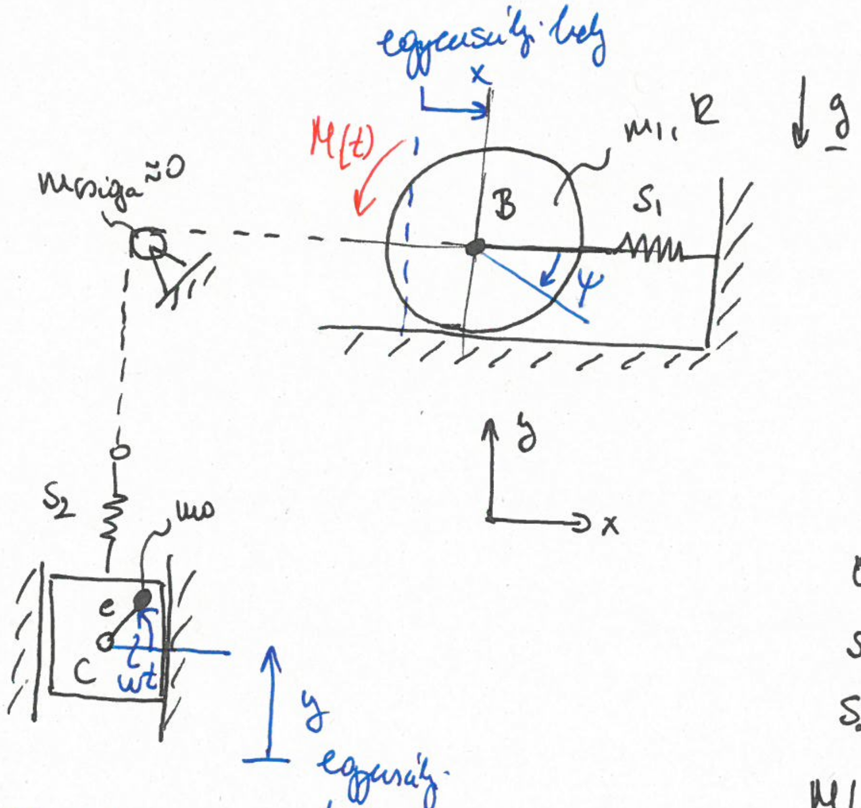
Rezgéstan – 13. gyakorlat

Többszabadságfokú, gerjesztett rezgőrendszerek

Emlékeztető: n DoF, gerjesztett eset:

- ha van útgerjesztés: $\dfrac{\partial U}{\partial q} \rightarrow \underline{\underline{S}}$ és $\underline{Q}^{út}$!
- ha van kiegyensúlyozatlan tömeg: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial T}{\partial q} \rightarrow \underline{\underline{M}}$ és $\underline{Q}^{m}$
- ha erő/nyomatékgerjesztés van: $\left.\begin{aligned} P &= \underline{F}\cdot\underline{v} = \underline{Q}^{F}\cdot\dot{\underline{q}} \\ P &= \underline{M}\cdot\underline{\omega} = \underline{Q}^{M}\cdot\dot{\underline{q}} \end{aligned}\right\}$ teljesítménytétellel!

Feladat



Adatok:

$m_0 = 0,1$ [kg]

$m_1 = 1$ [kg]

$m_2 = 3$ [kg]

$R = 0,2$ (m)

$e = 0,01$ (m)

$s_1 = 100$ (N/m)

$s_2 = 200$ (N/m)

$M(t) = M_0 \cos(\omega t + \varepsilon)$

$M_0 = 3$ (Nm)

$\omega = 30$ [rad/s]

$\varepsilon = \frac{\pi}{6}$

Feladatok:

1) Mátrix diff-e felírása
2) Állandósult állapotbeli megoldás
3) $F_{r_2\,max} = ?$
4) λ_i, $\underline{A}_i = ?$

- $n = 2$ DoF lengőrendszer → két koordináta kell

$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix}$ az egyensúlyi helyzettől mérve!

(Gyakorlásképp: $\underline{q} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$)

Lagrange-egyenlet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^* \qquad k = 1, 2$$

⇓ linearizálás

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{S}}\,\underline{q} = \underline{Q}(t)$$

van kiegyensúlyozatlan tömeggel való gerjesztés

A kinetikus energiából nem szabad közvetlenül számolni a ~~[illegible]~~ tömegmátrixot → figyelni kell nehogy kiessen a gerjesztés!

A kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \frac{1}{2}\Theta_B \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} m_0 v_0^2$$

$v_B = R\dot{\varphi}$ (gördül) van póluspont

$\omega_1 = \dot{\varphi}$

$v_C = \dot{y}$

$\underline{v}_0 = \dot{\underline{r}}_0$ ahol $\underline{r}_0 = \begin{bmatrix} e\cos(\omega t) + r_{cox} \\ e\sin(\omega t) + y + r_{coy} \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{v}_0 = \dot{\underline{r}}_0 = \begin{bmatrix} -\omega e\sin(\omega t) \\ \dot{y} + \omega e\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$

(vagy relatív dinamika: $\underline{v}_0 = \underline{v}_{0száll} + \underline{v}_{0rel} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e\omega\sin(\omega t) \\ e\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$)

$$v_0^2 = \underbrace{e^2\omega^2\sin^2(\omega t)} + \dot{y}^2 + \underbrace{e^2\omega^2\cos^2(\omega t)} + 2\dot{y}e\omega\cos(\omega t)$$

$$v_0^2 = \dot{y}^2 + e^2\omega^2 + 2\dot{y}e\omega\cos(\omega t)$$

$$T=\frac{1}{2}m_1 R^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1R^2\right)\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_0\left(\dot{y}^2+e^2\omega^2+2\dot{y}e\omega\cos(\omega t)\right)$$

↓ Lagrange egyenlet alapján: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=(m_2+m_0)\dot{y}+m_0e\omega\cos(\omega t) \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=(m_2+m_0)\ddot{y}-m_0e\omega^2\sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m_1R^2\dot{\varphi}+\frac{1}{2}m_1R^2\dot{\varphi} \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{3}{2}m_1R^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$$

Tehát: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=\begin{bmatrix}(m_2+m_0)\ddot{y}-m_0e\omega^2\sin(\omega t)\\ \frac{3}{2}m_1R^2\ddot{\varphi}\end{bmatrix}$

Ebből látszik: $\underbrace{\begin{bmatrix}m_2+m_0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}m_1R^2\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}}\begin{bmatrix}\ddot{y}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix}\mp\underbrace{\begin{bmatrix}-m_0e\omega^2\sin(\omega t)\\ 0\end{bmatrix}}_{\underline{Q}^{m_0}}$

De ellenőrizzük:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}^2}=\underline{\underline{m_2+m_0}}=m_{11}\ ;\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}\partial\dot{\varphi}}=\underline{\underline{0}}=m_{12}=m_{21}\ ;\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}^2}=\underline{\underline{\frac{3}{2}m_1R^2}}$$

A jobboldalra kerülő gerjesztőerő: $Q^{u}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}m_0e\omega^2\sin(\omega t)\\ 0\end{bmatrix}}}$

Merevségi mátrix:

$$U=\frac{1}{2}s_1x^2+\frac{1}{2}s_2(x-y)^2+\underbrace{\underbrace{m_2gy}+m_0ge\sin(\omega t)+\underbrace{U_{\text{rugó stat}}}}$$

a deriváláskor kiesik

a stabilis egyensúly miatt kiejtik egymást!

$$x=R\varphi$$

$$\tilde{U}=\frac{1}{2}s_1R^2\varphi^2+\frac{1}{2}s_2(R\varphi-y)^2$$

$$\underline{\underline{S}} = \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_i \partial q_j} \bigg|_0 \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = -s_2 (\ell \varphi - y) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} = s_2 = s_{11}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y \partial \varphi} = -s_2 \ell = s_{12} = s_{21}$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = s_1 \ell^2 \varphi + s_2 \ell (\ell \varphi - y) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varphi^2} = (s_1 + s_2) \ell^2 = s_{22}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} s_2 & -s_2 \ell \\ -s_2 \ell & (s_1 + s_2) \ell^2 \end{bmatrix} (S1)$$

- Nyomatékgerjesztés:

$$P^M = \underline{M} \cdot \underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} = -M(t) \cdot \dot{\varphi} = Q_1^M \dot{y} + Q_2^M \dot{\varphi}$$

$$\underline{Q}^M = \begin{bmatrix} Q_1^M \\ Q_2^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M(t) \end{bmatrix}$$

- Az általános erővektor:

$$\underline{Q}(t) = \underline{Q}^{m_0} + \underline{Q}^M = \begin{bmatrix} m_0 e \omega^2 \sin(\omega t) \\ -M_0 \cos(\omega t + \varepsilon) \end{bmatrix} = \underline{F}_s \sin(\omega t) + \underline{F}_c \cos(\omega t)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{bmatrix} m_0 e \omega^2 \sin(\omega t) \\ M_0 \cos(\omega t) \cos(\varepsilon) + M_0 \sin(\omega t) \sin(\varepsilon) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_0 e \omega^2 \\ M_0 \sin(\varepsilon) \end{bmatrix}}_{\underline{F}_s} \sin(\omega t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -M_0 \cos(\varepsilon) \end{bmatrix}}_{\underline{F}_c} \cos(\omega t)$$

