

Feladat:

1) Mátrix DE!
2) Áll. állapotbeli rezgés!
3) Az inga max. kitérése!
4) Sajátkörfrekvenciák és lengésképek!

$n = 2$ DoF lengőrendszer

$$\underbrace{\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \varphi \end{bmatrix}}$$

gyakorlásképp HF megcsinálni így!

vagy

$$\boxed{\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

most ezt választjuk!

Lagrange egyenlet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \underline{Q}_c \cos(\omega t) + \underline{Q}_s \sin(\omega t)$$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}}\,\underline{q} = \underline{Q}_c \cos(\omega t) + \underline{Q}_s \sin(\omega t)$$

Fontos, hogy van időfüggő kényszer!
↳ rugón keresztül útgerjesztés

$\underline{\underline{S}}$ mennyiség nem számítható közvetlenül a potenciálfüggvényből!

- Kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 v_S^2 + \frac{1}{2} \Theta_S \omega_2^2}_{\text{nem álló pont körül forog!}} \qquad \Theta_S = \frac{1}{12} m_2 \ell_2^2$$

$$\boxed{v_B = \dot{x}_1}$$

$$\underline{v}_S = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BS} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ \frac{\ell}{2}\sin\varphi & -\frac{\ell}{2}\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 + \frac{\ell}{2}\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \frac{\ell}{2}\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_S^2 = \dot{x}_1^2 + \frac{\ell^2}{4}\cos^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \ell \dot{x}_1 \dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{\ell^2}{4}\sin^2\varphi\, \dot{\varphi}^2 = \dot{x}_1^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \ell\dot{\varphi}\dot{x}_1\cos\varphi$$

Nekünk x_2 az általános koordináta: $x_2 \approx \ell\varphi$, $\dot{x}_2 \approx \ell\dot{\varphi}$ – itt már linearizálhatunk! de itt még lehet tenni!

Tehát:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_1^2 + \frac{\dot{x}_2^2}{4} + \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m_2 \ell_2^2 \frac{\dot{x}_2^2}{\ell^2}$$

A tömegmátrix:

$$\underline{\underline{M}} = [m_{ij}] = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\Big|_0 \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2 \cos\left(\frac{x_2}{\ell}\right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2}\Big|_0 = \underline{\underline{m_1 + m_2}} =: m_{11}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2}\Big|_0 = \frac{1}{2} m_2 \cos\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\Big|_0 = \frac{m_2}{2} =: m_{12} = m_{21}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1 \cos\left(\frac{x_2}{\ell}\right) + \frac{1}{12} m_2 \dot{x}_2 + \frac{m_2 \dot{x}_2}{4}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2}\Big|_0 = \frac{1}{12} m_2 + \frac{1}{4} m_2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} m_2}} =: m_{22}$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{m_2}{2} & \frac{1}{3} m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0,5 \\ 0,5 & 0,33 \end{bmatrix} \; [kg] / [SI]$$

<u>Potenciálfüggvény:</u>

$$U = \frac{1}{2} s_1 (x_1 - r(t))^2 - m_2 g \frac{l}{2} \cos\varphi = \frac{1}{2} s_1 (x_1 - r_0 \cos(\omega t))^2 - m_2 g \frac{l}{2} \cos\left(\frac{x_2}{l}\right)$$

<u>A másodfajú Lagrange egyenletben</u>

- $\frac{\partial U}{\partial q_k}$ -t kell számolni! $\quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = s_1 (x_1 - r_0 \cos(\omega t))$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = m_2 g \frac{l}{2} \sin\left(\frac{x_2}{l}\right) \cdot \frac{1}{l} = \frac{m_2 g \sin\left(\frac{x_2}{l}\right)}{2}$$

linearizálva: $\approx \underline{\underline{\frac{m_2 g}{2l} x_2}}$

<u>Tehát:</u>

$$\frac{\partial U}{\partial \underline{q}} = \begin{bmatrix} s_1 x_1 - s_1 r_0 \cos(\omega t) \\ \frac{m_2 g}{2l} x_2 \end{bmatrix}$$

- <u>Merevségi mátrix</u> $\quad \underline{\underline{S}} = [s_{ij}] = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{\underline{0}}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} &= s_1 =: s_{11} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 =: s_{12} = s_{21} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} &= \frac{m_2 g}{2l} =: s_{22} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 g}{2l} \end{bmatrix}$$

<u>Nézzük meg:</u>

ez a különbség!
meg a jobboldalra!

$$\underline{\underline{S}}\,\underline{q} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 g}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 x_1 \\ \frac{m_2 g}{2l} x_2 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} s_1 x_1 - s_1 r_0 \cos(\omega t) \\ \frac{m_2 g}{2l} x_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial U}{\partial \underline{q}}$$

Tehát: $\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 g}{2\ell} \end{bmatrix}$; $\underline{Q}_c^{ut} = \begin{bmatrix} s_1 r_0 \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$

