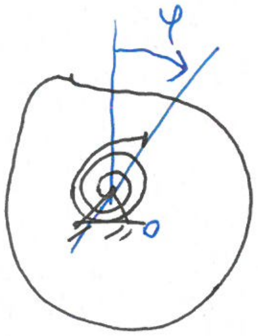
Rezgéstan 3.hét

A nehézségi erő hatása, ingák

Elméleti összefoglaló

- torziós rugó:

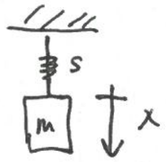


$M = s_t \cdot \varphi$

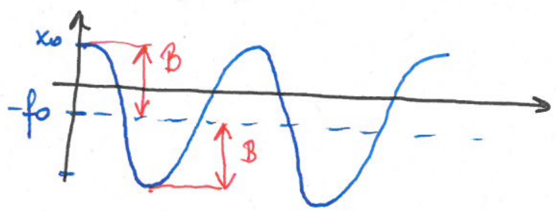
$\Theta_0 \ddot{\varphi} + s_t \varphi = 0$

$\ddot{\varphi} + \alpha^2 \varphi = 0 \qquad \alpha = \sqrt{\dfrac{s_t}{\Theta_0}}$

- nehézségi erőtér



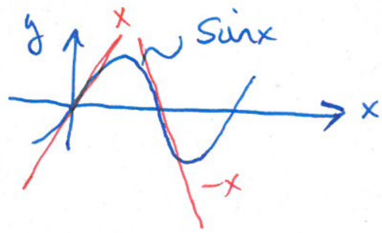
x - a rugó feszítetlen hosszától mérve



α nem változik

- nemlineáris DE ~ inga

$\ddot{\varphi} + \dfrac{mgl}{\Theta_0} \sin\varphi = 0$ → az egyensúlyi helyzet (stacionárius) pont körül linearizálunk



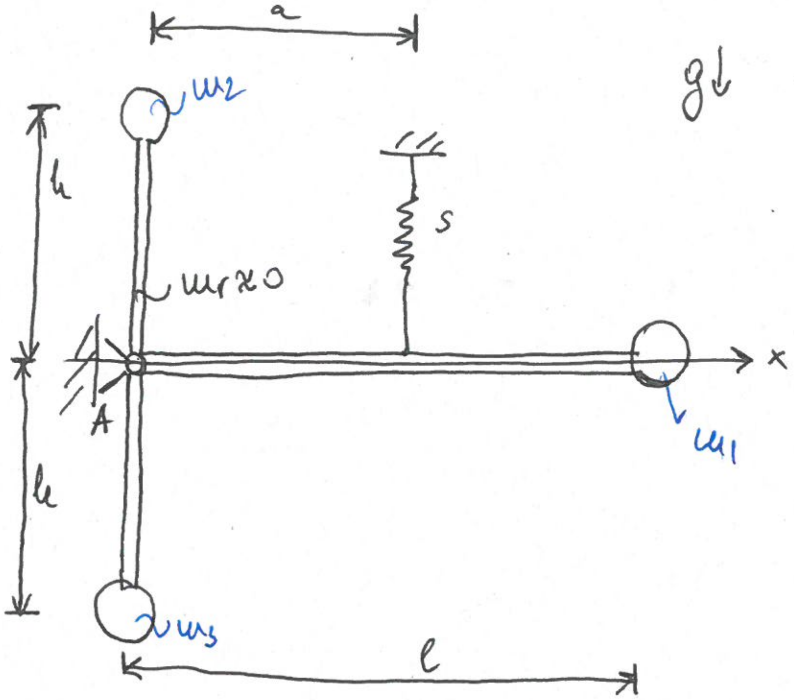
Ha $x=0$ / $\varphi=0$ a stac. pont

$\boxed{\begin{aligned}\sin x &\approx x \\ \cos x &\approx 1\end{aligned}}$

$|x| < 5°$
vagy
$|x| < 0{,}1$

csak szűk tartományon belül érvényes

Feladat



Adatok:

$m_1 = 2$ [kg]

$m_2 = 4$ [kg]

$m_3 = 3$ [kg]

$h = 0{,}5$ [m]

$l = 1$ [m]

$a = 0{,}6$ [m]

$s = 1000 \left[\frac{N}{m}\right]$

$v_0 = 1 \left[\frac{m}{s}\right]$

$y_0 = -0{,}01$ [m]

$\}$ az m_1 tömeg a $t=0$-ban

Kérdések

1) Linearizált mozgásegyenlet
   (egyensúlyban a rúd vízszintes, és a rezgések kicsik)
2) $\alpha = ?$, $T = ?$, $f = ?$
3) Mozgástörvény a megadott kezdeti feltételeknek megfelelően
4) A rugóerő maximuma

Megoldás

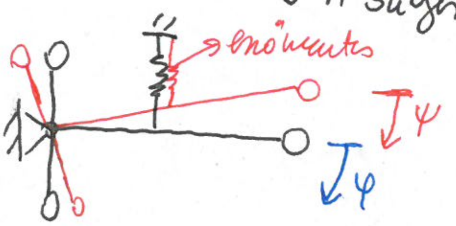
↳ Általános koordináta választás: 1 DoF ⇒ 1 koordináta

2 opció

a) A rugó erőmentes helyzetétől (φ) ⇒ (Több rugó esetén ez már nem egyértelmű)

b) A statikus egyensúlyi helyzetétől (φ)

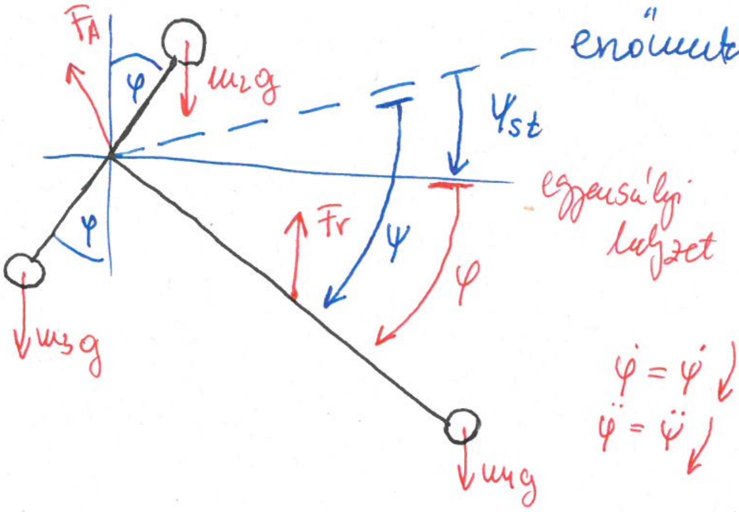
↳ A súlyerő csak statikus eltolódást okoz



A rendszer az egyensúlyi helyzet körül rezeg ⇒ itt kell linearizálni

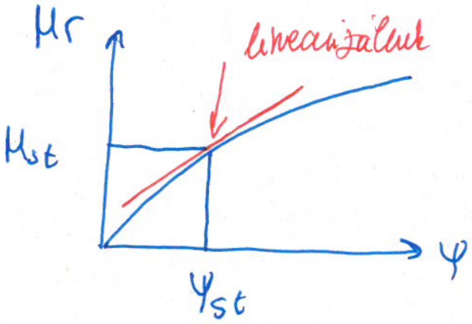
↳ φ-t választjuk!

SZÉTA!