Tehát a mozgásegyenlet: $\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}} \underline{q} = \underline{Q}(t)$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m_1 \ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_2 & -s_2 \ell \\ -s_2 \ell & (s_1 + s_2) \ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 e \omega^2 \\ M_0 \sin(\varepsilon) \end{bmatrix} \sin(\omega t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 \cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \cos(\omega t)$$

Állandósult állapotbeli megoldás

$$\underline{q}_p(t) = \underline{L}\cos(\omega t) + \underline{N}\sin(\omega t)$$

$\Downarrow$ visszahelyettesítés után

$$\begin{bmatrix} -\omega^2\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\omega^2\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{L} \\ \underline{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_c \\ \underline{F}_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2(m_2+m_0)+s_2 & -s_2 k & 0 & 0 \\ -s_2 k & -\omega^2\frac{3}{2}m_1 k^2 + (s_1+s_2)k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2(m_2+m_0)+s_2 & -s_2 k \\ 0 & 0 & -s_2 k & -\omega^2\frac{3}{2}m_1 k^2 + (s_1+s_2)k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_0\cos\varepsilon \\ m_0 e\omega^2 \\ M_0\sin\varepsilon \end{bmatrix}$$

Szétesik 2db 2x2-es LER-re:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2(m_2+m_0)+s_2 & -s_2 k \\ -s_2 k & -\omega^2\frac{3}{2}m_1 k^2 + (s_1+s_2)k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_0\cos(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2(m_2+m_0)+s_2 & -s_2 k \\ -s_2 k & -\omega^2\frac{3}{2}m_1 k^2 + (s_1+s_2)k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 e\omega^2 \\ M_0\sin\varepsilon \end{bmatrix}$$

Visszaírva:

$$\left.\begin{aligned} -2590L_1 - 40L_2 &= 0 \\ -40L_1 - 42L_2 &= -2{,}598 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ebből:} \quad \begin{aligned} L_1 &= -0{,}000970\ (m) \\ L_2 &= 0{,}062782\ (rad) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -2590N_1 - 40N_2 &= 0{,}9 \\ -40N_1 - 42N_2 &= 1{,}5 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ebből:} \quad \begin{aligned} N_1 &= 0{,}000207\ (m) \\ N_2 &= -0{,}035912\ (rad) \end{aligned}$$

Azaz:

$$\underline{q}_p(t) = \begin{bmatrix} -0{,}000870 \\ 0{,}062782 \end{bmatrix}\cos(30t) + \begin{bmatrix} 0{,}000207 \\ -0{,}035812 \end{bmatrix}\sin(30t)$$

Maximális rugóerő s_2-ben:

$$F_{r_2}(t) = F_{r_2 st} + F_{r_2 din}(t)$$

az egyensúlyi egyenletből

$$F_{r_2 st} = (m_2 + m_0)g = 30{,}411\ (N)$$

$$F_{r_2 din}(t) = s_2(x(t) - y(t)) = s_2(R\varphi(t) - y(t))$$

$$= s_2(RL_2\cos(\omega t) + RN_2\sin(\omega t) - L_1\cos(\omega t) - N_2\sin(\omega t))$$

$$= s_2((RL_2 - L_1)\cos(\omega t) + (RN_2 - N_1)\sin(\omega t)) = \underbrace{s_2 A\sin(\omega t + \delta)}_{s_2 A(\sin(\omega t)\cos\delta + \cos(\omega t)\sin\delta)}$$

Trigonometrikus egyezés:

$$\cos(\omega t): \quad \cancel{s_2}(RL_2 - L_1) = \cancel{s_2} A\sin\delta$$

$$\sin(\omega t): \quad \cancel{s_2}(RN_2 - N_1) = \cancel{s_2} A\cos\delta$$

$$A = \sqrt{(RN_2 - N_1)^2 + (RL_2 - L_1)^2} = \underline{0{,}0154\ (m)}$$

$$F_{r_2 max} = F_{r_2 st} + F_{r_2 din\,max} = F_{r_2 st} + s_2 \cdot A = (m_2 + m_0)g + s_2 A$$

$$F_{r_2 max} = \underline{\underline{33{,}494\ (N)}}$$

Sajátkörfrekvenciák, lengésképek:

$$\cdot \det(-\alpha_k^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}}) = 0 \longrightarrow \alpha_1 = 4{,}17\ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\alpha_2 = 15{,}72\ \left(\frac{rad}{s}\right)$$

α_k-ból:

$$(-\alpha_k^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}})\underline{A}_k = \underline{0} \longrightarrow \underline{A}_1 = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 3{,}65 \end{bmatrix}(SI)}; \quad \underline{A}_2 = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -14{,}15 \end{bmatrix}(SI)}$$