• **Erőgerjesztés:**

$$P = \underline{F}(t) \cdot \underline{v}_c = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ v_{c_y} \end{bmatrix} = F(t)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = Q_1^F \dot{x}_1 + Q_2^F \dot{x}_2 = \underline{Q}^F \cdot \dot{\underline{q}}$$

$$\underline{Q}^F = \begin{bmatrix} F(t) \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Tehát a jobboldal:

$$\underline{Q}(t) = \underline{Q}_c^{ut} + \underline{Q}^F = \begin{bmatrix} s_1 r_0 \cos(\omega t) + F_0 \sin(\omega t + \varepsilon) \\ F_0 \sin(\omega t + \varepsilon) \end{bmatrix} = \underline{F}_s \sin(\omega t) + \underline{F}_c \cos(\omega t)$$

$$\sin(\omega t + \varepsilon) = \sin(\omega t)\cos(\varepsilon) + \sin(\varepsilon)\cos(\omega t)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{bmatrix} F_0 \cos(\varepsilon) \\ F_0 \cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \sin(\omega t) + \begin{bmatrix} s_1 r_0 + F_0 \sin(\varepsilon) \\ F_0 \sin(\varepsilon) \end{bmatrix} \cos(\omega t)$$

↳ **Mozgásegyenlet:** $\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}} \underline{q} = \underline{F}_s \sin(\omega t) + \underline{F}_c \cos(\omega t)$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & \frac{m_2}{2} \\ \frac{m_2}{2} & \frac{m_2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{m_2 g}{2\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(\varepsilon) \\ F_0 \cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \sin(\omega t) + \begin{bmatrix} s_1 r_0 + F_0 \sin(\varepsilon) \\ F_0 \sin(\varepsilon) \end{bmatrix} \cos(\omega t)$$

Állandósult állapotbeli megoldás: $\underline{q}_p = \underline{L} \cos(\omega t) + \underline{N} \sin(\omega t)$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} & \omega \underline{\underline{K}} \\ -\omega \underline{\underline{K}} & -\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{L} \\ \underline{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_c \\ \underline{F}_s \end{bmatrix} \qquad \boxed{\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{0}}} \quad \text{nincs csillapítás}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{bmatrix} -(m_1+m_2)\omega^2+s_1 & -\frac{m_2\omega^2}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{m_2}{2}\omega^2 & -\frac{m_2}{3}\omega^2+\frac{m_2 g}{2\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m_1+m_2)\omega^2+s & -\frac{m_2}{2}\omega^2 \\ 0 & 0 & -\frac{m_2}{2}\omega^2 & -\frac{m_2}{3}\omega^2+\frac{m_2 g}{2\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s r_0 + F_0 \sin(\varepsilon) \\ F_0 \sin(\varepsilon) \\ F_0 \cos(\varepsilon) \\ F_0 \cos(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

Ha $\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{0}}$ Szétesik

$$\left.\begin{aligned} \left[-(m_1+m_2)\omega^2+s_1\right]L_1 - \frac{m_2\omega^2}{2}L_2 &= s r_0 + F_0\sin(\varepsilon) \\ -\frac{m_2}{2}\omega^2 L_1 + \left[-\frac{m_2}{3}\omega^2+\frac{m_2 g}{2\ell}\right]L_2 &= F_0\sin(\varepsilon) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \left(-(m_1+m_2)\omega^2+s\right)N_1 - \frac{m_2}{2}\omega^2 N_2 &= F_0\cos(\varepsilon) \\ -\frac{m_2\omega^2}{2}N_1 + \left(-\frac{m_2}{3}\omega^2+\frac{m_2 g}{2\ell}\right)N_2 &= F_0\cos(\varepsilon) \end{aligned}\right\}$$

Numerikusan:

$$\left.\begin{aligned} -1100L_1 - 200L_2 &= 5{,}33 \\ -200L_1 - 123{,}52L_2 &= 4{,}33 \end{aligned}\right\} \rightarrow L_1 = 0{,}0217\ (m)\ ;\ L_2 = 0{,}03856\ (m)$$

$$\left.\begin{aligned} -1100N_1 - 200N_2 &= 2{,}5 \\ -200N_1 - 123{,}52N_2 &= 2{,}5 \end{aligned}\right\} \rightarrow N_1 = 0{,}00199\ (m)\ ;\ N_2 = -0{,}02347\ (m)$$

$$q_p(t) = \begin{bmatrix} 0{,}00217 \\ -0{,}03856 \end{bmatrix}\cos(20t) + \begin{bmatrix} 0{,}00199 \\ -0{,}02347 \end{bmatrix}\sin(20t)$$

Maximális kitérés:

$$\varphi_{max} = \frac{x_{2max}}{\ell}$$

$$x_2(t) = L_2 \cos(\omega t) + N_2 \sin(\omega t) = A \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$A = \sqrt{L_2^2 + N_2^2} = 0{,}0451 \ (m)$$

$$\varphi_{max} = \frac{A}{\ell} = \underline{\underline{0{,}090 \ (rad)}}$$

Sajátkörfrekvenciák, lengésképek:

- $\det(-\alpha^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}}) = 0$

  $\hookrightarrow \alpha_1 = 4{,}56 \left[\frac{rad}{s}\right]$

  $\hookrightarrow \alpha_2 = 7{,}93 \left[\frac{rad}{s}\right]$

- Lengéskép:

  $(-\alpha_i^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}}) \underline{A}_i = \underline{0}$

  $\hookrightarrow \underline{A}_1 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 3{,}62 \end{bmatrix}}} \ (m)$

  $\hookrightarrow \underline{A}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -4{,}82 \end{bmatrix}}} \ (m)$