A dinamika alaptétele $\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{M}_A$

$\underline{\varepsilon}$: $\Theta_A \cdot \ddot\varphi = m_2 g h \cdot \sin\varphi - m_3 g h \sin\varphi + m_1 g l \cos\varphi - M_r$



a rugó által leifejtett nyomaték függ a rugó nyújtatlan hosszától

$F_r(\varphi) \approx s \cdot a \cdot \varphi + F_{st}$ $\Longrightarrow$ $M_r(\varphi) = M_{st} + s \cdot a^2 \varphi$ $\varphi \approx 0$ közelében

statikus

Az egyensúlyi helyzet $\underline{\varphi = 0}$ $\Rightarrow$ linearizálás $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$

A linearizált mozgásegyenlet

$$\Theta_A \ddot\varphi = (m_2 g h - m_3 g h - s a^2)\varphi + m_1 g l - M_{st}$$

Átrendezve:

$$\Theta_A \ddot\varphi + (s a^2 + m_3 g h - m_2 g h)\varphi = m_1 g l - M_{st}$$

statikus „gerjesztés"

Tudjuk, hogy statikus egyensúlyban

$\varphi \equiv 0 \Rightarrow \dot\varphi = 0,\ \ddot\varphi = 0$ $\Big\}$ $0 = m_1 g l - M_{st}$ $\Rightarrow$ $\underline{M_{st} = m_1 g l}$

Az egyensúly feltétele!

Ha az egyensúlyi helyzet körül linearizálunk, akkor a konstans tagok kiesnek!

$\downarrow$ $\Theta_A \ddot{\varphi} + (sa^2 + m_3 gh - m_2 gh)\varphi = 0$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{sa^2 + m_3 gh - m_2 gh}{\Theta_A}}_{\alpha^2} \varphi = 0$$

$$\Theta_A = m_1 \ell^2 + m_2 h^2 + m_3 h^2 = 3{,}75 \,[kgm^2]$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \alpha^2 \varphi = 0} \qquad \alpha^2 = \frac{sa^2 + m_3 gh - m_2 gh}{\Theta_A} = 958{,}692$$

$$\alpha = 30{,}963 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 0{,}203 \,(s)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\alpha}{2\pi} = 4{,}93 \,(Hz)$$

Kezdeti feltételek

$y(0) = -0{,}01\,m \implies \varphi(0) \approx -\frac{y(0)}{\ell} = 0{,}01\,[rad]$

$v_0 = 1\left[\frac{m}{s}\right]\downarrow \implies \dot{\varphi}(0) \approx \frac{v_0}{\ell} = 1\left[\frac{rad}{s}\right]$

itt is linearizálunk!

A DE megoldása:

$$\varphi(t) = C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -C_1\alpha \sin(\alpha t) + C_2\alpha \cos(\alpha t)$$

$$\varphi(0) = \underline{\underline{C_1 = 0{,}01}} \,[rad]$$

$$\dot{\varphi}(0) = C_2\alpha = 1\left(\frac{rad}{s}\right) \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\ell\alpha} = 0{,}033\,[rad]$$

Maximális szögkitérés

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0{,}0338 \,[rad]$$

Kérdéses kérdés!

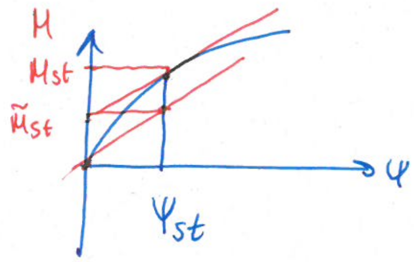
A mozgástörvény: $\varphi(t) = 0{,}01\cos(30{,}963t) + 0{,}033\sin(30{,}963t)$

Maximális rugóerő:

$$F_{r\,max} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{statikus}}}{F_{st}} + F_d = s \cdot a\,(\psi_{st} + \varphi_{max}) = s \cdot a\,(\psi_{st} + A)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{st} &= m_1 g l \\ M_{st} &\approx s \cdot a^2 \psi_{st} \end{aligned}\right\} \quad \psi_{st} = \frac{m_1 g l}{s \cdot a^2}$$

$\downarrow$ Most $\psi = 0$ körül is linearizáltuk



ψ kicsi $\underline{\underline{M_{st} \approx \tilde{M}_{st}}}$

$\psi_{st} = 0{,}00545\ [\text{rad}]$

$F_{r\,max} = s a(\psi_{st} + A) = \underline{\underline{235{,}557\ (\text{N})}}$